

# Calculo Diferencial e Integral

Cristian Herrera

Instituto Superior Tecnológico Tena

Calculo Diferencial e Integral

Ing. Libinton Lara

2023 - IIP

# Índice

<b>Actividades en Clase</b>	<b>1</b>
Matrices y Determinantes . . . . .	1
Que es una matriz? . . . . .	1
Dimensiones de una matriz . . . . .	1
Tipos de Matrices . . . . .	2
Suma de Matrices . . . . .	4
Resta de Matrices . . . . .	4
Producto De Una Matriz Por Un Escalar/Real . . . . .	5
Multiplicación de Matrices . . . . .	5
Determinantes . . . . .	6
Matriz Transpuesta . . . . .	6
Igualdad de Matrices . . . . .	7
Producto de un Escalar por un Determinante . . . . .	7
Matriz Adjunta . . . . .	8
Menor de una Matriz . . . . .	8
Calculo del determinante por Cofactores . . . . .	9
Matriz inversa . . . . .	11
Funciones Trigonómicas . . . . .	12
Geométricas . . . . .	12
Trigonómicas . . . . .	14
Ley de Senos y Cosenos . . . . .	16
Funciones . . . . .	18
Signos de las funciones trigonométricas . . . . .	19
Identidades Trigonómicas . . . . .	20
Introduccion a los limites . . . . .	21
Ecuación del limite de una funcion . . . . .	21

Ecuación de un limite . . . . .	21
Limite al infinito . . . . .	22
Limites Continuidad . . . . .	23
Derivadas . . . . .	24

## Índice de figuras

## Actividades en Clase

### Matrices y Determinantes

#### *Que es una matriz?*

Conjunto bidimensional de numeros o simbolos que sirven para describir y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sistema de Ecuaciones	En Forma de Matriz
$f(x) = \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} x & y & i \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$
$2x = 4$	$A = \begin{pmatrix} x & i \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
$f(x) = \begin{cases} 3x - 5y + 8z = 10 \\ 2y - 7z = -15 \end{cases}$	$C = \begin{pmatrix} x & y & z & i \\ 3 & -5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & -15 \end{pmatrix}$

**Cuadro 1**

#### *Matrices y Determinantes*

#### *Dimensiones de una matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}_{M \times N}$$

$M$  =Filas,  $N$  =Columnas

Un elemento de una matriz se representa:  $a_{ij}$ , donde  $i$  representa las filas, y  $j$  las columnas

## *Tipos de Matrices*

**Matriz Fila (Vector Fila).** Matriz formada por una sola fila.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}_{1 \times n}$$

**Matriz Columna (Vector Columna).** Matriz formada por una sola columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

**Matriz Nula.** Todos sus elementos son nulos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$$

**Matriz Cuadrada.** Tiene el mismo numero de filas y de columnas.

$$A = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{a}_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \textcolor{red}{a}_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \textcolor{red}{a}_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \textcolor{blue}{a}_{13} \\ a_{21} & \textcolor{blue}{a}_{22} & a_{23} \\ \textcolor{blue}{a}_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

## *Elementos básicos de una Matriz Cuadrada.*

**Diagonal Mayor.**

Formada por los elementos  $\textcolor{red}{a}_{11}, \textcolor{red}{a}_{22}, \textcolor{red}{a}_{33}, \dots, \textcolor{red}{a}_{nn}$ .

**Diagonal Menor.**

Formada por los elementos  $\textcolor{blue}{a}_{ij}$  donde  $i + j = n + 1$

**Traza.**

Suma de los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 8 & 12 & -9 \\ 15 & -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{traza: } -2 + 12 - 4 = 6$$

***Tipos básicos de matrices cuadradas.***

**Triangular Superior.**

Todos los elementos son ceros debajo de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 0 & 12 & -9 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

**Triangular Inferior.**

Encima de la diagonal principal todos son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 0 \\ 15 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

**Matriz Diagonal.**

Los elementos que no están en la diagonal principal son ceros, esta también es una matriz triangular superior y triangular inferior.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 12 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 \end{pmatrix}$$

**Matriz identidad o unidad.**

Es una matriz diagonal, en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

### **Matriz Escalar.**

Es una matriz diagonal, en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

### ***Suma de Matrices***

Se puede dar entre matrices del mismo orden, para realizar la suma se debe sumar cada elemento de una posición con otro elemento de una matriz de la misma posición.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}_{2 \times 4} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}_{2 \times 4}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11})_{11} & (a_{12} + b_{12})_{12} & (a_{13} + b_{13})_{13} & (a_{14} + b_{14})_{14} \\ (a_{21} + b_{21})_{21} & (a_{22} + b_{22})_{22} & (a_{23} + b_{23})_{23} & (a_{24} + b_{24})_{24} \end{pmatrix}_{2 \times 4}$$

### ***Resta de Matrices***

Se puede dar entre matrices del mismo orden, para realizar la resta se debe restar cada elemento de una posición con otro elemento de una matriz de la misma posición.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}_{2 \times 4} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}_{2 \times 4}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} (a_{11} - b_{11})_{11} & (a_{12} - b_{12})_{12} & (a_{13} - b_{13})_{13} & (a_{14} - b_{14})_{14} \\ (a_{21} - b_{21})_{21} & (a_{22} - b_{22})_{22} & (a_{23} - b_{23})_{23} & (a_{24} - b_{24})_{24} \end{pmatrix}_{2 \times 4}$$



### *Producto De Una Matriz Por Un Escalar/Real*

La multiplicación de una matriz por un escalar se realiza multiplicando el escalar por cada elemento de la matriz.

$$\frac{3}{2} \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ \frac{3}{2} & -12 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

### *Multiplicación de Matrices*

Es posible si el numero de **columnas** de la primera matriz es el mismo al numero de **filas** de la segunda matriz. Para multiplicar dos matrices cuadradas, calcula el producto de filas de la primera matriz con columnas de la segunda matriz y suma los resultados.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

¿Es posible multiplicar la matriz A por la matriz B?

$$2 \times 2 \quad 2 \times 2$$

Si es posible ya que el numero de columnas de la primera fila es el mismo que el numero de filas de la segunda,  $2 = 2$ , además el resultado de  $A \times B$  sera igual a una matriz de  $2 \times 2$ .

$$\begin{array}{ccccc} A & . & B & = & AB \\ m \times n & & n \times p & & m \times p \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{Equal} & & & \\ \text{Dimensions of AB} & & & & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 6 + 3 \cdot 8) & (2 \cdot 7 + 3 \cdot 9) \\ (4 \cdot 6 + 5 \cdot 8) & (4 \cdot 7 + 5 \cdot 9) \end{bmatrix} = AB = \begin{bmatrix} 36 & 41 \\ 68 & 77 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

## Determinantes

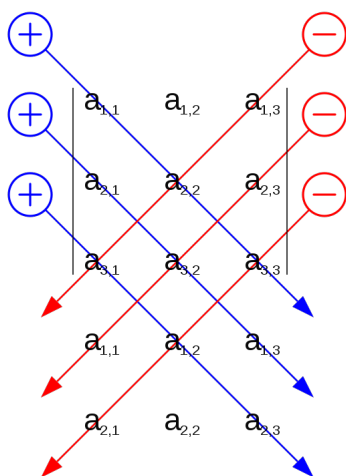
El determinante de una matriz solo existe en matrices cuadradas.

**Determinante 2x2.** Se calcula restando el producto de los números que conforman la diagonal secundaria al producto de los números que conforman la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} \quad |A| = (be) - (cd)$$

**Determinante 3x3 - Regla de Sarrus.** Las primeras columnas o columnas de la matriz se repiten al final y se realiza una multiplicación de diagonales para obtener el determinante.

Primera forma



Segunda forma

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\underline{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}} - \underline{(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})}$$

## Matriz Traspuesta

La matriz traspuesta de una matriz se denota por  $Z^T$  y se obtiene cambiando sus filas por columnas (o viceversa).

$$Z = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad Z^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

### *Igualdad de Matrices*

■

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & b+3 \\ c+2 & d+4 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a+1=0 \qquad b+3=2$$

$$a=-1 \qquad b=-1$$

$$c+2=1 \qquad d+4=3$$

$$c=-1 \qquad d=-1$$

■

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Cumple si  $x = 2$

### *Producto de un Escalar por un Determinante*

Se multiplica el numero escalar por toda una fila o columna, a continuación se muestra un ejemplo en el cual seleccione la primera columna.

$$2 \cdot \begin{vmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{4} & \color{red}{2} \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

### Matriz Adjunta

$$\text{Adj}(A) = C_A^T \quad \rightarrow C_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

■  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad C_A = \begin{pmatrix} +(5) & -(-4) \\ -(2) & +(1) \end{pmatrix} \quad C_A^T = \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

■  $3 \times 3$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C_B = \begin{pmatrix} +(12) & -(2) & +(-24) \\ -(-2) & +(4) & -(4) \\ +(-1) & -(2) & +(15) \end{pmatrix} \quad C_B^T = \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 12 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -24 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

### Menor de una Matriz

En el siguiente ejemplo vemos el menor de  $A_{11}$  ( $M_{ij}$ ) señalado con azul.

$$A = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} \\ \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{2} & \textcolor{blue}{-1} \\ \textcolor{red}{3} & \textcolor{blue}{2} & \textcolor{blue}{-5} \end{pmatrix} \quad M_{ij}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -8 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 8 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -23 \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -17 \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

**Cofactor.**  $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$$

$$C_{21} = (-1)^3 (-23)$$

$$C_{21} = 23$$

$$C_A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 \\ 23 & 17 & 7 \\ -11 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

### *Calculo del determinante por Cofactores*

El determinante por el método de cofactores, es el resultado de la suma de los productos de cada elemento multiplicado por su cofactor de toda una fila o toda una columna

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix}_{4 \times 4}$$

▪  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$  En este caso he escogido la segunda fila de la matriz A para

hallar su cofactor.

$$|\mathbf{A}| = A_{31} * C_{31} + A_{32} * C_{32} + A_{33} * C_{33}.$$

$$|\mathbf{A}| = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$|\mathbf{A}| = -23 + 2(-17) + (-7)$$

$$|\mathbf{A}| = -64$$

$$\blacksquare \quad |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = a_{11}Cof_{11} + a_{21}Cof_{21} + a_{31}Cof_{31} + a_{41}Cof_{41}$$

$$|\mathbf{B}| = (-1) * (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (0)(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (2)(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$0(-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = -3 + 2(-4)$$

$$|\mathbf{B}| = -3 - 8 = -11$$

Las matrices singulares o triviales, no tienen inversa y su determinante es 0.

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 \\ 23 & -17 & 7 \\ -11 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad Adj(A) = C_A^T$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -8 & 23 & -11 \\ -8 & -17 & -3 \\ -8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

***Matriz inversa***

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times Adj(A) \qquad |A| \neq 0$$

- Es matriz singular si  $|A| = 0$
- No tiene inversa si  $|A| = 0$

**Propiedades relevantes.**

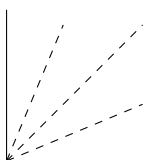
1. **Toda** matriz cuadrada A no singular tiene inversa.
2. **La** matriz inversa, si existe; es única.

## Funciones Trigonómicas

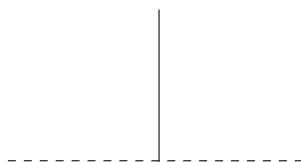
### Geométricas

#### Tipos de Angulos.

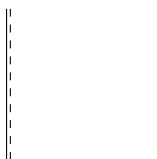
- Agudo:  $0^\circ < \theta < 90^\circ$



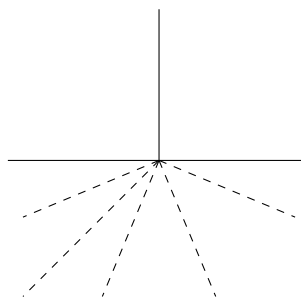
- Llano:  $\theta = 180^\circ$



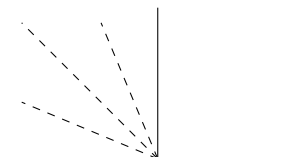
- Recto:  $\theta = 90^\circ$



- Cóncavo:  $180^\circ < \theta < 360^\circ$



- Obtuso:  $90^\circ < \theta < 180^\circ$

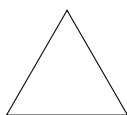


- Completo:  $\theta = 360^\circ$



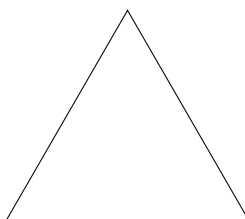
#### Clasificación de Triangulos.

- Según sus lados



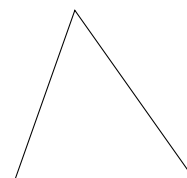
Equilátero

(3 lados iguales)



Isósceles

(2 lados iguales)

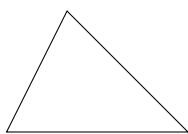


Escaleno

(3 lados diferentes)

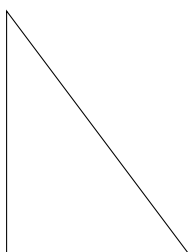


■ Según sus ángulos



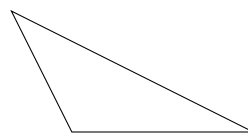
Acutángulo

(3 ángulos agudos)



Rectángulo

(1 ángulo recto)

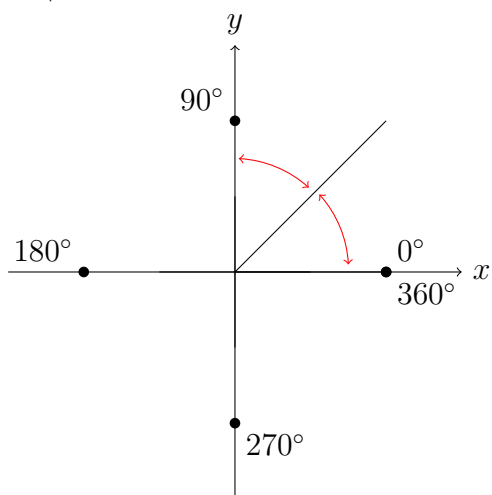


Obtusángulo

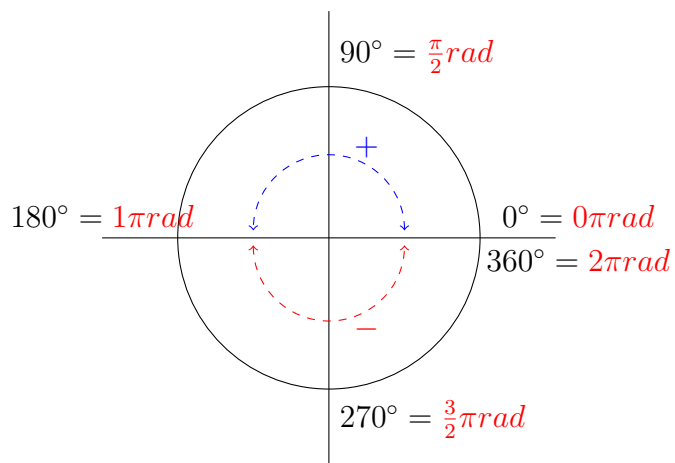
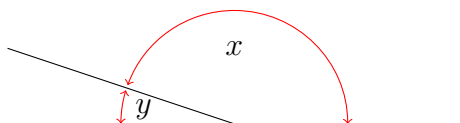
(1 ángulo obtuso)

# *Trigonométricas*

$$\hat{X} + \hat{Y} = 90^\circ$$

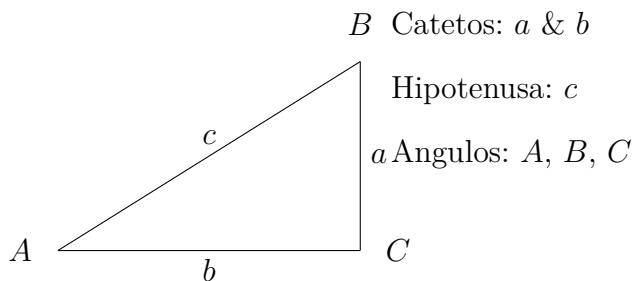


$$\hat{X} + \hat{Y} = 180^\circ$$



$$1\pi rad = 180^\circ$$

$$1000^\circ * \frac{1\pi rad}{180^\circ} = \frac{50}{9}\pi rad \approx 5,556\pi rad$$



**Teorema de Pitágoras.** -> Solo triangulos rectangulos

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Reciproco:  $2 = \frac{1}{2}$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

**Razones Trigonómicas.** .

$$\sin(A) = \frac{C.O}{HIP} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(A) = \frac{C.A}{HIP} = \frac{b}{c}$$

$$\tan(A) = \frac{C.O}{C.A} = \frac{a}{b}$$

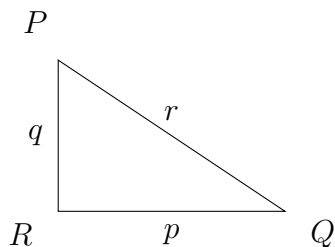
$$\cot(A) = \frac{b}{a}$$

$$\sec(A) = \frac{c}{b}$$

$$\csc(A) = \frac{c}{a}$$

$$\boxed{SOCA TO}$$

## Resolución de Triángulos Rectángulos. .



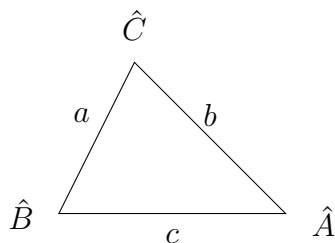
Resolver es hallar los **ángulos** y **lados** del triángulo rectángulo.

- $\hat{P}$
- $\hat{Q}$
- $\hat{R}$
- $p$
- $q$
- $r$

## Ley de Senos y Cosenos

Se aplica para la resolución de triángulos **oblicuángulos** (triángulos que no tienen ángulos rectos).

### Ley de Senos. .



$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

### Ley de Cosenos. .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(B)$$

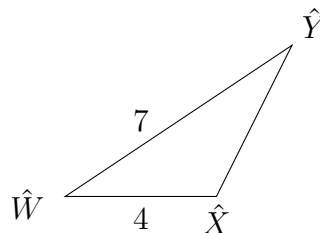
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

### Resolucion de un Triangulo Oblicuángulo. .

- $\hat{W} = 35^\circ$

- $\hat{Y} = ?$

- $\hat{X} = ?$



- $w = ?$

- $y = 4$

- $x = 7$

No podemos usar la ley de senos porque al igualar cualquier par de razones, nos quedan dos incognitas.

$$\frac{\sin \hat{W} \checkmark}{w \boxtimes} = \frac{\sin \hat{Y} \boxtimes}{y \checkmark} = \frac{\sin \hat{X} \boxtimes}{x \checkmark}$$

Debemos usar la ley de cosenos.

$$w^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \hat{W}$$

$$w^2 = 4^2 + 7^2 - 2(4)(7) \cos 35^\circ$$

$$w^2 = 16 + 49 - 56(0,819)$$

$$w^2 = 65 - 45,664$$

$$w^2 = 19,336$$

$$w = \sqrt{19,336}$$

$$\hat{X} = 180^\circ - 31,5^\circ - 35^\circ$$

$$\hat{X} \approx 113,5^\circ$$

Ya podemos usar la ley de senos.

$$\frac{\sin \hat{W}}{w} = \frac{\sin \hat{Y}}{y}$$

$$\frac{\sin 35^\circ}{4,4} = \frac{\sin \hat{Y}}{4}$$

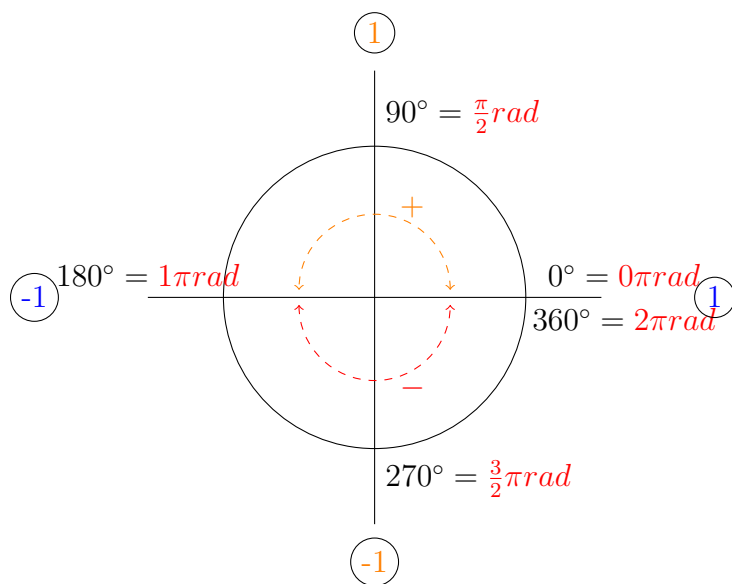
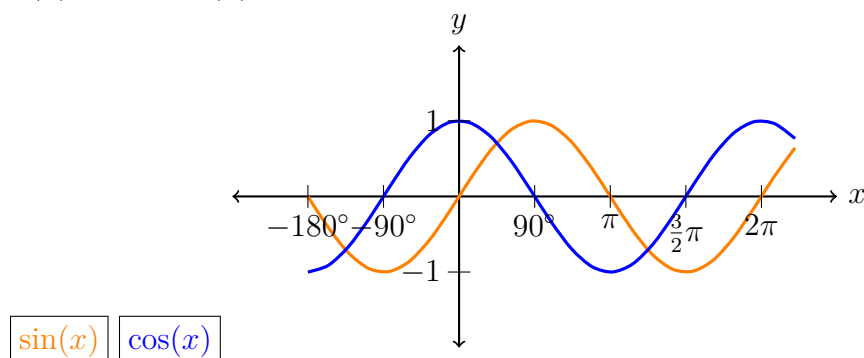
$$\sin \hat{Y} = 4 \times \frac{\sin 35^\circ}{4,4}$$

$$\hat{Y} = \sin^{-1} \left( 4 \times \frac{\sin 35^\circ}{4,4} \right)$$

$$\hat{Y} \approx 31,5^\circ$$

**Funciones**

$$f(x) = y = \sin(x)$$



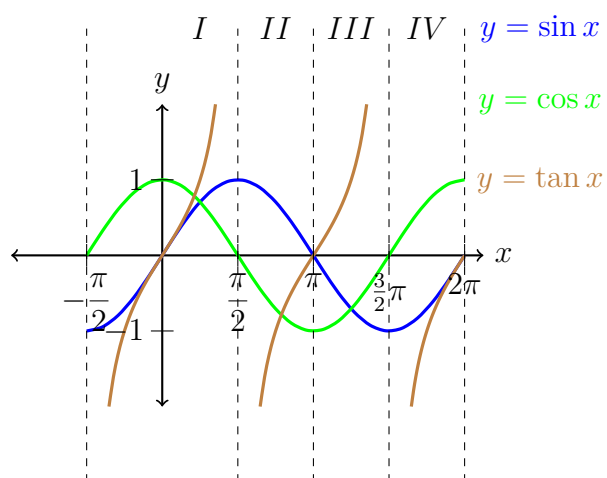
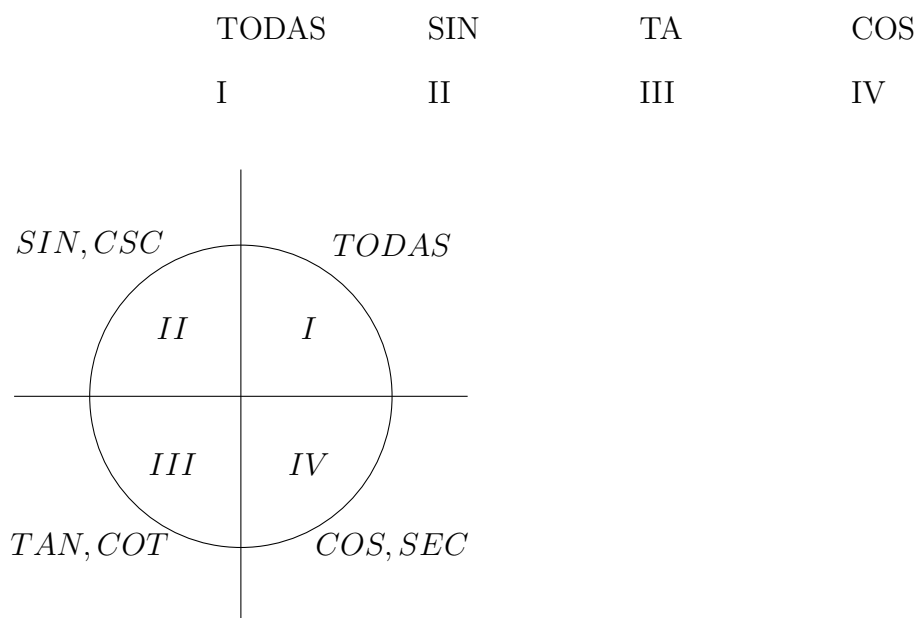
$$\tan(0^\circ) = \frac{\sin(0^\circ)}{\cos(0^\circ)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan(90^\circ) = \frac{\sin(90^\circ)}{\cos(90^\circ)} = \frac{1}{0} = \infty \text{ (indefinido)}$$

$$\tan(180^\circ) = \frac{\sin(180^\circ)}{\cos(180^\circ)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\tan(270^\circ) = \frac{\sin(270^\circ)}{\cos(270^\circ)} = \frac{-1}{0} = -\infty \text{ (indefinido)}$$

*Signos de las funciones trigonométricas*



**Identidades Trigonométricas**

$$3x + 1 = 5x - 4 + 5 - 2x$$

Identidad:  $0=0$ 

$$3x + 1 = 3x + 1$$

**Cumple si**

$$\boxed{x=1 \quad 4=4}$$

$$\boxed{x=0 \quad 1=1}$$

**Identidades Recíprocas.**

$$1. \sin(x) = \frac{1}{\csc(x)} \Rightarrow \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$2. \cos(x) = \frac{1}{\sec(x)} \Rightarrow \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$3. \tan(x) = \frac{1}{\cot(x)} \Rightarrow \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$4. \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$5. \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$6. \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$7. 1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$$

$$8. 1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$$

**Ángulos dobles.**

$$\blacksquare \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\blacksquare \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\blacksquare \tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

**Ejemplo:** Demostrar que  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = \tan(x) \times \cot(x)$ 

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = \tan(x) \times \frac{1}{\tan(x)}$$

Lqqd

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = \cancel{\tan(x)} \times \frac{1}{\cancel{\tan(x)}}$$

$$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)}$$



## Introducción a los límites

Ver el video de [Grandes temas de la matemática: Capítulo 10: Noción de límite](#)

$$\lim_{x \rightarrow a} L$$

Límites laterales:

$$\text{Derecha: } \lim_{x \rightarrow a^+} L_1$$

$$\text{Izquierda: } \lim_{x \rightarrow a^-} L_2$$

$L_1 \neq L_2 \Rightarrow$  No existe el límite de la función en  $x \rightarrow a$

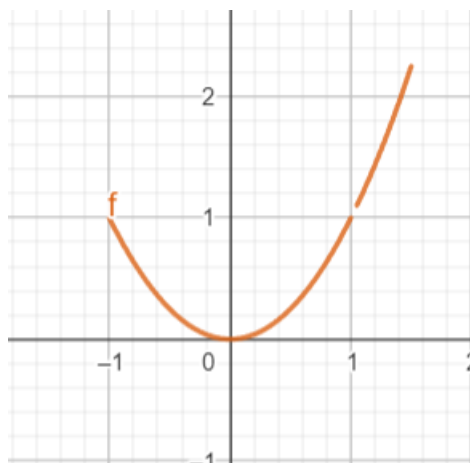
### Ecuación del límite de una función

$$1. \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = 1$$



### Ecuación de un límite

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 1) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 0/0 \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2(2) + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

Conjugado:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - (1)^2}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x - 1)}(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

***Limite al infinito***

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 1}{x - 3x^4 + 2} = \frac{\infty}{\infty} \quad \rightarrow \text{Indefinido}$$

**Dividir todo para el exponente mas alto**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^4} + \frac{x}{x^4} - \frac{1}{x^4}}{\frac{x}{x^4} - \frac{3x^4}{x^4} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0 + 0 - 0}{0 - 3 + 0} = \frac{0}{-3} = 0$$

***Limites Continuidad***

$$\blacksquare f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$1. f(2) = (2)^2 + 1 = 5$$

$$2. \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

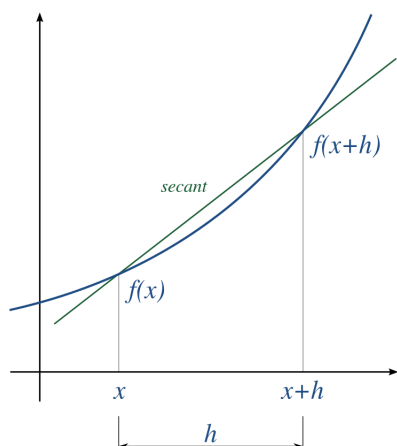
$$\begin{aligned} \exists = \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \quad - > \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 3) = 5 \\ ? \quad \quad \quad - > \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 5 \end{aligned}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

$$5 = 5$$

**La funcion es continua**

## Derivadas



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\tan(x) = \tan(\text{secante}) = \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$$

$$m_{\text{sec}} = \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$$

$$f(x) = 3x + 1$$

$$f(x+h) = 3(x+h) + 1$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x + 3h + 1 - (3x + 1)}{h}$$

$$f(x+h) = 3x + 3h + 1$$