Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

MÉTODOS DE SIMULACIÓN

Introducción a la Simulación

Departamento de Inteligencia Artificial

La simulación es un proceso numérico diseñado para experimentar el comportamiento de cualquier sistema en una computadora a lo largo del tiempo, en base a modelos matemáticos y lógicos diseñados para tal fin.

Se utiliza en sistemas tan complejos que no es posible su tratamiento analítico o mediante métodos numéricos. Éstos requieren la simplificación del sistema real bajo estudio con el fin de que cumpla condiciones que fundamentan la teoría del modelo en uso, lo que en sistemas complejos podría llevarnos a resolver un sistema muy lejano del real bajo estudio.

Permiten estudiar el sistema real sin deformarlo, generando una visión mucho más profunda y detallada que cualquier modelo analítico o numérico.

Sin embargo, no aseguran resultados óptimos, pero sí muy cercanos a los mismos.

Originalmente eran costosos en cuanto a recursos de computadora (tiempo de ejecución y memoria) y consumían mucho tiempo en el diseño, prueba y verificación del modelo de simulación. Hoy en día esto no es un problema debido a la existencia de computadores cada vez más potentes y al desarrollo de herramientas específicas de simulación.

Los orígenes de la simulación se sitúan en los trabajos de Student para determinar la distribución de la variable *t*, pero se suele afirmar que esta disciplina renació, identificada como una técnica numérica, durante la Segunda Guerra Mundial, cuando Von Neumann y Ulam aplicaron los llamados Métodos de Montecarlo a problemas de difusión de neutrones.

Algunas de las ventajas que se puede derivar del uso de la simulación son:

- Permite al analista comprimir y expandir el tiempo. El mecanismo de control se puede usar para ralentizar o acelerar la ocurrencia de sucesos y situarlos en una escala adecuada para el analista.

- Aunque la construcción del modelo de simulación puede ser costosa, éste puede ser aplicado repetidamente para varios tipos de experimentación.

- Frecuentemente es menos costoso obtener datos de una simulación que del sistema real.

- Se puede utilizar para analizar un sistema propuesto o experimentar en el sistema real sin perturbar al sistema actual. La experimentación sobre sistemas reales, particularmente en sistemas que impliquen la participación humana, a menudo hacen que el comportamiento del sistema cambie como respuesta a la experimentación.

- Los modelos de simulación no necesariamente requieren las hipótesis de simplificación que pueden ser requeridas por modelos analíticos.

Ejemplo: Modelo de colas poissoniano con un servidor *M/M/1*

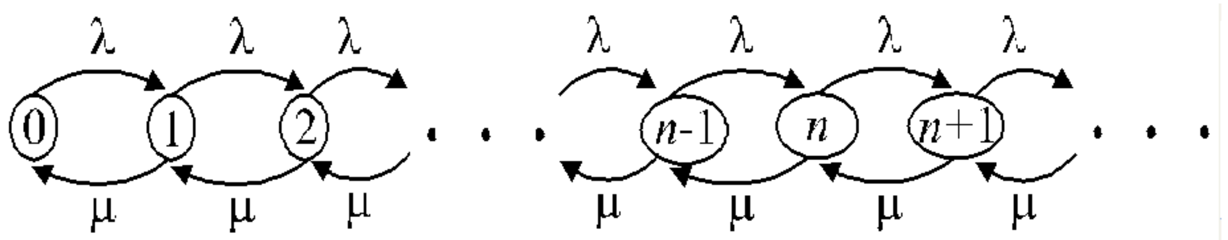
En este modelo se dispone sólo de un canal para dar servicio, las llegadas siguen un proceso de Poisson y la distribución del tiempo de servicio es exponencial.

Así, las tasas de nacimiento y muerte no dependen del número de clientes en el sistema y

$$\lambda_n = \lambda, \ \ n = 0,1,2,... \qquad \mu_n = \mu, \ \ n = 1,2,3,...$$

La capacidad del sistema es ilimitada y la disciplina de la cola es FIFO.

La siguiente figura representa el diagrama de transición



que conduce al sistema de ecuaciones en equilibrio

Estado	Tasa entrada	=	Tasa salida
0	$\mu\pi_1$	$=$	$\lambda\pi_0$
$n \geq 1$	$\lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}$	$=$	$(\lambda+\mu)\pi_n$

$$
\begin{aligned}
\pi_0\lambda &= \pi_1\mu \\
\pi_1(\lambda+\mu) &= \pi_0\lambda + \pi_2\mu \\
\pi_2(\lambda+\mu) &= \pi_1\lambda + \pi_3\mu \\
&\cdots \\
\pi_i(\lambda+\mu) &= \pi_{i-1}\lambda + \pi_{i+1}\mu \\
&\cdots \\
\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i &= 1
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
\pi_0\lambda &= \pi_1\mu \\
\pi_1\lambda &= \pi_2\mu \\
\pi_2\lambda &= \pi_3\mu \\
&\cdots \\
\pi_i\lambda &= \pi_{i+1}\mu \\
&\cdots \\
\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i &= 1
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
\pi_1 &= \rho\pi_0 \\
\pi_2 &= \rho\pi_1 = \rho^2\pi_0 \\
\pi_3 &= \rho\pi_2 = \rho^3\pi_0 \\
&\cdots \\
\pi_i &= \rho\pi_{i-1} = \rho^i\pi_0 \\
&\cdots \\
\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

Sustituyendo las expresiones de los π_i en la última ecuación y despejando π_0 obtenemos (teniendo en cuenta que el factor de utilización es $\rho = r = \lambda/\mu$):

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{1/(1-\rho)} = 1 - \rho$$

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n, \qquad n = 0, 1, 2, 3...$$

que corresponde a una distribución geométrica de parámetro 1- ρ.

Medidas de rendimiento

Número medio de clientes en el sistema, *L*, y en la cola, L_q. Se tiene

$$L = E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$
$$= (1-\rho)\rho\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)$$
$$= (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{(1-\rho)\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Número medio de clientes en la cola L_q

$$L_q = E(N_q) = 0\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n - \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n$$
$$= L - (1-\pi_0) = L - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho},$$

Las medias los tiempos de espera se calculan fácilmente por las fórmulas de Little:

$$W = E(w) = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{E(s)}{1-\rho}$$

$$W_q = E(q) = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho E(s)}{1-\rho}$$

Otros modelos de colas con tratamiento analítico:

Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K*

Modelo con varios servidores *M/M/c*

Modelo con infinitos servidores *M/M/∞*

Modelo con varios servidores y pérdidas *M/M/c/K*

Modelo M/M/*c* con pérdidas (modelo *M/M/c/c*).

Modelo con un servidor, población finita *M/M/1/K/K*

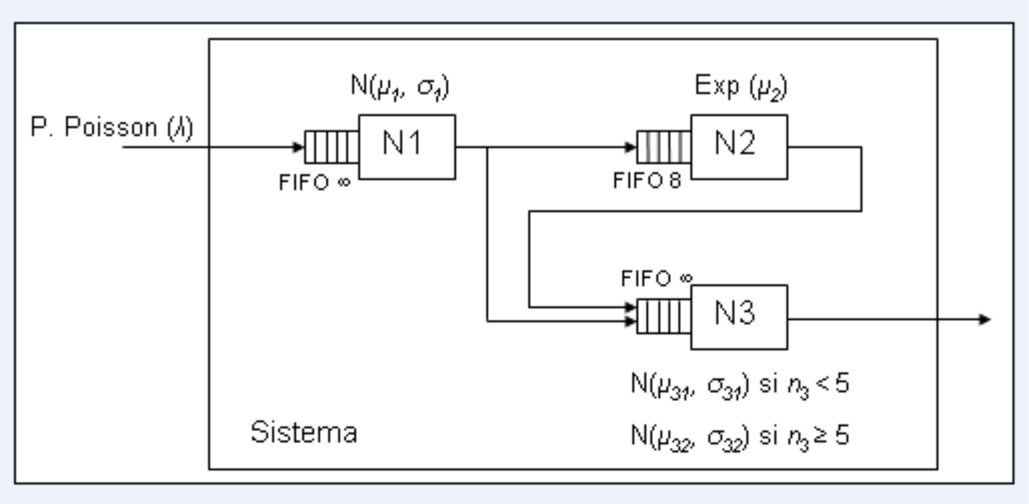
Modelo con *c* servidores, población finita *M/M/c/K/K*

Modelo sin tratamiento analítico: puede que se violen las hipótesis de estacionariedad, independencia o ergodicidad. O puede que el sistema sea una red de colas muy grande con disciplinas caprichosas, tiempos de llegada o servicio arbitrarios, capacidad limitada en ciertos nodos y otros con comportamiento no estable.

Es evidente que deberíamos estar dispuestos a aceptar soluciones aproximadas para estos sistemas mediante la aplicación de la simulación.

Ejemplo: Red de colas

Consideremos el siguiente sistema formado por tres nodos:



Se permite la entrada de clientes hasta el instante *T*, a partir del cual únicamente se sigue dando servicio a los clientes que están en el sistema hasta que todos ellos lo abandonan. Determinar el *tiempo medio que pasan los clientes en el sistema*, el *número medio de clientes en cada* nodo y el *porcentaje de clientes que pasan por el nodo 2*. Obtendremos también el *tiempo transcurrido desde el instante T hasta que el último cliente abandona el sistema*.

Pasos del proceso de simulación

1. **Formulación del problema**. Proceso iterativo dialéctico para identificar claramente objetivos, definir los componentes del sistema, sus variables y como interaccionan entre sí.

2. **Recolección y procesamiento de la información requerida**. Capturar los datos disponibles que se requieren para la simulación del comportamiento del sistema y procesarlos en información útil para el modelo de simulación.
   Posibles fuentes para generar información: datos históricos o series de tiempo, opiniones de expertos y estudios de campo (diseño de una muestra estadísticamente representativa del universo bajo estudio).

3. **Formulación del modelo matemático**. Al modelizar, caracterizaremos matemáticamente las relaciones que gobiernan la interacción de los componentes del sistema y las actividades exógenas y endógenas. La

cripción del sistema se hará de forma modular, por bloques.

5. **Evaluación de las características de la información procesada**. La información requerida para simular el comportamiento de muchos sistemas tendrá características aleatorias

Averiguar la distribución de probabilidad que las gobierna

Pruebas estadísticas para analizar si existen diferencias significativas entre la distribución empírica observada y la teórica supuesta.

5. **Construcción de un programa de simulación**.

6. **Validación del programa de simulación**. Realización de una serie de pruebas de hipótesis para verificar o refutar la existencia de diferencias estadísticamente significativas entre los resultados de múltiples corridas de un experimento de simulación, y su comparación con series históricas existentes para verificar la exactitud del pronóstico generado.

7. Diseño de experimentos de simulación. Seleccionar distribuciones de probabilidad adecuadas a las parámetros aleatorios del sistema y generar números aleatorios que representen al sistema real bajo estudio.

8. Análisis de los resultados y validación de la simulación. Recolección de los datos producidos por la simulación para estimar medidas de comportamiento del sistema.

Estimaciones puntuales, precisión de los estimadores y estimadores por intervalos.
Técnica de reducción de la varianza para mejorar la calidad de los estimadores.
La validación de la simulación → comparar la similitud de los resultados y posibles series históricas, así como el uso que dan los decisores de la herramienta.