UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
[EEC 2101] CONTROLE AVANÇADO

1ª Lista de Exercícios

Anna Giselle Câmara Dantas Ribeiro
Cristiano Gurgel de Castro
Diogo Leite Rebouças
Thiago Medeiros Barros

Natal – RN
2010.1

Questão 1

Um sistema com realimentação unitária tem a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{9}{s(s+p)}$$

em que p é normalmente igual a 3. Determine a sensibilidade da função de transferência de malha fechada $T(s)$ em relação ao parâmetro p e plote os diagramas de Bode (módulo e fase) para p variando entre 1 e 5. Analise os resultados.

Resolução:

Antes de realizar a análise da sensibilidade em malha fechada, deve-se verificar a estabilidade relativa do sistema em malha aberta quanto à variação do parâmetro p.

Sabe-se que essa estabilidade relativa pode ser observada a partir de duas medidas dos diagramas de Bode, denominadas *margem de ganho* e *margem de fase*. Para Dorf e Bishop (2009), a *margem de ganho* é definida como um acréscimo no ganho do sistema quando a fase é igual a -180°, resultando em um sistema marginalmente estável, enquanto que a *margem de fase* é definida como a quantidade de deslocamento de fase com magnitude unitária que resultará em um sistema marginalmente estável.

Assim sendo, ao se observar a Fig. 1, verifica-se que essas duas medidas variam conforme Tab. 1 para o sistema em malha aberta[1].

Sabendo que o sistema será estável quando a margem de ganho e a margem de fase forem positivas, percebe-se que para os valores de $p = 1, 2, \ldots, 5$, o sistema é estável.

Dessa maneira, deseja-se agora realizar a análise em malha fechada. Para isso, a função de transferência de malha fechada pode ser obtida a partir da Eq. 1:

[1] Apesar dos diagramas de Bode exibidos ao longo de toda a resolução estarem sendo referenciados às equações no domínio de *Laplace* com a variável complexa s, obter equações no domínio da frequência resume-se a substituir a variável s por $j\omega$.

Tabela 1: Margem de ganho e margem de fase para o sistema em malha aberta.

p	Margem de Ganho (MG)	ω_{MG}	Margem de Fase (MF)	ω_{MF}
1	∞	∞	18.9175	2.9179
2	∞	∞	36.6620	2.6869
3	∞	∞	51.8273	2.3585
4	∞	∞	63.3162	2.0104
5	∞	∞	71.1830	1.7038

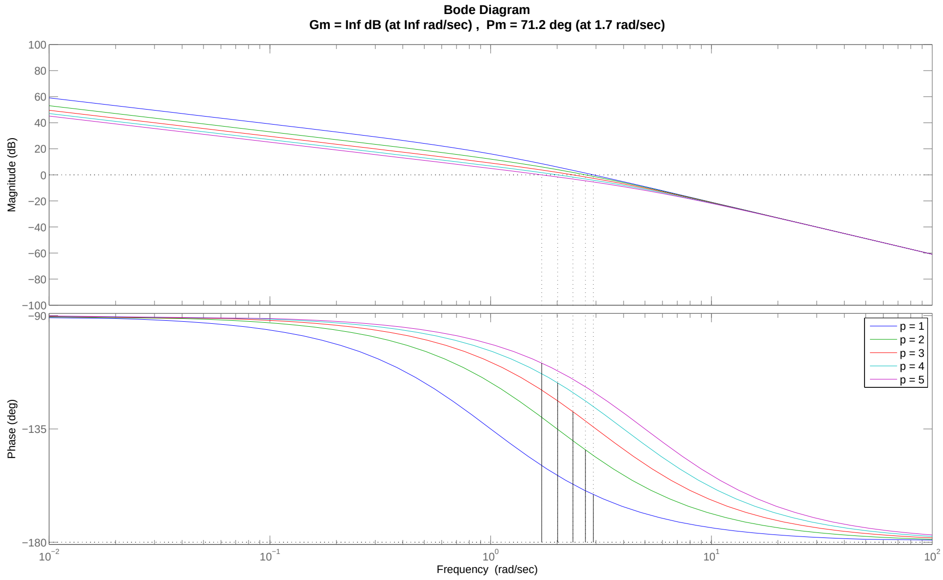

Figura 1: Diagrama de bode para o sistema em malha aberta.

$$G_{MF}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{1}$$

na qual $G(s)$ é função de transferência de malha aberta e $H(s)$ a função de transferência do bloco da realimentação, conforme Fig. 2. Assim sendo, a função de transferência de malha fechada para o sistema do enunciado com realimentação unitária é dada pela Eq. 2:

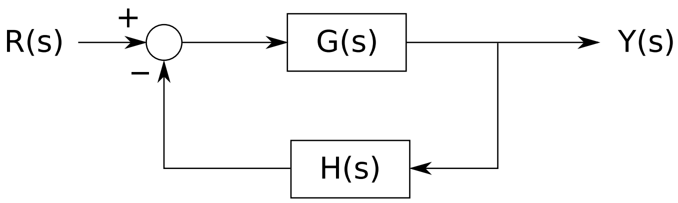

Figura 2: Diagrama de blocos de um sistema realimentado.

$$\begin{aligned} G_{MF}(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{9}{s(s+p)}}{1+\frac{9}{s(s+p)}} = \frac{\frac{9}{\cancel{s(s+p)}}}{\frac{s(s+p)+9}{\cancel{s(s+p)}}} = \frac{9}{s(s+p)+9} \\ &= \frac{9}{s^2+ps+9} \end{aligned} \tag{2}$$

Observando a Fig. 3, percebe-se que o sistema possuirá um comportamento oscilatório característico das curvas com picos no diagrama de Bode. Tal comportamento é comprovado a partir da resposta ao degrau unitário, conforme Fig. 4.

Para Dorf e Bishop (2009), a sensibilidade de um sistema é definida como sendo a razão entre a variação percentual da função de transferência do sistema e a variação percentual da

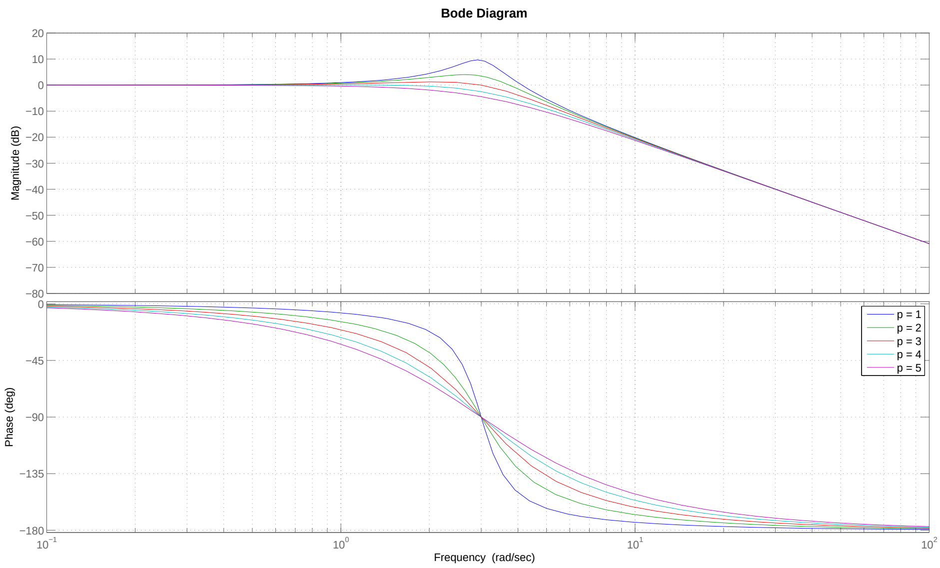

Figura 3: Diagrama de bode para o sistema em malha fechada.

função de transferência do processo (ou parâmetro). Ou seja, para uma dada função de transferência do sistema $T(s)$, tem-se:

$$S = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)} \tag{3}$$

No limite, para pequenas variações incrementais, tem-se:

$$S_G^T(s) = \frac{\partial T/T}{\partial G/G} = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} \tag{4}$$

Assim, para o parâmetro p da função de transferência de malha fechada obtida pela Eq. 2, tem-se:

$$\begin{aligned} S_p^{G_{\text{MF}}(s)} &= \frac{\partial G_{\text{MF}}}{\partial p} \cdot \frac{p}{G_{\text{MF}}} \\ &= \frac{0(s^2+ps+9)-9(s)}{(s^2+ps+9)^2} \cdot \frac{p}{\frac{9}{s^2+ps+9}} \\ &= -\frac{9ps}{9(s^2+ps+9)} \\ &= -\frac{ps}{s^2+ps+9} \end{aligned} \tag{5}$$

Considerando $p = 1, 2, \ldots, 5$, obtém-se os diagramas de Bode ilustrados pela Fig. 5.

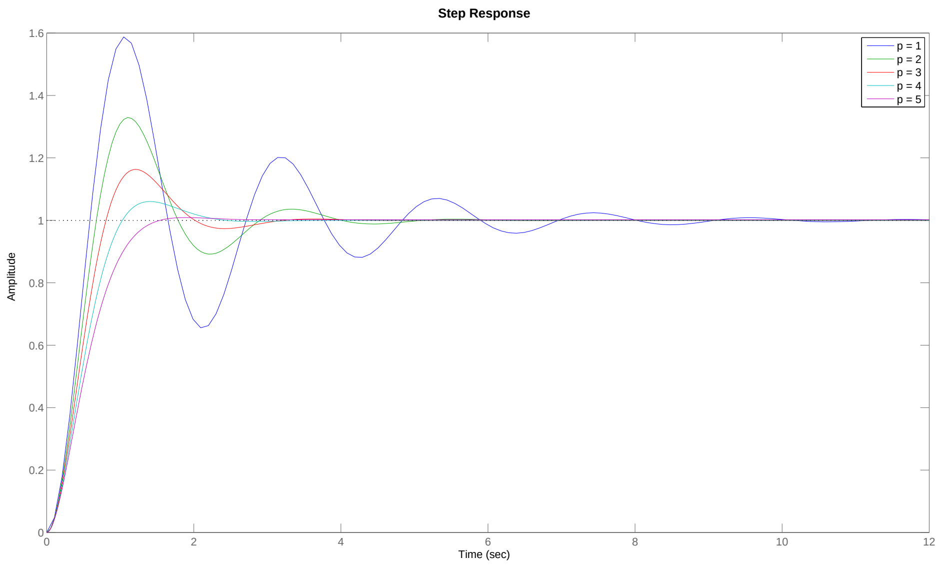

Figura 4: Resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada.

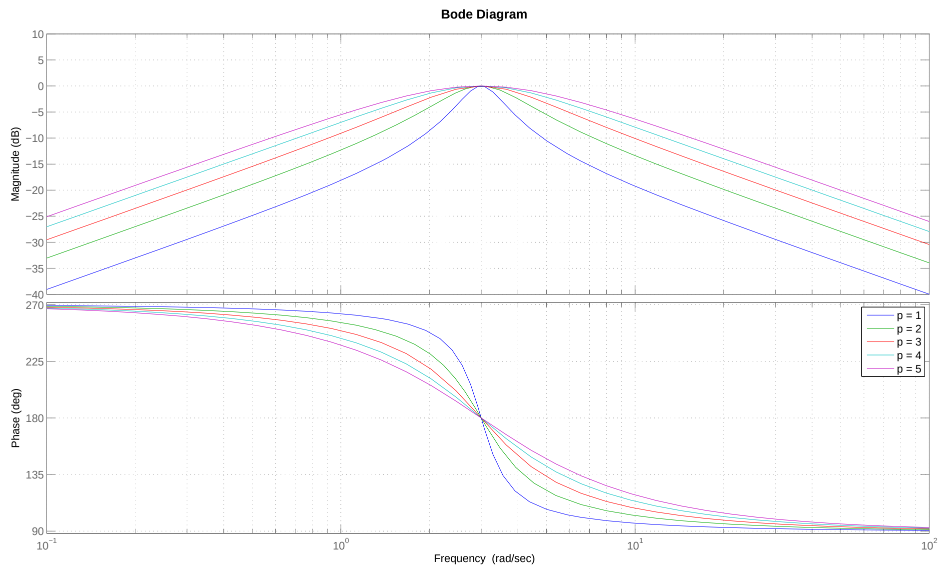

Figura 5: Diagrama de bode para a Eq. 5.

Tendo em vista que os sistemas robustos são aqueles que apresentam baixa sensibilidade à variação dos parâmetros, pode-se dizer que, para os sistemas mais robustos, a sensibilidade ideal é tão baixa quanto possível.

Analisando então as curvas de módulo da Fig. 5, verifica-se que todas elas apresentam baixa sensibilidade para frequências baixas e altas. Entretanto, observa-se uma equivalência quanto a sensibilidade para frequências em torno de 3 rad/s.

Fazendo uma análise comparativa, pode-se dizer que o sistema é estável para a faixa de variação do parâmetro p e que apresenta maior robustez quando $p = 1$, pois é a curva que apresenta os menores valores dentre as curvas de módulo do diagrama de Bode. Contudo, observa-se que o sistema se torna bastante oscilatório para esse valor de p, o que era esperado, uma vez que a relação desempenho/robustez é inversa.

O *script* do Matlab® desenvolvido para a resolução dessa questão pode ser encontrado no Apêndice A.

Questão 2

Um sistema com realimentação unitária tem a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{s+r}{(s+p)(s+q)}$$

em que $3 \leq p \leq 5$, $0 \leq q \leq 1$ *e* $1 \leq r \leq 2$. *Selecione os parâmetros (todos reais) de um controlador atraso-avanço de fase, de forma que o sistema em malha fechada tenha um desempenho robusto. Faça simulações no* Matlab® *para comprovar o desempenho do sistema.*

Resolução:

Para efeitos de análise e projeto dos controladores, foram utilizados os valores médio de cada um dos parâmetros, a saber $\overline{r} = 1.5$, $\overline{p} = 4$ e $\overline{q} = 0.5$, sendo a função de transferência de malha aberta escrita conforme Eq. 6.

$$\overline{G}(s) = \frac{s+\overline{r}}{(s+\overline{p})(s+\overline{q})} = \frac{s+1.5}{(s+4)(s+0.5)} = \frac{1.5+s}{2+4.5s+s^2} \tag{6}$$

O lugar geométrico das raízes para esse sistema é mostrado na Fig. 6.

Inicialmente a malha foi fechada e sua robustez foi testada segundo os polinômios de Kharitonov. A função de transferência em malha fechada é mostrada abaixo:

$$G_{\mathrm{MF}}(s) = \frac{s+r}{(s+p)(s+q)+s+r} = \frac{s+r}{s^2+\underbrace{(p+q+1)}_{a_1}s+\underbrace{pq+r}_{a_0}}$$

$$\overline{G_{\mathrm{MF}}}(s) = \frac{1.5+s}{3{,}5+5.5s+s^2} = \frac{1.5+s}{(s+4.7656)(s+0.7344)} \quad \triangle \quad \text{Para os valores médios} \tag{7}$$

Analisando a função de transferência de malha fechada, tem-se que:

$a_0 = pq+r$	$\alpha_0 = p_{\min}q_{\min}+r_{\min} = 1$	$\beta_0 = p_{\max}q_{\max}+r_{\max} = 7$
$a_1 = p+q+1$	$\alpha_1 = p_{\min}+q_{\min}+1 = 4$	$\beta_1 = p_{\max}+q_{\max}+1 = 7$

Os quatro polinômios retirados do *Teorema de Kharitonov* para o teste da estabilidade são, então:

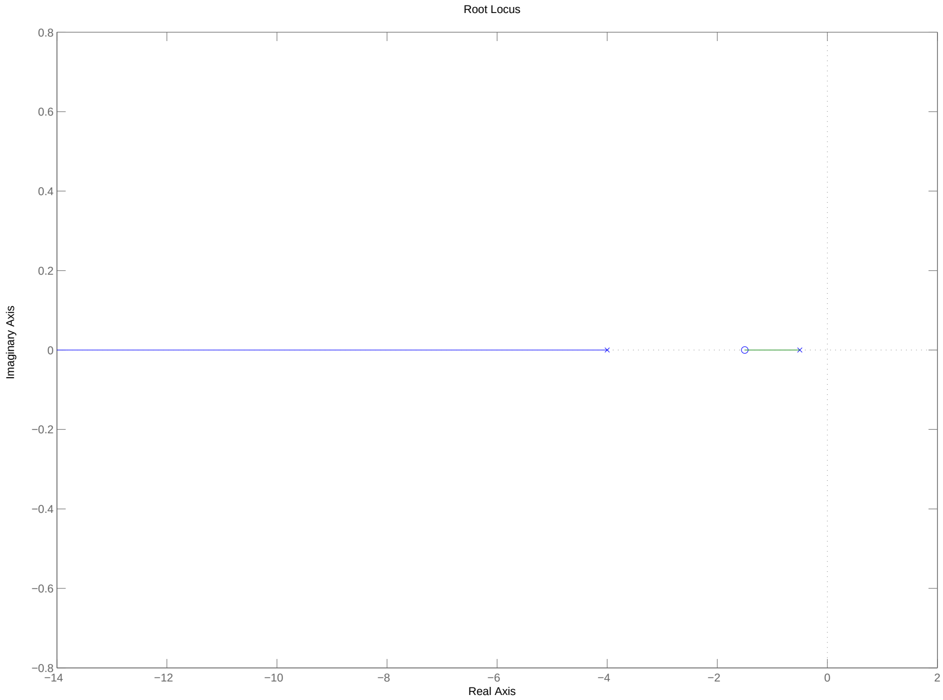

Figura 6: Lugar das raízes para os valores médios ($\overline{G}(s)$).

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 s + s^2 = 1 + 4s + s^2 = (s + 3{,}7321)(s + 0{,}2679)\\
q_1 &= \alpha_0 + \beta_1 s + s^2 = 1 + 7s + s^2 = (s + 6{,}8541)(s + 0{,}1459)\\
q_2 &= \beta_0 + \alpha_1 s + s^2 = 7 + 4s + s^2 = (s + 2 + 1{,}7321i)(s + 2 - 1{,}7321i)\\
q_3 &= \beta_0 + \beta_1 s + s^2 = 7 + 7s + s^2 = (s + 5{,}7913)(s + 1{,}2087)
\end{aligned}
$$

Assim, como nenhum polo do sistema está situado no semiplano direito, ou seja, todos os polos tem parte real negativa, o sistema é estável para qualquer valor dos parâmetros dentro do seus intervalos de variação. Dessa maneira foi obtido o valor final aproximado a partir do *teorema do valor final*:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sY(s)\\
Y(s) &= R(s)\overline{G_{\mathrm{MF}}}(s) = \frac{1}{s}\frac{1.5+s}{3.5+5.5s+s^2}\\
\lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{1.5+s}{3.5+5.5s+s^2} = \frac{1.5}{3.5} = \frac{3}{7} \approx 0.429
\end{aligned}
$$

observa-se que esse valor obtido está condizente com a simulação, conforme Fig. 7.

Sob o ponto de vista do projeto do controlador, o primeiro passo foi o de se projetar um controlador em atraso de fase que, segundo Dorf e Bishop (2009) e Maitelli (2002), tem por objetivo melhorar o erro de regime a uma entrada em degrau. A constante de erro de posição do

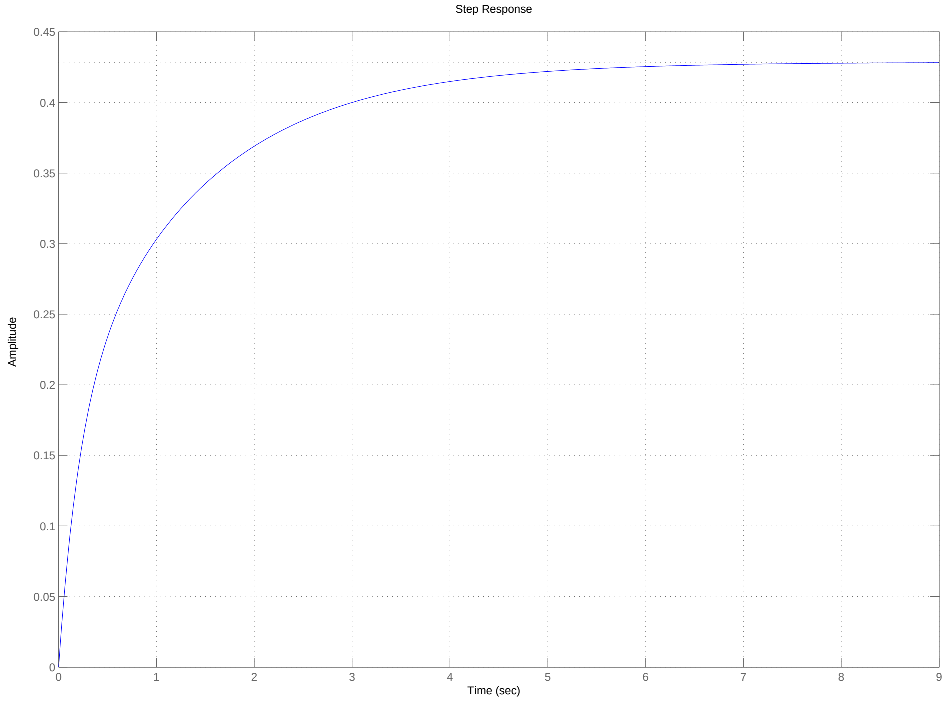

Figura 7: Resposta do sistema em malha fechada ao degrau unitário.

sistema que foi obtida é dada por $K_p = G(0) = 0.75$, o que resulta no erro de regime previamente calculado.

Adotando uma tolerância do erro de regime de aproximadamente 1%, foi projetado um compensador de modo que $K'_p = 100$. Uma vez que o controlador em atraso de fase possui função de transferência dada pela Eq. 8,

$$G_c(s) = k_c \frac{s + z_c}{s + p_c} \quad \text{onde} \quad |z_c| > |p_c| \tag{8}$$

para obter a constante de erro desejada tem-se então que:

$$\begin{aligned} \underbrace{K'_p}_{100} &= G_c(0)G(0) = G_c(0)K_p = k_c \frac{z_c}{p_c} \underbrace{K_p}_{0.75} \\ k_c \frac{z_c}{p_c} &= \frac{100}{0.75} = \frac{400}{3} \approx 133.333 \end{aligned} \tag{9}$$

Como o polo dominante do sistema de malha aberta está localizado em -0.5 (Eq. 6) o zero do controlador foi alocado à sua direita, para que a interferência no regime transitório não seja muito significante. Fez-se então $z_c = 0.3$, e, optando em um primeiro momento por não adicionar o ganho no controlador de tal maneira que $k_c = 1$, o polo, calculado a partir de 9 foi então $p_c = 0.0022$.

A função de transferência em malha fechada do sistema mostrado na Fig. 8 pode ser obtida através da redução do diagrama de blocos.

Assim sendo:

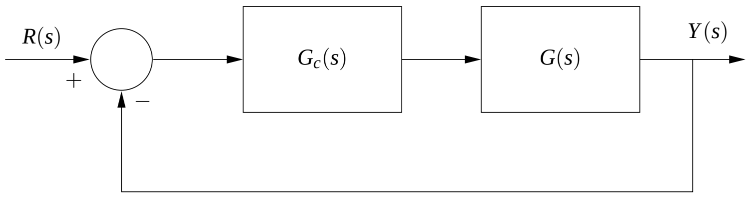

Figura 8: Diagrama de blocos para o sistema com o compensador.

$$
\begin{aligned}
G_{\text{cMF}}(s) &= \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)} = \frac{k_c(s+z_c)(s+r)}{k_c(s+z_c)(s+r)+(s+p)(s+q)(s+p_c)} \\
&= \frac{k_c s^2 + k_c(z_c+r)s + k_c r z_c}{s^3 + \underbrace{[k_c+p_c+(p+q)]}_{a_2} s^2 + \underbrace{[k_c(r+z_c)+p_c(p+q)+pq]}_{a_1} s + \underbrace{r z_c + pqp_c}_{a_0}}
\end{aligned} \tag{10}
$$

A estabilidade do sistema foi testada segundo o *teorema de Kharitonov*. Os quatro polinômios obtidos para os valores calculados do controlador, a saber $z_c = 0.3$, $k_c = 1$ e $p_c = 0.0022$, foram:

$$
\begin{aligned}
q_1(s) &= 0.3 + 1.3066s + 7.0022s^2 + s^3 \\
q_2(s) &= 0.3 + 7.3132s + 7.0022s^2 + s^3 \\
q_3(s) &= 0.611 + 1.3066s + 5.0022s^2 + s^3 \\
q_4(s) &= 0.611 + 7.3132s + 5.0022s^2 + s^3
\end{aligned}
$$

cujas raízes podem ser observadas na matriz abaixo, em que cada coluna se refere a um polinômio e cada linha corresponde a uma raiz do respectivo polinômio:

$q_1(s)$	$q_2(s)$	$q_3(s)$	$q_4(s)$
$-0.093+0.188i$	-0.043	$-0.124+0.336i$	-0.089
$-0.093-0.188i$	-1.223	$-0.124-0.336i$	$-2.457+0.917i$
-6.817	-5.736	-4.754	$-2.457-0.917i$

Logo, pode-se perceber que o controlador desenvolvido é robusto para a faixa estabelecida de variação dos parâmetros. O resultado da resposta ao degrau com o controlador pode ser visualizada na Fig. 9.

Analisando a figura observa-se que o desempenho do regime permanente tende para o valor desejado (próximo a 1). Contudo, o tempo de subida do sistema pode vir a ser um problema, repare a escala do tempo em comparação ao sistema em malha fechada sem o controlador analisado na Fig. 7. Assim sendo, observando o lugar geométrico das raízes do sistema com compensador, mostrado na Fig. 10, com o intuito de melhorar o desempenho do tempo de subida, aumentou-se o ganho do sistema, distanciando os polos do eixo imaginário. Para um ganho $k_c = 20$ foi obtida a resposta dada pela Fig. 11.

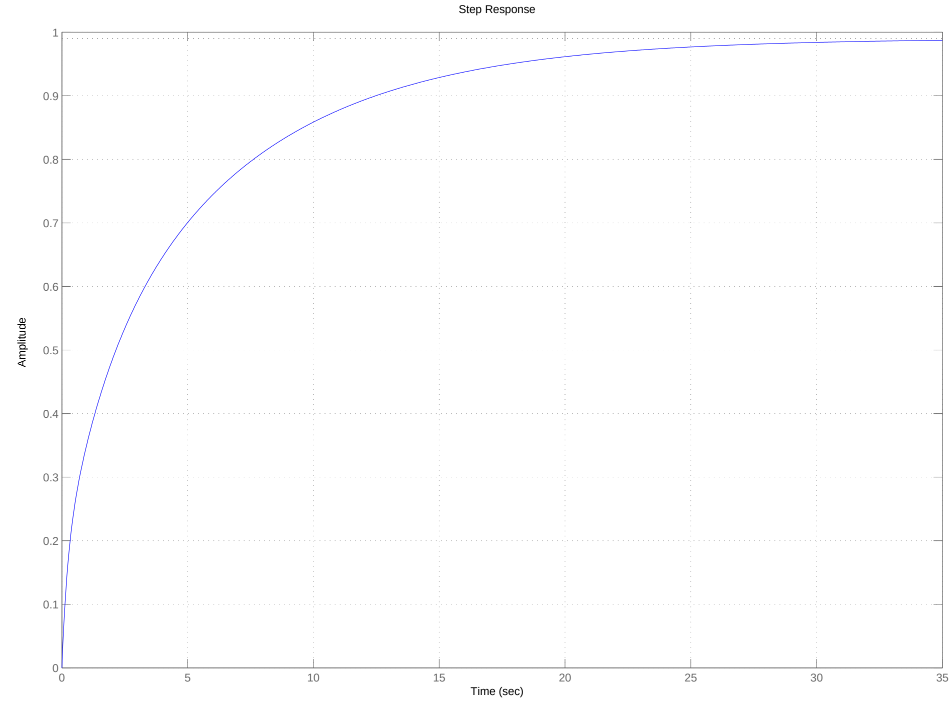

Figura 9: Resposta ao degrau para o controlador $G_c(s) = \dfrac{s+0{,}3}{s+0{,}0022}$

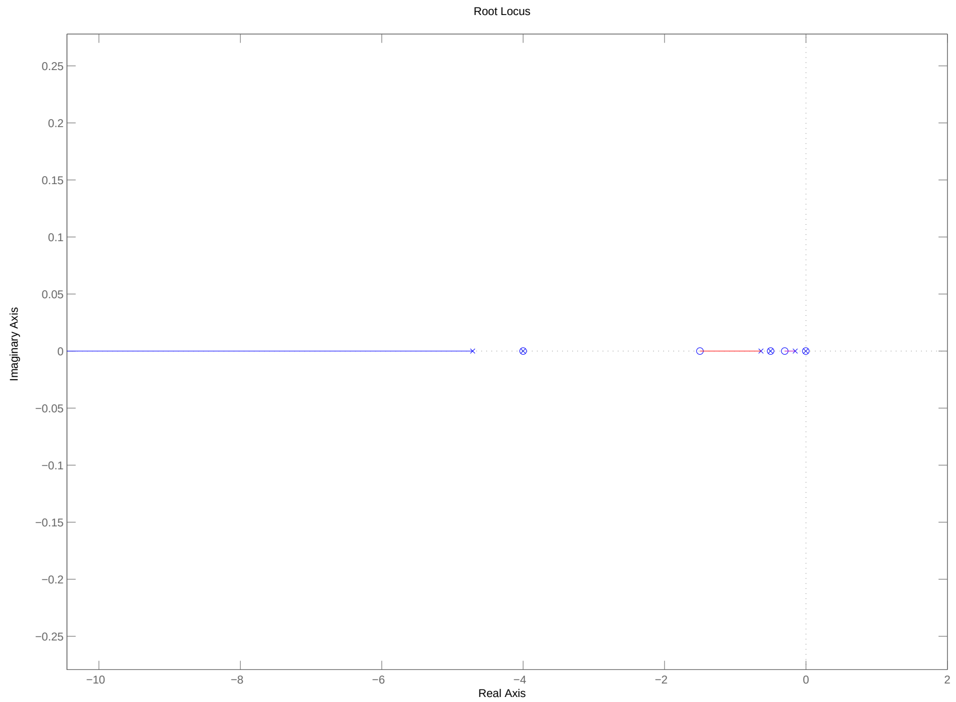

Figura 10: Lugar das raízes para o sistema com o controlador $G_c(s)$

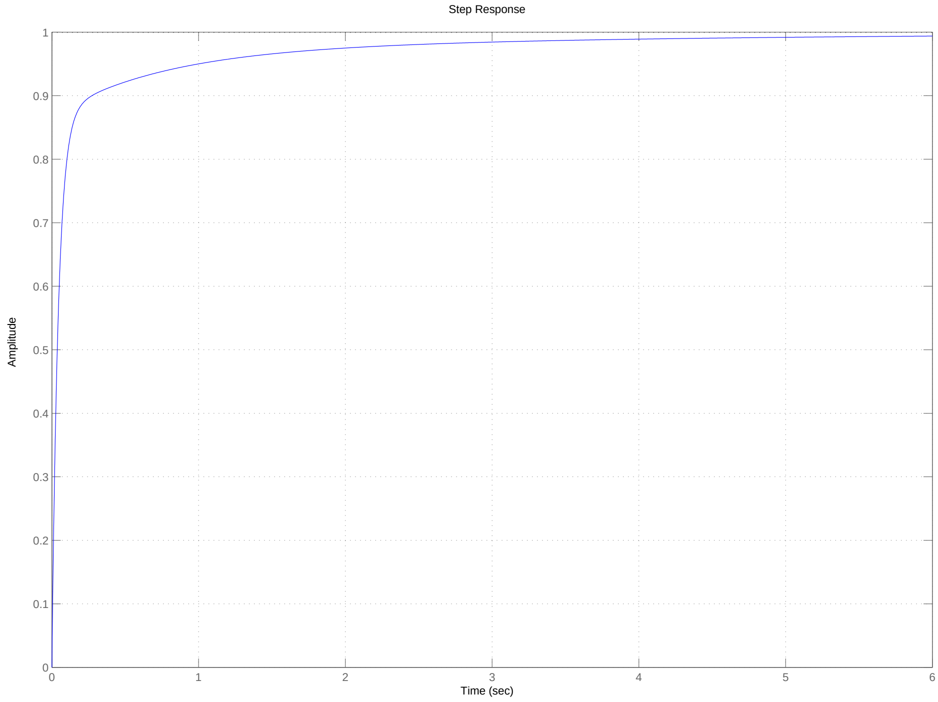

Figura 11: Reposta do sistema com o controlador $G_c(s) = 20\dfrac{s+0{,}3}{s+0{,}0022}$

Percebe-se facilmente que há uma melhora substancial no tempo de subida do sistema. A estabilidade do sistema para o novo valor de k_c foi testada mais uma vez através dos polinômios de Kharitonov, obtendo os seguintes valores:

$$q_1 = 0.3 + 26.0066s + 26.0022s^2 + s^3$$
$$q_2 = 0.3 + 51.0132s + 26.0022s^2 + s^3$$
$$q_3 = 0.611 + 26.0066s + 24.0022s^2 + s^3$$
$$q_4 = 0.611 + 51.0132s + 24.0022s^2 + s^3$$

e as suas raízes:

$q_1(s)$	$q_2(s)$	$q_3(s)$	$q_4(s)$
-0.012	-0.006	-0.024	-0.012
-1.03	-2.131	-1.112	-2.343
-24.961	-23.865	-22.866	-21.647

Uma vez que o sistema é estável na faixa de variação dos parâmetros de $G(s)$, o controle é robusto. Como a resposta de regime transitório e permanente é satisfatória, o controlador em atraso de fase foi suficiente para o projeto do sistema. Assim sendo a parte em avanço de fase não foi projetada. O controlador projetado é, portanto:

$$G_c(s) = 20\frac{s+0.3}{s+0.0022}$$

Os *scripts* do Matlab®desenvolvidos para a resolução dessa questão podem ser encontrados no Apêndices B.1 a B.3.

Questão 3

Considere o sistema descrito pelo modelo

$$\ddot{y} = -\dot{y} - y + u \tag{11}$$

com o modelo de referência

$$\ddot{y}_m = -2\dot{y}_m - y_m + u \tag{12}$$

Implementar um controlador MRAC e utilize como entrada uma onda quadrada para avaliar o comportamento do sistema.

Resolução:

Dadas as Eqs. 11 e 12, pode-se generalizá-las de modo a obter as Eqs. 13 e 14.

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= -a\dot{y}(t) - by(t) + cu(t) \quad (13)\\ \ddot{y}_m(t) &= -a_m\dot{y}(t) - b_m y(t) + c_m r(t) \quad (14) \end{aligned}$$

A partir das Eqs. 13 e 14, deriva-se a Eq. 15 referente a lei de controle:

$$u(t) = \theta_1 r(t) - \theta_2 \dot{y}(t) - \theta_3 y(t) \tag{15}$$

Essa equação mostra três parâmetros θ_1, θ_2 e θ_3, que foram escolhidos de maneira a satisfazer as seguintes condições:

$$\theta_1 = \frac{c_m}{c} \qquad \theta_2 = \frac{a_m - a}{c} \qquad \theta_3 = \frac{b_m - b}{c} \tag{16}$$

A partir dessas condições, para a aplicação da regra *MIT* faz-se necessário introduzir a variável erro $\varepsilon = y - y_m$, na qual y representa a saída do sistema em malha fechada. Segundo tal regra, o mecanismo para ajuste de parâmetros é dado por:

$$J(\theta) = \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{17}$$

Minimizar o erro implica em minimizar $J(\theta)$. Por sua vez, para minimizar o valor de J, troca-se os parâmetros na direção do gradiente negativo de J, de tal maneira que:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma\, \varepsilon \, \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \tag{18}$$

Aplicando a Eq. 15 na Eq. 13, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\ddot{y} &= -a\dot{y} - by + c\left(\theta_1 r - \theta_2 \dot{y} - \theta_3 y\right) \\
\ddot{y} &= -a\dot{y} - by + c\theta_1 r - c\theta_2 \dot{y} - c\theta_3 y \\
\ddot{y} &= -(a + c\theta_2)\dot{y} - (b + c\theta_3)y + c\theta_1 r
\end{aligned}
$$

Considerando o operador diferencial $p = \dfrac{d}{dt}$, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
p^2 y &= -(a + c\theta_2)py - (b + c\theta_3)y + c\theta_1 r \\
y &= \frac{c\theta_1}{p^2 + (a + c\theta_2)p + (b + c\theta_3)} r
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Isolando θ_1, tem-se:

$$
\theta_1 = \frac{y}{cr}\left[p^2 + (a + c\theta_2)p + (b + c\theta_3)\right] \tag{20}
$$

A partir das Eqs. 19 e 20, obtém-se as Eqs. 21 a 23, referentes as derivadas com relação aos parâmetros θ_1, θ_2 e θ_3:

$$
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} = \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{c}{p^2 + (a + c\theta_2)p + (b + c\theta_3)}\, r \tag{21}
$$

$$
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} = \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = -\frac{cp}{p^2 + (a + c\theta_2)p + (b + c\theta_3)}\, y \tag{22}
$$

$$
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_3} = \frac{\partial y}{\partial \theta_3} = -\frac{c}{p^2 + (a + c\theta_2)p + (b + c\theta_3)}\, y \tag{23}
$$

Uma vez que os parâmetros a, b e c podem não ser conhecidos, as Eqs. 21 a 23 não podem ser utilizadas de maneira direta. Entretanto, sabe-se que:

$$
\begin{aligned}
p^2 + (a + c\theta_2)p + (b + c\theta_3) &\approx p^2 + \left[a + c\left(\frac{a_m - a}{c}\right)\right] p + \left[b + c\left(\frac{b_m - b}{c}\right)\right] \\
&\approx p^2 + a_m p + b_m
\end{aligned}
$$

Assim, pela Eq. 18, obtém-se as Eqs. 24 a 26, em que o fator $\dfrac{c}{b_m}$ está incluso em γ:

$$
\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma\left(\frac{b_m}{p^2 + a_m p + b_m}\, r\right)\varepsilon \tag{24}
$$

$$
\frac{d\theta_2}{dt} = \gamma\left(\frac{b_m p}{p^2 + a_m p + b_m}\, y\right)\varepsilon \tag{25}
$$

$$
\frac{d\theta_3}{dt} = \gamma\left(\frac{b_m}{p^2 + a_m p + b_m}\, y\right)\varepsilon \tag{26}
$$

Para realizar a simulação do sistema, foram utilizados os parâmetros dados na questão:

$$
a = 1 \qquad a_m = 2 \tag{27}
$$

$$
b = 1 \qquad b_m = 1 \tag{28}
$$

$$
c = 1 \qquad c_m = 1 \tag{29}
$$

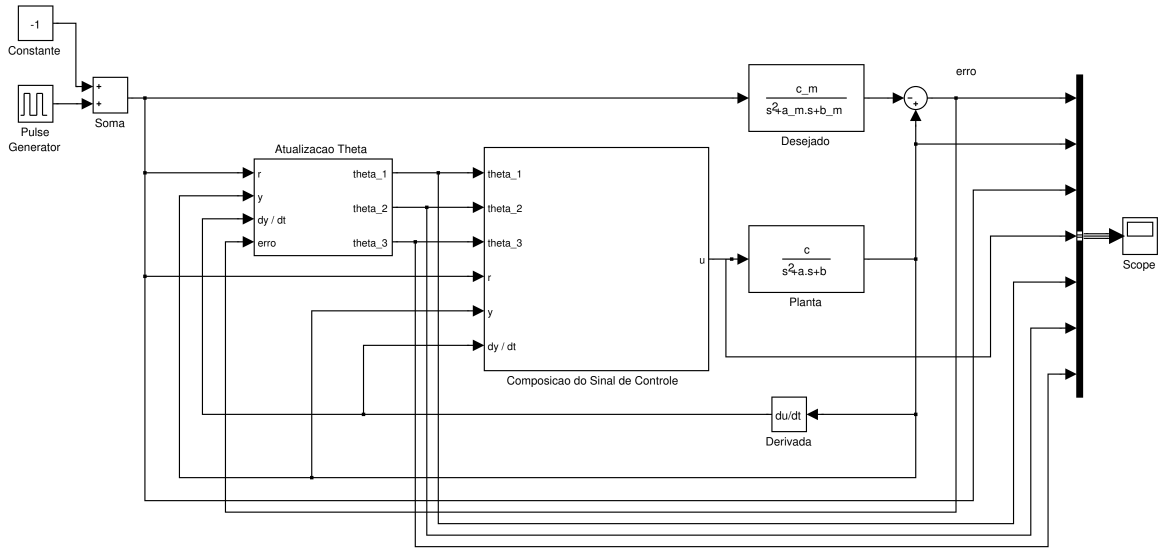

Figura 12: Diagrama de blocos do sistema simulado.

Os diagramas de blocos do ambiente de simulação (*Simulink*) podem ser vistos nas Figs. 12 a 14.

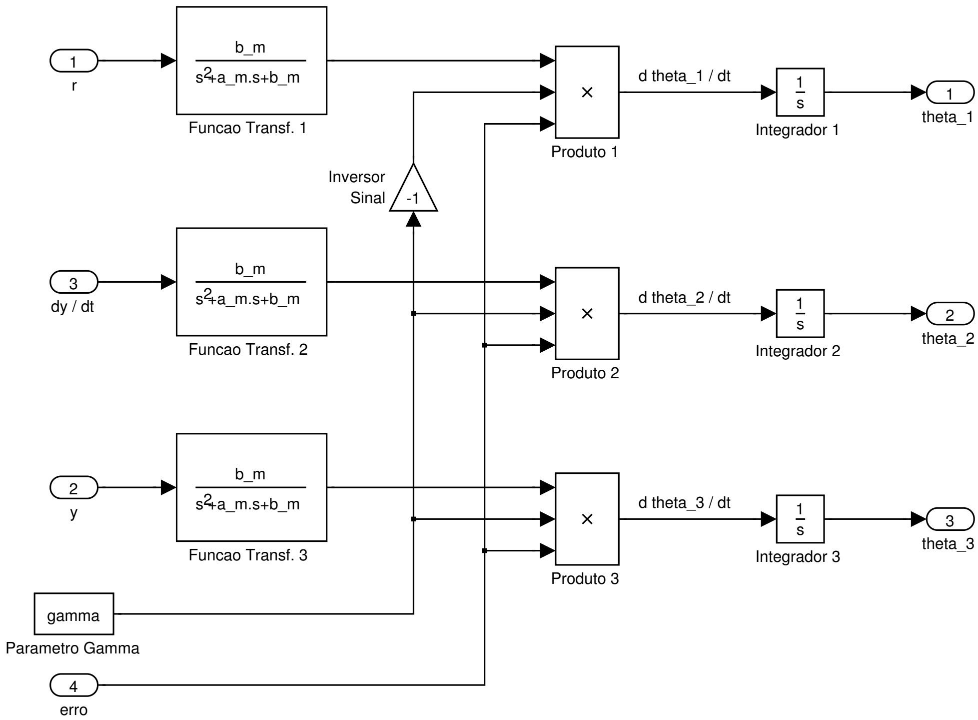

Figura 13: Diagrama de blocos do subsistema de atualização de θ

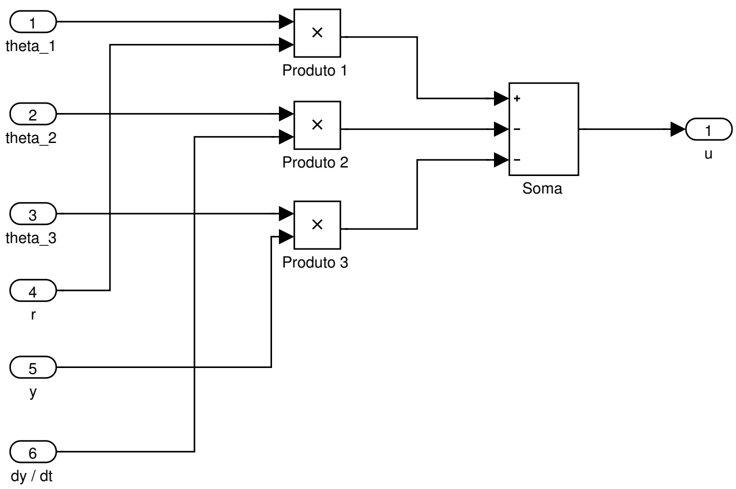

Figura 14: Diagrama de blocos do subsistema de composição do sinal de controle.

A simulação foi realizada para valores de $\gamma = 0.1$, 0.2, 0.5, 0.7 e 1.0. Os resultados obtidos podem ser vistos nas Figs. 15 a 19

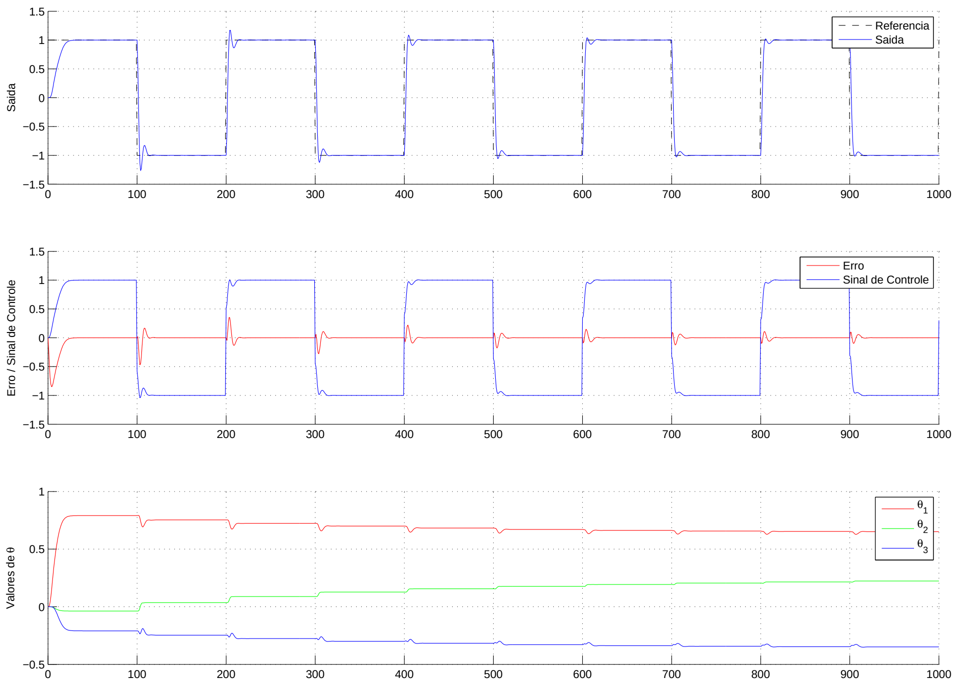

Figura 15: Saída do sistema para $\gamma = 0.1$.

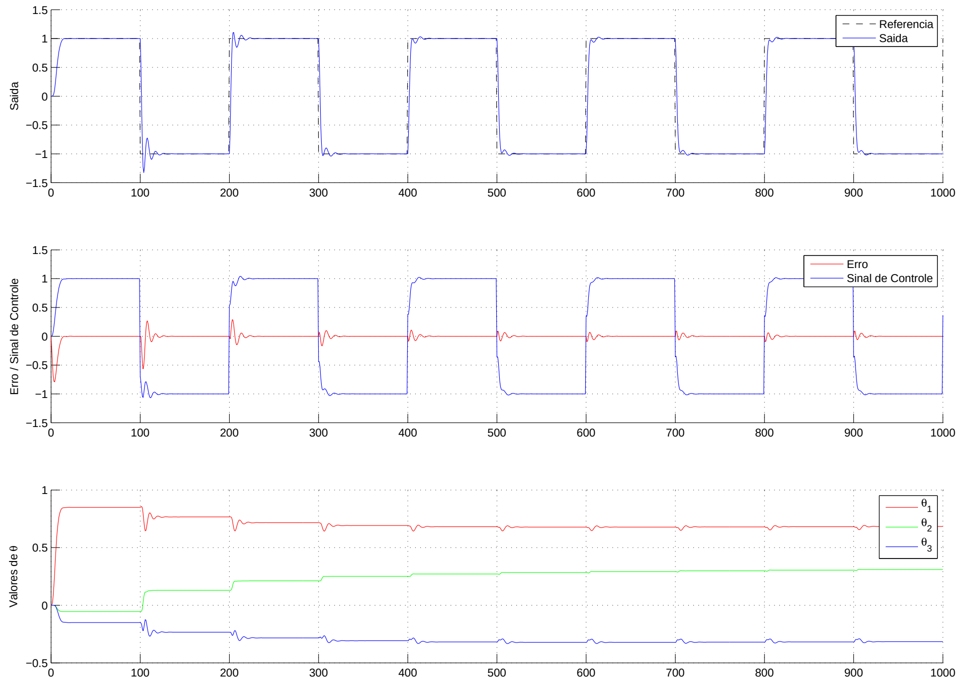

Figura 16: Saída do sistema para $\gamma = 0.2$.

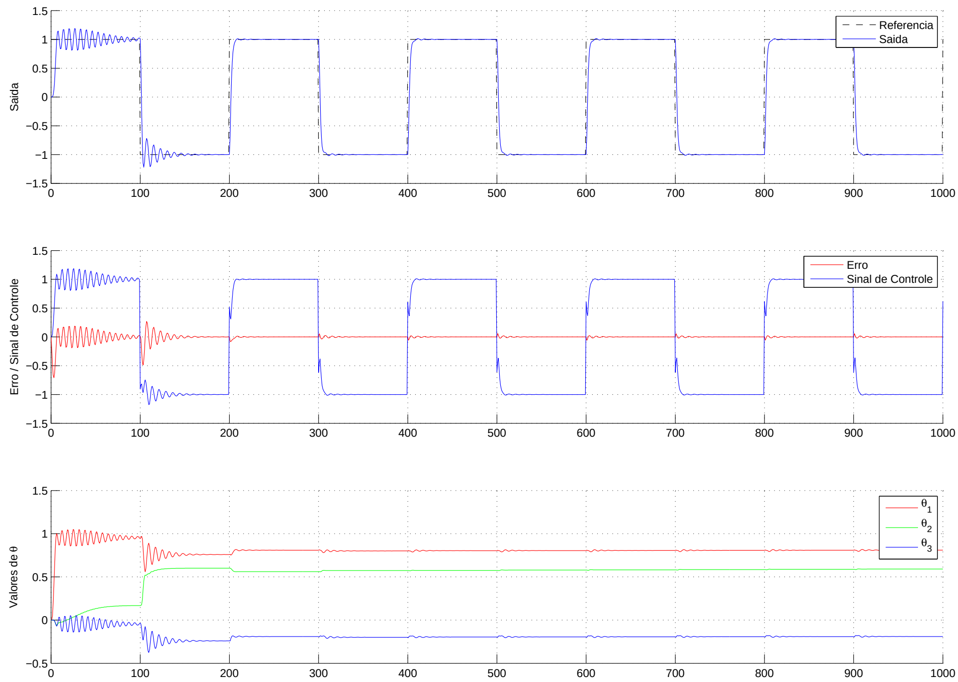

Figura 17: Saída do sistema para $\gamma = 0.5$.

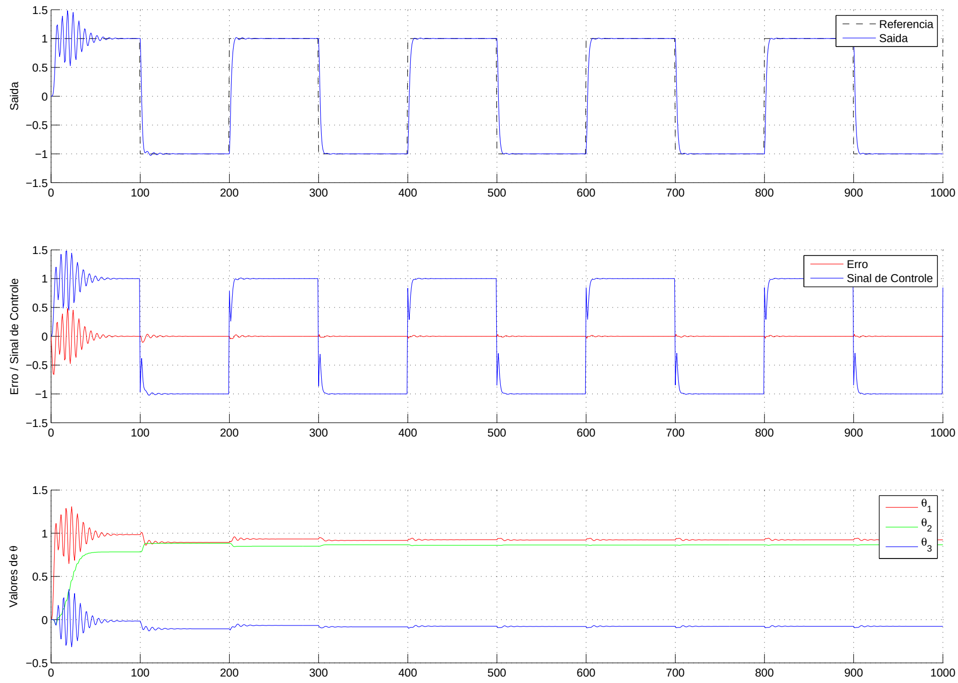

Figura 18: Saída do sistema para $\gamma = 0.7$.

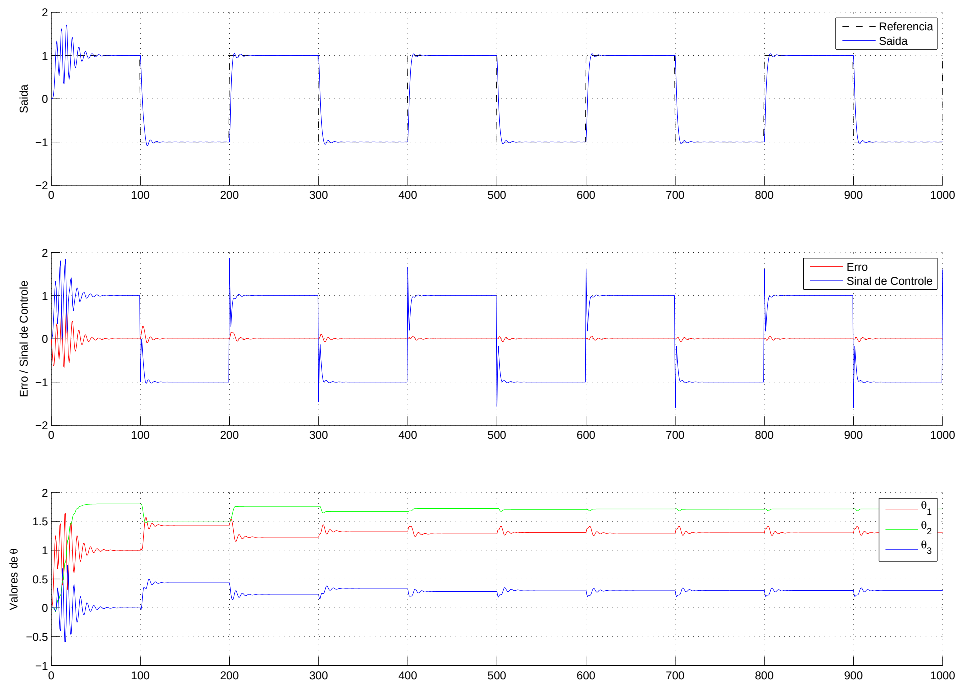

Figura 19: Saída do sistema para $\gamma = 1.0$.

Avaliando o desempenho do sistema para os diferentes valores de γ, percebe-se que para valores mais altos o sistema possui um sinal de controle mais agressivo, fazendo com que apareçam oscilações subamortecidas em sua saída, principalmente com as mudanças de *set point*. Por outro lado, valores pequenos fazem com que a resposta do sistema evolua de maneira suave, como pode ser comprovado pelos gráficos de $\gamma = 0.1$ e $\gamma = 0.2$. Entretanto, percebe-se ainda que o erro de seguimento de trajetória é menor para $\gamma = 0.5$, $\gamma = 0.7$ e $\gamma = 1.0$.

O *script* do Matlab® desenvolvido para a resolução dessa questão pode ser encontrado no Apêndice C.

Questão 4

Seja o sistema da Fig. 20. Considerando $G(s) = \dfrac{2e^{-s}}{s+0.25}$*, pede-se:*

a) *projetar um controlador PI de forma que o desempenho do sistema em malha fechada não apresente sobre-sinal. Simule a resposta no Matlab®.*

b) *Considerando o sistema com o controlador projetado no item a e considerando* $G_d(s) = 1$*, projetar um controlador feedforward (realizável) e avaliar o desempenho do sistema completo utilizando o Matlab®.*

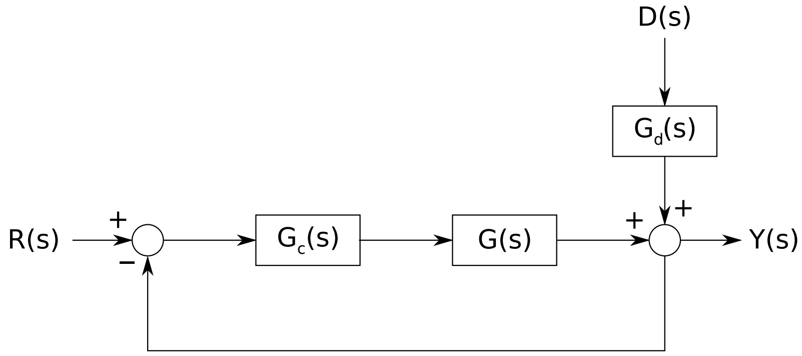

Figura 20: Diagrama de blocos do sistema.

Resolução:

O controlador PI foi projetado utilizando o método tradicional, desconsiderando o atraso do sistema, ou seja, separando o termo e^{-s} do restante da função de transferência, como pode ser visto na Fig. 21. Definimos então $G'(s)$, como sendo a função de transferência sem o atraso de transporte, ou seja:

$$G'(s) = \frac{2}{s+0.25} \tag{30}$$

Primeiramente, analisou-se o sistema em malha fechada do sistema dado o comportamento sem nenhum controlador ou seja $G'_c(s) = 1$. O comportamento pode ser tomando como aceitável já que se aproxima do erro de regime nulo e tem uma constante de tempo razoável (menos de 1s) (ver Fig. 22). O controlador PI está, então, adequadamente empregado já que tem por objetivo na sua definição a melhora do erro de regime.

O requisito do sistema projetado foi a não-presença do sobre-sinal (*overshoot*). Dessa forma os polos de $G'_c(s)G'(s)$ não devem possuir parte imaginária, o que significaria oscilações no sinal de saída. O controlador PI [de Araújo 2007] tem a seguinte função de transferência:

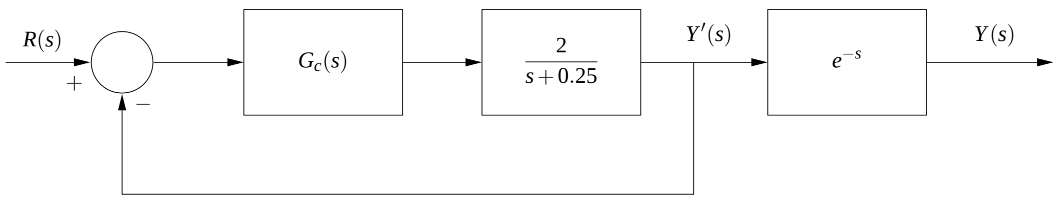

Figura 21: Projeto de controlador desconsiderando o atraso de transporte.

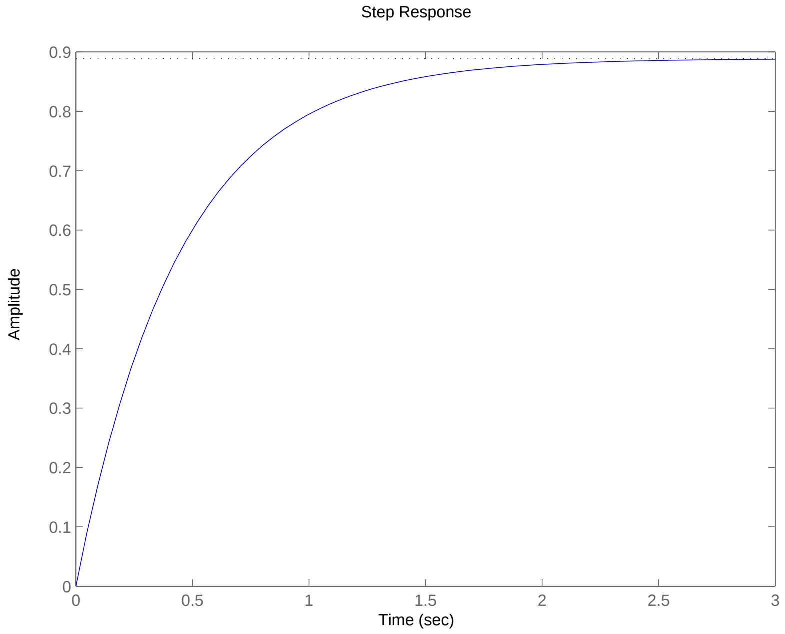

Figura 22: Saída do sistema sem o controlador

$$G'_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_c(s+z)}{s}$$

Logo o controlador adiciona um polo na origem e um zero. Para não afetar demasiadamente as características do transitório, decidimos posicionar o zero do controlador antes do polo do sistema $G'(s)$ (Eq. 30), ou seja $|z| < 0.25$. Foi simulado, então, o sistema com o seguinte controlador desenvolvido

$$G'_c(s) = \frac{s+0.2}{s} \tag{31}$$

e os resultados obtidos na simulação podem ser visualizados na Fig. 23. O diagrama do lugar das raízes para o sistema com o controlador pode também ser visualizado na Fig. 24.

A função de transferência de malha fechada para do sistema com o controlador, juntamente com o valor de ω_n e ζ é portanto:

$$G'_{\mathrm{MF}}(s) = \frac{G'_c(s)G'(s)}{1+G'_c(s)G'(s)} = \frac{0.4+2s}{0.4+2.25s+s^2}$$
$$\omega_n \approx 0.632$$
$$\zeta \approx 1.779$$

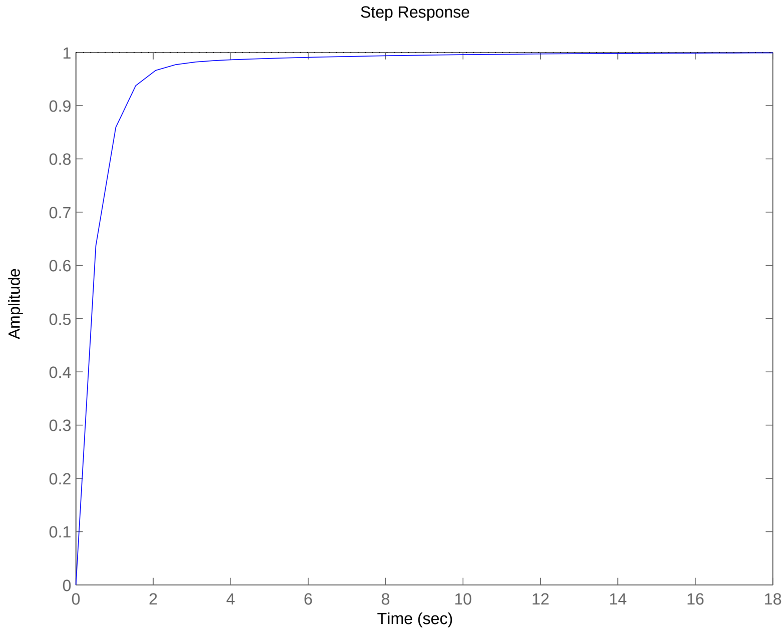

Figura 23: Saída do sistema com o controlador projetado $G'_c(s) = \dfrac{s+0.2}{s}$

Percebe-se que o sistema é sobreamortecido, já que $\zeta > 1$ [Medeiros 2003], portanto a resposta não apresenta o sobressinal. Simulou-se então através de Simulink® o desempenho do compensador PI projetado no controle do sistema $G(s)$ original, ou seja, com o atraso de transporte. O desempenho foi completamente insatisfatório: o sistema tornou-se instável (ver Fig. 26.

Foi adotado então o preditor de Smith, esse tipo de arquitetura implementa um tipo de predição baseado no modelo e possibilita ao controlador projetado agir baseado na predição $y'(t+L)$, onde L é o tempo morto, ou, em outras palavras, o preditor de Smith permite ao controlador agir no sistema como se não houvesse tempo morto [Hägglund 1996]. Hägglund (1996) também justifica porque o tipo de controlador normalmente usado com preditor de Smith é o PI. O sistema utilizado para a implementação do preditor bem como o resultado obtido são mostrados nas Figs. 27 e 28. É importante ressaltar que nesse preditor utilizamos uma função de transferência para predição $\hat{G}'(s) = \dfrac{2}{s+0.25}$ igual, portanto, ao sistema sem o atraso.

Foi analisado também o comportamento do preditor quando o sistema utilizado para predição não corresponde exatamente ao processo simulado ou seja $\hat{G}(s) \neq G'(s)$ (ver Fig. 29). Apesar de ter apresentado um baixo e indesejável sobressinal, o resultado foi razoável (ver Fig. 30), o que mostra a boa adequação do preditor mesmo com estimativas grosseiras da função de transferência do sistema original. Escolhemos para a continuação da questão o sistema tal que $\hat{G}(s) = G'(s)$. A função de transferência final do controlador é, portanto:

$$G_c(s) = \frac{G'_c(s)}{1+G'_c(s)(1-e^{-s})\hat{G}(s)} = \frac{G'_c(s)}{1+G'_c(s)(1-e^{-s})G'(s)} \quad (32)$$

Projetado o controlador PI, analisamos então o acréscimo do controle feedfoward ($G_{\mathrm{ff}}(s)$) ao processo (ver Fig. 31). Através da análise da figura temos que de modo a cancelar o efeito do ruído ao sistema deveríamos ter:

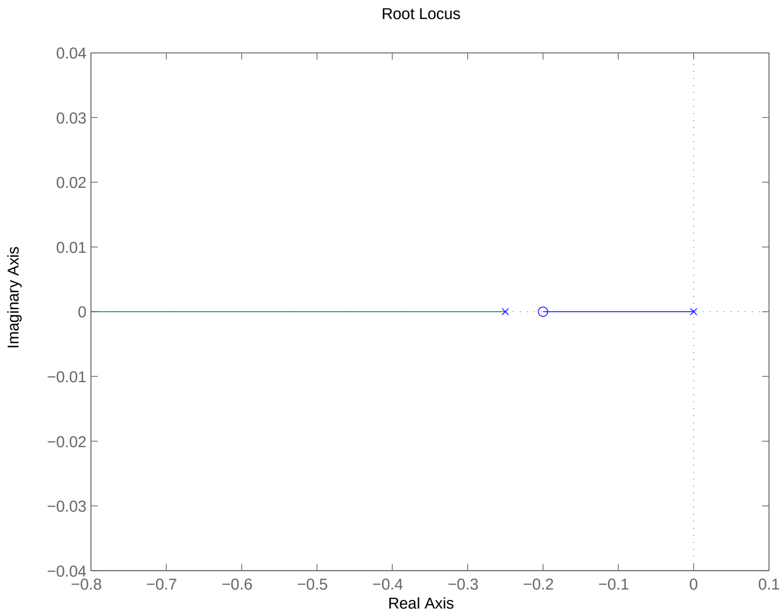

Figura 24: Lugar das raízes para $G'_c(s)G'(s) = \dfrac{0.4+2s}{0.25s+s^2}$

$$
\begin{aligned}
G'_{\text{ff}}(s) &= \frac{G_d(s)}{\underbrace{G_c(s)}_{\text{Eq. 32}}G(s)} = \frac{1+G'(s)G'_c(s)-e^{-s}G'(s)G'_c(s)}{G'(s)G'_c(s)e^{-s}} \\
&= \frac{1+G'(s)G'_c(s)}{G'(s)G'_c(s)}e^{s}-1
\end{aligned}
$$

A partir de $G'_{\text{ff}}(s)$, pode-se notar que o compensador ideal é irrealizável, já que envolve tanto um retorno no tempo e^s, quanto um impulso unitário 1. Isso poderia ser previamente notado, sem nenhum cálculo de função de transferência, através da análise de duas características do sistema:

- o distúrbio ($D(s)$) atua no sistema instantaneamente, já que $G_d(s) = 1$;
- qualquer ação na variável manipulada do sistema demorará um tempo $\tau = 1$ para ser refletida na saída, onde τ é o chamado tempo morto do sistema.

Com isso, qualquer ruído detectado em um determinado momento, somente poderá a ser compensado após o tempo morto do sistema, portanto o cancelamento de ruído perfeito não é possível, o que se reflete em um $G'_{\text{ff}}(s)$ irrealizável.

A partir do modelo ideal $G'_{\text{ff}}(s)$, $G_{\text{ff}}(s)$ foi projetado eliminando-se o termo e^s, assim sendo:

$$
\begin{aligned}
G_{\text{ff}}(s) &= \frac{1+G'(s)G'_c(s)}{G'(s)G'_c(s)}\cancel{e^{s}}-1 = \frac{1}{\underbrace{G'(s)}_{\text{Eq. 30}}\underbrace{G'_c(s)}_{\text{Eq. 31}}}\cancel{+1-1} = \frac{s(s+0.25)}{2(s+0.2)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{s^2+0.25s}{s+0.2}
\end{aligned}
$$

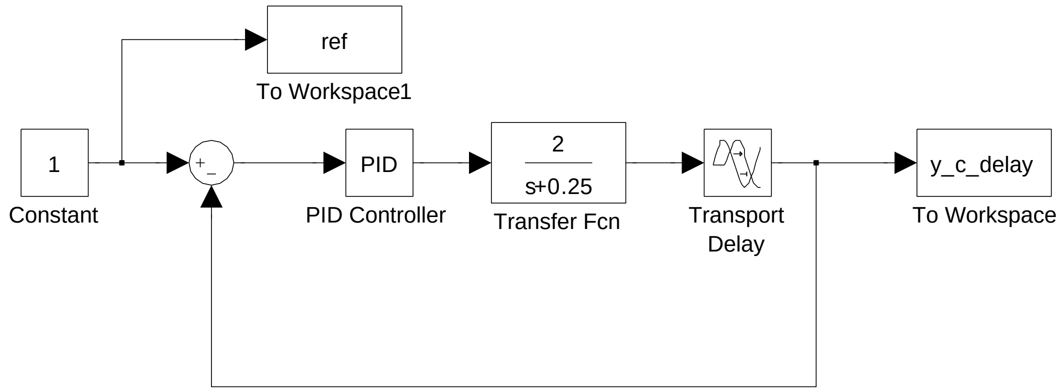

Figura 25: Sistema com atraso controlado pelo PI

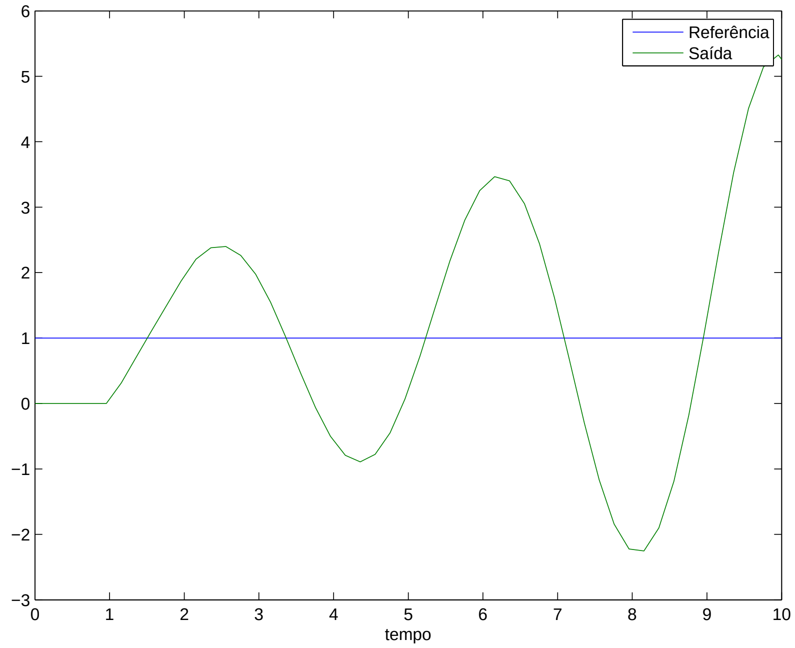

Figura 26: Resposta do sistema da Fig. 25

observa-se que o número de zeros supera o de polo no sistema. Para contornar o problema adicionou-se em série dois filtros (passa-baixa) na equação de transferência $G_{\text{ff}}(s)$, foram testados dois tipos de filtros $F_1(s) = \dfrac{1}{s+1}$ e $F_{10}(s) = \dfrac{10}{s+10}$, esses filtros possuem ganho estático 1 e não influenciam o regime do sistema. Analisou-se o comportamento da resposta de três sistemas o primeiro sem o controle feedfoward (ver Fig. 32), o segundo com a função de transferência $G_{\text{ff}_1}(s)$ apresentada na Eq. 33 (ver Fig. 34) e o terceiro com a função de transferência $G_{\text{ff}_{10}}(s)$ apresentada na Eq. 34 (ver Fig. 36). O tipo de ruído utilizado foi um sinal tipo degrau unitário que começar a agir no tempo $t_r = 5$. Os resultados para os três sistemas estão apresentados nas Figs. 33, 35 e 37 respectivamente.

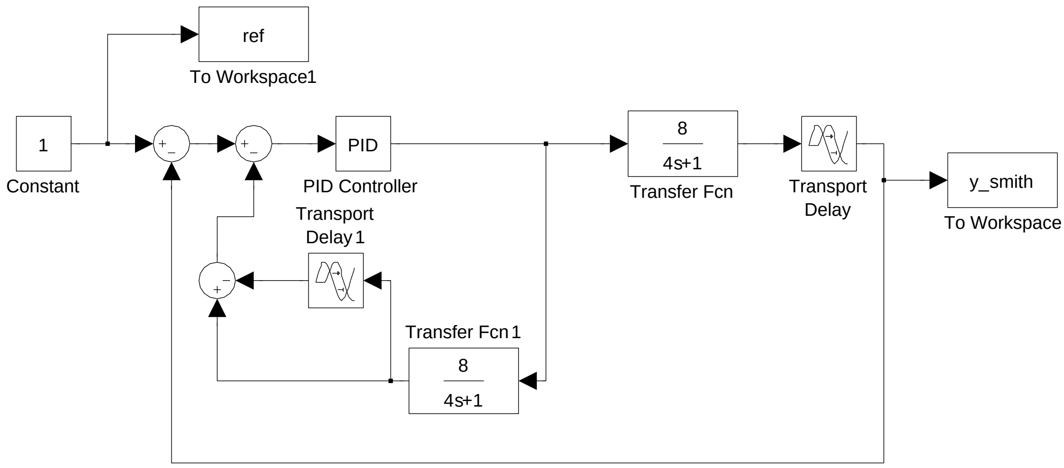

Figura 27: Preditor de Smith

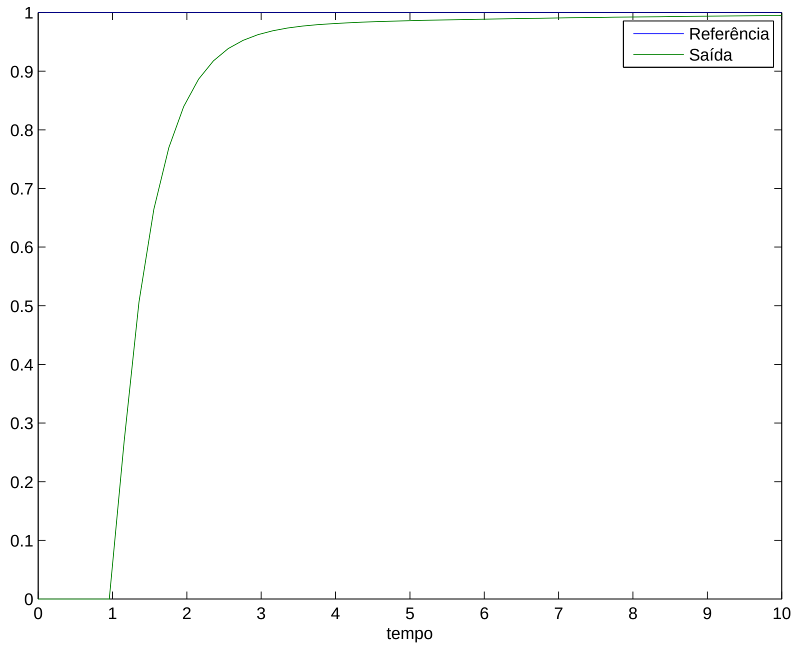

Figura 28: Resposta ao controlador com preditor da Fig. 27

$$F_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_{\text{ff}_1} = G_{\text{ff}}(s)F_1(s)F_1(s) = \frac{1}{2}\frac{s^2+0.25s}{s+0.2}\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+1} = 0.5\frac{0.25s+s^2}{0.2+1.4s+2.2s^2+s^3} \tag{33}$$

$$F_{10}(s) = \frac{10}{s+10}$$

$$G_{\text{ff}_{10}} = G_{\text{ff}}(s)F_{10}(s)F_{10}(s) = \frac{1}{2}\frac{s^2+0.25s}{s+0.2}\frac{10}{s+10}\frac{10}{s+10} = 50\frac{s^2+0.25s}{s^3+20.2s^2+104s+20} \tag{34}$$

Observando-se o resultado dos três sistemas nota-se que, nesse caso, apesar do que o próprio nome sugere, o controle feedfoward, não irá atuar antecipadamente em relação ao controle PI já instalado, pois, já que o distúrbio atua instantaneamente na saída, o sinal de erro por ele gerado é detectado (também instantaneamente) pelo controlador PI (com preditor) já instalado. Por essa razão o sinal de saída do sistema sem o controle FF não se diferencia muito em termos de desempenho dos sistemas com controle feedfoward. No entanto a adição da compensação FF, possui uma diferença básica, a rapidez da reação ao ruído após o tempo $t_r + \tau$, ou seja, passado o intervalo do tempo morto após a aplicação do ruído, como pode ser visto na Fig. 37, na qual há um sobressinal na compensação do ruído. Esse comportamento é devido à excitação do controlador $G_c(s)$ não somente pelo erro gerado pelo ruído mas também sinal proveniente de $G_{\text{ff}}(s)$ e possui a característica de causar um sobressinal no restabelecimento da referência. A reação ao ruído na Fig. 34, no entanto, é bastante lenta, devido aos filtros utilizados ($F_1(s)$) possuírem uma constante de tempo elevada (1s), é o sistema que apresenta o pior desempenho entre os três.

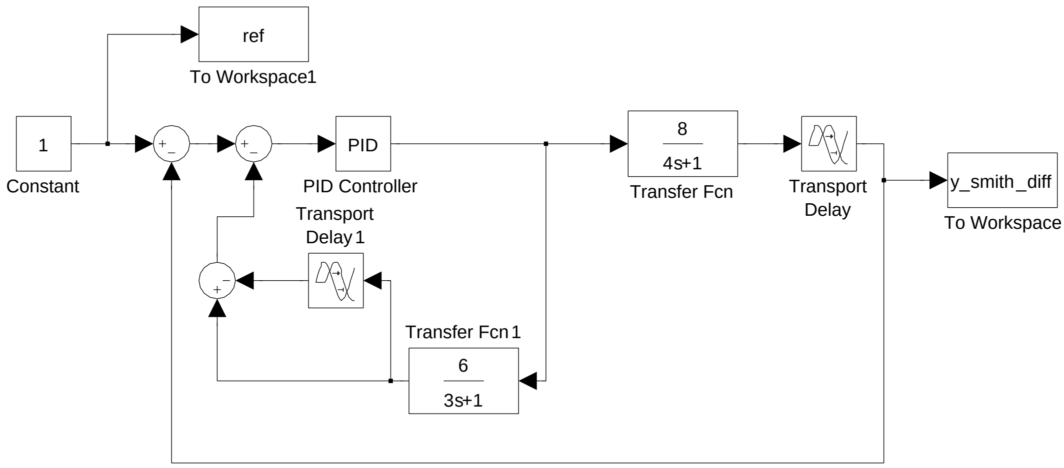

Figura 29: Preditor de Smith com $G'(s) = \dfrac{6}{3s+1}$

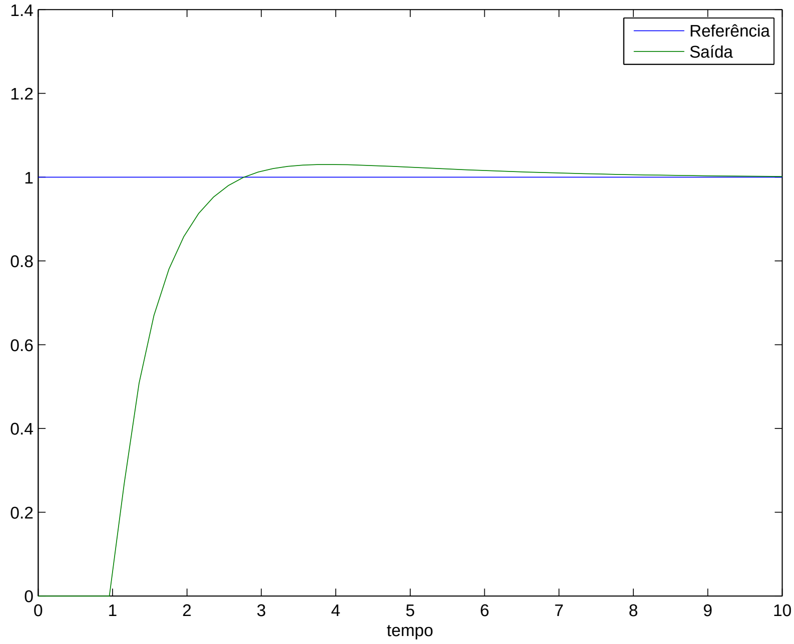

Figura 30: Resposta ao controlador com preditor da Fig. 29

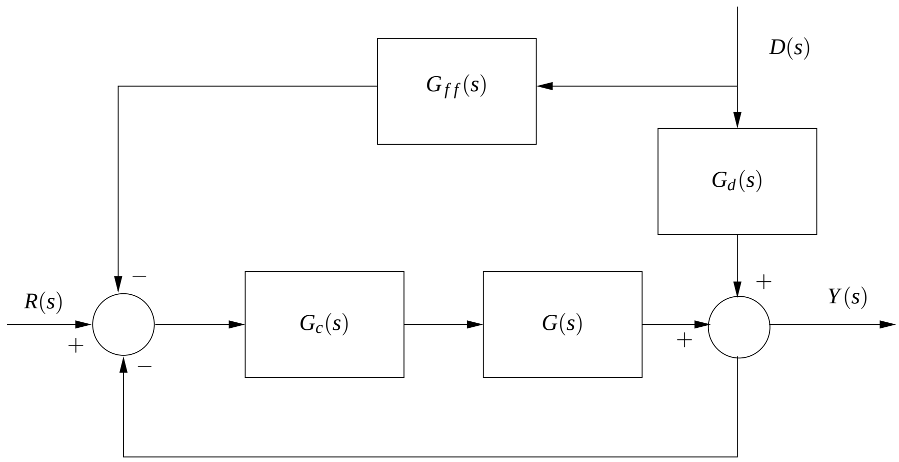

Figura 31: Projeto de controlador desconsiderando o atraso de transporte.

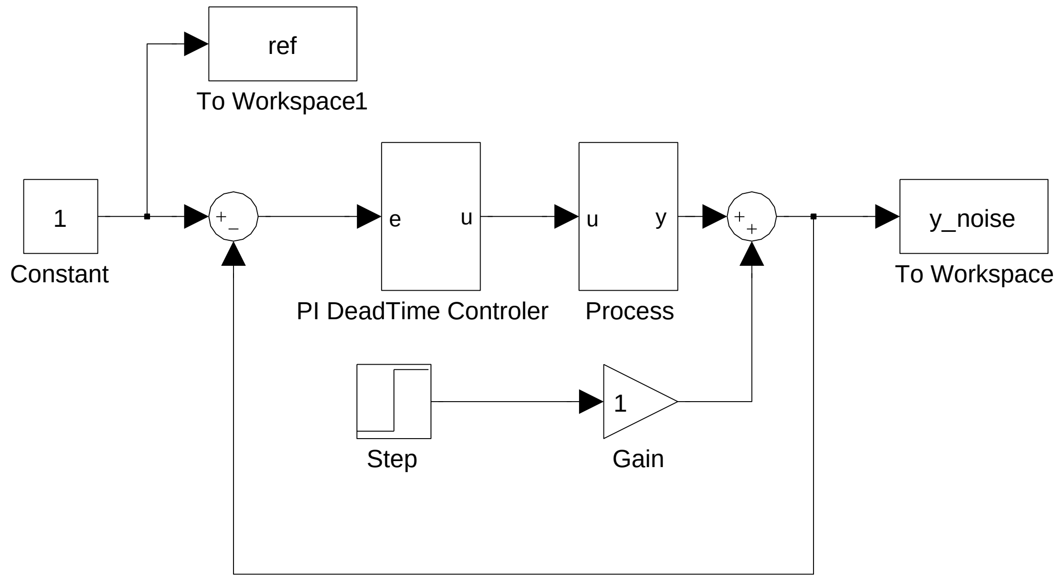

Figura 32: Sistema com ruido na saída sem compensação feedfoward

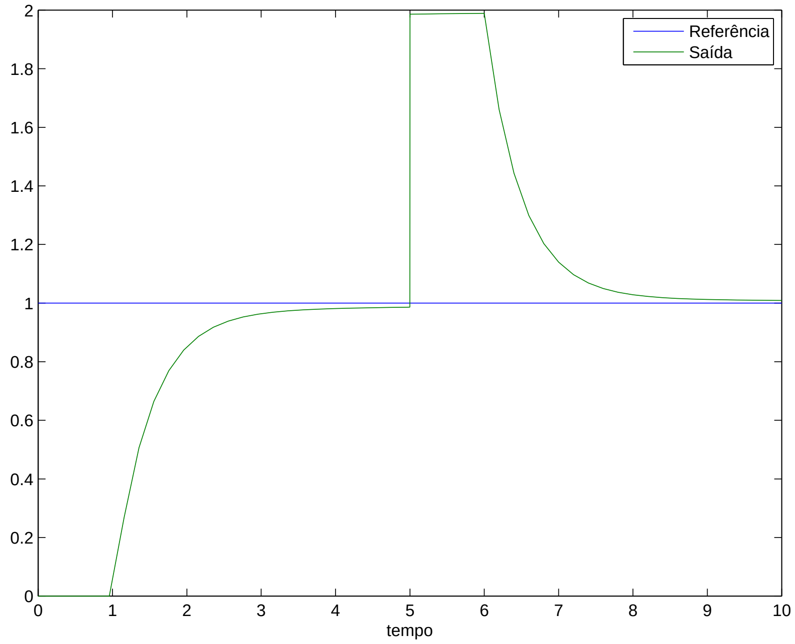

Figura 33: Resposta do sistema da Fig. 32

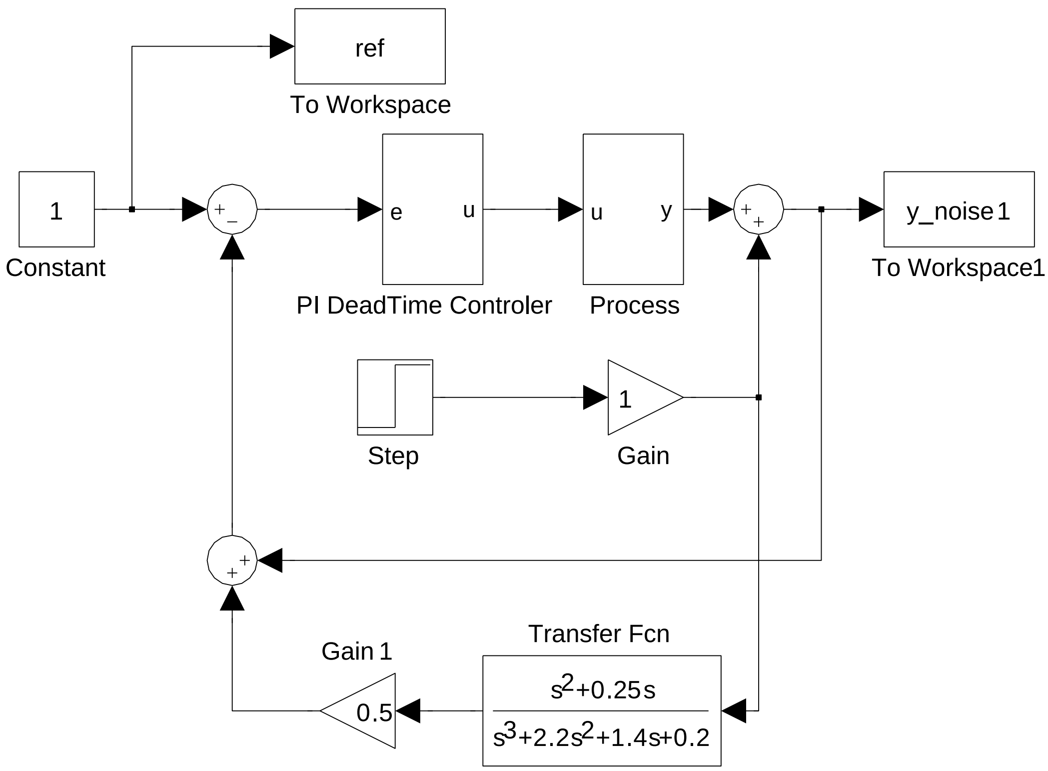

Figura 34: Sistema com ruido na saída com compensação feedfoward G_{ff_1}

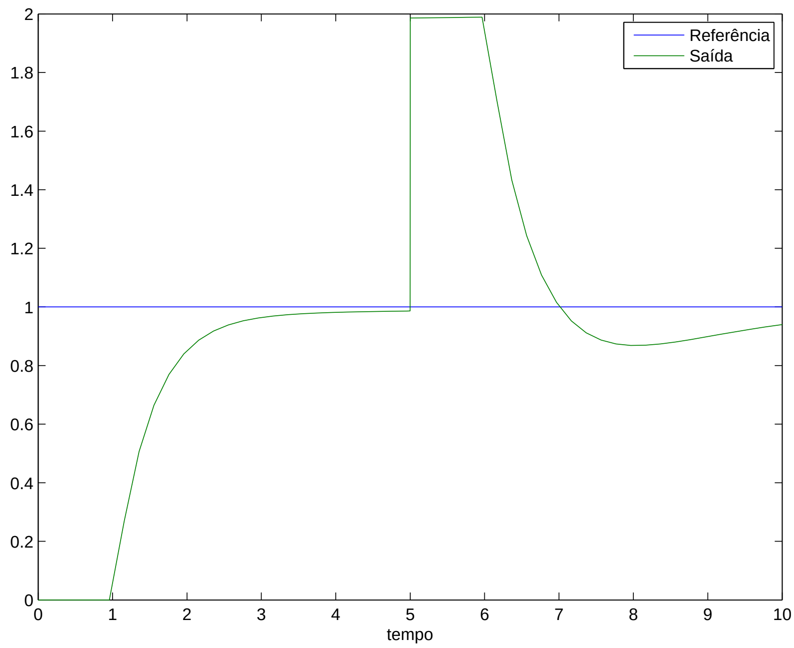

Figura 35: Resposta do sistema da Fig. 34

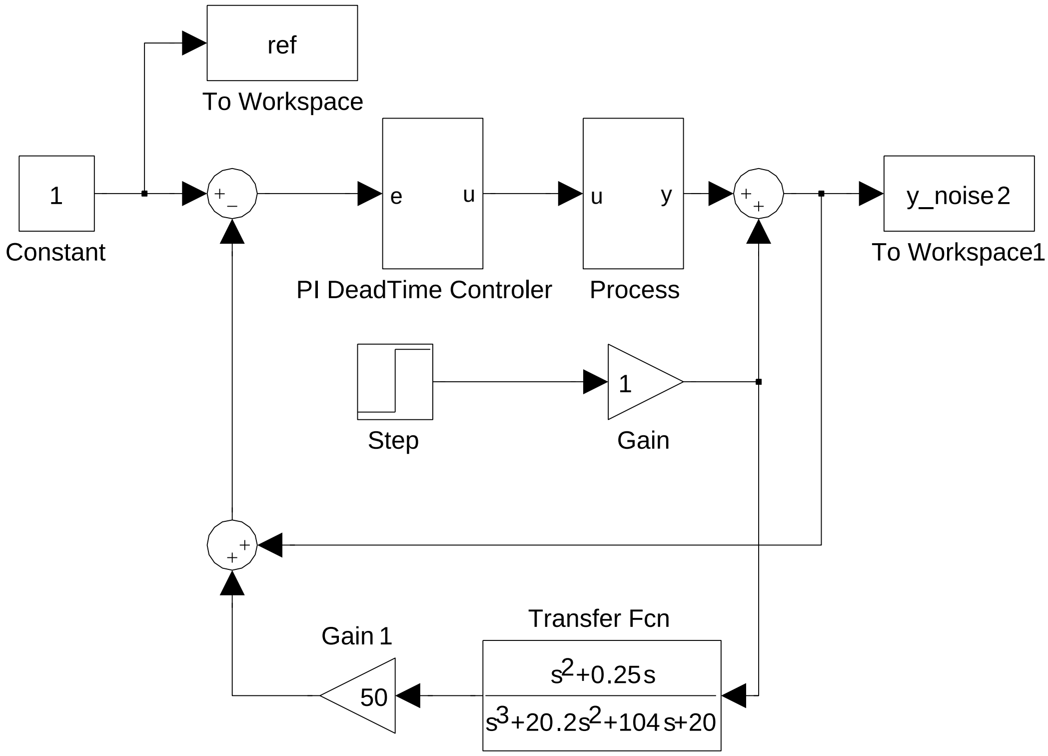

Figura 36: Sistema com ruido na saída com compensação feedfoward $G_{\mathrm{ff}_{10}}$

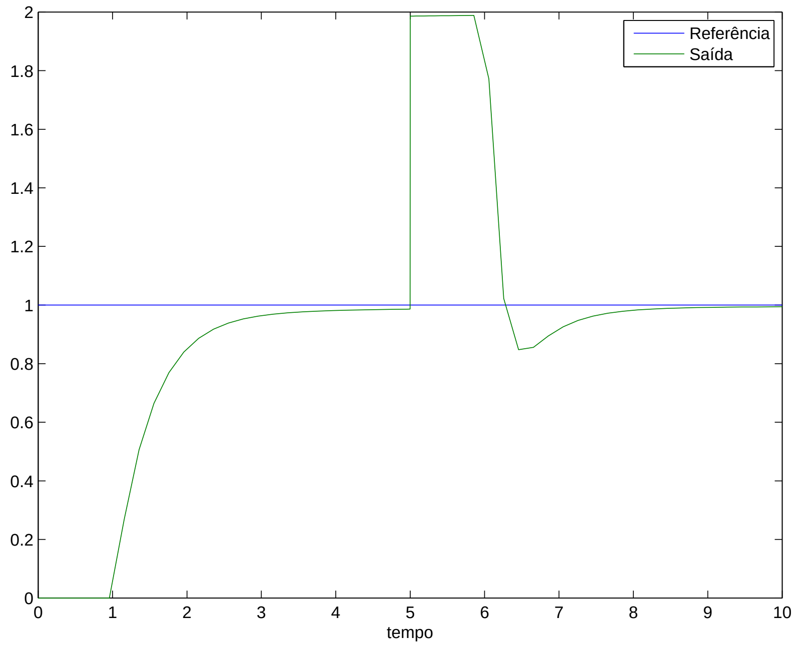

Figura 37: Resposta do sistema da Fig. 36

Apêndice A

Código da Questão 1

```
% Universidade Federal do Rio Grande do Norte
% Programa de Pos-Graduacao em Engenharia Eletrica e de Computacao
% Lista 1 - Questao 1
% Autores: Anna Giselle Camara Dantas Ribeiro
%          Cristiano Gurgel de Castro
%          Diogo Leite Reboucas
%          Thiago Medeiros Barros

clear;
clc;

p = [ 1 2 3 4 5 ];
tam = length( p );

% Malha aberta
figure;
hold on;

MGma = zeros( 1, tam );
MFma = zeros( 1, tam );
WGma = zeros( 1, tam );
WFma = zeros( 1, tam );

for i = 1 : tam
    Gma(i) = tf( [9], [1 p(i) 0] );
    margin( Gma(i) ); % Somente para o plot
    [MGma(i) MFma(i) WGma(i) WFma(i)] = margin( Gma(i) );
end

legend( 'p = 1', 'p = 2', 'p = 3', 'p = 4', 'p = 5' );

% Malha fechada
figure;
hold on;

for i = 1 : tam
    Gmf(i) = tf( [9], [1 p(i) 9] );
    bodeplot( Gmf(i) );
end

grid on;
legend( 'p = 1', 'p = 2', 'p = 3', 'p = 4', 'p = 5' );

% Resposta ao degrau
figure;
hold on;

for i = 1 : tam
    step( Gmf(i) );
end

legend( 'p = 1', 'p = 2', 'p = 3', 'p = 4', 'p = 5' );

% Sensibilidade
```

```
figure;
hold on;

for i = 1 : tam
    Gsensib(i) = tf( [-p(i) 0], [1 p(i) 9] );
    bodeplot( Gsensib(i) );
end

grid on;
legend( 'p = 1', 'p = 2', 'p = 3', 'p = 4', 'p = 5' );
```

Apêndice B

Código da Questão 2

B.1 Polinômios de Kharitonov – Teste A

```
% Universidade Federal do Rio Grande do Norte
% Programa de Pos-Graduacao em Engenharia Eletrica e de Computacao
% Lista 1 - Questao 2 - Teste Kharitonov A
% Autores: Anna Giselle Camara Dantas Ribeiro
%          Cristiano Gurgel de Castro
%          Diogo Leite Reboucas
%          Thiago Medeiros Barros

clear;
clc;

Zc = 0.9;
Pc = 0.007;

% Limites para a0
alpha0 = Zc;
beta0 = 2*Zc + 5*Pc;

% Limites para a1
alpha1 = 3*Pc + Zc + 1;
beta1 = 6*Pc + Zc + 1;

% Limites para a2
alpha2 = Pc + 4;
beta2 = Pc + 7;

% Limites para a3
alpha3 = 1;
beta3 = 1;

% Polinomios de Karithonov
r1 = roots( [ alpha0 alpha1 beta2 beta3 ] );
r2 = roots( [ alpha0 beta1 beta2 alpha3 ] );
r3 = roots( [ beta0 alpha1 alpha2 beta3 ] );
r4 = roots( [ beta0 beta1 alpha2 alpha3 ] );

disp( 'Raizes expostas nas colunas da matriz' );

M = [r1 r2 r3 r4]
```

B.2 Polinômios de Kharitonov – Teste B

```
% Universidade Federal do Rio Grande do Norte
% Programa de Pos-Graduacao em Engenharia Eletrica e de Computacao
% Lista 1 - Questao 2 - Teste Kharitonov B
% Autores: Anna Giselle Camara Dantas Ribeiro
%          Cristiano Gurgel de Castro
%          Diogo Leite Reboucas
%          Thiago Medeiros Barros
```

```
clear;
clc;

Zc = 0.3;
Pc = 0.0022;
Kc = 20;

% Limite para a0
alpha0 = Zc;
beta0 = 2*Zc + 5*Pc;

% Limite para a1
alpha1 = 3*Pc + Kc*(Zc + 1);
beta1 = Kc*(Zc + 2) + 6*Pc + 5;

% Limite para a2
alpha2 = Kc + Pc  + 4;
beta2 = Kc + Pc + 6;

% Limite para a3
alpha3 = 1;
beta3 = 1;

% Polinomios de Karithonov
r1 = roots( [alpha0 alpha1 beta2 beta3] );
r2 = roots( [alpha0 beta1 beta2 alpha3] );
r3 = roots( [beta0 alpha1 alpha2 beta3] );
r4 = roots( [beta0 beta1 alpha2 alpha3] );

disp( 'Raizes expostas nas colunas da matriz' );

M = [r1 r2 r3 r4]
```

B.3 Resposta ao degrau e LGR

```
% Universidade Federal do Rio Grande do Norte
% Programa de Pos-Graduacao em Engenharia Eletrica e de Computacao
% Lista 1 - Questao 2 - Simulacoes / LGR
% Autores: Anna Giselle Camara Dantas Ribeiro
%          Cristiano Gurgel de Castro
%          Diogo Leite Reboucas
%          Thiago Medeiros Barros

clear;
clc;

p = 4;
q = 0.5;
r = 1.5;

% Malha aberta
g_ma = tf( [1 r], [1 (p+q) p*q] );

figure;
step( g_ma );
grid on;

figure;
rlocus( g_ma );

% Malha fechada
g_mf = g_ma / ( 1 + g_ma );

figure;
step( g_mf );
grid on;

figure;
rlocus( g_mf );

% Compensador 1
```

```
Kc1 = 1;
Zc1 = 0.3;
Pc1 = 0.0022;

H_c1 = Kc1 * tf( [1 Zc1], [1 Pc1] );

g_ma_comp1 = H_c1 * g_ma;
g_mf_comp1 = g_ma_comp1 / ( 1 + g_ma_comp1 );

figure;
step( g_mf_comp1 );
grid on;

figure;
rlocus( g_mf_comp1 );

% Compensador 2
Kc2 = 20;
Zc2 = 0.3;
Pc2 = 0.0022;

H_c2 = Kc2 * tf( [1 Zc2], [1 Pc2] );

g_ma_comp2 = H_c2 * g_ma;
g_mf_comp2 = g_ma_comp2 / ( 1 + g_ma_comp2 );

figure;
step( g_mf_comp2 );
grid on;

figure;
rlocus( g_mf_comp2 );
```

Apêndice C

Código da Questão 3

```
% Universidade Federal do Rio Grande do Norte
% Programa de Pos-Graduacao em Engenharia Eletrica e de Computacao
% Lista 1 - Questao 3
% Autores: Anna Giselle Camara Dantas Ribeiro
%          Cristiano Gurgel de Castro
%          Diogo Leite Reboucas
%          Thiago Medeiros Barros

clear;
clc;

a = 1;
b = 1;
c = 1;

a_m = 2;
b_m = 1;
c_m = 1;

gammas = [0.1 0.2 0.5 0.7 1.0];
cores = [ 'b', 'g', 'r', 'c', 'm' ];

periodo_ref = 200;
tempo_simulacao = 1000;

tam = length( gammas );

% Guardando as saidas
saidas = cell( tam, 1 );

for i = 1 : tam
    gamma = gammas( i );

    open( 'q3_simulacao' );
    sim( 'q3_simulacao' );

    saidas{i} = saida;
end

% Plot das saidas
for i = 1 : tam
    figure;

    % Referencia + Saida
    subplot( 3, 1, 1 );
    ylabel( 'Saida' );
    hold on;
    grid on;
    plot( saidas{i}( :, 1 ), saidas{i}( :, 4 ), 'k--' );
    plot( saidas{i}( :, 1 ), saidas{i}( :, 3 ), 'b' );
    legend( 'Referencia', 'Saida' );

    % Erro + Sinal de Controle
    subplot( 3, 1, 2 );
```

```
    ylabel( 'Erro / Sinal de Controle' );
    hold on;
    grid on;
    plot( saidas{i}( :, 1 ), saidas{i}( :, 2 ), 'r' );
    plot( saidas{i}( :, 1 ), saidas{i}( :, 5 ), 'b' );
    legend( 'Erro', 'Sinal de Controle' );

    % Evolucao Theta
    subplot( 3, 1, 3 );
    ylabel( 'Valores de \theta' );
    hold on;
    grid on;
    plot( saidas{i}( :, 1 ), saidas{i}( :, 6 ), 'r' );
    plot( saidas{i}( :, 1 ), saidas{i}( :, 7 ), 'g' );
    plot( saidas{i}( :, 1 ), saidas{i}( :, 8 ), 'b' );
    legend( '\theta_1', '\theta_2', '\theta_3' );
end
```

Apêndice D

Código da Questão 4

D.1 Projeto do controlador PI

```
% Universidade Federal do Rio Grande do Norte
% Programa de Pos-Graduacao em Engenharia Eletrica e de Computacao
% Controle Avancado
% Projeto do controlador PI para a questao 4 da lista 1
% Autores:
%         Anna Giselle Camara Dantas Ribeiro
%         Cristiano Gurgel de Castro
%         Diogo Leite Reboucas
%         Thiago Medeiros Barros

%% Definicoes
clear;
clc;
Kc = 1;
z = 0.20;

%% Funcoes de transferencia
s = tf('s');
g_ma = 2/(s+0.25);
g_c = Kc * (s+z)/s;
g_c_ma = series(g_c, g_ma);
g_mf = feedback(g_ma,1);
g_c_mf = feedback(g_c_ma, 1);

% g_ma_delay = series(g_ma, exp(-s));
% g_c_ma_delay = series(g_c, g_ma_delay);
% g_c_mf_delay = feedback(ss(g_c_ma_delay), 1);
%% Analise da funcao de transferencia
[num, den] = tfdata(g_c_mf, 'v');
Wn = sqrt(den(3));
Xi = den(2)/(2*Wn);

%% Simulacao
step(g_ma);
print -depsc ../../imgs/questao4/saida_ma.eps
step(g_mf);
print -depsc ../../imgs/questao4/saida_mf.eps
step(g_c_mf);
print -depsc ../../imgs/questao4/saida_comp_mf.eps
rlocus(g_ma);
print -depsc ../../imgs/questao4/rlocus_ma.eps
rlocus(g_c_ma);
print -depsc ../../imgs/questao4/rlocus_cma.eps
```

D.2 Simulação dos modelos

```
% Universidade Federal do Rio Grande do Norte
% Programa de Pos-Graduacao em Engenharia Eletrica e de Computacao
```

```
% Controle Avancado
% Projeto do controlador PI para a questao 4 da lista 1
% Autores:
%        Anna Giselle Camara Dantas Ribeiro
%        Cristiano Gurgel de Castro
%        Diogo Leite Reboucas
%        Thiago Medeiros Barros

%% Limpando o workspace
clear;
clc;
Tf = 10;

%% PI controlando sistema com atraso
sim('sist_cont_dt.mdl', Tf);
plot(tout, [ref y_c_delay]);
xlabel('tempo');
legend( 'Referencia', 'Saida' )
print -depsc ../../imgs/questao4/saida_cont_dt.eps
set_param('sist_cont_dt', 'PaperOrientation', 'portrait');
print -ssist_cont_dt -depsc ../../imgs/questao4/sist_cont_dt.eps

%% PI com preditor de Smith
sim('sist_cont_dt_smith.mdl', Tf);
plot(tout, [ref y_smith]);
xlabel('tempo');
legend( 'Referencia', 'Saida' )
print -depsc ../../imgs/questao4/saida_smith.eps
set_param('sist_cont_dt_smith', 'PaperOrientation', 'portrait');
print -ssist_cont_dt_smith -depsc ../../imgs/questao4/sist_smith.eps

%% PI com preditor de Smith com funcao de transferencia nao-exata
sim('sist_cont_dt_smith_diff.mdl', Tf);
plot(tout, [ref y_smith_diff]);
xlabel('tempo');
legend( 'Referencia', 'Saida' )
print -depsc ../../imgs/questao4/saida_smith_diff.eps
set_param('sist_cont_dt_smith_diff', 'PaperOrientation', 'portrait');
print -ssist_cont_dt_smith_diff -depsc ../../imgs/questao4/sist_smith_diff.eps

%% Ruido sem o controle FF
sim('sist_noise.mdl', Tf);
plot(tout, [ref y_noise]);
xlabel('tempo');
legend( 'Referencia', 'Saida' )
print -depsc ../../imgs/questao4/saida_ruido.eps
set_param('sist_noise', 'PaperOrientation', 'portrait');
print -ssist_noise -depsc ../../imgs/questao4/sist_ruido.eps

%% Ruido com o controle FF (filtro 1/(s+1))
sim('noise_comp1.mdl', Tf);
plot(tout, [ref y_noise1]);
xlabel('tempo');
legend( 'Referencia', 'Saida' )
print -depsc ../../imgs/questao4/saida_ruido_ff1.eps
set_param('noise_comp1', 'PaperOrientation', 'portrait');
print -snoise_comp1 -depsc ../../imgs/questao4/sist_ruido_ff1.eps

%% Ruido com o controle FF (filtro 10/(s+10))
sim('sist_noise_comp.mdl', Tf);
plot(tout, [ref y_noise2]);
xlabel('tempo');
legend( 'Referencia', 'Saida' )
print -depsc ../../imgs/questao4/saida_ruido_ff2.eps
set_param('sist_noise_comp', 'PaperOrientation', 'portrait');
print -ssist_noise_comp -depsc ../../imgs/questao4/sist_ruido_ff2.eps
```

Referências Bibliográficas

de Araújo, Fábio Meneghetti Ugulino (2007), Sistemas de controle.

Dorf, Richard C. e Robert H. Bishop (2009), *Sistemas de Controle Modernos*, LTC – 11ª Edição.

Hägglund, T. (1996), 'An industrial dead-time compensating pi controller', *Control Engineering Practice* **4**(6), 749 – 756.
URL: *http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V2H-3VTSN02-1/2/50bf08ba61c6fbfa85169e346004f622*

Maitelli, André Laurindo (2002), 'Sistemas de controle', Apostila.

Medeiros, Adelardo A. D. (2003), Modelagem e análise de sistemas dinâmicos - material didático.