Цель работы

Построить математическую модель Лотки-Вольерры на языке прогаммирования Julia и посредством ПО OpenModelica.

Задание

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.16x(t) + 0.045x(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.36y(t) - 0.033x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв,
а также графики изменения численности хищников и численности жертв при
следующих начальных условиях: x0 =10, y0= 15   Найдите стационарное
состояние системы

Теоретическое введение

Моде́ль Ло́тки — Вольте́рры (модель Ло́тки — Вольтерра́[1]) — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь своих авторов (Лотка, 1925; Вольтерра 1926), которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга.

Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами[2].

В математической форме предложенная система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{cases}$$

где

- (x) — количество жертв,
- (y) — количество хищников,
- (t) — время,
- (alpha, \beta, gamma, delta) — коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами

[@wiki]

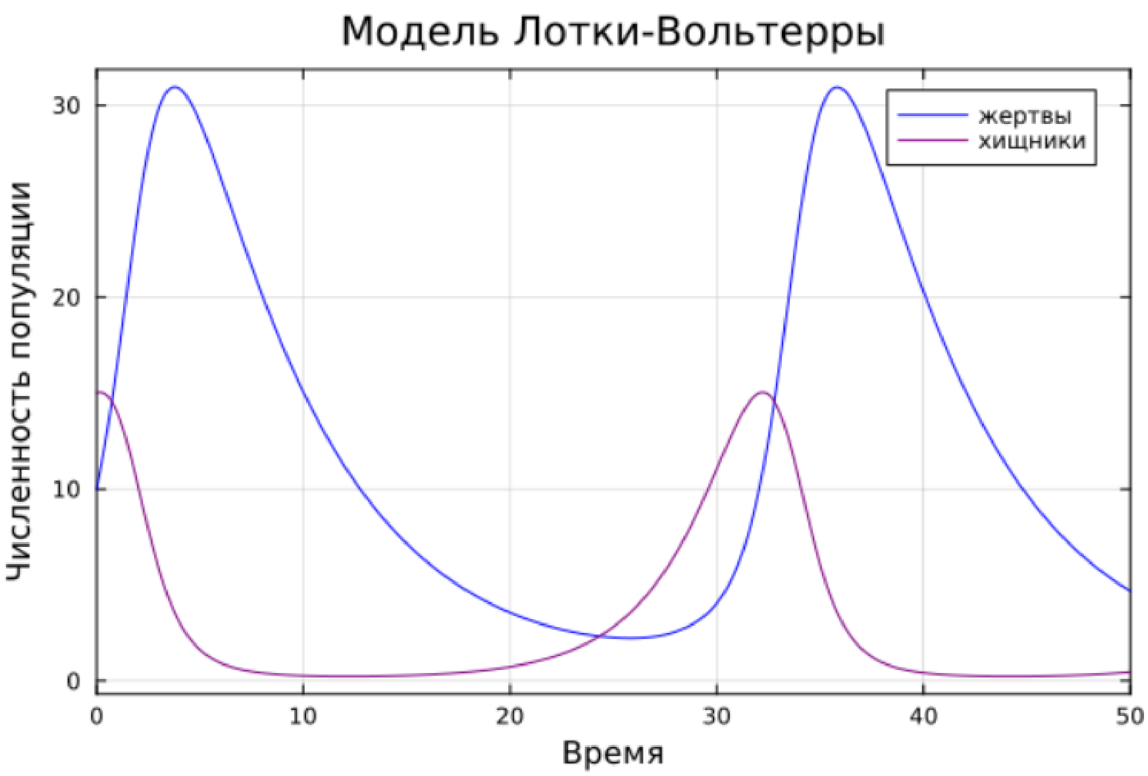
Выполнение лабораторной работы

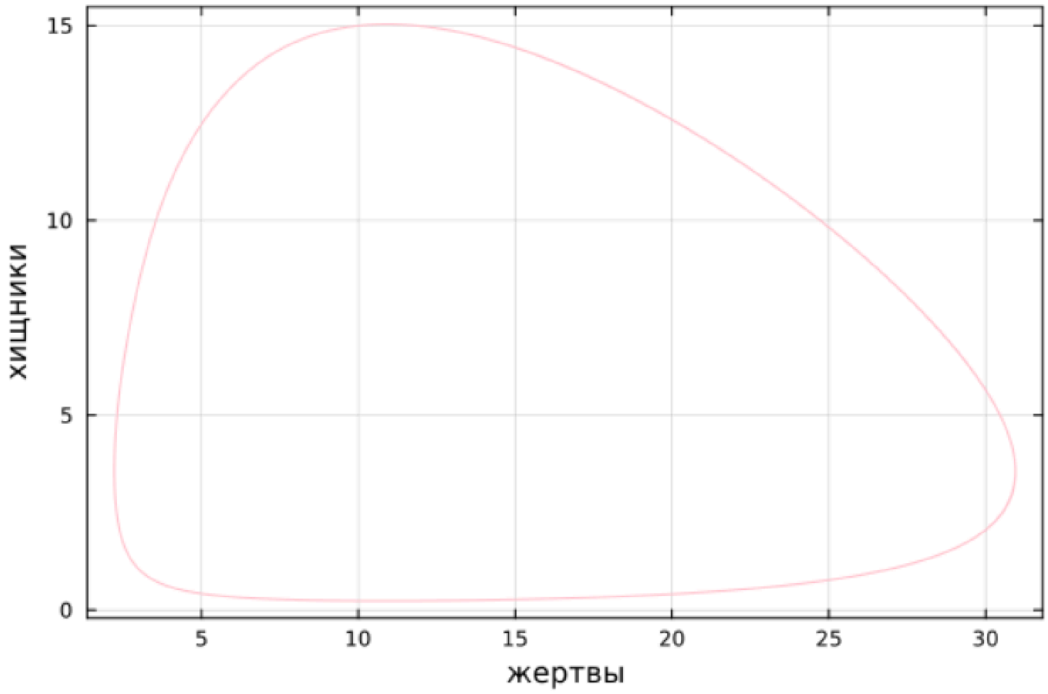
Для начала реализуем эту модель на языке программирования Julia.

Напишем код для решения системы ДУ, используя библиотеку DifferentialEquations.jl, а затем построим графики с помощью библиотеки Plots.

```
# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# задания системы ДУ, описывающей модель Лотки-Вольтерры
function LV(u, p, t)
    x, y = u
    a, b, c, d = p
    dx = a*x - b*x*y
    dy = -c*y + d*x*y
    return [dx, dy]
end

# Начальные условия
u0 = [10,15]
p = [-0.16, -0.045, -0.36, -0.033]
tspan = (0.0, 50.0)
prob = ODEProblem(LV, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, Tsit5())

x_c = p[3]/p[4]
y_c = p[1]/p[2]
u0_c = [x_c, y_c]
prob2 = ODEProblem(LV, u0_c, tspan, p)
sol2 = solve(prob2, Tsit5())



# Постановка проблемы и ее решение
plot(sol, title = "Модель Лотки-Вольтерры", xaxis = "Время", yaxis = "Численность популяции", label = ["жертвы" "хищники"], c = ["blue" "purple"], box =:on)

savefig("lab5.png")
plot(sol, idxs= (1,2), xaxis= "жертвы", yaxis= "хищники", legend= false, color= "pink", box =:on )
savefig("lab5_2")

plot(sol2, xaxis = "Жертвы", yaxis = "Хищники", label = ["Жертвы" "Хищники"], c = ["blue" "purple"], box =:on)
savefig("lab5_3")

plot((x_c, y_c), seriestype=:scatter, xlims= (3,15), ylims=(3,15), box= :on, c= "pink", markersize=10, label= " Стационарная точка")
savefig("lab5_4")
```

В результате получаем следующие графики изменения численности хищников и численности жертв (рис. [-@fig:004]) и зависимости численности хищников от численности жертв (рис. [-@fig:005]).





Графики периодичны, фазовый портрет замкнут, как и должно быть в жесткой модели Лотки-Вольтерры.

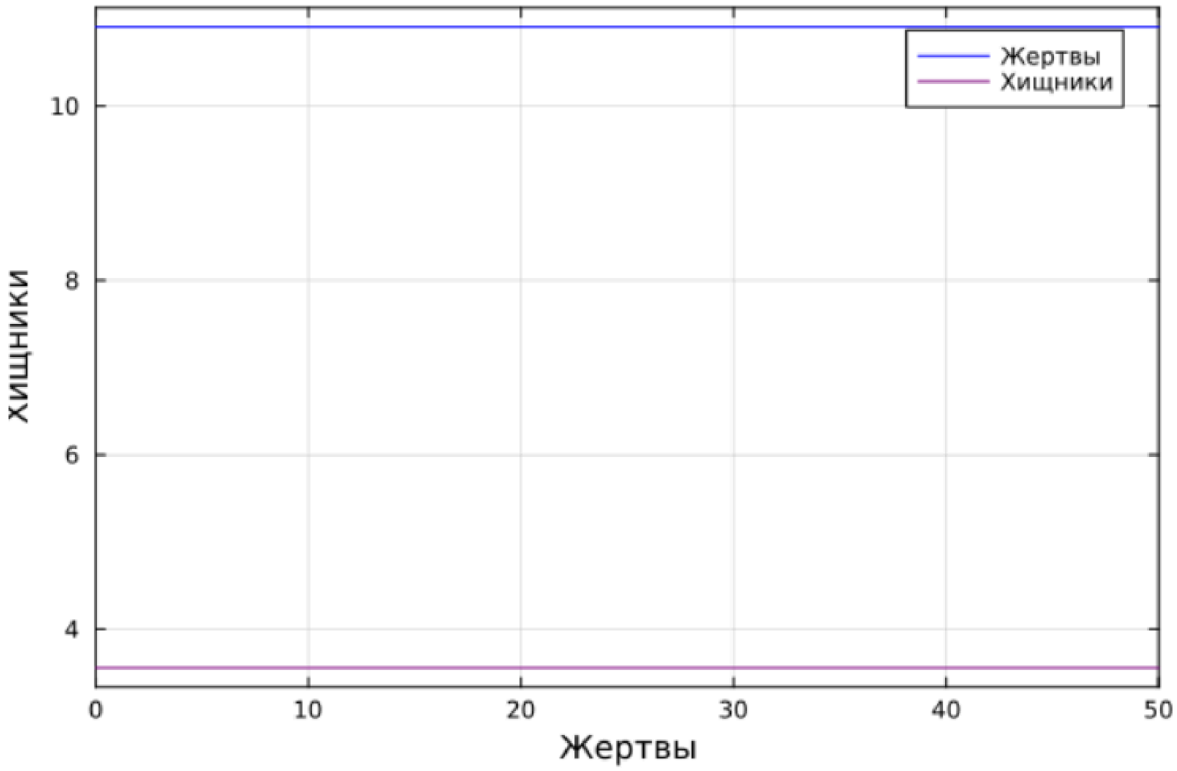
Далее найдем стационарное состояние системы по формуле:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\gamma}{\delta} \\ y_0 = \dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

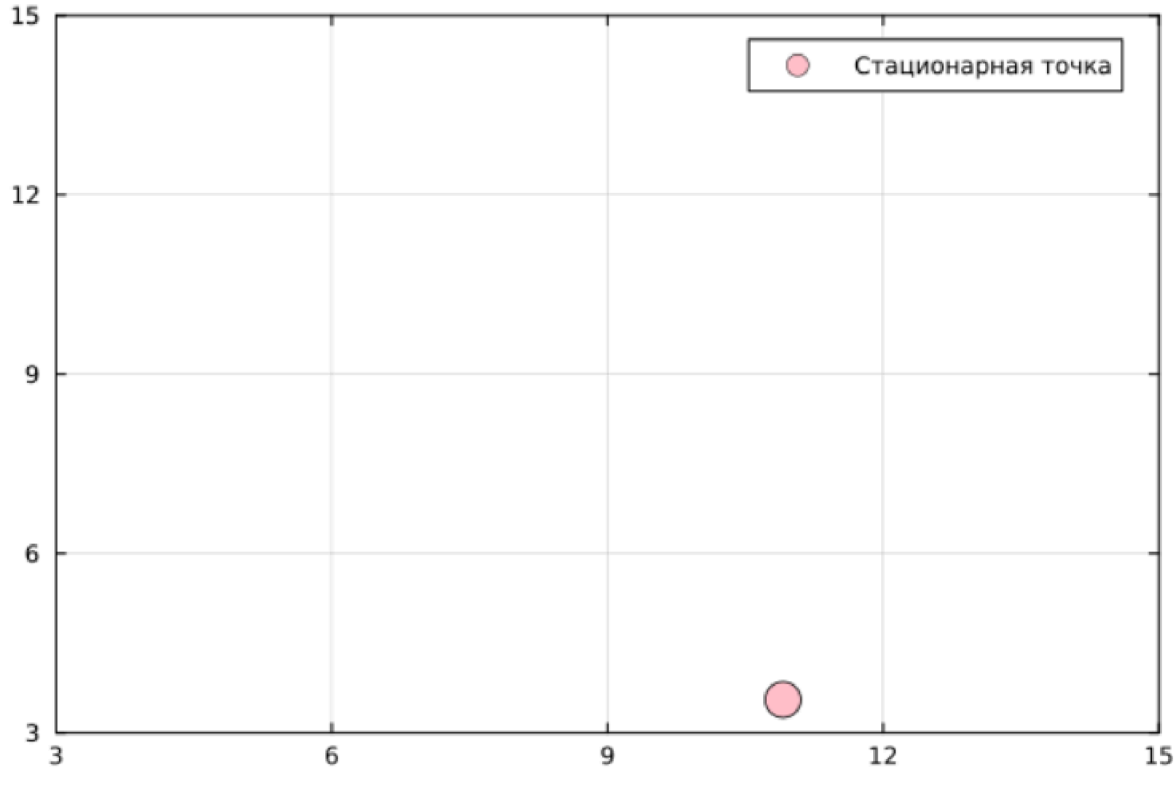
Проверим, что эта точка действительно является стационарной, подставив ее в начальные условия.

```
x_c = p[3]/p[4]
y_c = p[1]/p[2]
u0_c = [x_c, y_c]
prob2 = ODEProblem(LV, u0_c, tspan, p)
sol2 = solve(prob2, Tsit5())
```

Получим график из двух прямых, параллельных оси абсцисс, то есть численность и жертв, и хищников не меняется, как м должно быть в стационарном состоянии (рис. [-@fig:008])



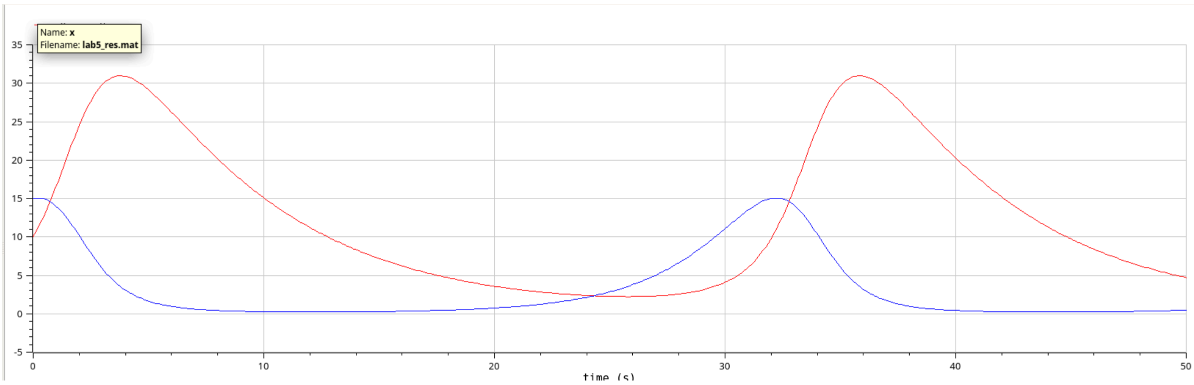
Фазовый портрет в стационарном состоянии выглядит следующим образом (рис. [-@fig:009]).

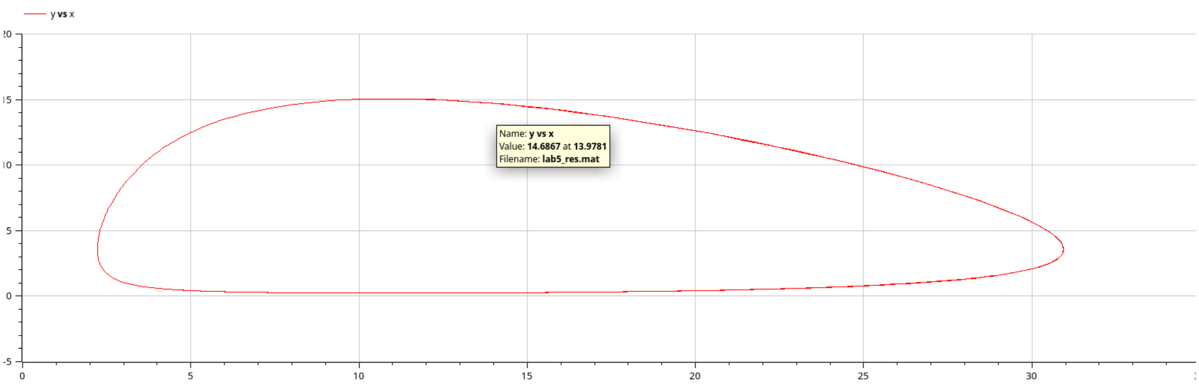


Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model lab5

  parameter Real a = -0.16;
  parameter Real b = -0.045;
  parameter Real c = -0.36;
  parameter Real d = -0.033;
  parameter Real x0 = 10;
  parameter Real y0 = 15;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
    der(x) = a*x - b*x*y;
    der(y) = -c*y + d*x*y;

end lab5;
```

Выполним симуляцию на интервале от (0, 50), который брали для Julia и получим следующие графики изменения численности хищников и численности жертв (рис. [-@fig:011]) и зависимости численности хищников от численности жертв (рис. [-@fig:012]).



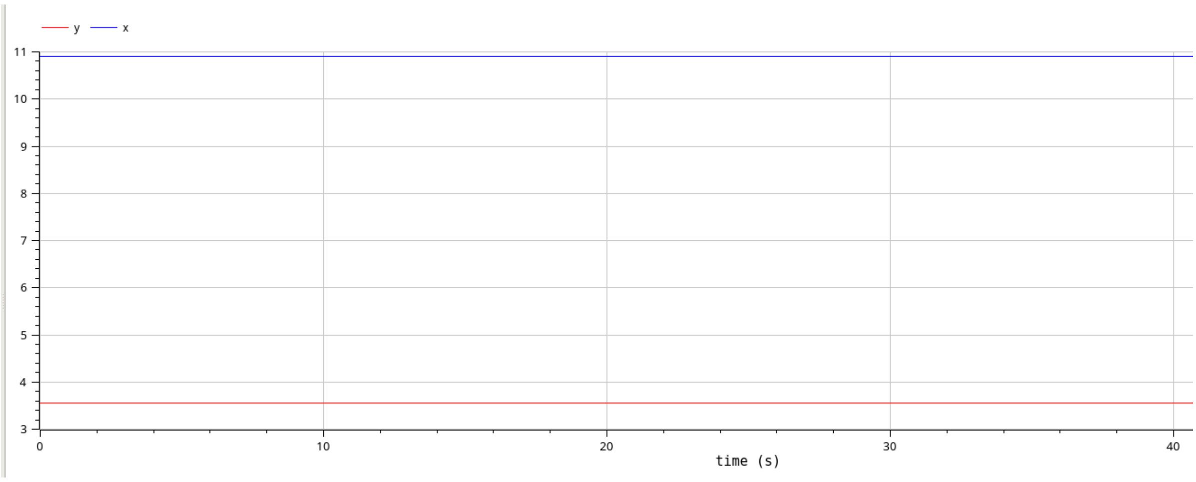


Графики периодичны, фазовый портрет замкнут, как и должно быть в жесткой модели Лотки-Вольтерры.

Также построим тут изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии.

```
model lab5_2
  parameter Real a = -0.16;
  parameter Real b = -0.045;
  parameter Real c = -0.36;
  parameter Real d = -0.033;
  parameter Real x0 = 0.36/0.033;
  parameter Real y0 = 0.16/0.045;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
    der(x) = a*x - b*x*y;
    der(y) = -c*y + d*x*y;
end lab5_2;
```

Получим график, в котором численность жертв и хищников постоянна(рис. [-@fig:014]).



Сравнение построения модели на Julia и в OpenModelica

Полученные графики идентичны.

Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель Лотки-Вольтерры на Julia и в OpenModelica.

Список литературы{.unnumbered}

::: {#refs}
:::