

Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

Задание

Вариант 5

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров.

Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 6,2 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 2,5 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка А равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки Р такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки А [wiki:bash].

Выполнение лабораторной работы

Запишем уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Примем, что

$t_0 = 0$, $x_0 = 0$ — место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,
 $x_{k0} = k = 6.2$ км — расстояние от катера береговой охраны до лодки в этот момент.

Введём полярные координаты. За полюс примем точку обнаружения лодки. Полярная ось r проходит через точку, где находится катер. В этой системе координат задача упрощается.

Траектория катера должна быть построена так, чтобы в момент перехвата он находился на том же расстоянии от полюса и под тем же углом θ , что и лодка. Поэтому сначала катер должен двигаться по прямой, чтобы оказаться на том же расстоянии от полюса, что и лодка. После этого он начинает двигаться по спирали, удаляясь от полюса с той же радиальной скоростью, что и лодка.

Пусть через время t лодка и катер оказываются на расстоянии x от полюса.

- Лодка проходит: x
- Катер:
 - $k - x$, если он позади
 - $k + x$, если он впереди

Так как время одно и то же, приравниваем:

****Случай 1 (катер позади лодки):****

$$x / v = (k - x) / (2.5 \cdot v)$$

$$\Rightarrow x = k / 3.5 = 6.2 / 3.5 \approx 1.77 \text{ км}$$

****Случай 2 (катер впереди лодки):****

$$x / v = (k + x) / (2.5 \cdot v)$$

$$\Rightarrow x = k / 1.5 = 6.2 / 1.5 \approx 4.13 \text{ км}$$

Переход к полярной модели

После достижения одного и того же расстояния от полюса, катер начинает двигаться по спирали.

Разложим его скорость на:

- Радиальную: $v_r = dr/dt = v$
- Тангенциальную: $v_\tau = r \cdot d\theta/dt$

Так как полная скорость катера $2.5v$, по теореме Пифагора:

$$v_\tau = \sqrt{(2.5v)^2 - v^2} = \sqrt{6.25v^2 - v^2} = \sqrt{5.25} \cdot v$$

$$\Rightarrow r \cdot d\theta/dt = \sqrt{5.25} \cdot v$$

Итоговая система дифференциальных уравнений

$$dr/dt = v$$

$$d\theta/dt = (\sqrt{5.25} \cdot v) / r$$

С начальными условиями:

- Случай 1:

$r_0 = 6.2 / 3.5$, $\theta_0 = 0$

- Случай 2:

$r_0 = 6.2 / 1.5$, $\theta_0 = -\pi$

Исключив t , получаем:

$$dr/d\theta = r / \sqrt{5.25}$$

Это уравнение описывает спиральную траекторию катера в полярных координатах.

Построение модели:

```
using DifferentialEquations, Plots;
# Расстояние от лодки до катера
k = 6.2
# Начальные условия для 1 и 2 случаев
r0 = k / 3.5      # случай 1
theta0 = (0.0, 2π)
theta0_2 = (-π, π)

# Угол движения лодки браконьеров
fi = 3π / 4

# Время моделирования (не используется явно, но может пригодиться)
t = (0.0, 50.0)

# Функция, описывающая движение лодки браконьеров (прямая линия под углом fi)
x(t) = tan(fi) * t

# Функция, описывающая движение катера береговой охраны
f(r, p, t) = r / sqrt(5.25)

# Постановка задачи и решение ОДУ для случая 1
prob = ODEProblem(f, r0, theta0)
sol = solve(prob, saveat=0.01)

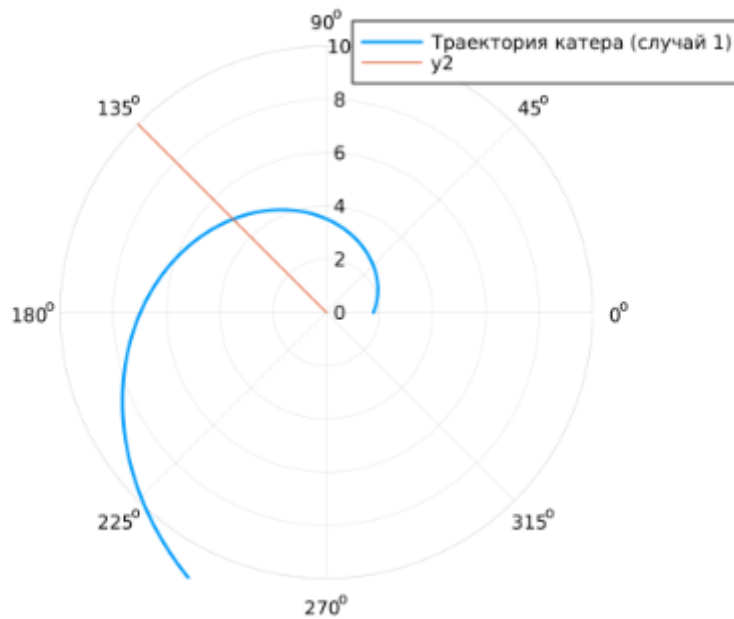
# Построение траектории катера
plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 10), label="Траектория катера (случай 1)", linewidth=2)

# Построение траектории лодки браконьеров
r_lims = 0:0.1:10          # distancias (cómo de lejos va la lancha)
theta_lims = [fi for _ in r_lims] # ángulo constante
plot!(theta_lims, r_lims, proj=:polar)

# точное решение для случая 1
y(theta) = (620 / 350) * exp(theta / sqrt(5.25))
```

```
# точка пересечения
r_intersection = y(fi)
println("Точка пересечения: r = ", r_intersection)
```

В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:001]):



точка пересечения лодки и катера для 1 случая = 4.9535966308266906

Теперь перейдем к решению в случае 2.

```
using DifferentialEquations, Plots

# Расстояние от лодки до катера
k = 6.2

# Начальные условия для случая 2
r0_2 = k / 1.5          # = 620 / 150
theta0_2 = (-π, π)

# Угол движения лодки
fi = 3π / 4

# Функция описания движения катера
f(r, p, t) = r / sqrt(5.25)

# Постановка задачи и решение ОДУ для случая 2
prob2 = ODEProblem(f, r0_2, theta0_2)
sol2 = solve(prob2, saveat=0.01)

# Построение траектории катера
plot(sol2.t, sol2.u, proj=:polar, lims=(0, 12), label="Траектория катера
(случай 2)", linewidth=2)

# Траектория лодки браконьеров (прямая под углом fi)
r_lims = 0:0.1:10
theta_lims = [fi for _ in r_lims]
```

```

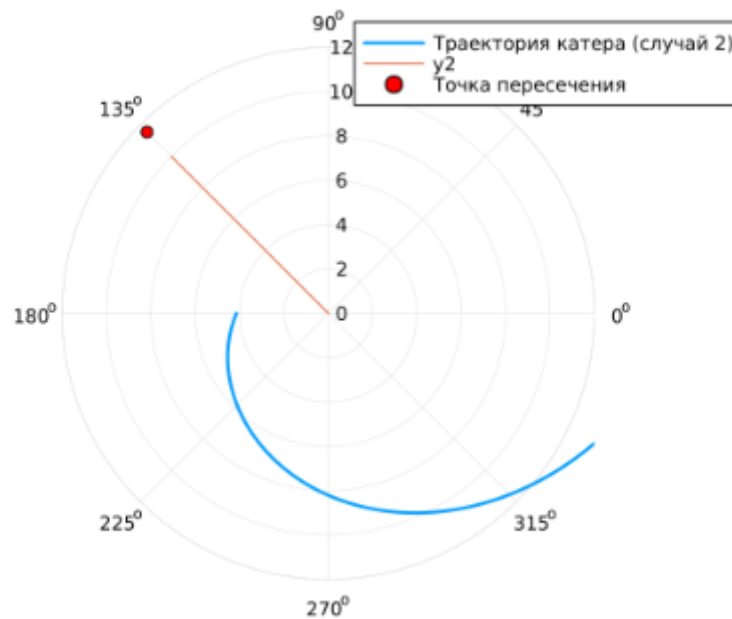
plot!(theta_lims, r_lims, proj=:polar)

# Точное решение (аналитическая формула)
y2(theta) = (620 / 150) * exp((theta + π) / sqrt(5.25))

# Точка пересечения с лодкой
r_intersection_2 = y2(fi - π)
println("Точка пересечения (случай 2): r = ", r_intersection_2)
scatter!([fi], [r_intersection_2], proj=:polar, label="Точка пересечения",
color=:red)

```

точка пересечения лодки и катера для 2 случая= 11.558392138595613



Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

Список литературы{.unnumbered}

::: {#refs}

:::