Цель работы

Исследовать модель эффективности рекламы.

Задание

Построить график распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением:

1. $$\frac{dn}{dt} = \left(0.77 + 0.00017n(t)\right)\left(N - n(t)\right)$$
2. $$\frac{dn}{dt} = \left(0.000055 + 0.29n(t)\right)\left(N - n(t)\right)$$
3. $$\frac{dn}{dt} = \left(0.5 \cdot t + 0.3 \cdot t \cdot n(t)\right)\left(N - n(t)\right)$$

При этом объем аудитории N= 610, в начальный момент о товаре знает 10 человек. Для случая 2 определить в какой момент времени скорость распространения рекламы будет иметь максимальное значение.

Теоретическое введение

Пусть некая фирма начинает рекламировать новый товар. Необходимо, чтобы прибыль от будущих продаж покрывала издержки на дорогостоящую кампанию. Ясно, что вначале расходы могут превышать прибыль, поскольку лишь малая часть потенциальных покупателей будет информирована о новом товаре. Затем, при увеличении числа продаж, уже возможно рассчитывать на заметную прибыль, и, наконец, наступит момент, когда рынок насытится, и рекламировать товар далее станет бессмысленно.

Модель рекламной кампании основывается на следующих основных предположениях. Считается, что величина
[
\frac{dN}{dt}
]
— скорость изменения со временем числа потребителей, узнавших о товаре и готовых купить его ((t) — время, прошедшее с начала рекламной кампании, (N(t)) – число уже информированных клиентов), — пропорциональна числу покупателей, еще не знающих о нем, т. е. величине
[
\alpha_1(t)(N_0 - N(t)),
]
где (N_0) — общее число покупателей (емкость рынка), (\alpha_1(t)) характеризует интенсивность рекламной кампании. Предполагается также, что узнавшие о товаре потребители распространяют полученную информацию среди неосведомленных, выступая как бы в роли дополнительных рекламных агентов фирмы. Их вклад равен величине
[
\alpha_2(t)N(t)(N_0 - N(t)),
]
которая тем больше, чем больше число агентов. Величина (\alpha_2) характеризует степень общения покупателей между собой [@stud].

В итоге получаем уравнение:
[
\frac{dn}{dt} = (\alpha_1 + \alpha_2 n(t))(N - n(t))
]

Выполнение лабораторной работы

Реализация на Julia

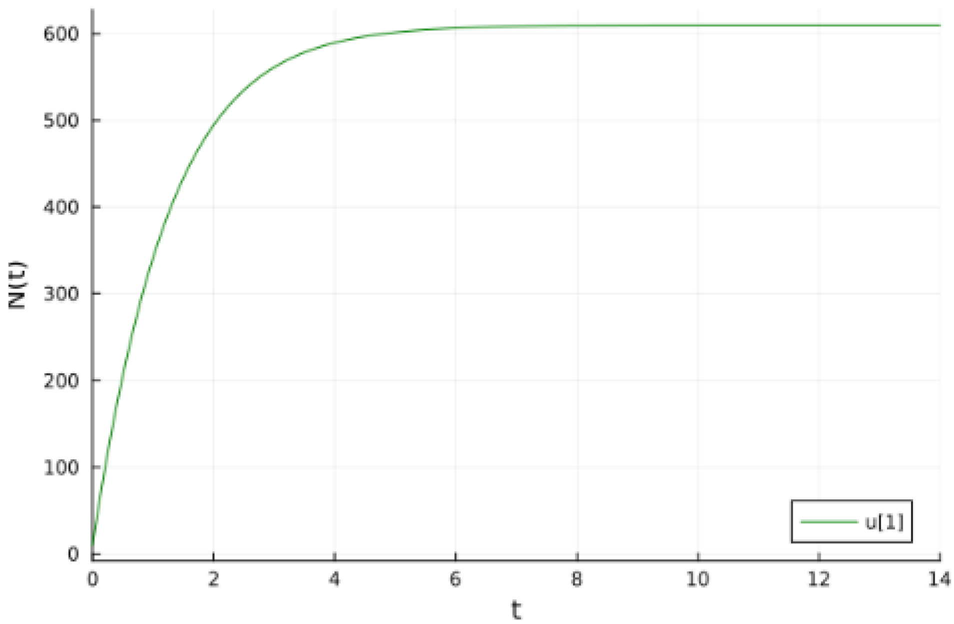
Подключаем нужные библиотеки для решения ДУ и для отрисовки графиков. Задаем само дифференциальное уравнение, а также начальные условия и параметры. Определяем ODEProblem.

```
f(n, p, t) = (p[1] + p[2]*n)*(p[3] - n)
p1 = [0.77, 0.00017, 610]
p2 = [0.000055, 0.29, 610]
n_0 = 10
tspan1 = (0.0, 14.0)
tspan2 = (0.0, 0.05)
prob1 = ODEProblem(f, n_0, tspan1, p1)
```

Когда задача определена, можем ее решить методом solve() и нарисовать график с помощью plot().

```
sol1 = solve(prob1, Tsit5(), saveat = 0.01)
plot(sol1, markersize = 15, c = :green, yaxis = "N(t)")
savefig("sol1_plot1.png")
```

В результате получаем следующий график (рис. [-@fig:001]), (α1 >> α2)мы получили модель Мальтуса. Кривая становится почти горизонтальной с t=6



Теперь решим ДУ для второго случая и построим график.

```
prob2 = ODEProblem(f, n_0, tspan2, p2)
sol2 = solve(prob2, Tsit5(), saveat = 0.0001)
plot(sol2, markersize = 15, c = :green, yaxis = "N(t)")
```

С помощью команды maximum() найдем максимальный элемент из этого вектора:

```
dev = [sol2(i, Val{1}) for i in 0:0.0001:0.05]
```

Получим значение `26980.63240438858`

Далее найдем индекс этого элемента в векторе dev.

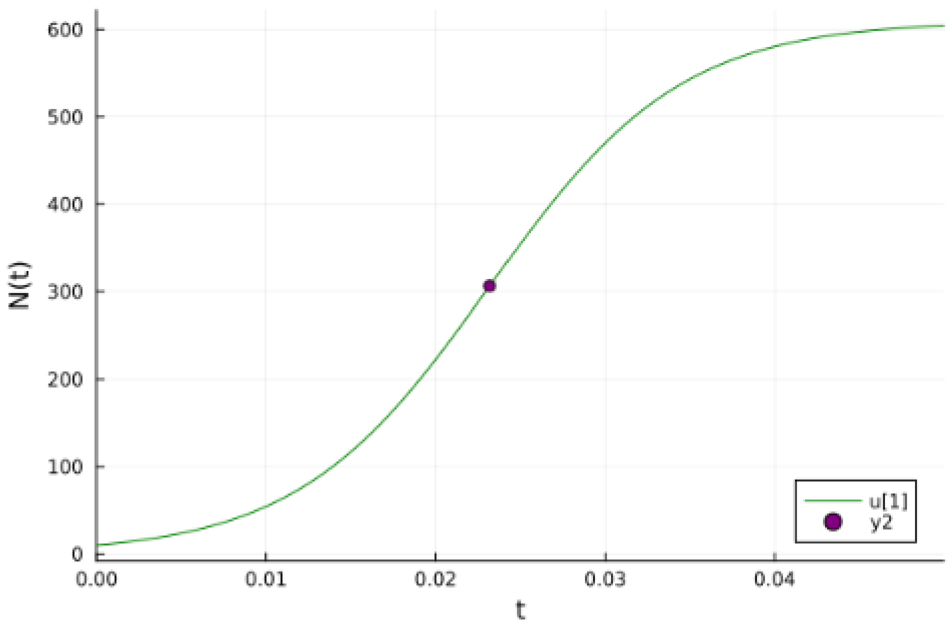
```
idx = findall(x -> x == 26980.63240438858, dev)
```

Получим `[233]`

Поскольку шаг и интервал времени, на котором мы вычисляли производные, равны шагу и интервалу времени, на котором мы решали ДУ, то индексы в векторе dev совпадают с индексами в векторе sol.t и sol.u. То есть мы можем найти момент времени и значение N(t), когда скорость распространения рекламы максимальна. Для наглядности отразим это на графике (рис. [-@fig:002]).

```
x = sol2.t[233]
y = sol2.u[233]
scatter!((x, y), c = :purple, legend = :bottomright)
```

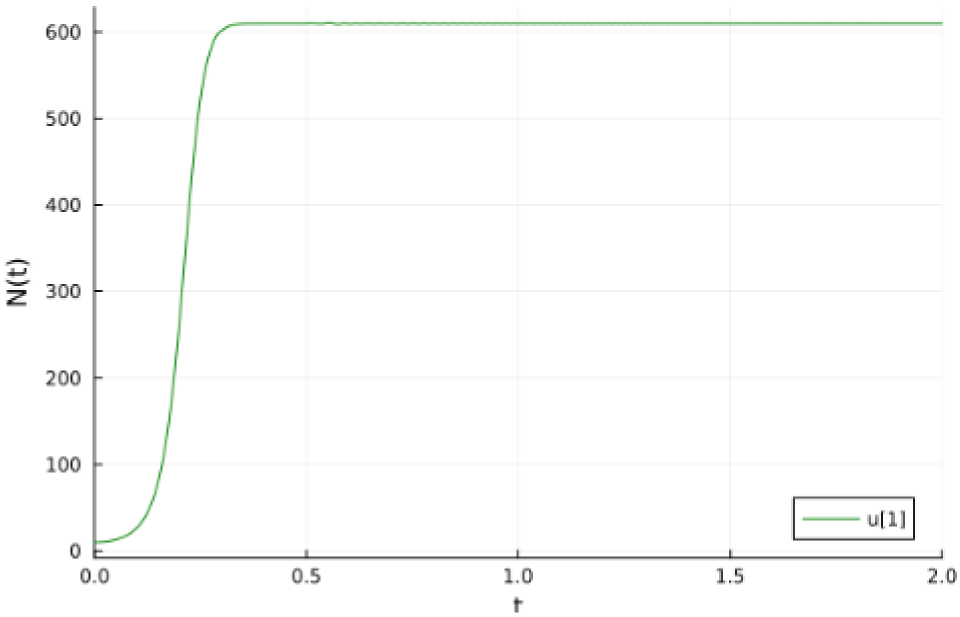
Получаем график, который является логистической кривой α1 << α2



Для случая 3 задание ДУ и его решение выглядит так:

```
function f3(u, p, t)
    n = u
    return (0.5 * t + 0.3 * t * n) * (610 - n)
end

u_0 = 10
tspan = (0.0, 2)
prob = ODEProblem(f3, u_0, tspan)
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat = 0.001)
plot(sol, markersize = 15, c = :green, yaxis = "N(t)")
```

В результате получаем следующий график (рис. [-@fig:003]).



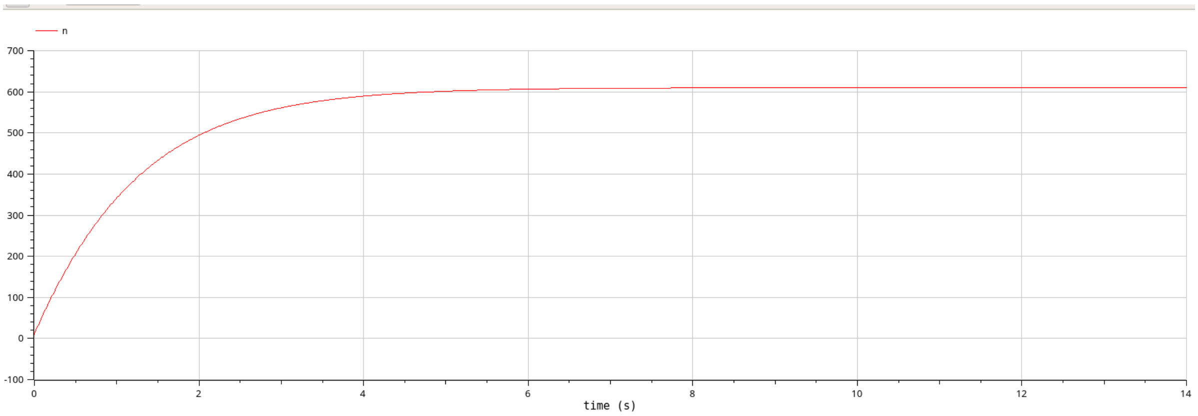
Реализация на OpenModelica

1

Здесь мы задаем параметры, начальные условия, ДУ и выполняем симуляцию на том же интервале и с тем же шагом, что и в Julia.

```
  parameter Real a_1 = 0.77;
  parameter Real a_2 = 0.00017;
  parameter Real N = 610;
  parameter Real n_0 = 10;

  Real n(start = n_0);

equation
  der(n) = (a_1 + a_2 * n) * (N - n);
```

В результате получаем следующий график (рис. [-@fig:004]). (α1 >> α2) мы получили модель Мальтуса. Кривая становится почти горизонтальной с t=6

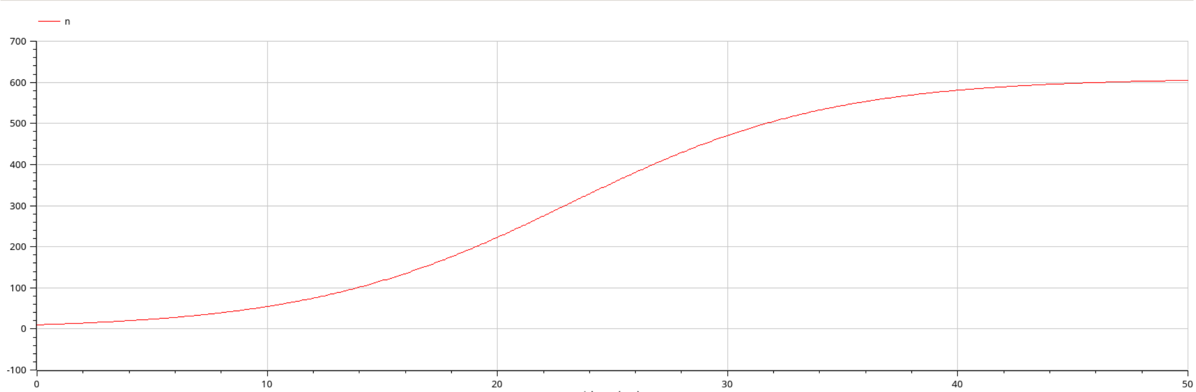


2

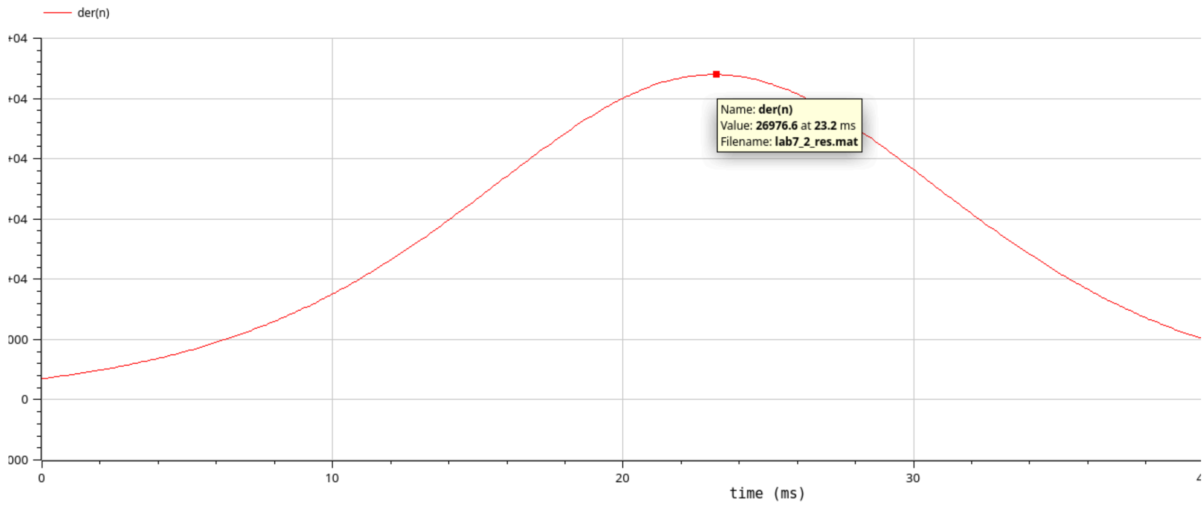
Задаем параметры, начальные условия, ДУ и выполняем симуляцию на том же интервале и с тем же шагом, что и в Julia.

```
  parameter Real a_1 = 0.000055;
  parameter Real a_2 = 0.29;
  parameter Real N = 610;
  parameter Real n_0 = 10;

  Real n(start = n_0);

equation
  der(n) = (a_1 + a_2 * n) * (N - n);
```

Получаем график, который является логистической кривой α1 << α2



Посмотрим на график (рис. [-@fig:006]) изменения производной с течением времени. Если мы наведем курсор на этот максимум на графике, можно увидеть значение и время. Значение немного отличается от того, что мы нашли в Julia (мы не можем по графике определить точное значение), но можно увидеть, что момент времени действительно равен 23.2 ms.

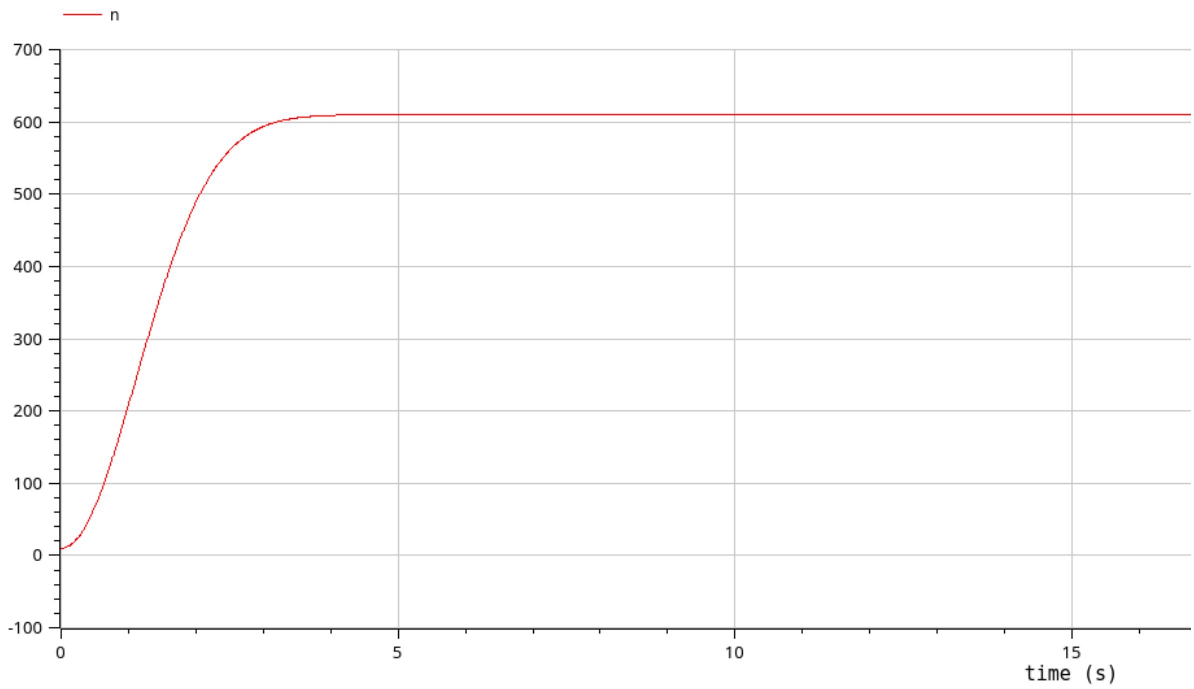


3

Задаем параметры, начальные условия, ДУ и выполняем симуляцию на том же интервале и с тем же шагом, что и в Julia.

```
  parameter Real a_1 = 0.5;
  parameter Real a_2 = 0.3;
  parameter Real N = 610;
  parameter Real n_0 = 10;

  Real n(start = n_0);

equation
  der(n) = (a_1 * time + a_2 * time * n) * (N - n);
```

В результате получаем следующий график (рис. [-@fig:007])



Все графики получились идентичными. Что Julia, что OpenModelica справились с решением ДУ и построением графиков.

Выводы

В результате выполнения данной лабораторной работы была исследована модель эффективности рекламы.

Список литературы{.unnumbered}

::: {#refs}
:::