Цель работы

Исследовать математическую модель конкуренции двух фирм.

Задание

Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{d\theta} &= M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} &= \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{aligned},$$

где $a_1 = \dfrac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}$, $a_2 = \dfrac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}$, $b = \dfrac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}$, $c_1 = \dfrac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}$, $c_2 = \dfrac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$.

Также введена нормировка $t = c_1 \theta$.

Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед

M M1 2

будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$
\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \left(\frac{b}{c_1} + 0{,}0014\right) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2
$$

$$
\frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2
$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$
\begin{aligned}
&M_0^1 = 2.2,\ M_0^2 = 1.5, \\
&p_{cr} = 17, N = 20, q = 1 \\
&\tau_1 = 13, \tau_2 = 16, \\
&\tilde{p}_1 = 10, \tilde{p}_2 = 8
\end{aligned}
$$

Теоретическое введение

Математическому моделированию процессов конкуренции и сотрудничества двух фирм на различных рынках посвящено довольно много научных работ, в основном использующих аппарат теории игр и статистических решений. В качестве примера можно привести работы таких исследователей, как Курно, Стакельберг, Бертран, Нэш, Парето [@model].

Следует отметить, что динамические дифференциальные модели уже давно и успешно используются для математического моделирования самых разнообразных по своей природе процессов. Достаточно упомянуть широко использующуюся в экологии модель «хищник-жертва» Вольтерра, математическую теорию развития эпидемий, модели боевых действий.

Постановка задачи

Задача решалась в следующей постановке.

На рынке однородного товара присутствуют две основные фирмы, разделяющие его между собой, т.е. имеет место классическая дуополия.

Безусловно, это является весьма сильным предположением, однако оно вполне оправдано в тех случаях, когда доля продаж остальных конкурентов на рассматриваемом сегменте рынке пренебрежимо мала. Хорошим примером может служить отечественный рынок микропроцессоров, который по существу разделили между собой две фирмы: Intel и AMD.

Изменение объемов продаж конкурирующих фирм с течением времени описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

[
\begin{cases}
\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \
\frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2
\end{cases}
]

где:

- (a_1 = \dfrac{p*{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}*1^2 N q})
- (a_2 = \dfrac{p*{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}*2^2 N q})

- (b = \dfrac{p{cr}}{\tau_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}1^2 \tilde{p}_2^2 N q})
- (c_1 = \dfrac{p{cr} - p_1}{\tau_1 \tilde{p}1})
- (c_2 = \dfrac{p{cr} - p_2}{\tau_2 \tilde{p}2})

Обозначения:

- (N) — число потребителей производимого продукта.
- (\tau) — длительность производственного цикла.
- (p) — рыночная цена товара.
- (\tilde{p}) — себестоимость продукта, т.е. переменные издержки на единицу продукции.
- (q) — максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени.
- (\theta = \frac{t}{c_1}) — безразмерное время.

Выполнение лабораторной работы

Реализация на Julia

Подключаем нужные библиотеки для решения ДУ и для отрисовки графиков. Задаем само дифференциальное уравнение, а также начальные условия и параметры.

Случай 1

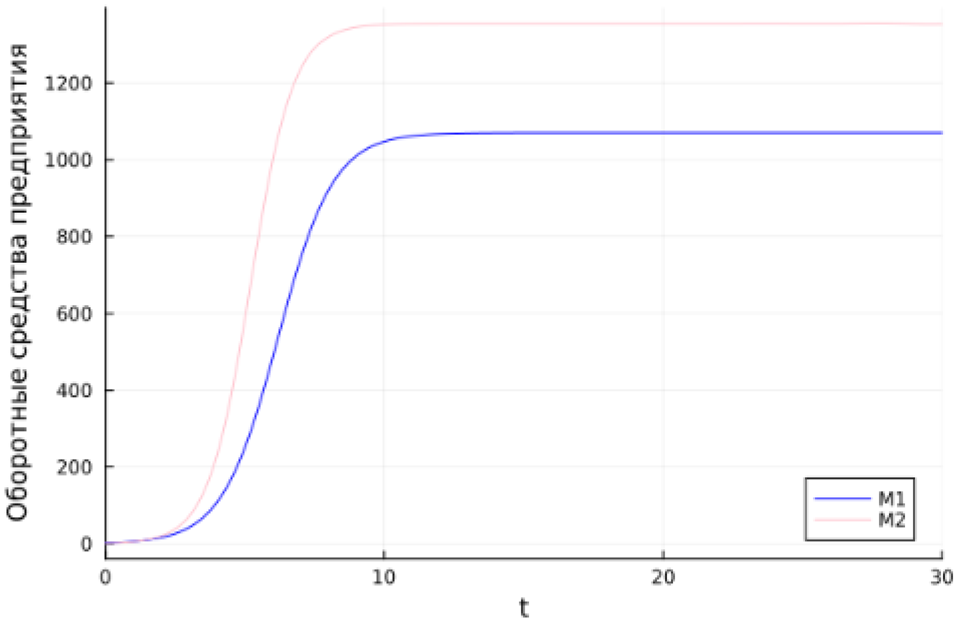
Зададим функцию, описывающую систему уравнений для этого случая, Далее решаем систему ДУ, сначала определив проблему с помощью метода ODEProblem(), а затем решим с помощью solve() солвером Tsit5() с шагом 0.01. Нарисуем график с помощью plot().

```
%%writefile lab8_1.jl

using DifferentialEquations, Plots;

p_cr = 17 #критическая стоимость продукта
tau1 = 13 #длительность производственного цикла фирмы 1
p1 = 10 #себестоимость продукта у фирмы 1
tau2 = 16 #длительность производственного цикла фирмы 2
p2 = 8 #себестоимость продукта у фирмы 2
N = 20 #число потребителей производимого продукта
q = 1; #максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q);
a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q);
b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q);
c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

u0 = [2.2, 1.5] #начальные значения M1 и M2
p = [a1, a2, b, c1, c2]
tspan = (0.0, 30.0) #временной интервал

function f_1(u, p, t)
    M1, M2 = u
    a1, a2, b, c1, c2 = p
    M1 = M1 - (b/c1)*M1*M2 - (a1/c1)*M1^2
    M2 = (c2/c1)*M2 - (b/c1)*M1*M2 - (a2/c1)*M2^2
    return [M1, M2]
end

prob = ODEProblem(f_1, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat = 0.01)
plot(sol, yaxis = "Оборотные средства предприятия", label = ["M1" "M2"], c = ["blue" "pink"])
savefig("lab8_1.png")
```

В результате численного решения системы дифференциальных уравнений для конкурирующих фирм без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой времени получаем следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2.
По графику видно, что рост оборотных средств обеих фирм происходит независимо. Обе фирмы достигают определенного устойчивого уровня, после чего объемы стабилизируются.

В модели этот эффект отражается в одинаковом коэффициенте взаимодействия ($\frac{b}{c_1}$), стоящем перед смешанным членом ($M_1 M_2$) в обоих уравнениях. Это означает симметричную конкуренцию без предпочтения одной из фирм.

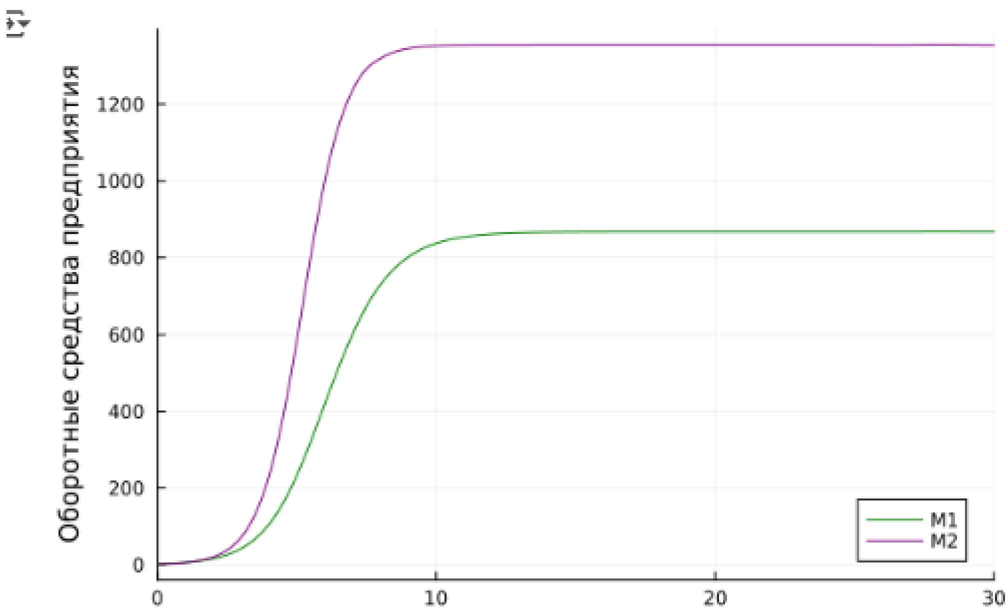
Таким образом, каждая фирма захватывает свою долю рынка, которая не изменяется с течением времени, и они продолжают сосуществовать.



Случай 2

```
%%writefile lab8_2.jl

using DifferentialEquations, Plots;

p_cr = 17 #критическая стоимость продукта
tau1 = 13 #длительность производственного цикла фирмы 1
p1 = 10 #себестоимость продукта у фирмы 1
tau2 = 16 #длительность производственного цикла фирмы 2
p2 = 8 #себестоимость продукта у фирмы 2
N = 20 #число потребителей производимого продукта
q = 1; #максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q);
a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q);
b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q);
c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

u0 = [2.2, 1.5] #начальные значения M1 и M2
p = [a1, a2, b, c1, c2]
tspan = (0.0, 30.0) #временной интервал


function f_2(u, p, t)
    M1, M2 = u
    a1, a2, b, c1, c2 = p
    M1 = M1 - (b/c1+0.00014)*M1*M2 - (a1/c1)*M1^2
    M2 = (c2/c1)*M2 - (b/c1)*M1*M2 - (a2/c1)*M2^2
    return [M1, M2]
end

prob = ODEProblem(f_2, u0, tspan, p)
sol2 = solve(prob, Tsit5(), saveat = 0.01)
plot(sol2, yaxis = "Оборотные средства предприятия", label = ["M1" "M2"], c = ["green" "purple"])


savefig("lab8_2.png")
```

В случае добавления небольшого асимметричного социального влияния на одну из фирм (например, предпочтения потребителей), система динамики изменяется. Полученный график показан ниже.



Как видно, фирма 1 (зелёная линия) сначала растет, но затем начинает снижать оборотные средства и в итоге банкротится. В то же время фирма 2 (фиолетовая линия) стабильно выходит на устойчивый максимум и полностью занимает рынок.

Это демонстрирует, как даже незначительное преимущество в восприятии потребителей может привести к полному вытеснению конкурента, несмотря на близкие стартовые условия.

Реализация на OpenModelica

Случай 1

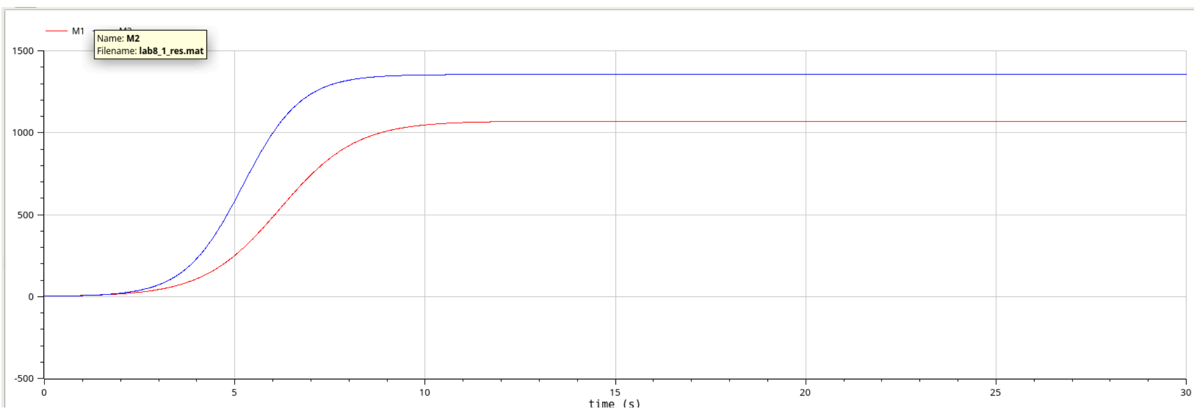
Здесь мы задаем параметры, начальные условия, ДУ и выполняем симуляцию на том же интервале и с тем же шагом, что и в Julia.

```
parameter Real p_cr = 17;
  parameter Real tau1 = 13;
  parameter Real p1 = 10;
  parameter Real tau2 = 16;
  parameter Real p2 = 8;
  parameter Real N = 20;
  parameter Real q = 1;
  parameter Real a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q);
  parameter Real a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q);
  parameter Real b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q);
  parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
  parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

  Real M1(start=2.2);
  Real M2(start=1.5);

equation

  der(M1) = M1 - (b/c1)*M1*M2 - (a1/c1)*M1^2;
  der(M2) = (c2/c1)*M2 - (b/c1)*M1*M2 - (a2/c1)*M2^2;
```

В результате численного решения системы дифференциальных уравнений для конкурирующих фирм без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой времени получаем следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2.
По графику видно, что рост оборотных средств обеих фирм происходит независимо. Обе фирмы достигают определенного устойчивого уровня, после чего объемы стабилизируются.

В модели этот эффект отражается в одинаковом коэффициенте взаимодействия ($\frac{b}{c_1}$), стоящем перед смешанным членом ($M_1 M_2$) в обоих уравнениях. Это означает симметричную конкуренцию без предпочтения одной из фирм.

Таким образом, каждая фирма захватывает свою долю рынка, которая не изменяется с течением времени, и они продолжают сосуществовать.

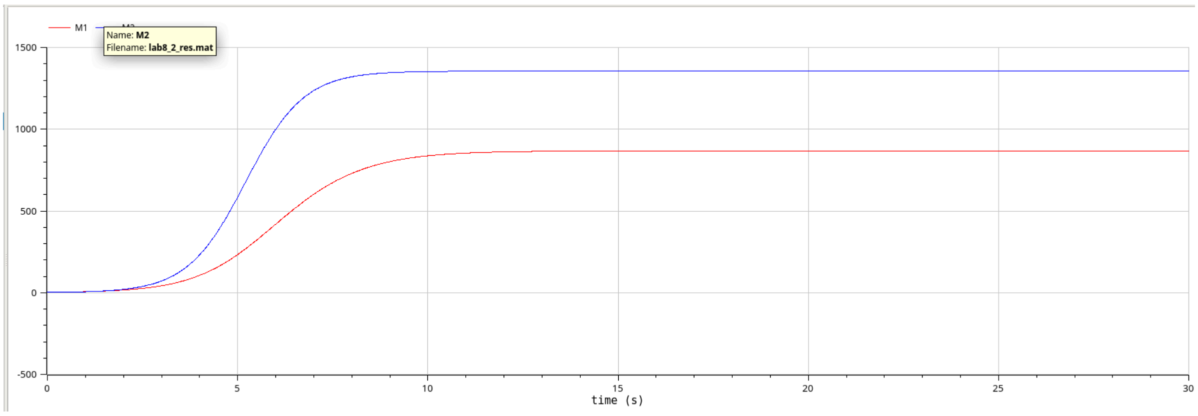


Случай 2

Задаем параметры, начальные условия, ДУ и выполняем симуляцию на том же интервале и с тем же шагом, что и в Julia.

```
 parameter Real p_cr = 17;
  parameter Real tau1 = 13;
  parameter Real p1 = 10;
  parameter Real tau2 = 16;
  parameter Real p2 = 8;
  parameter Real N = 20;
  parameter Real q = 1;
  parameter Real a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q);
  parameter Real a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q);
  parameter Real b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q);
  parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
  parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

  Real M1(start=2.2);
  Real M2(start=1.5);

equation

  der(M1) = M1 - (b/c1+0.00014)*M1*M2 - (a1/c1)*M1^2;
  der(M2) = (c2/c1)*M2 - (b/c1)*M1*M2 - (a2/c1)*M2^2;
```

Получаем график:



Сравнение построения модели на Julia и в OpenModelica

Все графики получились идентичными. Что Julia, что OpenModelica справились с решением системы ДУ и построением графиков.

Выводы

В результате выполнения лабораторной работы была исследована модель конкуренции двух фирм.

Список литературы{.unnumbered}

::: {#refs}
:::