Persistencia de la mala suerte

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución común exponencial de tasa λ. Calcular la distribución de la variable:

$$(Y_1, Y_2) = (X_1 + X_2, \frac{X_1}{X_2})$$

Se obtiene que la variable $Y_2 = \dfrac{X_1}{X_2}$ tiene función de densidad:

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{(1+y_2)^2}, \qquad y_2 > 0$$

Se comprueba que Y_2 tiene esperanza infinita. Se trata de un hecho notable experimentado por cualquiera que haya tenido que elegir entre varias filas o colas para esperar: por ejemplo, al elegir una de varias filas en las cajas de un supermercado se tiene la impresión de que en la fila elegida el tiempo de espera es el doble o el triple que el tiempo de espera en las otras colas. Este hecho se conoce con el nombre de *persistencia de la mala suerte*.
Supongamos que la variable X_1 representa el tiempo de espera para ser atendido en la fila elegida (digamos que es la fila 1) y que X_2 representa el tiempo de espera en la otra cola, fila 2, que estamos observando mientras esperamos a ser atendidos. El cociente $\frac{X_1}{X_2}$ representa la proporción de tiempo esperado en la fila 1 en relación al tiempo esperado en la fila 2. Por ejemplo, $\frac{X_1}{X_2} > 3$ significa que esperamos por lo menos el triple de tiempo del que hubiésemos esperado en la otra fila. La función de distribución es:

$$P(Y_2 \leq y_2) = \int_0^{y_2} \frac{1}{(1+y)^2} dy = 1 - \frac{1}{1+y_2} = \frac{y_2}{1+y_2}, \quad y_2 > 0$$

de donde,

$$P(Y_2 > y_2) = \frac{1}{1+y_2}, \quad y_2 > 0$$

Por ejemplo, la probabilidad de que tuviéramos que esperar por lo menos el triple de tiempo en nuestra fila que en la otra es de 1/4. En promedio, la mitad de las veces esperamos menos tiempo que en la otra fila, pero, en la práctica el fenómeno de la mala suerte se ve sobredimensionado porque no le prestamos atención a los tiempos cortos de espera.

En el fichero `EsperaColas.R` hay una demostración visual de cómo falla la simulación Monte Carlo cuando tratamos de estimar medias que no existen, que son ∞.