Цель работы

Построить математическую модель гармонического осциллятора на языке программирования Julia и посредством ПО OpenModelica.

Задание

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

$\ddot{x} + 9.2x = 0$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

$\ddot{x} + 10\dot{x} + 11x = 0$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

$\ddot{x} + \dot{x} + x = 3\sin(t)$

Теоретическое введение

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону.

Уравнение гармонического колебания имеет вид:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

или

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где:

- (x) — отклонение колеблющейся величины в текущий момент времени (t) от среднего за период значения (например, в кинематике — смещение, отклонение точки от положения равновесия);
- (A) — амплитуда колебания, то есть максимальное за период отклонение колеблющейся величины от среднего за период значения, размерность (A) совпадает с размерностью (x);
- (\omega) (рад/с, град/с) — циклическая частота, показывающая, на сколько радиан (градусов) изменяется фаза колебания за 1 секунду;
- ((\omega t + \varphi_0) = \varphi) (рад, град) — полная фаза колебания (сокращённо — фаза, не путать с начальной фазой);
- (\varphi_0) (рад, град) — начальная фаза колебаний, которая определяет значение полной фазы колебания (и самой величины (x)) в момент времени (t = 0).

Дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания, имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

[@wiki_bash]

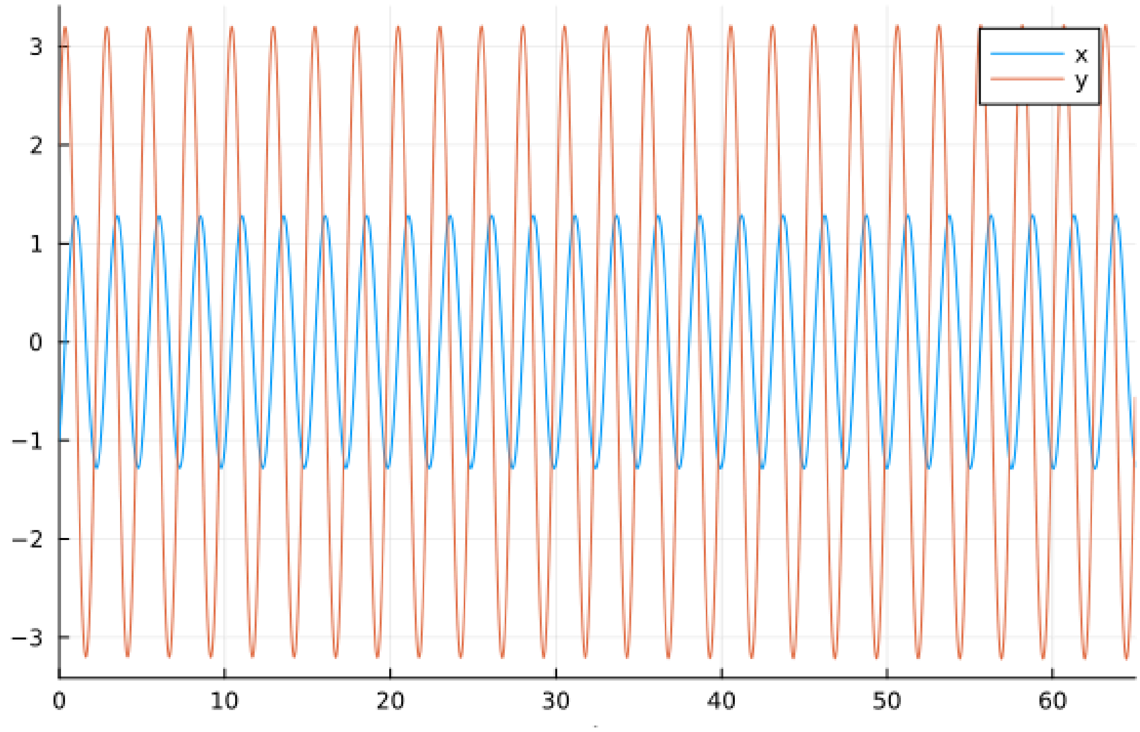
Выполнение лабораторной работы

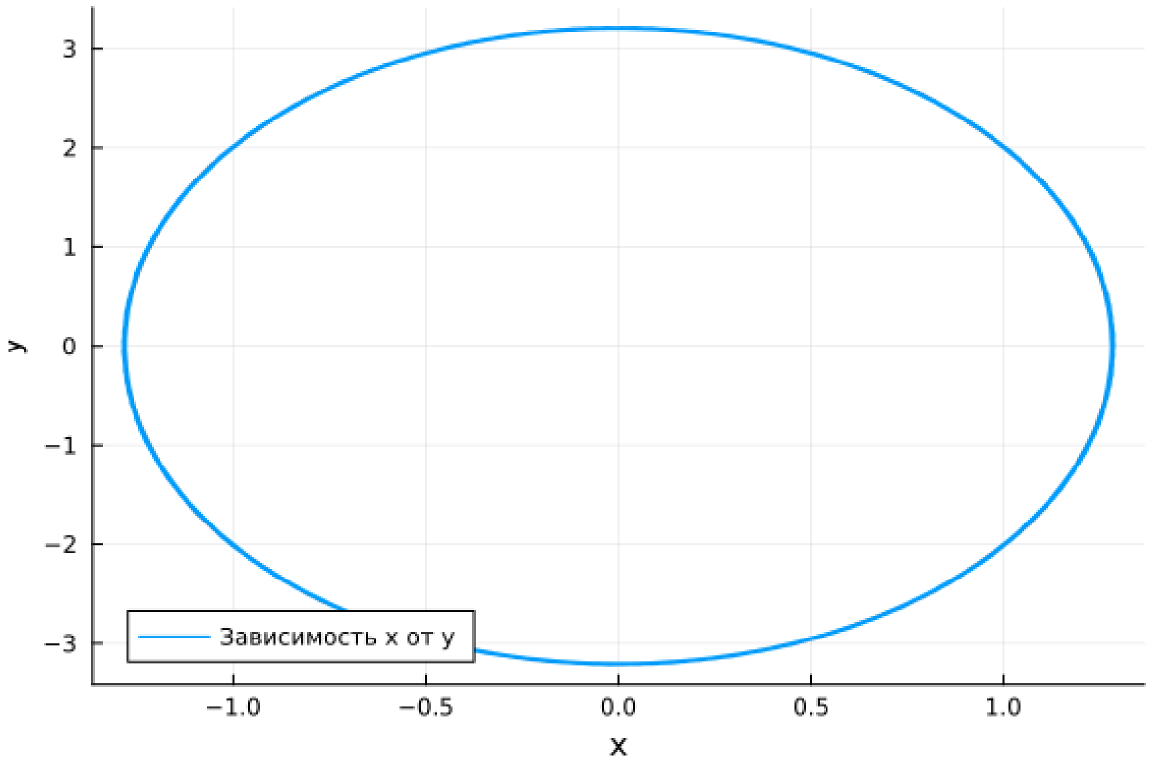
Модель колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

Для начала реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
%%writefile lab4.jl

# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# Начальные условия
tspan = (0,65)
u0 = [-1, 2]
p1 = [0, 2.5]

# Задание функции
function f1(u, p, t)
    x, y = u
    g, w = p
    dx = y
    dy = -g .*y - w^2 .*x
    return [dx, dy]
end

# Постановка проблемы и ее решение
problem1 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p1)
sol1 = solve(problem1, Tsit5(), saveat = 0.05)

# Построение графика
plot(sol1, label=["x" "y"])
savefig("lab4_1.png")

plot(sol1, idxs = (1,2), xaxis="x", yaxis= "y", label = "Зависимость x от y ")

savefig("lab4_2.png")
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [-@fig:002]) и его фазового портрета (рис. [-@fig:003]).



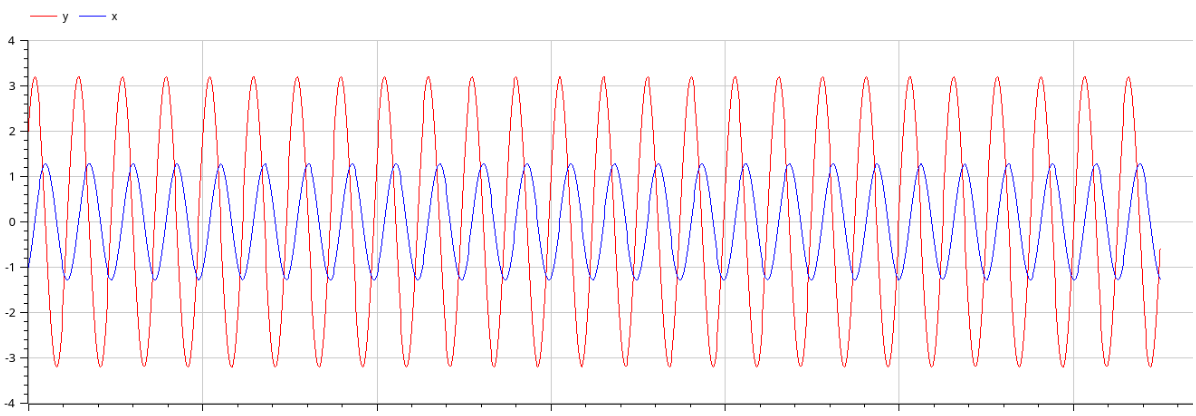


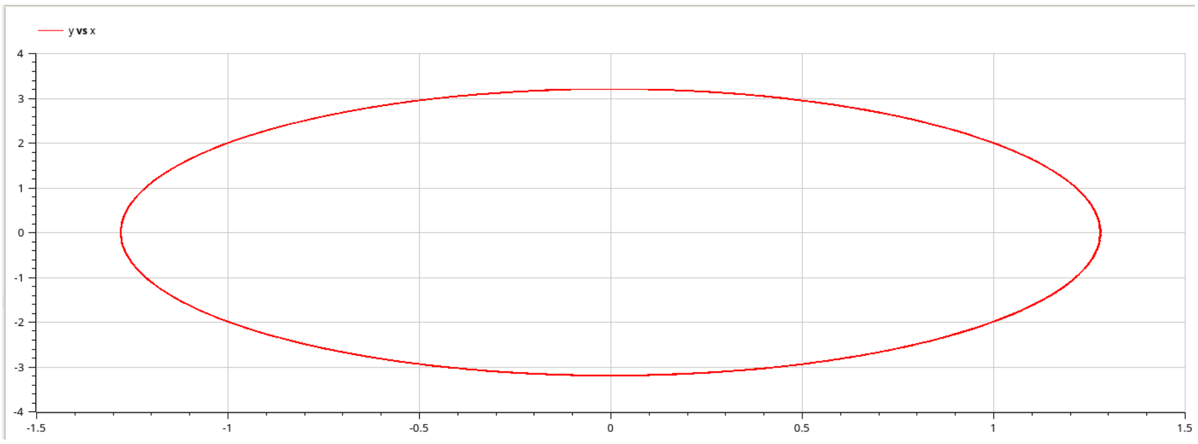
Можно заметить, что колебание осциллятора периодично, график не задухает.

Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model lab4_1

  parameter Real g = 0;
  parameter Real w = 2.5;
  parameter Real x0 = -1;
  parameter Real y0 = 2;
  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
    der(x) = y;
    der(y) = -g .*y - w^2 .*x;
end lab4_1;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [-@fig:004]) и его фазового портрета (рис. [-@fig:005]).



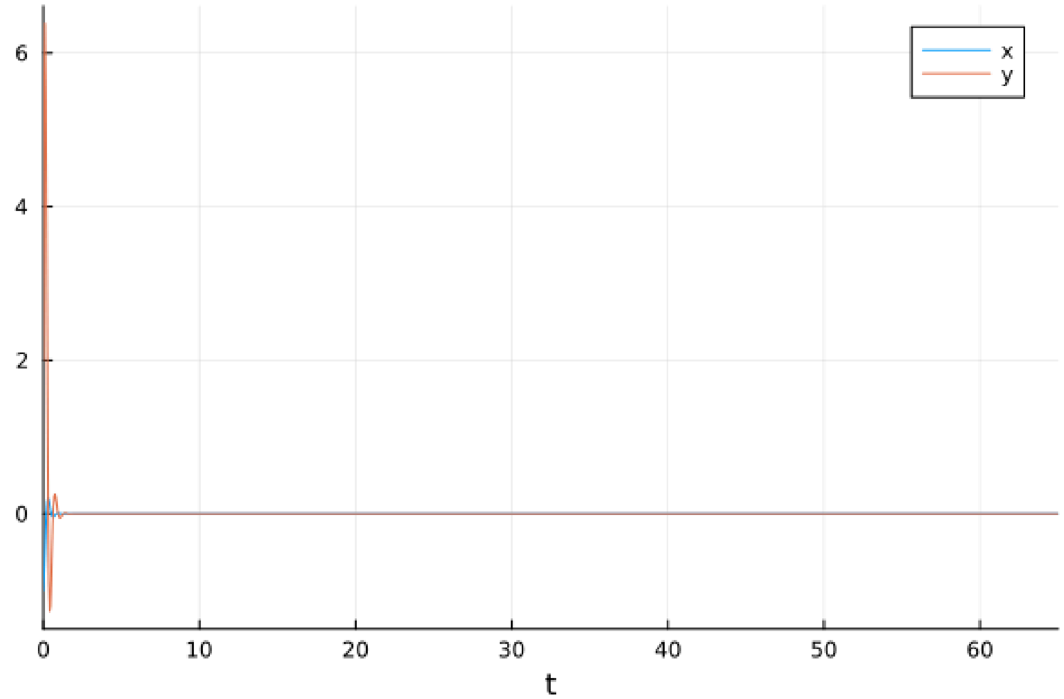


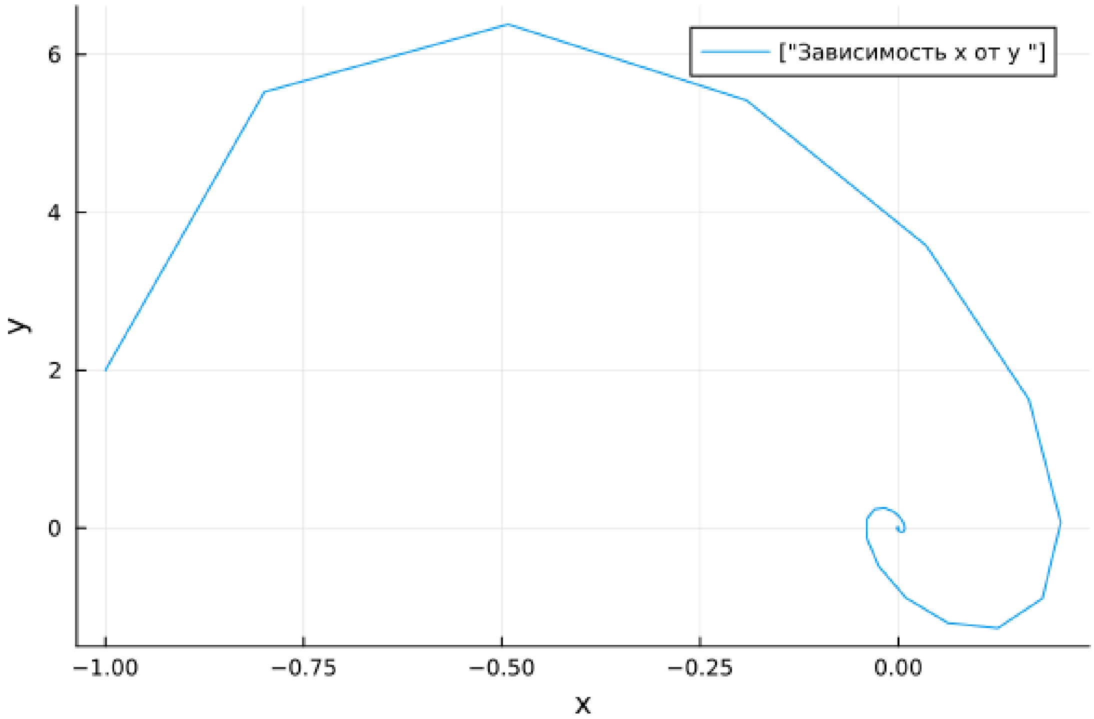
Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

Реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
%%writefile lab4_2.jl
# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# Начальные условия
tspan = (0,65)
u0 = [-1, 2]
p2 = [10, 11]

# Задание функции
function f1(u, p, t)
    x, y = u
    g, w = p
    dx = y
    dy = -g .*y - w^2 .*x
    return [dx, dy]
end

# Постановка проблемы и ее решение
problem2 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p2)
sol2 = solve(problem2, Tsit5(), saveat = 0.05)
plot(sol2, label=["x" "y"])
savefig("lab4_2.png")

plot(sol2, idxs=(1,2), xaxis = "x", yaxis= "y", label=["Зависимость x от y "])
savefig("lab4_3.png")
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [-@fig:007]) и его фазового портрета (рис. [-@fig:008]).



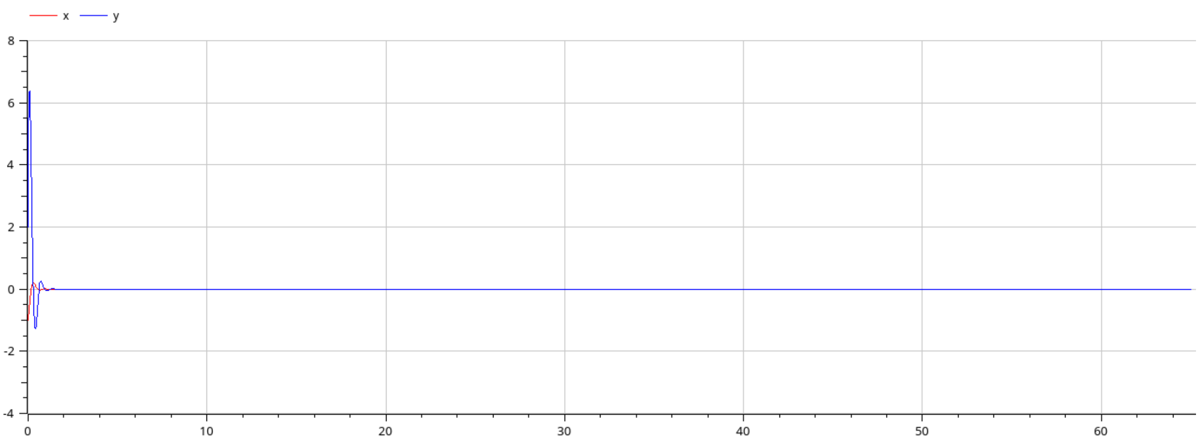


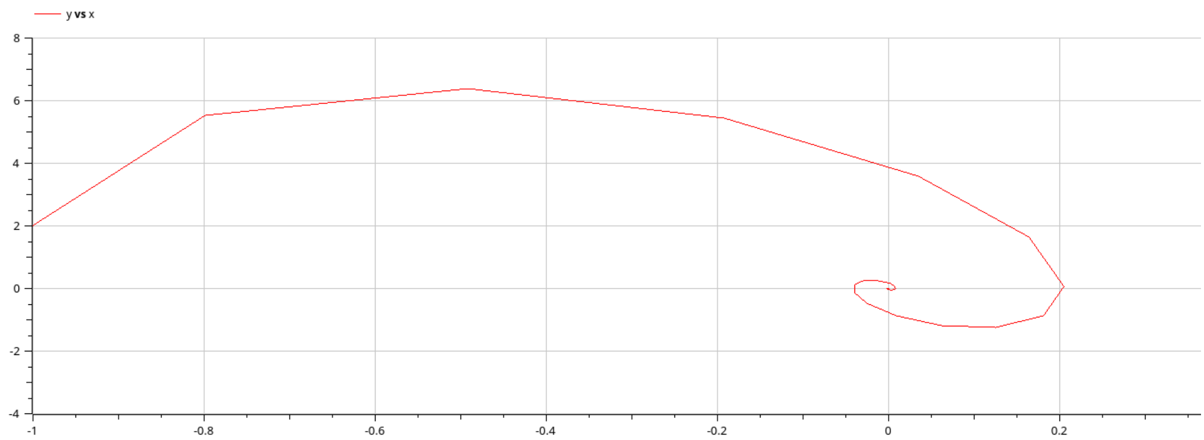
В этом случае сначала происходят колебания осциллятора, а затем график затухает, поскольку у нас есть параметр, отвечающий за потери энергии.

Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model lab4_2
  parameter Real g = 10;
  parameter Real w = 11;
  parameter Real x0 = -1;
  parameter Real y0 = 2;
  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
    der(x) = y;
    der(y) = -g .*y - w^2 .*x;
end lab4_2;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [-@fig:009]) и его фазового портрета (рис. [-@fig:010]).



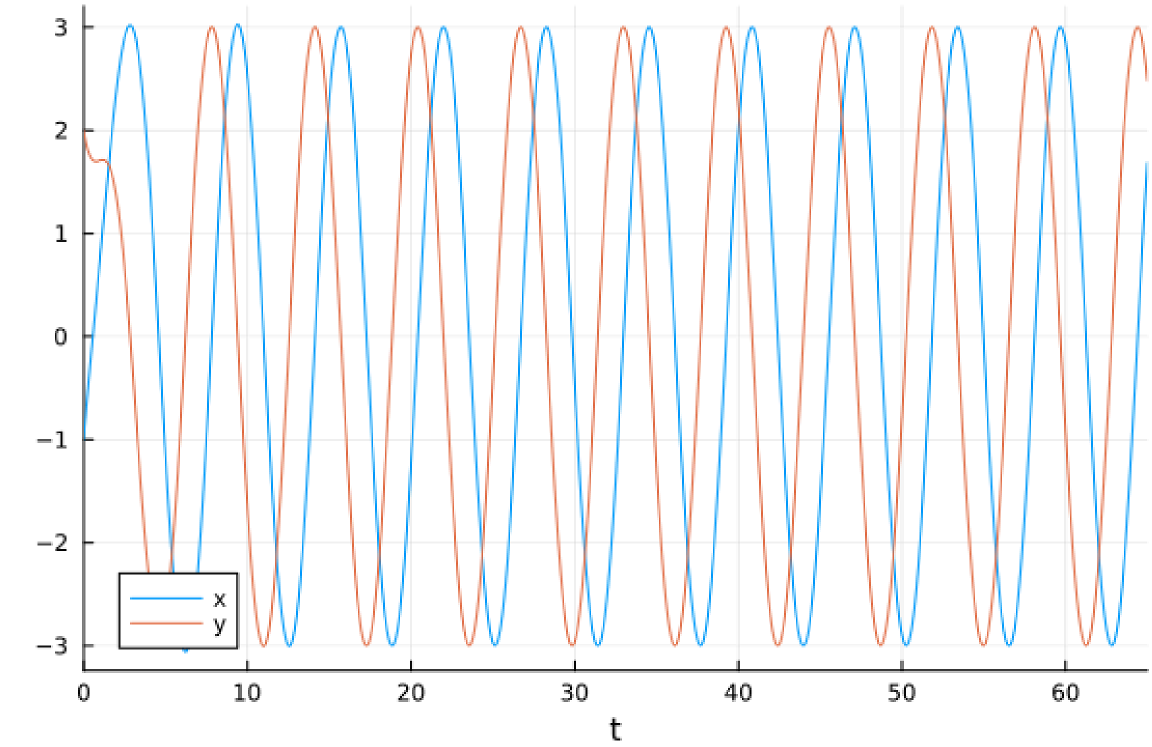


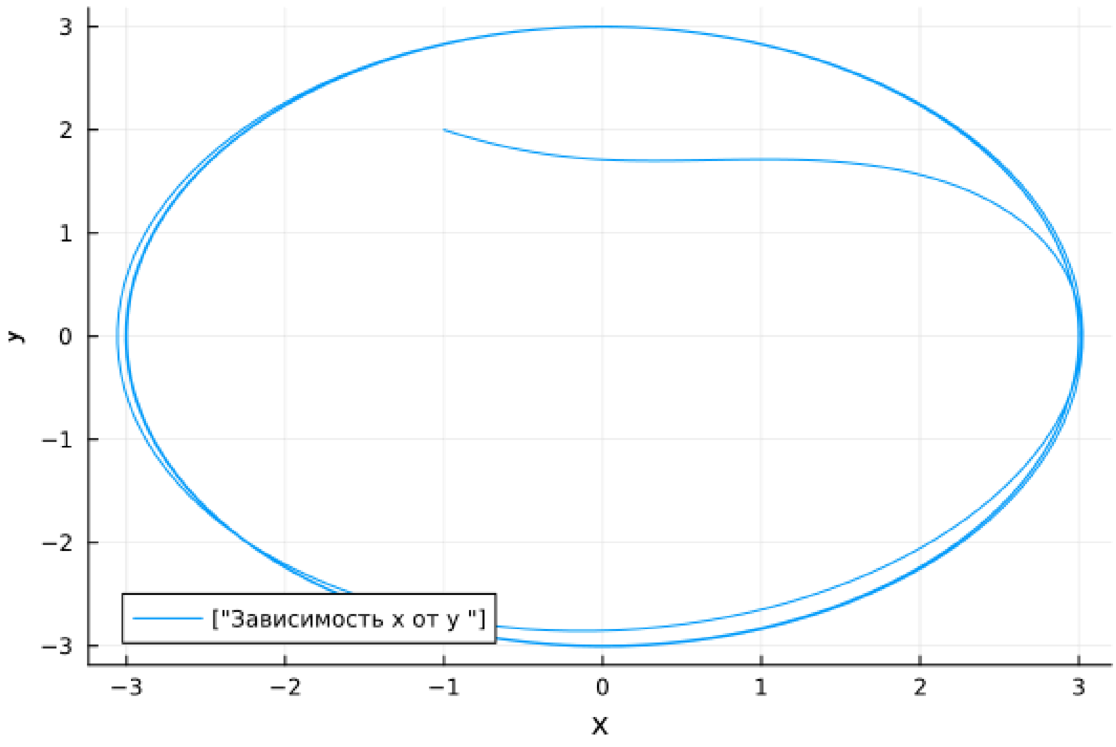
Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
%%writefile lab4_3.jl

# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# Начальные условия
tspan = (0,65)
u0 = [-1, 2]
p3 = [1, 1]

# Функция, описывающая внешние силы, действующие на осциллятор
f(t) = 3*sin(t)

# Задание функции
function f2(u, p, t)
    x, y = u
    g, w = p
    dx = y
    dy = -g .*y - w^2 .*x .+f(t)
    return [dx, dy]
end

# Постановка проблемы и ее решение
problem3 = ODEProblem(f2, u0, tspan, p3)
sol3 = solve(problem3, Tsit5(), saveat = 0.05)

plot(sol3, label=["x" "y"])
savefig("lab4_4.png")

plot(sol3, idxs=(1,2), xaxis = "x", yaxis= "y", label=["Зависимость x от y "])
savefig("lab4_5.png")
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [-@fig:012]) и его фазового портрета (рис. [-@fig:013]).



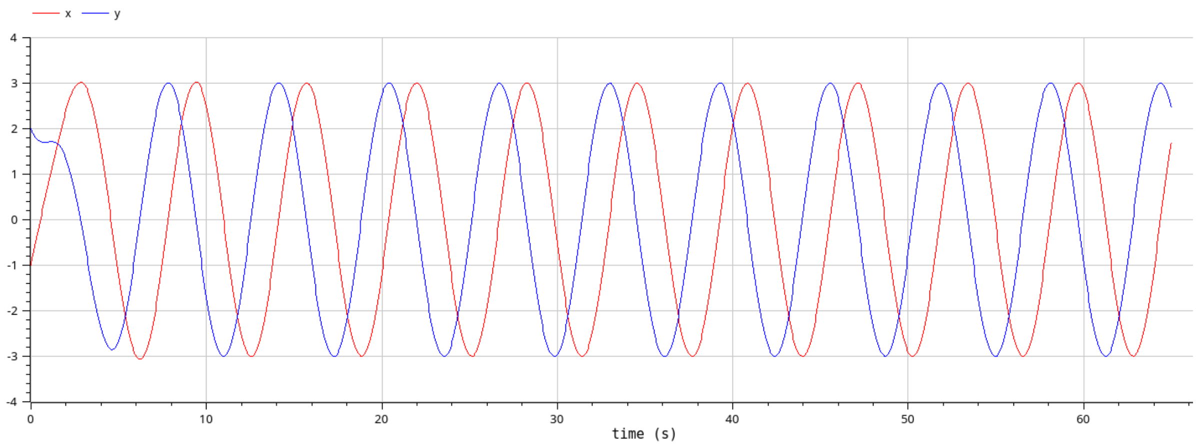


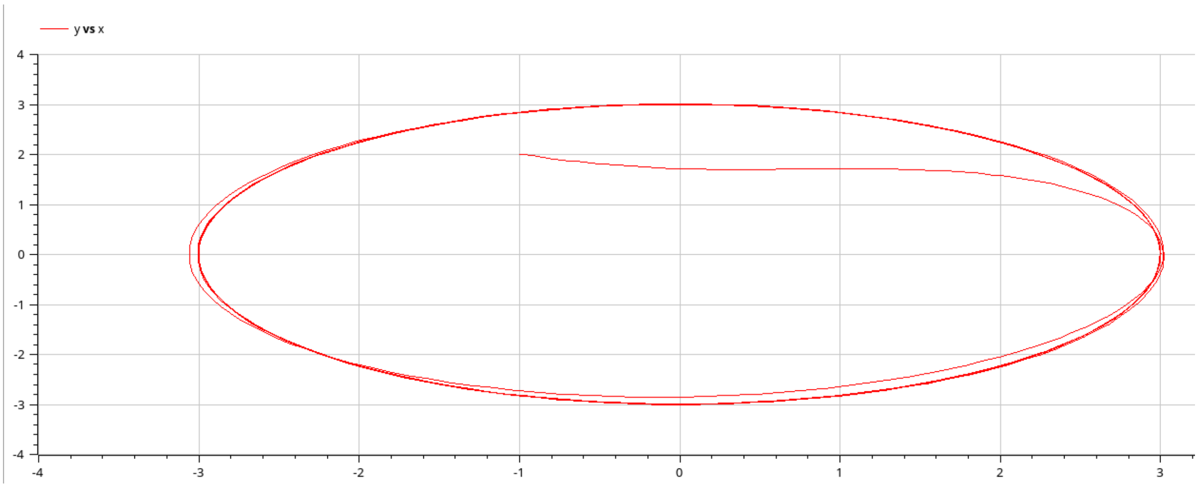
В этом случае сначала происходят колебания осциллятора, а затем график затухает, поскольку у нас есть параметр, отвечающий за потери энергии.

Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model lab4_2
  parameter Real g = 10;
  parameter Real w = 11;
  parameter Real x0 = -1;
  parameter Real y0 = 2;
  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
    der(x) = y;
    der(y) = -g .*y - w^2 .*x;
end lab4_2;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [-@fig:014]) и его фазового портрета (рис. [-@fig:015]).





Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель гармонического осциллятора.

Список литературы{.unnumbered}

::: {#refs}
:::