

Calculo Diferencial e Integral

Cristian Herrera

Instituto Superior Tecnológico Tena

Calculo Diferencial e Integral

Ing. Libinton Lara

2023 - IIP

Índice

Actividades en Clase	1
Matrices y Determinantes	1
Que es una matriz?	1
Dimensiones de una matriz	1
Tipos de Matrices	2
Suma de Matrices	4
Resta de Matrices	4
Producto De Una Matriz Por Un Escalar/Real	5
Multiplicación de Matrices	5
Determinantes	5
Matriz Transpuesta	6
Igualdad de Matrices	6
Producto de un Escalar por un Determinante	7
Matriz Adjunta	8
Menor de una Matriz	8
Calculo del determinante por Cofactores	9
Matriz inversa	11
Funciones Trigonómicas	12
Geométricas	12
Trigonómicas	14
Ley de Senos y Cosenos	16
Funciones	18
Signos de las funciones trigonométricas	19
Identidades Trigonómicas	20
Introduccion a los limites	21
Ecuación del limite de una funcion	21
Ecuación de un limite	21
Limite al infinito	22

Limites Continuidad	23
Derivadas	24
Diferenciable	24
Reglas de derivacion	25
Derivadas de funciones trigonometricas	26
Regla de la potencia para funciones	26
Regla de la cadena	27

Actividades en Clase

Matrices y Determinantes

Que es una matriz?

Conjunto bidimensional de numeros o simbolos que sirven para describir y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sistema de Ecuaciones	En Forma de Matriz
$f(x) = \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$
$2x = 4$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$
$f(x) = \begin{cases} 3x - 5y + 8z = 10 \\ 2y - 7z = -15 \end{cases}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & -15 \end{pmatrix}$

Cuadro 1

Matrices y Determinantes

Dimensiones de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}_{M \times N}$$

M =Filas, N =Columnas

Un elemento de una matriz se representa: a_{ij} , donde i representa las filas, y j las columnas

Tipos de Matrices

Matriz Fila (Vector Fila). Matriz formada por una sola fila.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}_{1 \times n}$$

Matriz Columna (Vector Columna). Matriz formada por una sola columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

Matriz Nula. Todos sus elementos son nulos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$$

Matriz Cuadrada. Tiene el mismo numero de filas y de columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Elementos básicos de una Matriz Cuadrada.

Diagonal Mayor.

Formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Diagonal Menor.

Formada por los elementos a_{ij} donde $i + j = n + 1$

Traza.

Suma de los elementos de la diagonal principal.

Tipos básicos de matrices cuadradas.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 8 & 12 & -9 \\ 15 & -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{traza: } -2 + 12 - 4 = 6$$

Triangular Superior.

Todos los elementos son ceros debajo de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 0 & 12 & -9 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Triangular Inferior.

Encima de la diagonal principal todos son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 0 \\ 15 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal.

Los elementos que no están en la diagonal principal son ceros, esta también es una matriz triangular superior y triangular inferior.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad o unidad.

Es una matriz diagonal, en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Escalar.

Es una matriz diagonal, en la que todos los elementos de la diagonal principal

son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

Suma de Matrices

Se puede dar entre matrices del mismo orden, para realizar la suma se debe sumar cada elemento de una posición con otro elemento de una matriz de la misma posición.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}_{2 \times 4} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}_{2 \times 4}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11})_{11} & (a_{12} + b_{12})_{12} & (a_{13} + b_{13})_{13} & (a_{14} + b_{14})_{14} \\ (a_{21} + b_{21})_{21} & (a_{22} + b_{22})_{22} & (a_{23} + b_{23})_{23} & (a_{24} + b_{24})_{24} \end{pmatrix}_{2 \times 4}$$

Resta de Matrices

Se puede dar entre matrices del mismo orden, para realizar la resta se debe restar cada elemento de una posición con otro elemento de una matriz de la misma posición.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}_{2 \times 4} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}_{2 \times 4}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} (a_{11} - b_{11})_{11} & (a_{12} - b_{12})_{12} & (a_{13} - b_{13})_{13} & (a_{14} - b_{14})_{14} \\ (a_{21} - b_{21})_{21} & (a_{22} - b_{22})_{22} & (a_{23} - b_{23})_{23} & (a_{24} - b_{24})_{24} \end{pmatrix}_{2 \times 4}$$

Producto De Una Matriz Por Un Escalar/Real

La multiplicación de una matriz por un escalar se realiza multiplicando el escalar por cada elemento de la matriz.

$$\frac{3}{2} \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ \frac{3}{2} & -12 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Multiplicación de Matrices

Es posible si el numero de **columnas** de la primera matriz es el mismo al numero de **filas** de la segunda matriz. Para multiplicar dos matrices cuadradas, calcula el producto de filas de la primera matriz con columnas de la segunda matriz y suma los resultados.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

¿Es posible multiplicar la matriz A por la matriz B?

$$2 \times 2 \quad 2 \times 2$$

Si es posible ya que el numero de columnas de la primera fila es el mismo que el numero de filas de la segunda, $2 = 2$, ademas el resultado de $A \times B$ sera igual a una matriz de 2×2 .

$$\begin{array}{ccccc} A & . & B & = & AB \\ m \times n & & n \times p & & m \times p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{Equal} & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Dimensions of AB} & & & & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 6 + 3 \cdot 8) & (2 \cdot 7 + 3 \cdot 9) \\ (4 \cdot 6 + 5 \cdot 8) & (4 \cdot 7 + 5 \cdot 9) \end{bmatrix} = AB = \begin{bmatrix} 36 & 41 \\ 68 & 77 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Determinantes

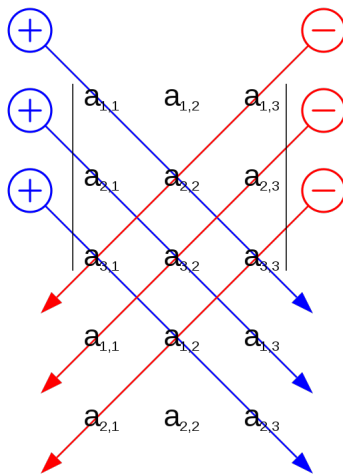
El determinante de una matriz solo existe en matrices cuadradas.

Determinante 2x2. Se calcula restando el producto de los números que conforman la diagonal secundaria al producto de los números que conforman la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} \quad |A| = (be) - (cd)$$

Determinante 3x3 - Regla de Sarrus. Las primeras columnas o columnas de la matriz se repiten al final y se realiza una multiplicación de diagonales para obtener el determinante.

Primera forma



Segunda forma

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Matriz Transpuesta

La matriz traspuesta de una matriz se denota por Z^T y se obtiene cambiando sus filas por columnas (o viceversa).

$$Z = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad Z^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Igualdad de Matrices

■

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & b+3 \\ c+2 & d+4 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a+1=0 \qquad b+3=2$$

$$a=-1 \qquad b=-1$$

$$c+2=1 \qquad d+4=3$$

$$c=-1 \qquad d=-1$$

■

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Cumple si $x=2$

Producto de un Escalar por un Determinante

Se multiplica el numero escalar por toda una fila o columna, a continuación se muestra un ejemplo en el cual seleccione la primera columna.

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Matriz Adjunta

$$\text{Adj}(A) = C_A^T \quad \rightarrow C_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

■ 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad C_A = \begin{pmatrix} +(5) & -(-4) \\ -(2) & +(1) \end{pmatrix} \quad C_A^T = \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

■ 3×3

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C_B = \begin{pmatrix} +(12) & -(2) & +(-24) \\ -(-2) & +(4) & -(4) \\ +(-1) & -(2) & +(15) \end{pmatrix} \quad C_B^T = \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 12 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -24 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

Menor de una Matriz

En el siguiente ejemplo vemos el menor de A_{11} (M_{ij}) señalado con azul.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad M_{ij}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -8 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 8 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -23 \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -17 \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Cofactor. $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$$

$$C_{21} = (-1)^3 (-23)$$

$$C_{21} = 23$$

$$C_A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 \\ 23 & 17 & 7 \\ -11 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculo del determinante por Cofactores

El determinante por el método de cofactores, es el resultado de la suma de los productos de cada elemento multiplicado por su cofactor de toda una fila o toda una columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{4 \times 4}$$

▪ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ En este caso he escogido la segunda fila de la matriz A para

hallar su cofactor.

$$|A| = A_{31} * C_{31} + A_{32} * C_{32} + A_{33} * C_{33}.$$

$$|A| = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$|A| = -23 + 2(-17) + (-7)$$

$$|A| = -64$$

$$\blacksquare |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = a_{11}Cof_{11} + a_{21}Cof_{21} + a_{31}Cof_{31} + a_{41}Cof_{41}$$

$$|\mathbf{B}| = (-1) * (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (0)(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$(2)(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 0(-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = -3 + 2(-4)$$

$$|\mathbf{B}| = -3 - 8 = -11$$

Las matrices singulares o triviales, no tienen inversa y su determinante es 0.

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 \\ 23 & -17 & 7 \\ -11 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad Adj(A) = C_A^T$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -8 & 23 & -11 \\ -8 & -17 & -3 \\ -8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times Adj(A) \quad |A| \neq 0$$

- Es matriz singular si $|A| = 0$
- No tiene inversa si $|A| = 0$

Propiedades relevantes.

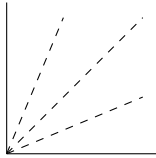
1. **Toda** matriz cuadrada A no singular tiene inversa.
2. **La** matriz inversa, si existe; es única.

Funciones Trigonométricas

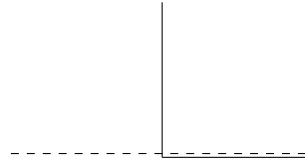
Geométricas

Tipos de Angulos.

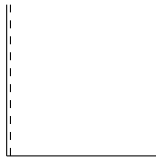
- Agudo: $0^\circ < \theta < 90^\circ$



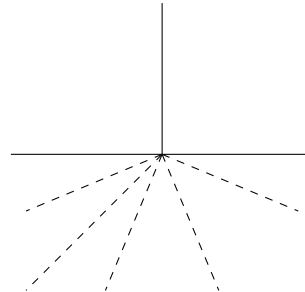
- Llano: $\theta = 180^\circ$



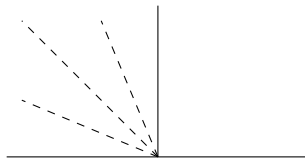
- Recto: $\theta = 90^\circ$



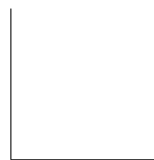
- Cóncavo: $180^\circ < \theta < 360^\circ$



- Obtuso: $90^\circ < \theta < 180^\circ$

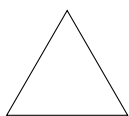


- Completo: $\theta = 360^\circ$



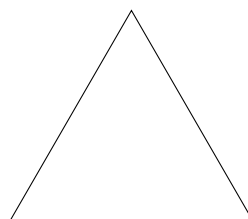
Clasificación de Triangulos.

- Según sus lados



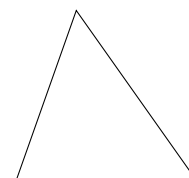
Equilátero

(3 lados iguales)



Isósceles

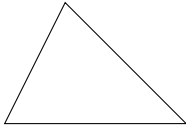
(2 lados iguales)



Escaleno

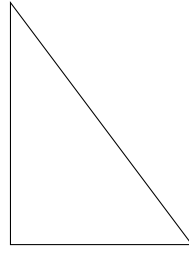
(3 lados diferentes)

- Según sus ángulos



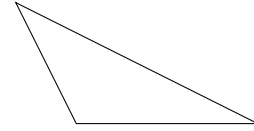
Acutángulo

(3 ángulos agudos)



Rectángulo

(1 ángulo recto)

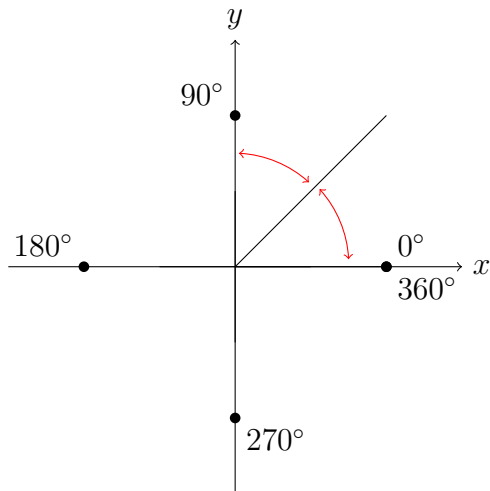


Obtusángulo

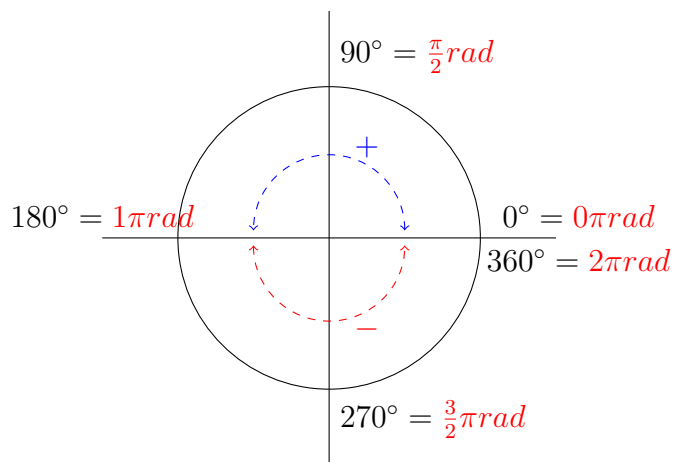
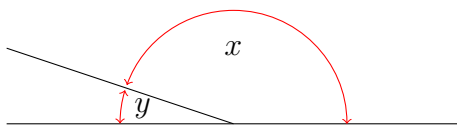
(1 ángulo obtuso)

Trigonométricas

$$\hat{X} + \hat{Y} = 90^\circ$$

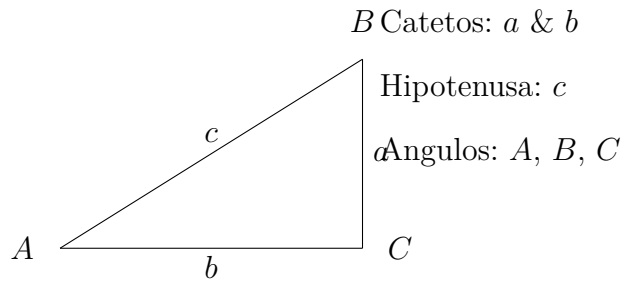


$$\hat{X} + \hat{Y} = 180^\circ$$



$$1\pi rad = 180^\circ$$

$$1000^\circ * \frac{1\pi rad}{180^\circ} = \frac{50}{9}\pi rad \approx 5,556\pi rad$$



Teorema de Pitágoras. -> Solo triángulos rectángulos

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Recíproco: $2 = \frac{1}{2}$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Razones Trigonométricas. .

$$\sin(A) = \frac{C.O}{H.I.P} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(A) = \frac{C.A}{H.I.P} = \frac{b}{c}$$

$$\tan(A) = \frac{C.O}{C.A} = \frac{a}{b}$$

$$\cot(A) = \frac{b}{a}$$

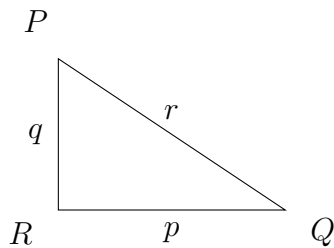
$$\sec(A) = \frac{c}{b}$$

$$\csc(A) = \frac{c}{a}$$

$$\boxed{S O C A T O}$$

$$\boxed{\frac{O}{H} \frac{A}{H} \frac{T}{O} \frac{O}{A}}$$

Resolución de Triángulos Rectángulos. .



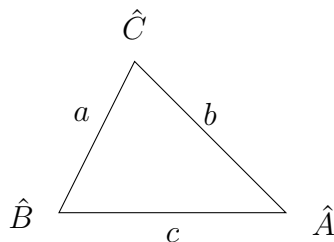
Resolver es hallar los **ángulos** y **lados** del triángulo rectángulo.

- \hat{P}
- \hat{Q}
- \hat{R}
- p
- q
- r

Ley de Senos y Cosenos

Se aplica para la resolución de triángulos **oblicuángulos** (triángulos que no tienen ángulos rectos).

Ley de Senos. .



$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Ley de Cosenos. .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

Resolucion de un Triangulo Oblicuangulo. .

- $\hat{W} = 35^\circ$

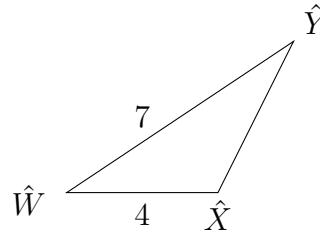
- $\hat{Y} = ?$

- $\hat{X} = ?$

- $w = ?$

- $y = 4$

- $x = 7$



No podemos usar la ley de senos porque al igualar cualquier par de razones, nos quedan dos incógnitas.

$$\frac{\sin \hat{W} \checkmark}{w \times} = \frac{\sin \hat{Y} \times}{y \checkmark} = \frac{\sin \hat{X} \times}{x \checkmark}$$

Debemos usar la ley de cosenos.

$$w^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \hat{W}$$

$$w^2 = 4^2 + 7^2 - 2(4)(7) \cos 35^\circ$$

$$w^2 = 16 + 49 - 56(0,819)$$

$$w^2 = 65 - 45,664$$

$$w^2 = 19,336$$

$$w = \sqrt{19,336}$$

$$\hat{X} = 180^\circ - 31,5^\circ - 35^\circ$$

$$\hat{X} \approx 113,5^\circ$$

Ya podemos usar la ley de senos.

$$\frac{\sin \hat{W}}{w} = \frac{\sin \hat{Y}}{y}$$

$$\frac{\sin 35^\circ}{4,4} = \frac{\sin \hat{Y}}{4}$$

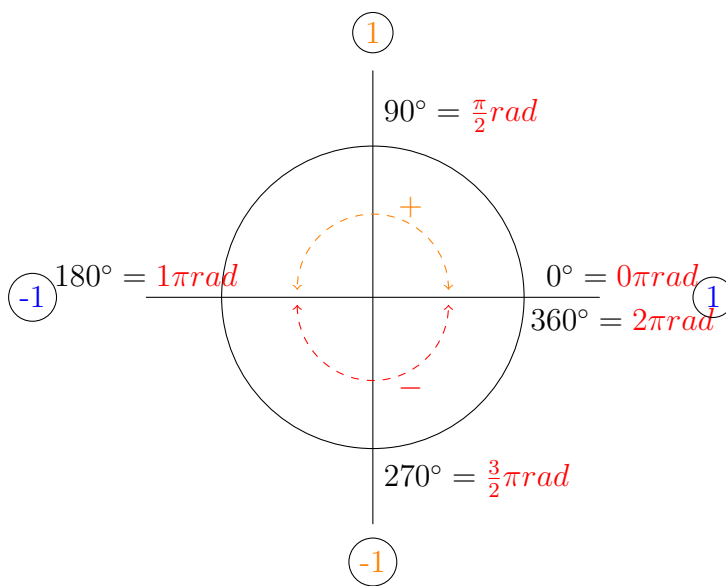
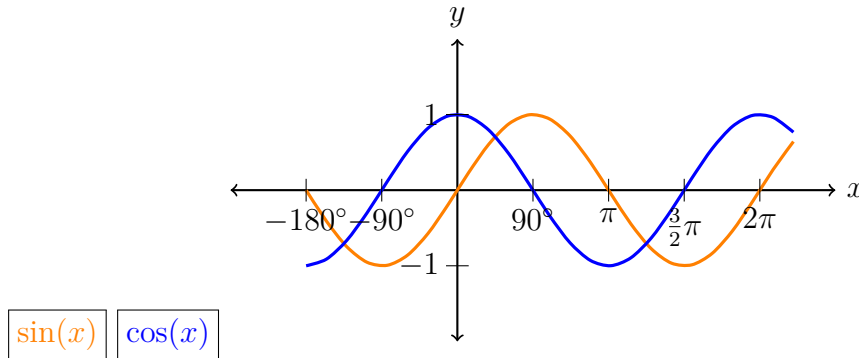
$$\sin \hat{Y} = 4 \times \frac{\sin 35^\circ}{4,4}$$

$$\hat{Y} = \sin^{-1} \left(4 \times \frac{\sin 35^\circ}{4,4} \right)$$

$$\hat{Y} \approx 31,5^\circ$$

Funciones

$$f(x) = y = \sin(x)$$



$$\tan(0^\circ) = \frac{\sin(0^\circ)}{\cos(0^\circ)} = \frac{0}{1} = 0$$

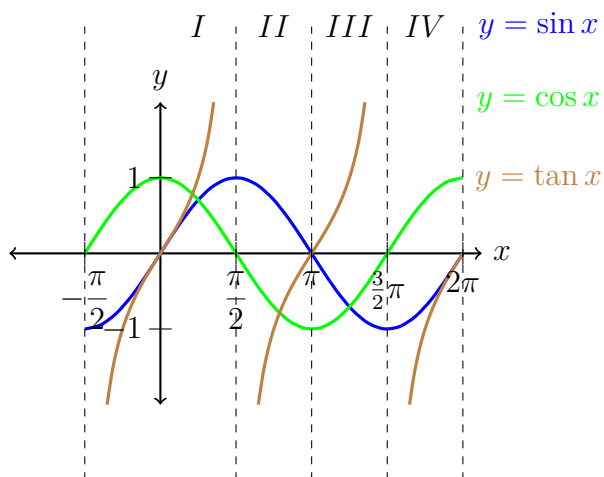
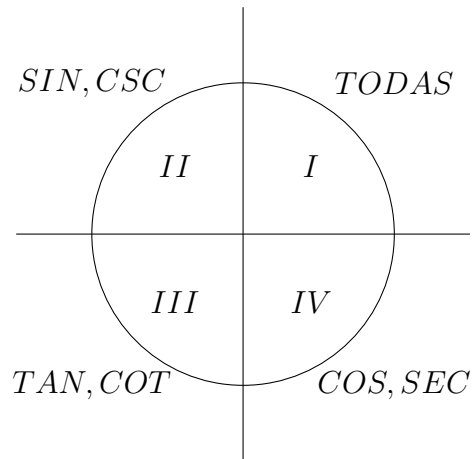
$$\tan(90^\circ) = \frac{\sin(90^\circ)}{\cos(90^\circ)} = \frac{1}{0} = \infty \text{ (indefinido)}$$

$$\tan(180^\circ) = \frac{\sin(180^\circ)}{\cos(180^\circ)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\tan(270^\circ) = \frac{\sin(270^\circ)}{\cos(270^\circ)} = \frac{-1}{0} = -\infty \text{ (indefinido)}$$

Signos de las funciones trigonométricas

TODAS	SIN	TA	COS
I	II	III	IV



Identidades Trigonométricas

$$3x + 1 = 5x - 4 + 5 - 2x$$

Identidad: $0=0$

$$3x + 1 = 3x + 1$$

Cumple si

$$\boxed{x=1 \quad 4=4}$$

$$\boxed{x=0 \quad 1=1}$$

Identidades Recíprocas.

$$1. \sin(x) = \frac{1}{\csc(x)} \Rightarrow \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$2. \cos(x) = \frac{1}{\sec(x)} \Rightarrow \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$3. \tan(x) = \frac{1}{\cot(x)} \Rightarrow \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$4. \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$5. \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$6. \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$7. 1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$$

$$8. 1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$$

Ángulos dobles.

$$\blacksquare \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\blacksquare \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\blacksquare \tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

Ejemplo: Demostrar que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = \tan(x) \times \cot(x)$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = \tan(x) \times \frac{1}{\tan(x)}$$

Lqqd

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = \cancel{\tan(x)} \times \frac{1}{\cancel{\tan(x)}}$$

$$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)}$$

Introducción a los límites

Ver el video de [Grandes temas de la matemática: Capítulo 10: Noción de límite](#)

$$\lim_{x \rightarrow a} L$$

Límites laterales:

Derecha: $\lim_{x \rightarrow a^+} L_1$

Izquierda: $\lim_{x \rightarrow a^-} L_2$

$L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ No existe el límite de la función en $x \rightarrow a$

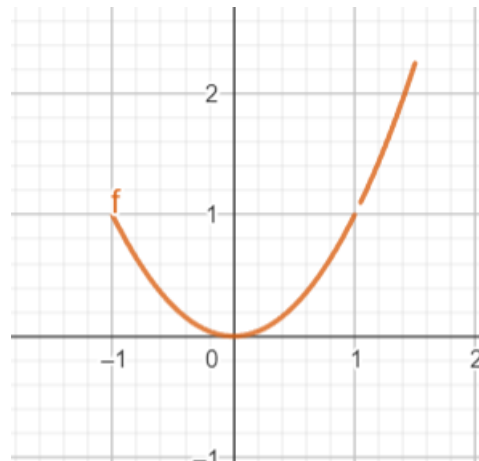
Ecuación del límite de una función

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 = 1$

4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = 1$



Ecuación de un límite

■ $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 1) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$

■ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 0/0 \rightarrow$ Indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2(2) + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

■ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Conjugado:

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - (1)^2}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x - 1)}(\sqrt{x} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Limite al infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 1}{x - 3x^4 + 2} = \frac{\infty}{\infty} \quad \rightarrow \text{Indefinido}$$

Dividir todo para el exponente mas alto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^4} + \frac{x}{x^4} - \frac{1}{x^4}}{\frac{x}{x^4} - \frac{3x^4}{x^4} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0 + 0 - 0}{0 - 3 + 0} = \frac{0}{-3} = 0$$

Limites Continuidad

$$\blacksquare f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$1. f(2) = (2)^2 + 1 = 5$$

$$2. \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

$$\exists = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \quad - > \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 3) = 5$$

?

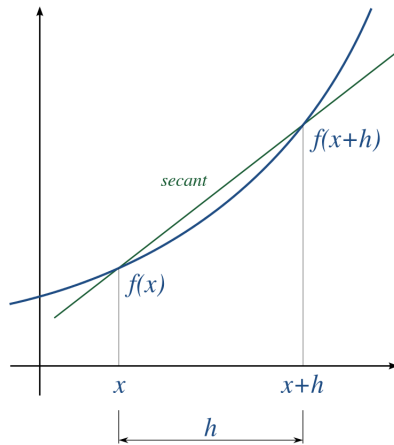
$$- > \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 5$$

$$3. \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

$$5 = 5$$

La funcion es continua

Derivadas



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\tan(x) = \tan(\text{secante}) = \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$$

$$m_{\text{sec}} = \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$$

$$f(x) = 3x + 1$$

$$f(x+h) = 3(x+h) + 1$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x + 3h + 1 - (3x + 1)}{h}$$

$$f(x+h) = 3x + 3h + 1$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{3x} + 3h + \cancel{1} - \cancel{3x} - \cancel{1}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3$$

Diferenciable

▪ $f'_+(x)$

▪ $f'_-(x)$

Es diferenciable si $f'_+(x) = f'_-(x)$

Reglas de derivacion

1. Derivada de una potencia entera

positiva

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Ejemplo:

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$$

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

2. Derivada de una constante es 0

$$y = 5 + x^3$$

$$y' = 0 + 3x^2$$

$$y' = 3x^2$$

3. Regla del producto y del cociente para derivadas

$$y = f * g$$

$$y' = f'g + g'f$$

Ejemplo:

$$y = 2x(3x^2 + 1)$$

$$y' = (2x)'(3x^2 + 1) + (3x^2 + 1)'(2x)$$

$$y' = 2(3x^2 + 1) + 6x(2x)$$

$$y' = 6x^2 + 2 + 12x^2$$

$$y' = 18x^2 + 2$$

$$y' = 18x^2$$

4. Propiedad cociente

$$y = \frac{f}{g}$$

$$y' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Derivadas de funciones trigonometricas

Funcion	Derivada
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x) \tan(x)$
$\csc(x)$	$-\csc(x) \cot(x)$

Ejemplo: $y = \frac{\tan(x) + 1}{2x - 3}$

$$y' = \frac{(\tan(x) + 1)'(2x - 3) - (\tan(x) + 1)(2x - 3)'}{(2x - 3)^2}$$

$$y' = \frac{(\sec^2(x))(2x - 3) - (\tan(x) + 1)(2)}{(2x - 3)^2}$$

Regla de la potencia para funciones

$$y' = nu^{n-1}u'$$

$$u = g(x)$$

$$y = (g(x))^n$$

$$y = u^n$$

u' es la derivada interna/implicita

Ejemplo 1: $y = (2x + 1)^n$

$$y' = n(2x + 1)^{n-1}(2x + 1)'$$

$$y' = n(2x + 1)^{n-1}(2)$$

$$y' = 2n(2x + 1)^{n-1}$$

Ejemplo 2: $y = \sin(5x)$

$$y' = \cos(5x)(5x)'$$

$$y' = \cos(5x)(5)$$

$$y' = 5\cos(5x)$$

,

Regla de la cadena

$$y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

$$y' = f'(g(x))g'(x) \text{ o } y' = \frac{dx}{dt} \times \frac{dt}{dw} \times \frac{dw}{dx} \dots$$

Ejemplo 1: $y = (\sin(x))^5$

$$y' = 5(\sin(x))^4(\sin(x))'$$

$$y' = 5(\sin(x))^4(\cos(x))$$