

Cartas CUSUM para la media y variabilidad

Cristobal Belmar y Martín Elizondo

2024-10-22

Cartas
CUSUM para
la media y
variabilidad

Cristobal
Belmar y
Martín
Elizondo

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

ARL

Ejercicio con
datos
simulados

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo

Introducción

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

ARL

Ejercicio con
datos
simulados

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo

La carta CUSUM, conocida por sus siglas en inglés como “Cumulative Sum Control Chart”, es una herramienta estadística que juega un papel fundamental en el control de calidad y la mejora continua de procesos productivos. Desarrollada por el estadístico E.S. Page en 1954 quien es un pionero en el campo del control de la calidad.

La carta CUSUM es la carta de control de sumas acumuladas, la cual incorpora directamente toda información contenida en la secuencia de los valores muestrales, graficando las sumas acumuladas de las desviaciones que presentan los valores muestrales respecto al valor objetivo (target).

#3 Tipos de cartas CUSUM

CUSUM tabular para la media del proceso

CUSUM con V-Mask

CUSUM tabular para la variabilidad del proceso

Las cartas CUSUM son esenciales para el monitoreo continuo de procesos en diversas industrias:

- **Manufactura:** Control de variables como peso y espesor, detectando desviaciones tempranas.
- **Industria Alimentaria:** Monitoreo de parámetros de seguridad como acidez y temperatura.
- **Industria Farmacéutica:** Aseguran dosificaciones adecuadas y cumplimiento de regulaciones.
- **Salud:** Monitoreo de procesos médicos en hospitales.

Las CUSUM son vitales para garantizar calidad y seguridad donde el control continuo es esencial.

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

ARL

Ejercicio con
datos
simulados

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo

A diferencia de las cartas de Shewhart, que son efectivas para detectar corrimientos grandes en rangos de 1.5σ a 2σ , su sensibilidad a cambios graduales en la media del proceso es limitada, ya que solo reaccionan cuando los datos superan los límites establecidos. En cambio, la carta CUSUM es mucho más sensible a pequeñas desviaciones, permitiendo detectar cambios graduales en el proceso de manera más efectiva.

Para realizar este tipo de carta, antes debe de cumplir los siguientes supuestos:

- Normalidad en los datos.
- Independencia de las observaciones.
- Desviación conocida o una estimación.
- Media conocida o estimación.
- Cartas de Shewart bajo control.

Cartas
CUSUM para
la media y
variabilidad

Cristobal
Belmar y
Martín
Elizondo

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

ARL

Ejercicio con
datos
simulados

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo

Carta CUSUM tabular

- La CUSUM tabular acumula desviaciones de un objetivo (μ_0) para evaluar la calidad de un proceso.
- Acumulación de desviaciones:
 - C^+ (superior): desviaciones sobre el objetivo.
 - C^- (inferior): desviaciones bajo el objetivo.

- Fórmulas para los estadísticos de CUSUM:
 - $C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_0 - K) + C_{i-1}^+]$
 - $C_i^- = \max[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-]$
- Condiciones iniciales:
 - $C_0^+ = C_0^- = 0$

- Parámetros necesarios para el cálculo:
 - Valor de referencia o tolerancia (K): aproximadamente a la mitad de μ_0 . o recomendable 0.5
 - Valor fuera de control (μ_1) para detección rápida.
- Definición de μ_1 :
 - $\mu_1 = \mu_0 + \delta \cdot \sigma$
 - $\delta = |\mu_1 - \mu_2| / \sigma$

- Criterios de control:
 - Si C^+ o C^- exceden el intervalo de decisión H (límites de control) el cual recomendablemente es 5, el proceso está fuera de control.
 - Caso contrario, el proceso está en control estadístico.

Para realizar esta carta se presentan los pasos a realizar.

- Paso 1: Estandarizar la variable Para estandarizar la variable se aplica la siguiente fórmula:

$$y = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$$

- Paso 2: estandarizar nuevamente utilizando $\mu = 0.822$ y $\sigma = 0.349$

$$v = \frac{(\sqrt{|y|} - 0.822)}{0.349}$$

- Paso 3:

Calcular:

$$S_i^+ = \min[0, v_i - k + S_{i-1}^+]$$

$$S_i^- = \min[0, -k - v_i + S_{i-1}^-]$$

donde $S_0^+ = S_0^- = 0$ y los valores de k y h se seleccionen como en la CUSUM para controlar la media del proceso, es decir 0.5 y 5 respectivamente

Cartas
CUSUM para
la media y
variabilidad

Cristobal
Belmar y
Martín
Elizondo

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

ARL

Ejercicio con
datos
simulados

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo

Carta CUSUM con V-Mask

La carta CUSUM bilateral acumula desviaciones positivas y negativas. Se interpreta mediante la V-Mask, que tiene forma de "V" y está diseñada para este tipo de CUSUM. las cuales funcionan de la siguiente forma:

Cálculo de las sumas acumuladas:

$$S_1 = (\bar{X}_1 - \mu)$$

$$S_2 = (\bar{X}_1 - \mu) + (\bar{X}_2 - \mu)$$

$$\vdots$$

$$S_m = (\bar{X}_1 - \mu) + (\bar{X}_2 - \mu) + (\bar{X}_3 - \mu) + \dots + (\bar{X}_m - \mu) = \sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \mu)$$

La selección de los parámetros se puede realizar en base a las siguientes fórmulas y tabla:

$$d = \frac{h}{k}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{k}{2}\right) = \arctan\left(\frac{h}{2d}\right)$$

Donde h es la distancia entre el punto de colocación y los brazos de la V-mask, y k es la mitad del salto que se desea detectar, lo que determina la sensibilidad de la carta. Ambos parámetros se expresan en función del error estándar. Los valores típicos recomendados son $h = 5$ y $k = 0.5$, adecuados para detectar cambios de magnitud de un error estándar y un ARL de 465.

Cartas
CUSUM para
la media y
variabilidad

Cristobal
Belmar y
Martín
Elizondo

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

ARL

Ejercicio con
datos
simulados

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo

ARL

δ		50	100	200	300	400	500
0.25	k	0.125			0.195		0.248
	d	47.6			46.2		37.4
	L(0.25)	28.3			74.0		94.0
0.50	k	0.25	0.28	0.29	0.28	0.28	0.27
	d	17.5	18.2	21.4	24.7	27.3	29.6
	L(0.50)	15.8	19.0	24.0	26.7	29.0	30.0
0.75	k	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375
	d	9.2	11.3	13.8	15.0	16.2	16.8
	L(0.75)	8.9	11.0	13.4	14.5	15.7	16.5
1.0	k	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	d	5.7	6.9	8.2	9.0	9.6	10.0
	L(1.0)	6.1	7.4	8.7	9.4	10.0	10.5
1.5	k	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
	d	2.7	3.3	3.9	4.3	4.3	4.7
	L(1.5)	3.4	4.0	4.6	5.0	5.2	5.4
2.0	k	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	d	1.5	1.9	2.2	2.4	2.5	2.7

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

ARL

Ejercicio con
datos
simulados

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

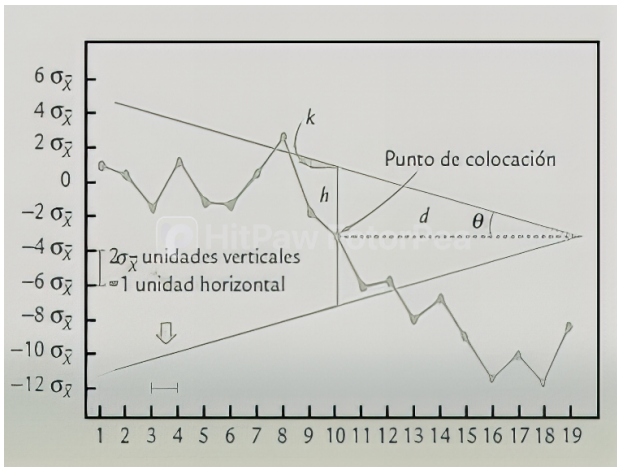
ARL

Ejercicio con
datos
simulados

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo



Una máquina automática llena paquetes de harina con un peso nominal de 80 onzas. Interesa monitorear esta máquina para detectar cambios pequeños de magnitud 0.15 onzas. Por medio de información histórica se sabe que la media y la desviación estándar del peso de los paquetes es de 80.00 y 0.2 onzas, respectivamente. Cada media hora se sacan en forma aleatoria cuatro paquetes y se pesan. Las medias de las últimas 20 muestras, los rangos y las sumas que acumulan la desviación de las medias respecto a la media histórica (80.00).

Muestra	Media	Rango	Suma acumulada
1	79.90	0.35	-0.10
2	79.91	0.43	-0.19
3	79.89	0.63	-0.30
4	80.05	0.50	-0.25
5	79.94	0.50	-0.31
6	79.95	0.18	-0.36
7	79.88	0.45	-0.48
8	79.96	0.36	-0.52
9	80.27	0.65	-0.25
10	79.87	0.23	-0.38

Muestra	Media	Rango	Suma acumulada
11	79.87	0.50	-0.51
12	80.04	0.23	-0.47
13	80.04	0.56	-0.43
14	80.04	0.15	-0.39
15	80.23	0.33	-0.16
16	80.23	0.62	0.07
17	80.28	0.34	0.35
18	80.13	0.33	0.48
19	80.05	0.45	0.53
20	80.15	0.47	0.68

Datos obtenidos:

- $N = 80$ onzas
- Cambio a detectar: 0.15 onzas
- Media histórica (μ) = 80
- Desviación estándar (σ) = 0.2

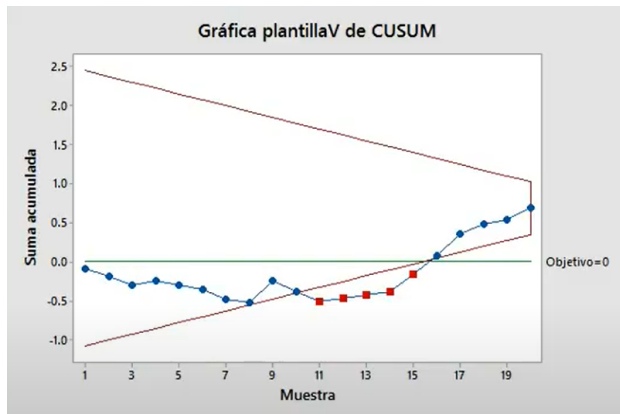
- Cálculo de valores:

$$\sigma_x = \frac{0.2}{\sqrt{4}} = 0.1$$

$$\delta = \frac{0.15}{0.1} = 1.5$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{k}{2}\right) = \arctan(0.375) = 20.6^\circ$$

- Con $\delta = 1.5$ y $ARL_0 = 400$, los parámetros son:
 - $d = 4.5$
 - $k = 0.75$
 - $h = (0.75)(4.5) = 3.37$



Cartas
CUSUM para
la media y
variabilidad

Cristobal
Belmar y
Martín
Elizondo

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

ARL

**Ejercicio con
datos
simulados**

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo

Ejercicio con datos simulados

Monitoreo del rendimiento de cultivos de trigo en una región agrícola:

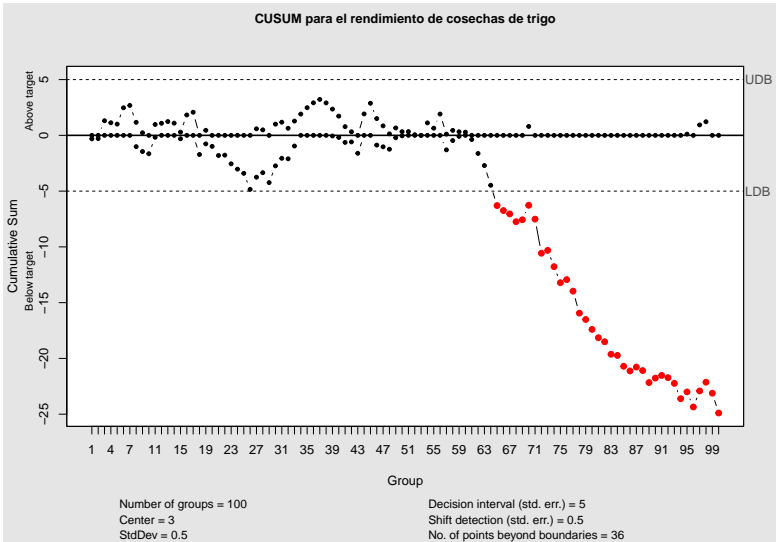
La región del Maule depende en gran medida del cultivo de trigo como fuente principal de ingreso. Se ha observado que los rendimientos de las cosechas han sido consistentes durante los últimos años. Sin embargo, debido a factores como cambios en las condiciones climáticas y la adopción de nuevas prácticas de fertilización, los agricultores están preocupados de que los rendimientos puedan estar fluctuando más de lo habitual.

Monitoreo del rendimiento de cultivos de trigo en una región agrícola:

Para identificar posibles variaciones en el rendimiento del trigo por hectárea, se desea implementar una carta CUSUM que permita detectar cambios pequeños pero significativos en el rendimiento promedio, para que los agricultores puedan ajustar rápidamente sus prácticas agrícolas. Los datos históricos indican que el rendimiento promedio ha sido de 3 toneladas por hectárea con una desviación estándar de 0.5 toneladas.

- X : Rendimiento del trigo de 100 semanas por hectárea en tonelada.
- H_0 : El proceso esta bajo control estadístico.
- H_1 : El proceso no esta bajo control estadístico

Se crean los datos y se crea la carta de control con la librería “qcc”

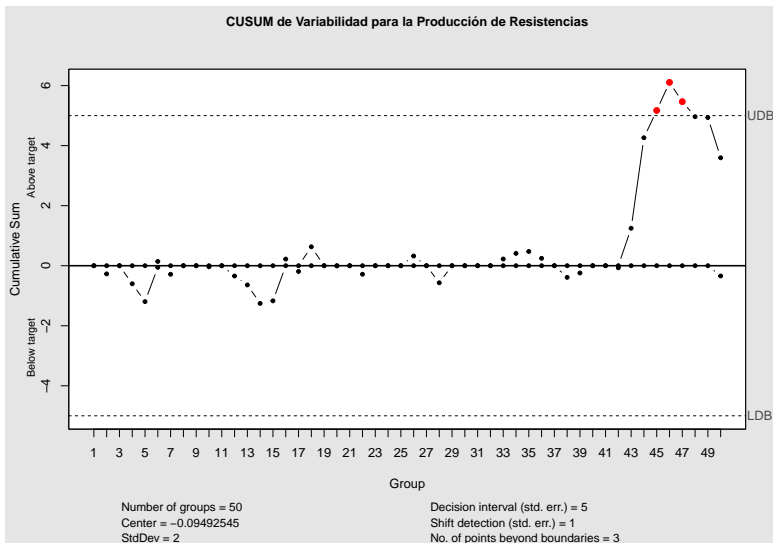


Variabilidad en la Producción de Resistencias

En una fabricación de componentes eléctricos, es crucial asegurar que los productos finales cumplan con las especificaciones técnicas requeridas, en particular con el valor de resistencia eléctrica, que en este caso es de 100 ohmios. Además de controlar que la media de las resistencias fabricadas sea consistente con el objetivo, es fundamental monitorear la variabilidad en el proceso de producción, es decir, las fluctuaciones en la desviación estándar de las resistencias. Por esta razón se desea monitorear la variabilidad en las resistencia de 50 componentes eléctricos.

Definición de variable:

- X : Resistencia eléctrica de los componentes en ohmios
- H_0 : El proceso esta bajo control estadístico
- H_1 : El proceso no esta bajo control estadístico
- Sea $\alpha = 0.0027$



Cartas
CUSUM para
la media y
variabilidad

Cristobal
Belmar y
Martín
Elizondo

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

ARL

Ejercicio con
datos
simulados

**Ejercicios con
datos reales**

Referencias

Anexo

Ejercicios con datos reales

Ejercicio con datos reales para la media

Cartas
CUSUM para
la media y
variabilidad

Cristobal
Belmar y
Martín
Elizondo

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

ARL

Ejercicio con
datos
simulados

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo

Para realizar un ejercicio con datos reales se decidió utilizar una base de datos de la pagina *Kaggle* de la cual se selecciono la base de datos “*Wine Quality*” la cual posee datos de la preparación de vino con uvas rojas y con uvas blancas, en estos ejemplos se opto por utilizar la uva roja y monitorear el *pH*.

Control de calidad del pH en la producción de vino de uvas rojas

El pH del vino es una medida crítica en la industria vinícola, ya que afecta el sabor, la estabilidad microbiológica y la longevidad del vino. Por esta razón un productor desea monitorear el pH del vino tinto a lo largo del tiempo para asegurar que se mantenga dentro de los rangos de calidad establecidos (pH entre 3.2 y 3.6). Un pH fuera de estos límites podría indicar problemas con la fermentación o con la acidez, lo que podría afectar la calidad del vino. Para esto se tomo una muestra de 380 vinos y se midio su pH.

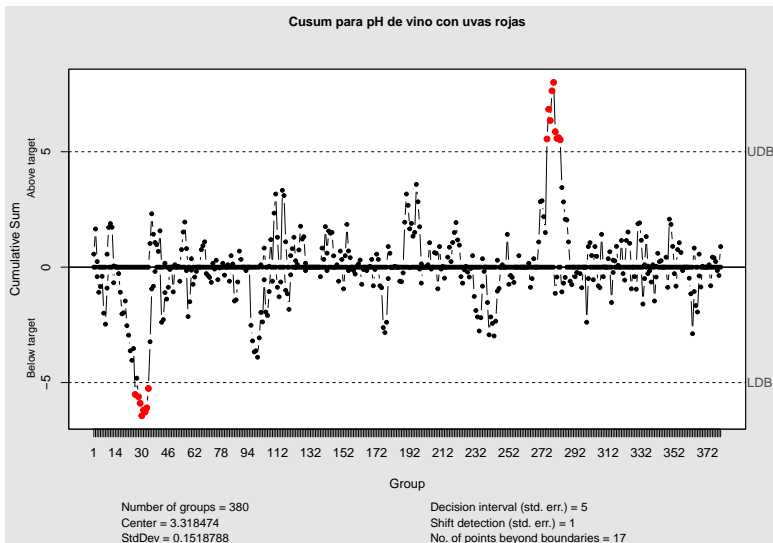
- X : Nivel de PH de 380 muestras de vino tinto.
- H_0 : El proceso esta bajo control estadístico
- H_1 : El proceso no esta bajo control estadístico
- Sea $\alpha = 0.0027$

Comprobar normalidad

Para comprobar la normalidad de los datos se aplicó el test de Anderson Darling

Al aplicar el test de Anderson Darling entrega un valor p igual a 0.07823849 por lo que los datos siguen una distribución normal

Ejemplo con datos reales 1



Control de variabilidad del pH en la producción de vino de uvas rojas

En la producción de vino, es fundamental que el pH se mantenga dentro de un rango controlado para asegurar la calidad del producto. No solo es importante controlar el valor promedio del pH, sino también la variabilidad del mismo, ya que fluctuaciones excesivas en la variabilidad pueden afectar negativamente el sabor y la estabilidad del vino. Utilizando los datos del ejercicio anterior se calculara la CUSUM para la variabilidad.

Desarrollo

- Paso 1: Estandarizar la variable.
- Paso 2: estandarizar nuevamente utilizando $\mu = 0.822$ y $\sigma = 0.349$.
- Paso 3: Calcular:

$$S_i^+ = mx[0, v_i - k + S_{i-1}^+]$$

$$S_i^- = mx[0, -k - v_i + S_{i-1}^-]$$

Ejercicio con datos reales para la variabilidad

Cartas
CUSUM para
la media y
variabilidad

Cristobal
Belmar y
Martín
Elizondo

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

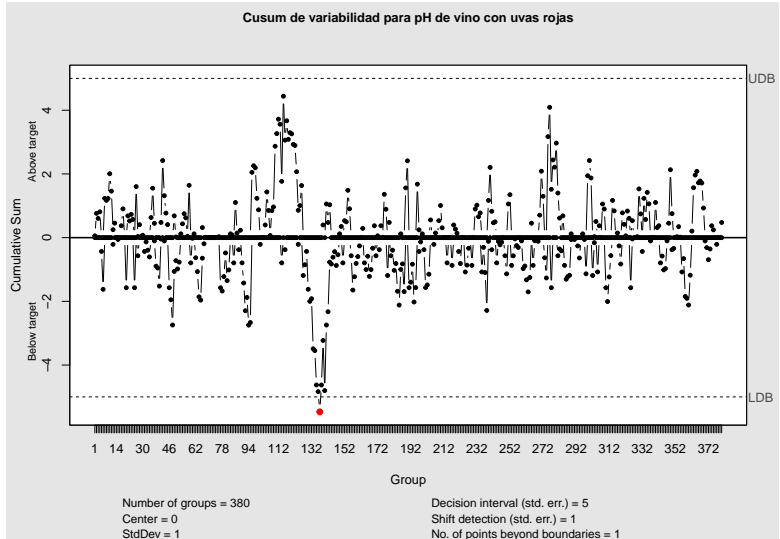
ARL

Ejercicio con
datos
simulados

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo



Cartas
CUSUM para
la media y
variabilidad

Cristobal
Belmar y
Martín
Elizondo

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

ARL

Ejercicio con
datos
simulados

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo

Referencias

Montgomery, D. C. (2005). Control estadístico de la calidad (3.^a ed.). Limusa Wiley.

Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. Biometrika, 41(1-2), 100-115.
<https://doi.org/10.1093/biomet/41.1-2.100>

Mishra, A., & Waghmare, V. (2021). A CUSUM chart using absolute sample values to monitor process mean and variability. IEEE Access, 9, 142040-142048.
<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3116634>

Mora D, R. (2017, 20 de febrero). Cartas CUSUM bilateral y unilateral. Teoría y ejemplo en Minitab [Video]. YouTube.

Cartas
CUSUM para
la media y
variabilidad

Cristobal
Belmar y
Martín
Elizondo

Introducción

Carta CUSUM
tabular

Carta CUSUM
con V-Mask

ARL

Ejercicio con
datos
simulados

Ejercicios con
datos reales

Referencias

Anexo

Anexo

Aca se encuentra el informe junto a los codigos utilizados para la realizacion de este.

