Ejercicio 1.1. Para las siguientes sucesiones, determine si son convergentes o no, y en caso de serlo halle una aproximación del límite con tres cifras significativas.

a. $a_n = \dfrac{\ln 2n}{\ln(n+1)}$, para n =1,2,…

b. $a_n=(-1)^n$, para n =0,1,2,…

c. $s_n=\sum_{k=0}^{n}(1.1)^k$, para n =0,1,2,…

d. $s_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^n}$, para n =0,1,2,…

e. $\begin{cases} a_0=1 \\ a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1} \end{cases}$

f. $b_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, para n =12 donde los a_n son como en el ejercicio anterior.

g. $\begin{cases} a_0=1 \\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{(-1)^n}{n+1} \end{cases}$

h. La sucesión $(p(n))$ es llamada la sucesión de Padovan, la cual es dada por $p(0)=p(1)=p(2)=1$ Y la siguiente relación de recurrencia $p(n)=p(n-2)+p(n-3)$ a partir de esta, definiremos la sucesión

$$q(n) = \frac{p(n)}{p(n-1)}$$

i. La sucesión $(p(n))$ es llamada la sucesión de Perrin, la cual es dada por $p(0)=3$ $p(1)=0$ y $p(2)=2$ la siguiente relación de recurrencia $p(n)=p(n-2)+p(n-3)$, si $n>2$ a partir de esta, se definirá la sucesión

$$q(n)=\frac{p(n)}{p(n-1)+2}$$

Ejercicio 1.2. Mostrar que la sucesión de recurrencia definida por:

$$\textbf{(1.13)}\ a_{n+1} = \frac{(a_n)^2 + c}{2a_n}$$

a. Converge a $\pm\sqrt{c}$.

b. Ayuda: suponga que converge y considere $\lim_{(n\to\infty)} a_n = \lim_{(n\to\infty)} a_{(n+1)} = x$ y aplique el límite a la igualdad (1.13).

Ejercicio 1.3. Aproximar el valor de √p con cinco cifras significativas, para **p=2,3,5,7,11**. Usando la sucesión de recurrencia (1.13) con valor inicial $\mathbf{a_0=3}$.

Ejercicio 2.1. Halle las series de Taylor de la función f centradas en $c = 0$ y determine el intervalo de convergencia donde:

a. $f(x)=\sin(x)$

b. $f(x)=\cos(x)$

c. $f(x) = \frac{1}{1+x}$

d. $f(x)=\ln(1-x)$

Ejercicio 2.2. Sin hallar la serie de Taylor de la función, determine el intervalo de convergencia de la serie de Taylor centrada en $c = 0$, es decir, para qué valores x se cumple la igualdad ST$f(x)=f(x)$, donde:

a. $f(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{2-3x}$

b. $f(x) = \frac{\ln(3-x)}{x-2}$

Ejercicio 2.3. Recuerde que el problema de hallar la serie de Taylor de la función $\sqrt{x}$ con centro en **c** es equivalente a hallar la serie de Taylor de la función $\sqrt{x+c}$ con centro en 0. Al trabajar numéricamente la serie de Taylor, determine cuáles son los posibles valores de **c** para que sea posible su uso numérico (ver sección).

Ejercicio 2.4. Halle por medio de la serie de Taylor adecuada, una aproximación del valor dado con un error no mayor a 10^{-3} (si es posible hacer uso del teorema de Taylor, y en caso de no ser posible, justifique).

a. e
b. $\sqrt{e}$
c. ln5
d. ln(0,2)
e. ln0,8)
f. sin(1)
g. sin(2)
h. cos(0,2)
i. cos(1)

Ayuda: recuerde que si $\xi \in R$ entonces se tienen las desigualdades

$|\cos(\xi)| \leq 1$ y $|\sin(\xi)| \leq 1$.

Ejercicio 2.5. Considere la función $f(x)=e^x$ y evalúe la $STf(x^2)$, aparte considere la función $g(x)=e^{x^2}$ y halle $STg(x)$. Compare los resultados.

Nota 2.5. El ejercicio anterior se provee una forma natural de calcular series de Taylor de funciones compuestas a partir de la manipulación de series conocidas, otras formas son, por ejemplo, derivando e integrando término a término las series conocidas, esto se puede hacer dentro del radio de convergencia de la serie, el cual no cambia al realizar dichos procesos, el siguiente ejercicio es muestra de ello.

Ejercicio 2.6. Considere la serie de Taylor de $\boldsymbol{f(x)=\ln(x+1)}$, verificar que la serie obtenida al derivar término a término es la misma serie de la función $\boldsymbol{f'(x)}$.

Ejercicio 2.7. Halle una aproximación de $\sqrt{2}$, con un error no mayor de 10^{-6}.

Ayuda: trabaje con la función $f(x)=\sqrt{x+4}$, justifique.

Además, verifique que la n-ésima derivada es

$$f^n(x)=\frac{(-1)^{n+1}.(2(n-1))!}{2^{4n-2}(n-1)!}(x+4)^{\frac{(-2n+1)}{2}}$$

.

Ejercicio 2.8. Halle una aproximación de $\sqrt{5}$ con un error no mayor a 10^{-3}.

Ejercicio 2.9. Halle una aproximación de $\sqrt{10}$ con un error no mayor a 10^{-3}.

Ejercicio 2.10. Muestre que la función $\frac{2^{n+1}}{n+1}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ es creciente (verifique que su derivada es positiva) y no es acotada, es decir, muestre que $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} = \infty$.

Ejercicio 2.11. Halle por medio de las sumas parciales de la serie de Taylor adecuada, una aproximación del valor dado con cuatro cifras significativas

a. e
b. $\sqrt{2}$
c. $\sqrt{5}$
d. $\sqrt{10}$
e. $\sqrt{e}$
f. ln5
g. ln(0,2)
h. ln(0,8)
i. sin(1)
j. sin(2)cos(0,2)
k. cos(1)

Ejercicio 2.12. Use la serie dada para encontrar una aproximación de π con cinco cifras significativas

a. $$\mathrm{ST}(\tan^{-1})x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

b. $$ST(\sin^{-1})x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^{2n+1}}{4^n (n!)^2 (2n+1)}$$

Nota: halle primero el intervalo de convergencia de la serie, es decir, para qué valores de x se cumple $ST(f)x = f(x)$. Luego, escoja de manera adecuada un valor de x en este intervalo para evaluar la serie.

Ejercicio 2.13. La función W de Lambert es definida por la serie:

$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1} x^n}{n!}$ la cual se tiene para $|x| < \frac{1}{e}$ (¿porque?). Halle con tres cifras significativas aproximaciones de W(0,1), W(0,01) y W(0,2).