



Universidad de Valparaíso
Instituto de Física y Astronomía
Tarea 2
Introducción a la Relatividad Numérica
Fecha: 09 de junio de 2025



Fecha de Entrega: 25 de junio (hasta la medianoche)

Profesor: Cristian Barrera H.

Instrucciones

**Responder las preguntas a mano, en forma legible y argumentando claramente.
Puede entregar su tarea en papel, o bien enviar su versión escaneada por email a
cristian.barrera@uv.cl.**

Para los siguientes ejercicios considere la métrica de Schwarzschild, la cual, en términos de las coordenadas estándar de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) , está dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2GM/r} + r^2 d\Omega^2. \quad (1)$$

1. Es posible asociar una entropía S a un agujero negro, la cual da cuenta de la información de la materia-energía que ha cruzado el horizonte de eventos y que no puede volver a salir. Esta viene dada por la famosa fórmula de Bekenstein-Hawking

$$S = \frac{k_B}{L_p^2} \frac{A}{4}, \quad (2)$$

donde A es el área del horizonte de eventos del agujero negro, k_B la constante de Boltzmann $L_p \equiv \sqrt{\hbar G/c^3}$ es la *longitud de Planck*, siendo \hbar la constante reducida de Planck, c la velocidad de la luz en el vacío, y G la constante de gravitación universal. En lo siguiente, puede utilizar unidades donde $G = c = \hbar = k_B = 1$.

- (a) Calcule el área del horizonte de eventos del agujero negro de Schwarzschild en términos de su masa.
- (b) Escriba la entropía del agujero (2) en términos de su masa. Muestre que la entropía aumenta al aumentar la masa del agujero.
- (c) ¿Es este resultado consistente con la segunda ley de la Termodinámica? ¿Qué implicancias tiene esto último sobre el área del agujero negro?

Pregunta 1: 2 puntos

2. Considere la métrica de Schwarzschild (1).

- (a) Calcule explícitamente los siguientes símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{tt}^r, \quad \Gamma_{tr}^t, \quad \Gamma_{rr}^r, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta, \quad \Gamma_{r\phi}^\phi, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta.$$

Puede hacerlo a mano, o bien utilizar *simpy* (ver jupyter notebook del Taller 1).

Pregunta 2: 2 puntos

3. (a) Utilizando los símbolos de Christoffel calculados en el ejercicio anterior, calcule las componentes del tensor de Ricci R_{tt} , R_{rr} y muestre que son cero (puede hacerlo a mano, o bien utilizar *simpy*).
- (b) Argumente, o muestre, que el resto de componentes del tensor de Ricci también son cero.
- (c) Utilice el resultado anterior para mostrar que la métrica de Schwarzschild (1), es efectivamente una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Pregunta 3: 2 puntos