Calculo Diferencial e Integral

Cristian Herrera

Instituto Superior Tecnológico Tena

Calculo Diferencial e Integral

Ing. Libinton Lara

2023 - IIP

Índice

Actividades en Clase

Matrices y Determinantes

Que es una matriz?

Conjunto bidimencional de numeros o simbolos que sirven para describir y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sistema de Ecuaciones	En Forma de Matriz
$f(x) = \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$	$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & i \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \end{array}$
$2x = 4$	$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & i \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$
$f(x) = \begin{cases} 3x - 5y + 8z = 10 \\ 2y - 7z = -15 \end{cases}$	$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & i \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & -15 \end{pmatrix} \end{array}$

Dimensiones de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}_{M\times N}$$

M =Filas, N =Columnas

Un elemento de una matriz se representa: a_{ij}, donde i representa las filas, y j las columnas

Tipos de Matrices

Matriz Fila (Vector Fila). Matriz formada por una sola fila.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} \end{pmatrix}_{1\times n}$$

Matriz Columna (Vector Columna). Matriz formada por una sola columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

Matriz Nula. Todos sus elementos son nulos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Matriz Cuadrada. Tiene el mismo numero de filas y de columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Elementos básicos de una Matriz Cuadrada.

Diagonal Mayor.

Formada por los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, $\dots$, a_{nn}.

Diagonal Menor.

Formada por los elementos a_{ij} donde $i + j = n + 1$

Traza.

Suma de los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 8 & 12 & -9 \\ 15 & -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{traza: } -2 + 12 - 4 = 6$$

Tipos básicos de matrices cuadradas.

Triangular Superior.

Todos los elementos son ceros debajo de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 0 & 12 & -9 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Triangular Inferior.

Encima de la diagonal principal todos son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 0 \\ 15 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal.

Los elementos que no están en la diagonal principal son ceros, esta también es una matriz triangular superior y triangular inferior.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 12 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad o unidad.

Es una matriz diagonal, en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Matriz Escalar.

Es una matriz diagonal, en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

Suma de Matrices

Se puede dar entre matrices del mismo orden, para realizar la suma se debe sumar cada elemento de una posición con otro elemento de una matriz de la misma posición.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}_{2\times 4} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11})_{11} & (a_{12} + b_{12})_{12} & (a_{13} + b_{13})_{13} & (a_{14} + b_{14})_{14} \\ (a_{21} + b_{21})_{21} & (a_{22} + b_{22})_{22} & (a_{23} + b_{23})_{23} & (a_{24} + b_{24})_{24} \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Resta de Matrices

Se puede dar entre matrices del mismo orden, para realizar la resta se debe restar cada elemento de una posición con otro elemento de una matriz de la misma posición.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}_{2\times 4} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} (a_{11} - b_{11})_{11} & (a_{12} - b_{12})_{12} & (a_{13} - b_{13})_{13} & (a_{14} - b_{14})_{14} \\ (a_{21} - b_{21})_{21} & (a_{22} - b_{22})_{22} & (a_{23} - b_{23})_{23} & (a_{24} - b_{24})_{24} \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Producto De Una Matriz Por Un Escalar/Real

La multiplicación de una matriz por un escalar se realiza multiplicando el escalar por cada elemento de la matriz.

$$\frac{3}{2} \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ \frac{3}{2} & -12 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Multiplicación de Matrices

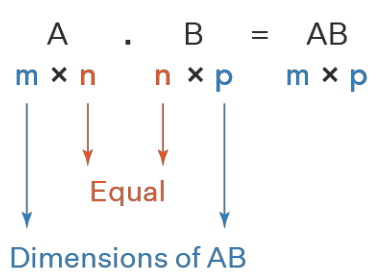
Es posible si el numero de **columnas** de la primera matriz es el mismo al numero de **filas** de la segunda matriz. Para multiplicar dos matrices cuadradas, calcula el producto de filas de la primera matriz con columnas de la segunda matriz y suma los resultados.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

¿Es posible multiplicar la matriz A por la matriz B?

$$\mathit{2} \times \mathbf{2} \qquad \mathbf{2} \times \mathit{2}$$

Si es posible ya que el numero de columnas de la primera fila es el mismo que el numero de filas de la segunda, $\mathbf{2} = \mathbf{2}$, ademas el resultado de $A \times B$ sera igual a una matriz de $\mathit{2} \times \mathit{2}$.



$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 6 + 3 \cdot 8) & (2 \cdot 7 + 3 \cdot 9) \\ (4 \cdot 6 + 5 \cdot 8) & (4 \cdot 7 + 5 \cdot 9) \end{bmatrix} = AB = \begin{bmatrix} 36 & 41 \\ 68 & 77 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Determinantes

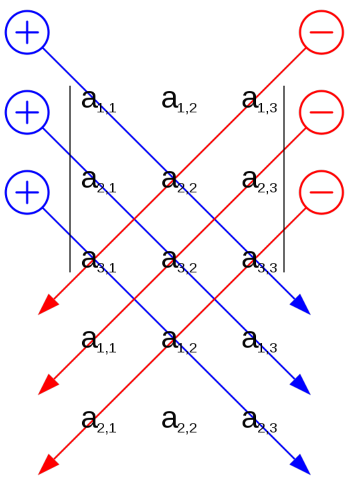
El determinante de una matriz solo existe en matrices cuadradas.

Determinante 2x2. Se calcula restando el producto de los números que conforman la diagonal secundaria al producto de los números que conforman la diagonal principal.

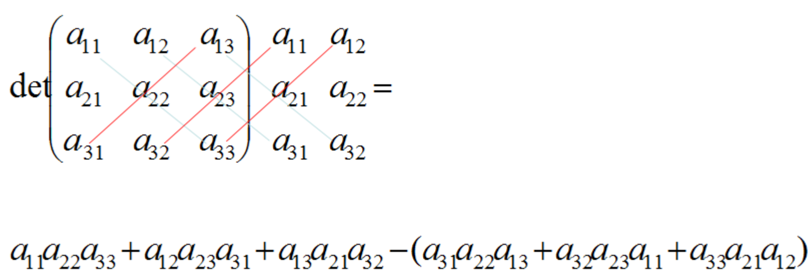
$$A = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} \qquad\qquad |A| = (be) - (cd)$$

Determinante 3x3 - Regla de Sarrus. Las primeras columnas o columnas de la matriz se repiten al final y se realiza una multiplicación de diagonales para obtener el determinante.

Primera forma



Segunda forma



Matriz Transpuesta

La matriz traspuesta de una matriz se denota por y se obtiene cambiando sus filas por columnas (o viceversa).

$$Z = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad\qquad Z^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Igualdad de Matrices

- $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & b+3 \\ c+2 & d+4 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a+1=0 \qquad b+3=2$$

$$a=-1 \qquad b=-1$$

$$c+2=1 \qquad d+4=3$$

$$c=-1 \qquad d=-1$$

- $$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Cumple si $x = 2$

Producto de un Escalar por un Determinante

Se multiplica el numero escalar por toda una fila o columna, a continuación se muestra un ejemplo en el cual seleccione la primera columna.

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Matriz Adjunta

$Adj(A) = {C_A}^T \qquad -> C_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$

- 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad C_A = \begin{pmatrix} +(5) & -(-4) \\ -(2) & +(1) \end{pmatrix} \quad {C_A}^T = Adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3×3

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C_B = \begin{pmatrix} +(12) & -(2) & +(-24) \\ -(-2) & +(4) & -(4) \\ +(-1) & -(2) & +(15) \end{pmatrix} \quad {C_B}^T = Adj(B) = \begin{pmatrix} 12 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -24 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

Menor de una Matriz

En el siguiente ejemplo vemos el menor de A_{11} (M_{ij}) señalado con azul.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{3} & \cancel{4} \\ \cancel{-1} & 2 & -1 \\ \cancel{3} & 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad M_{ij}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -8 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 8 \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -23 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -17 \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Cofactor. $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$$

$$C_{21} = (-1)^{3}(-23)$$

$$C_{21} = 23$$

$$C_A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 \\ 23 & 17 & 7 \\ -11 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculo del determinante por Cofactores

El determinante por el método de cofactores, es el resultado de la suma de los productos de cada elemento multiplicado por su cofactor de toda una fila o toda una columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{4x4}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ En este caso he escogido la segunda fila de la matriz A para hallar su cofactor.

  $|\mathbf{A}| = A_{31} * C_{31} + A_{32} * C_{32} + A_{33} * C_{33}.$

  $$|\mathbf{A}| = (-1)(-1)^{3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2(-1)^{4} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{5} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

  $|\mathbf{A}| = -23 + 2(-17) + (-7)$

  $|\mathbf{A}| = -64$

- $|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

  $|\mathbf{B}| = a_{11}Cof_{11} + a_{21}Cof_{21} + a_{31}Cof_{31} + a_{41}Cof_{41}$

  $|\mathbf{B}| = (-1) * (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (0)(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (2)(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} +$
  $0(-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

  $|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

  $|\mathbf{B}| = -3 + 2(-4)$

  $|\mathbf{B}| = -3 - 8 = -114$

Las matrices singulares o triviales, no tienen inversa y su determinante es 0.

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 \\ 23 & -17 & 7 \\ -11 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad Adj(A) = C_A^T$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -8 & 23 & -11 \\ -8 & -17 & -3 \\ -8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times Adj(A) \qquad\qquad |A| \neq 0$$

- Es matriz singular si $|A| = 0$
- No tiene inversa si $|A| = 0$

Propiedades relevantes.

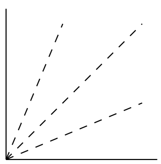
1. **Toda** matriz cuadrada A no singular tiene inversa.
2. **La** matriz inversa, si existe; es única.

Funciones Trigonométricas

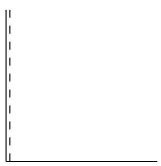
Geométricas

Tipos de Angulos.

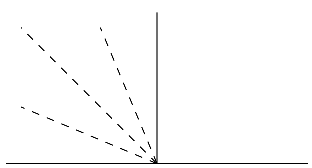
- Agudo: $0° < \theta < 90°$



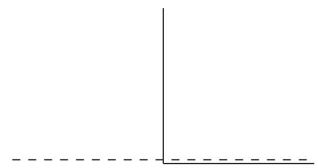
- Recto: $\theta = 90°$



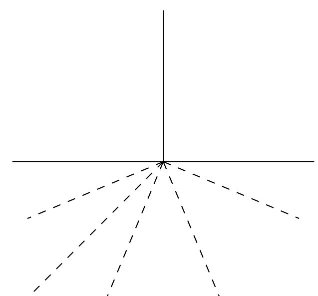
- Obtuso: $90° < \theta < 180°$



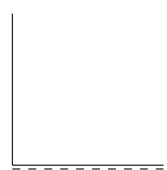
- Llano: $\theta = 180°$



- Cóncavo: $180° < \theta < 360°$

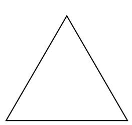


- Completo: $\theta = 360°$



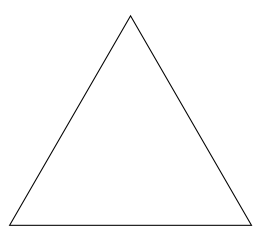
Clasificacion de Triangulos.

- Según sus lados



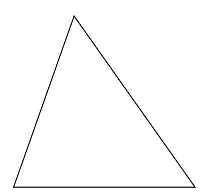
Equilátero

(3 lados iguales)



Isósceles

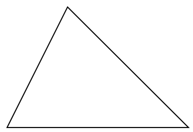
(2 lados iguales)



Escaleno

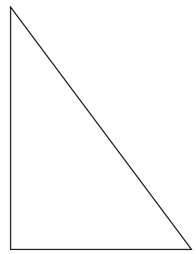
(3 lados diferentes)

- Según sus ángulos



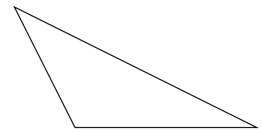
Acutángulo

(3 ángulos agudos)



Rectángulo

(1 ángulo recto)

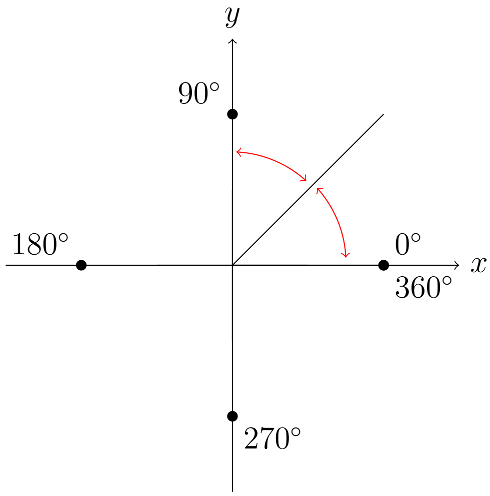


Obtusángulo

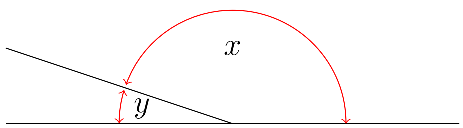
(1 ángulo obtuso)

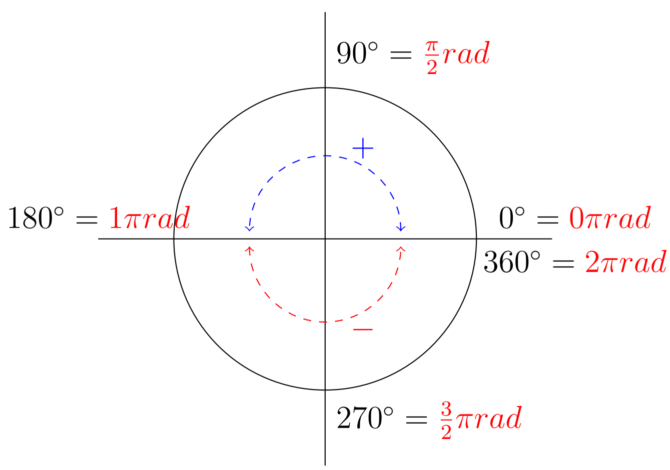
Trigonométricas

$\hat{X} + \hat{Y} = 90°$



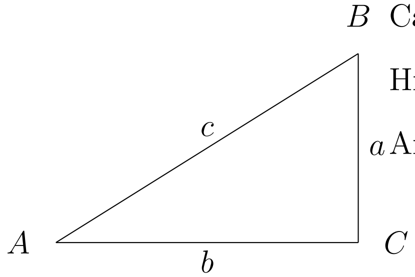
$\hat{X} + \hat{Y} = 180°$





$1\pi rad = 180°$

$1000° * \frac{1\pi rad}{180°} = \frac{50}{9}\pi rad \approx 5{,}556\pi rad$



Catetos: a & b

Hipotenusa: c

Angulos: A, B, C

Teorema de Pitágoras. -> Solo triangulos rectangulos

$a^2 + b^2 = c^2$

Reciproco: $2 = \frac{1}{2}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Razones Trigonométricas. .

$$\sin(A) = \frac{C.O}{HIP} = \frac{a}{c}$$

$$\boxed{S\frac{O}{H}C\frac{A}{H}T\frac{O}{A}}$$

$$\cos(A) = \frac{C.A}{HIP} = \frac{b}{c}$$

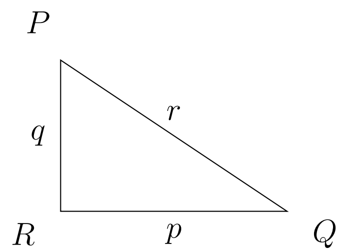
$$\tan(A) = \frac{C.O}{C.A} = \frac{a}{b}$$

$$\cot(A) = \frac{b}{a}$$

$$\sec(A) = \frac{c}{b}$$

$$\csc(A) = \frac{c}{a}$$

Resolución de Triángulos Rectángulos. .



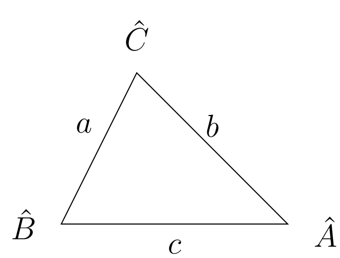
Resolver es hallar los **angulos** y **lados** del triangulo rectangulo.

- $\hat{P}$
- $\hat{Q}$
- $\hat{R}$
- p
- q
- r

Ley de Senos y Cosenos

Se aplica para la resolución de triángulos **oblicuángulos** (triángulos que no tienen ángulos rectos).

Ley de Senos. .



$$\boxed{\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}}$$

$$\boxed{\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}}$$

Ley de Cosenos. .

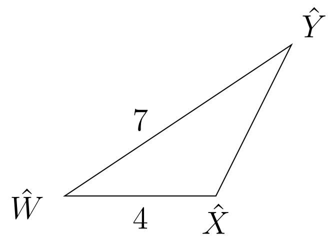
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

Resolucion de un Triangulo Oblicuangulo. .

- $\hat{W} = 35°$
- $\hat{Y} =?$
- $\hat{X} =?$
- $w =?$
- $y = 4$
- $x = 7$



No podemos usar la ley de senos porque al igualar cualquir par de razones, nos quedan dos incognitas.

$$\frac{\sin \hat{W}}{w} = \frac{\sin \hat{Y}}{y} = \frac{\sin \hat{X}}{x}$$

Debemos usar la ley de cosenos.

$w^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \hat{W}$

$w^2 = 4^2 + 7^2 - 2(4)(7) \cos 35°$

$w^2 = 16 + 49 - 56(0{,}819)$

$w^2 = 65 - 45{,}664$

$w^2 = 19{,}336$

$w = \sqrt{19{,}336}$

Ya podemos usar la ley de senos.

$$\frac{\sin \hat{W}}{w} = \frac{\sin \hat{Y}}{y}$$

$$\frac{\sin 35°}{4{,}4} = \frac{\sin \hat{Y}}{4}$$

$$\sin \hat{Y} = 4 \times \frac{\sin 35°}{4{,}4}$$

$$\hat{Y} = \sin^{-1}\left(4 \times \frac{\sin 35°}{4{,}4}\right)$$

$$\hat{Y} \approx 31{,}5°$$

$\hat{X} = 180° - 31{,}5° - 35°$

$\hat{X} \approx 113{,}5°$

Ejemplo 1