

Dijkstra



O algoritmo de Dijkstra

- O **algoritmo de Dijkstra**, concebido pelo cientista da computação holandês Edsger Dijkstra em 1956 e publicado em 1959, soluciona o problema do caminho mais curto num grafo dirigido ou não dirigido com arestas de peso não negativo, em tempo computacional $O([m+n]\log n)$ onde m é o número de arestas e n é o número de vértices.

O Problema

- Um exemplo prático do problema que pode ser resolvido pelo algoritmo de Dijkstra é: alguém precisa se deslocar de uma cidade para outra. Para isso, ela dispõe de várias estradas, que passam por diversas cidades. Qual delas oferece uma trajetória de menor caminho?

PROBLEMAS

- 1º Problema:
 - Construir a árvore de menor comprimento total entre todos os nós de um grafo.
- 2º Problema:
 - Encontrar o caminho de menor comprimento total entre dois determinados nós de um grafo.

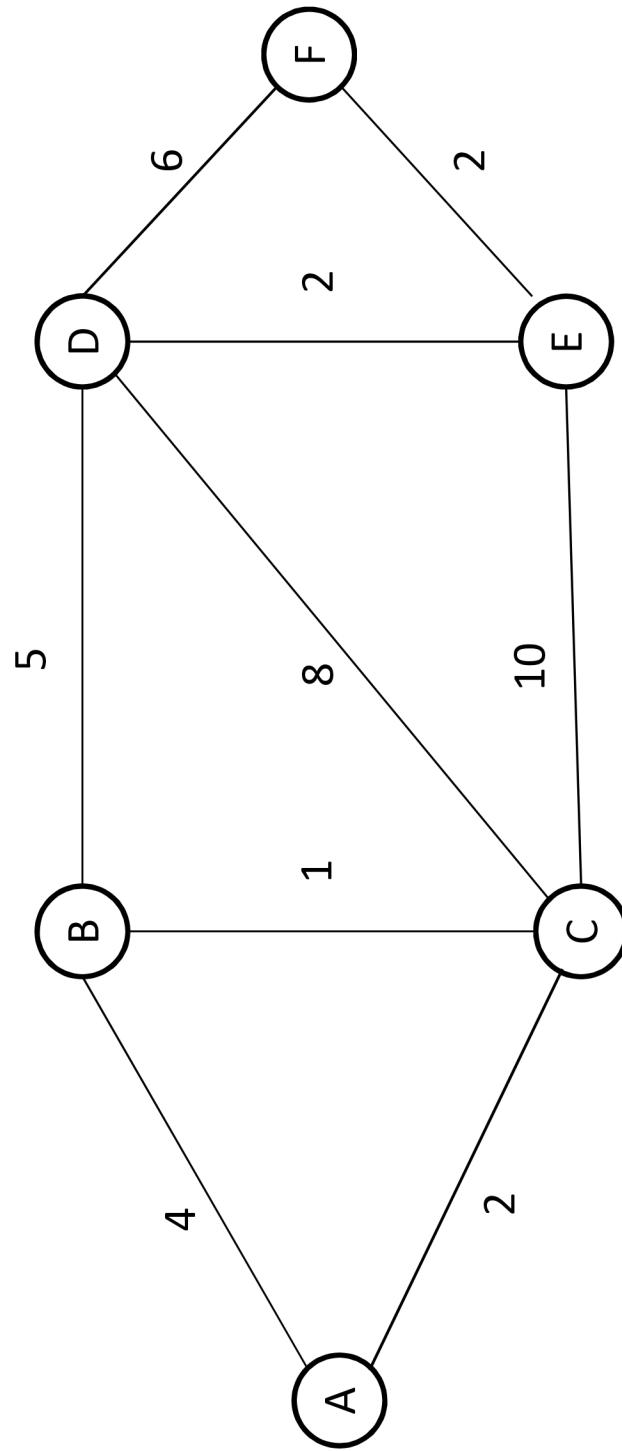
O algoritmo de Dijkstra

- Escolhido um vértice como raiz da busca, este algoritmo calcula o custo mínimo deste vértice para todos os demais vértices do grafo. O algoritmo pode ser usado sobre grafos orientados (dígrafos), ou não, e admite que todas as arestas possuem pesos não negativos (nulo é possível).

O algoritmo de Dijkstra

- Esta restrição (pesos não negativos) é perfeitamente possível no contexto de redes de transportes, onde as arestas representam normalmente distâncias ou tempos médios de percurso; poderão existir, no entanto, aplicações onde as arestas apresentam pesos negativos, nestes casos o algoritmo não funcionará corretamente.

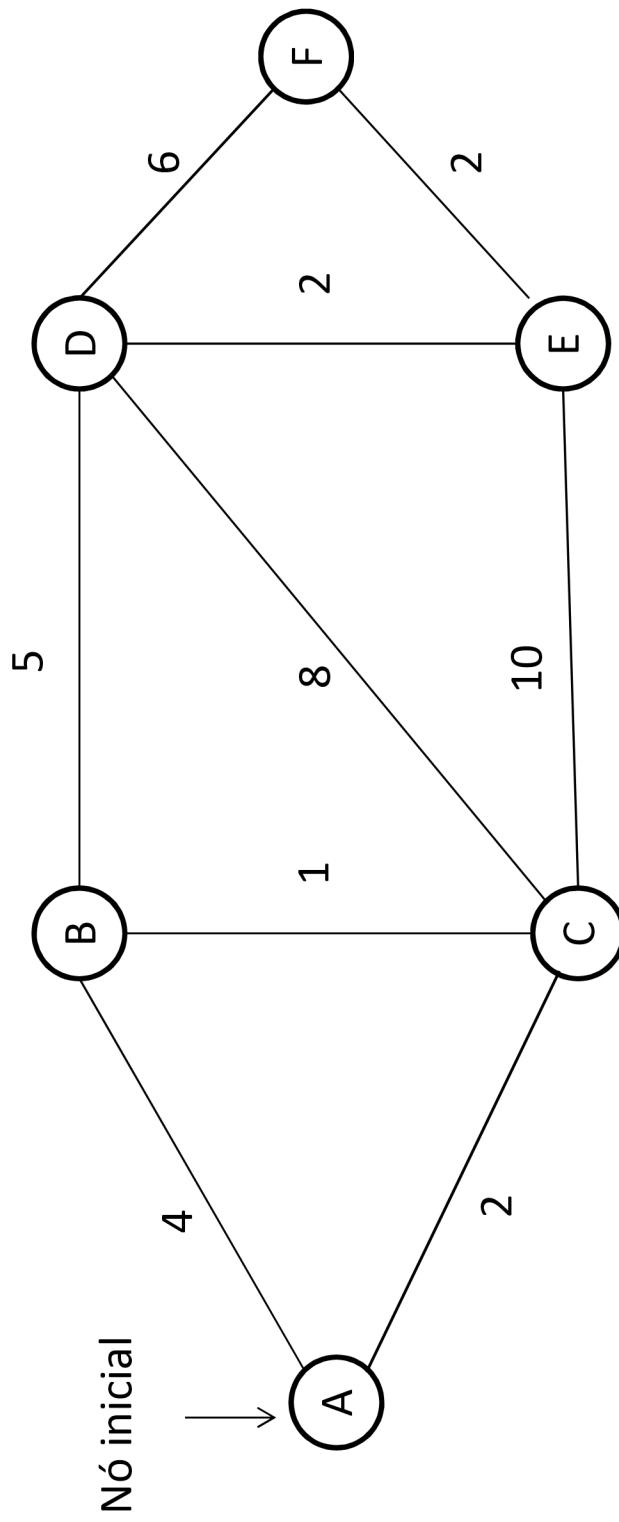
O Problema: achar o menor caminho entre A e F



O Algoritmo

- Seja $G(V,A)$ um grafo orientado e s um vértice de G :
- Atribua valor zero à estimativa do custo mínimo do vértice s (a raiz da busca) e infinito às demais estimativas;
- Atribua um valor qualquer aos precedentes (o precedente de um vértice t é o vértice que precede t no caminho de custo mínimo de s para t);
- Enquanto houver vértice aberto:
 - seja k um vértice ainda aberto cuja estimativa seja a menor dentre todos os vértices abertos;
 - feche o vértice k
- Para todo vértice j ainda aberto que seja sucessor de k faça:
 - some a estimativa do vértice k com o custo do arco que une k a j ;
 - caso esta soma seja melhor que a estimativa anterior para o vértice j , substitua-a e anote k como precedente de j .

Solução



O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A					
B						
C						
D						
E						
F						

O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A					
B						
C						
D						
E						
F						

O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A					
B	4, A					
C						
D						
E						
F						

Distância de B a A = 4

O Algoritmo

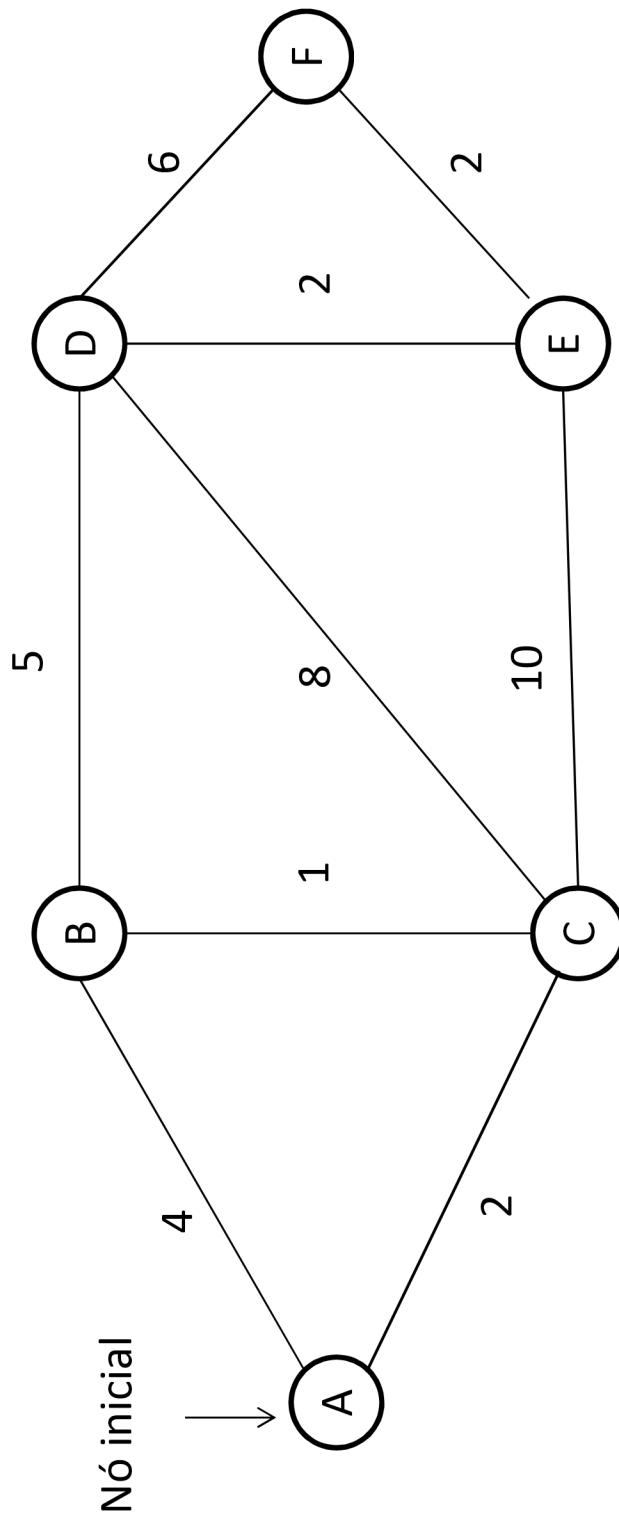
Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A					
C	2, A					
D	∞					
E	∞					
F	∞					

Distância de B a A = 4

Distância de C a A = 2

Nós não adjacentes a A -> D, E, F = ∞

Solução



O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A					
C	2, A					
D	∞					
E	∞					
F	∞					

Distância de B a A = 4

Distância de C a A = 2

Nós não adjacentes a A -> D, E, F = ∞

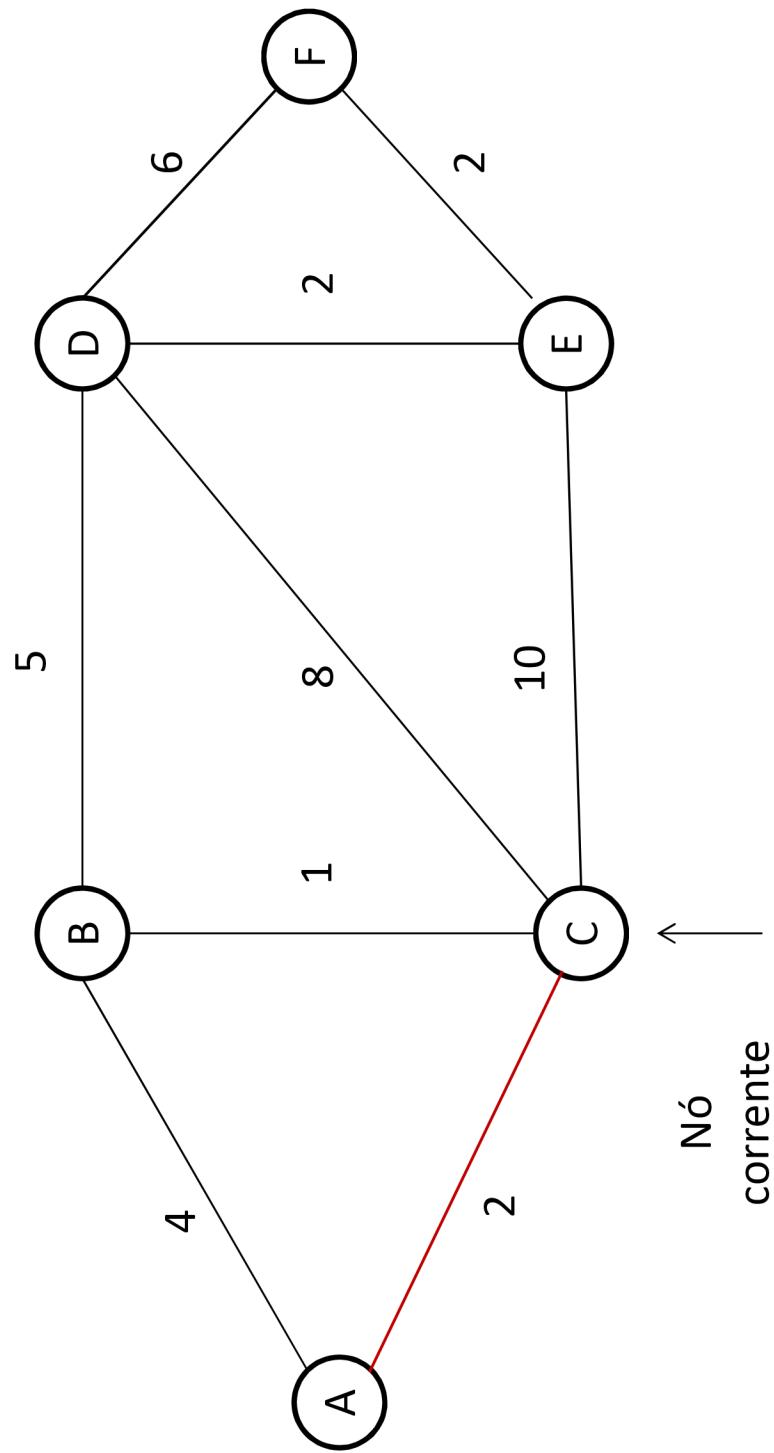
Nó não mais visitado *

O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A					
C	2, A	2, A				
D	∞					
E	∞					
F	∞					

Caminho de menor custo A, C = 2

Solução



O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C				
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	∞					
E	∞					
F	∞					

A distância de B até A, com referência a C é $(A, C) + (C, B) = 2 + 1 = 3$

O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C				
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	∞	10, C				
E	∞	12, C				
F	∞	∞				

A distância de D até A, com referência a C é $(A, C) + (C, D) = 2 + 8 = 10$

A distância de E até A, com referência a C é $(A, C) + (C, E) = 2 + 8 = 12$

Nós não adjacentes $(A, F) = \infty$

O Algoritmo

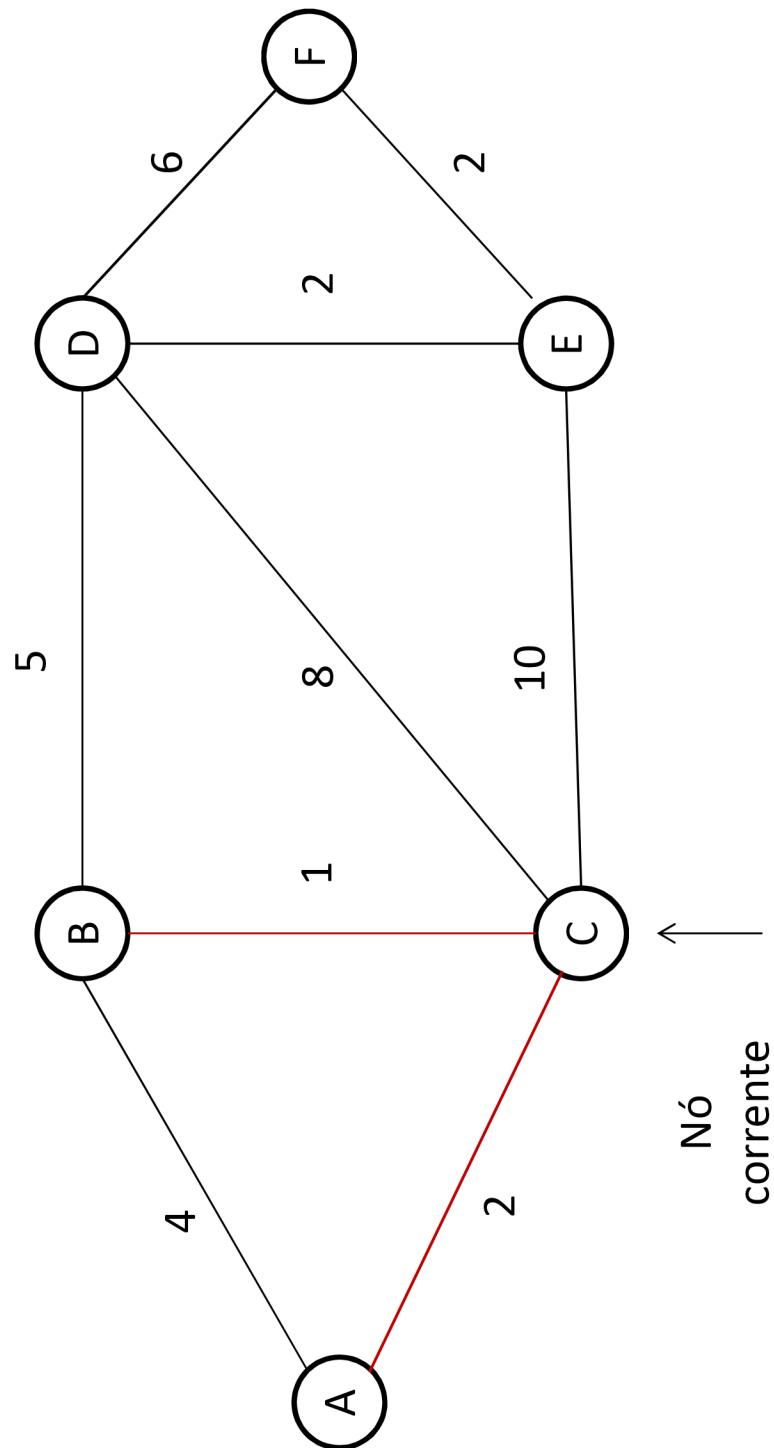
Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C			*	
C	2, A	2, A	*	*	*	
D	∞	10, C				
E	∞	12, C				
F	∞	∞				

Caminho de menor custo A, C = 3

O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C			
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	∞	10, C				
E	∞	12, C				
F	∞	∞				

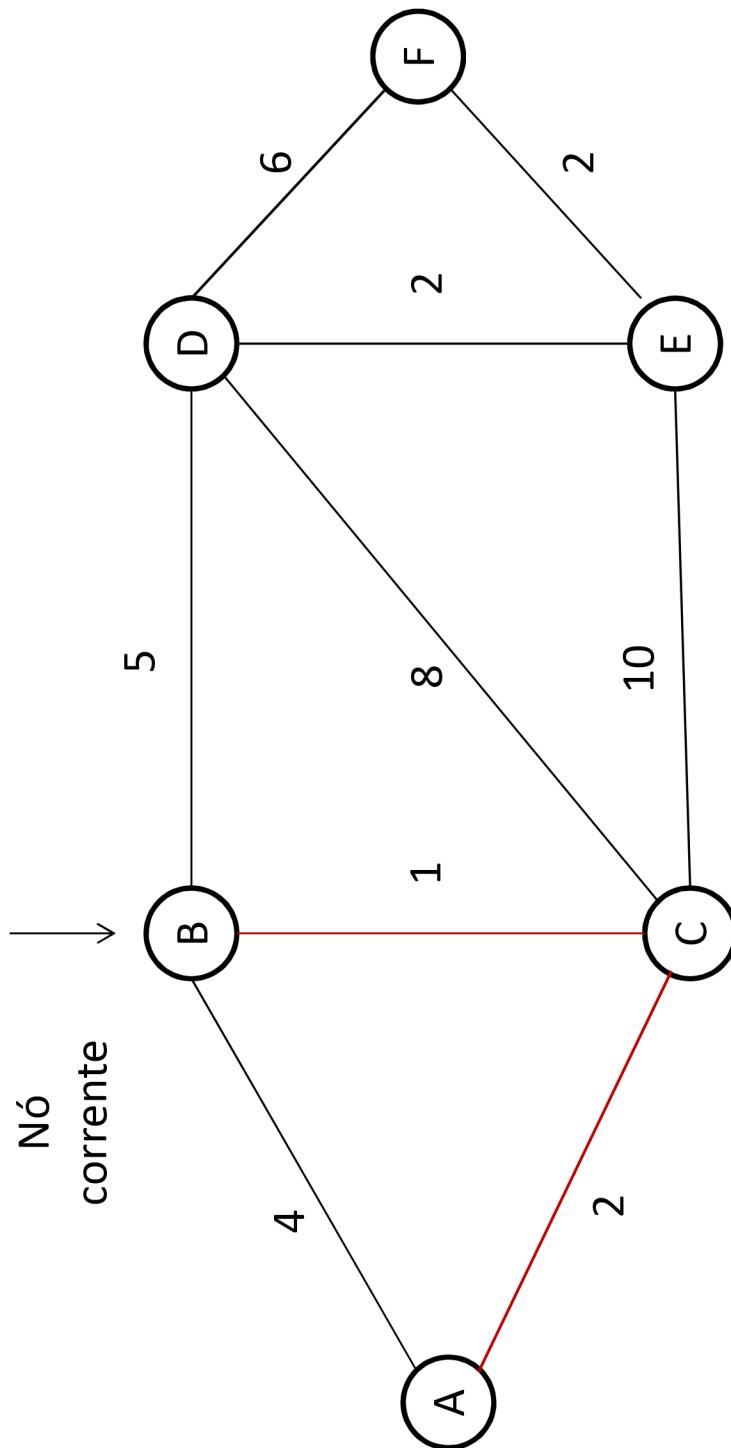
Solução



O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	∞	10, C				
E	∞	12, C				
F	∞	∞				

Solução



O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	∞	10, C	8, B			
E	∞	12, C	12, C			
F	∞	∞	∞			

A distância de D até A, com referência a B é $(A, C) + (C, B) + (B, D) = 2 + 1 + 5 = 8$

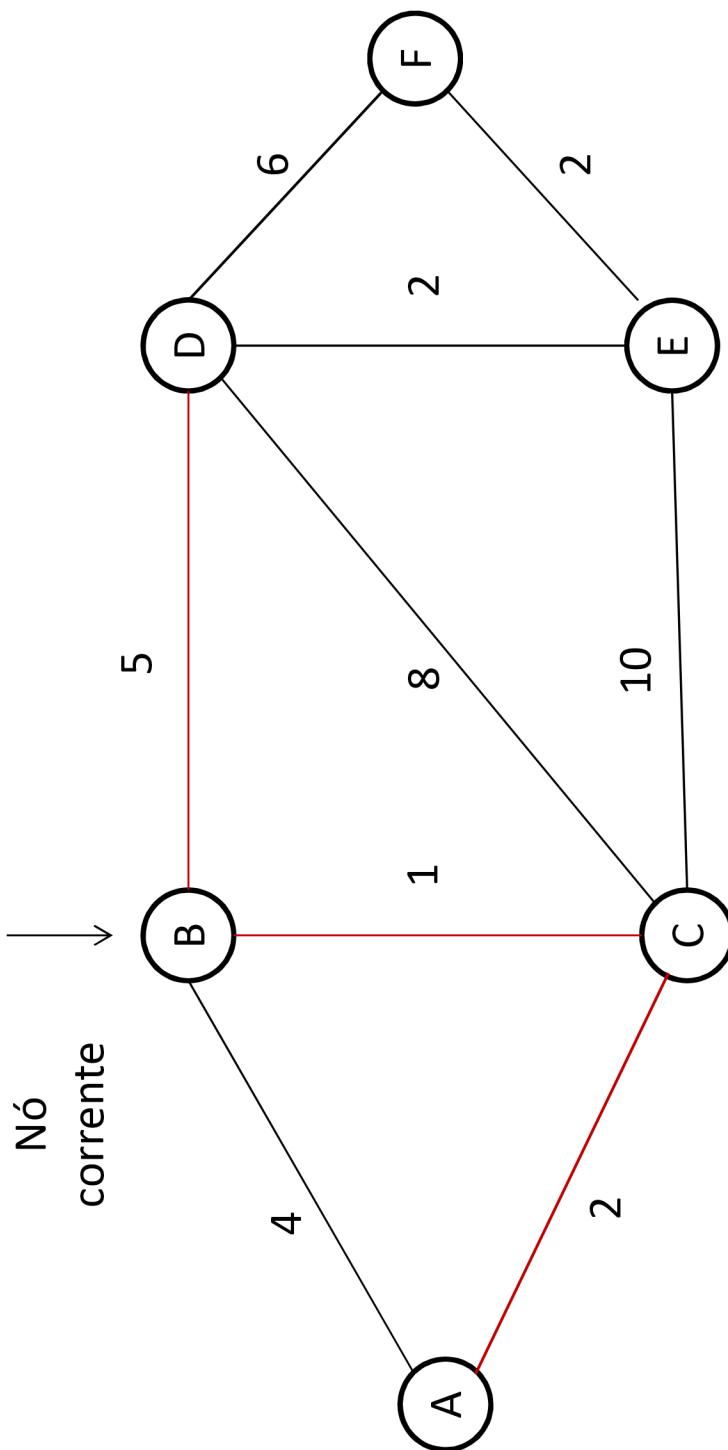
A distância de E até A, com referência a C é $(A, C) + (C, E) = 2 + 10 = 12$

O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	∞	10, C	8, B			
E	∞	12, C	12, C			
F	∞	∞	∞			

Caminho de menor custo (A, D) é passando por B e C = 8

Solução

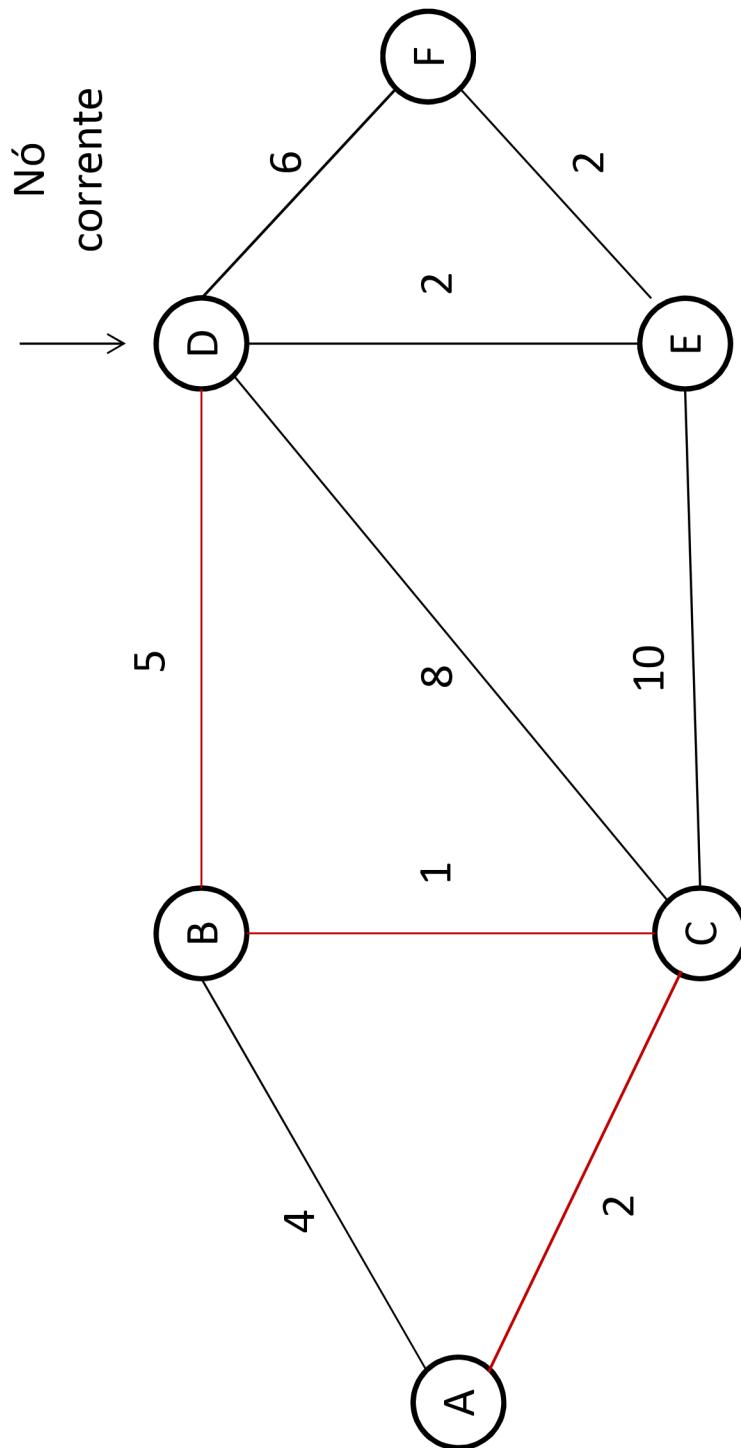


O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	∞	10, C	8, B	8, B		
E	∞	12, C	12, C			
F	∞	∞	∞			

Caminho de menor custo (A, D) passando por B e C = 8

Solução

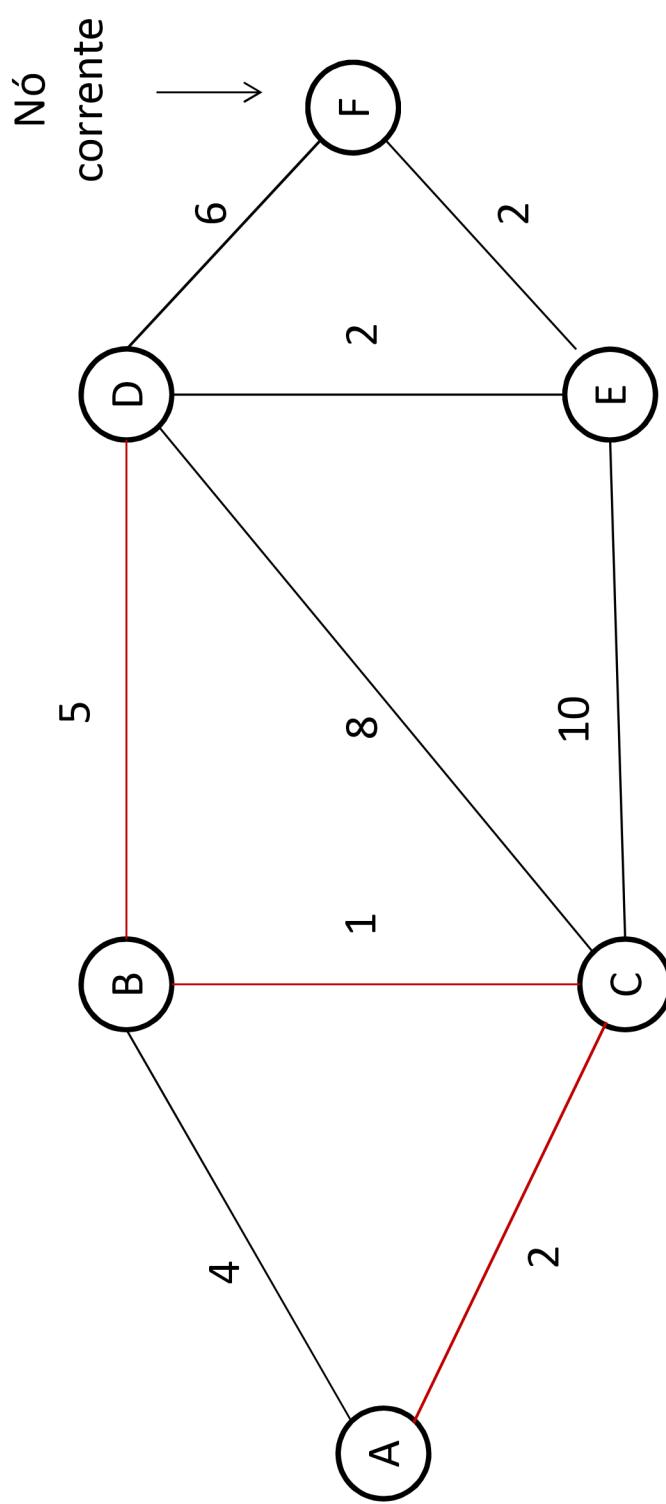


O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	∞	10, C	8, B	8, B	*	*
E	∞	12, C	12, C	10, D		
F	∞	∞	∞	14, D		

Caminho de menor custo (A, E) é passando por B, C e D = 10

Solução

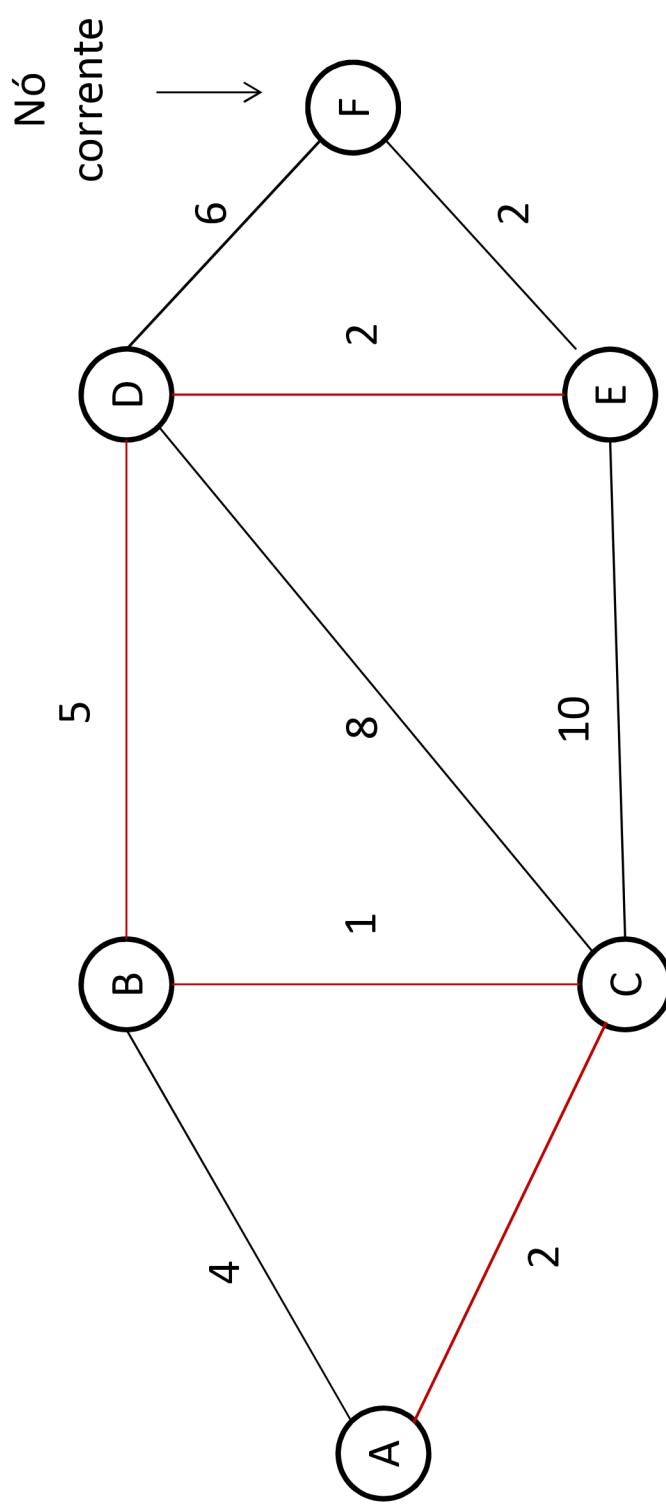


O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	∞	10, C	8, B	8, B	*	*
E	∞	12, C	12, C	10, D	10, D	
F	∞	∞	∞	14, D		

Caminho de menor custo (A, E) é passando por B, C e D = 10

Solução



O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	∞	10, C	8, B	8, B	*	*
E	∞	12, C	12, C	10, D	10, D	*
F	∞	∞	∞	14, D	12, E	

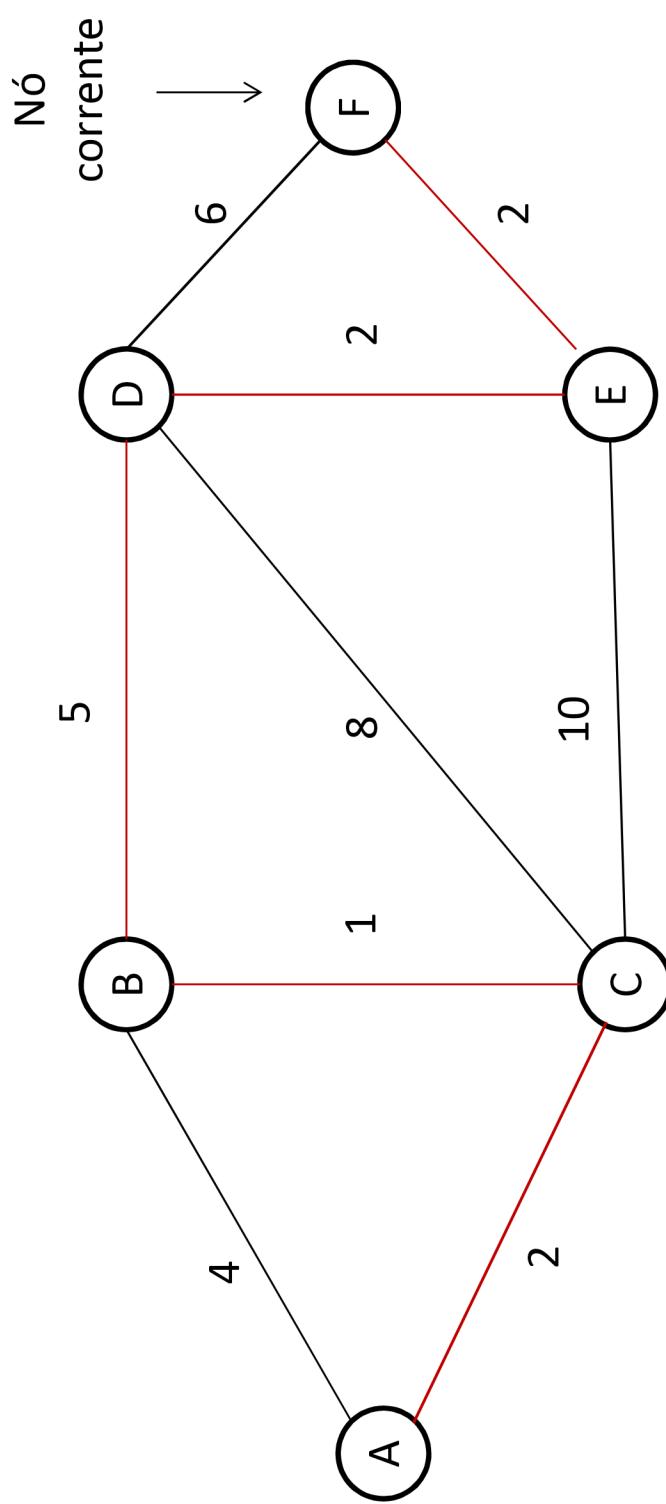
Caminho de menor custo (A, F) é passando por B, C, D e E= 12

O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	∞	10, C	8, B	8, B	*	*
E	∞	12, C	12, C	10, D	10, D	*
F	∞	∞	∞	14, D	12, E	12, E

Caminho de menor custo (A, F) é passando por B, C, D e E= 12

Solução

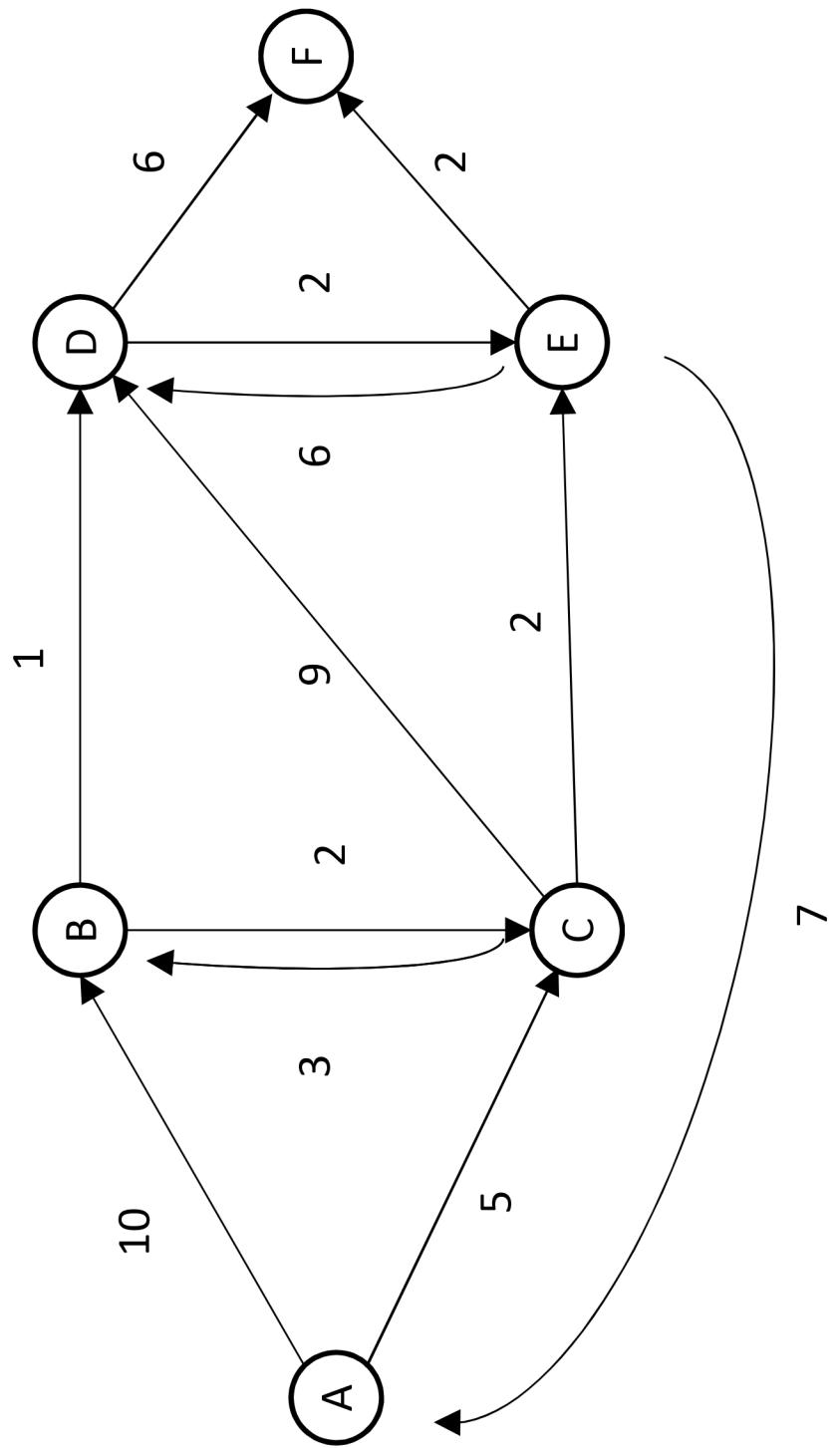


O Algoritmo

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6
A	0, A	*	*	*	*	*
B	4, A	3, C	3, C	*	*	*
C	2, A	2, A	*	*	*	*
D	∞	10, C	8, B	8, B	*	*
E	∞	12, C	12, C	10, D	10, D	*
F	∞	∞	∞	14, D	12, E	12, E

Caminho de menor custo (A, F) é passando por B, C, D e E= 12

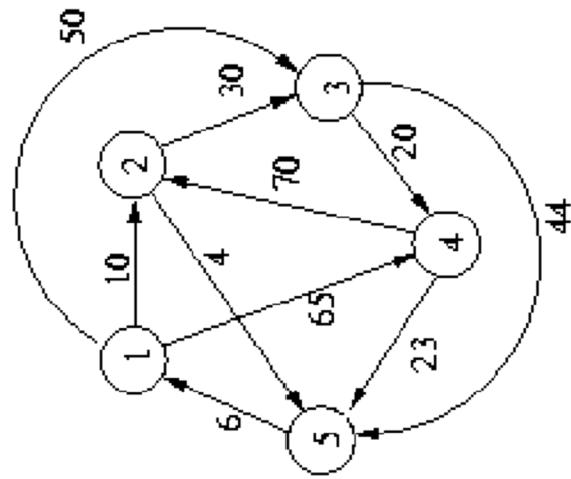
E se o grafo for orientado?



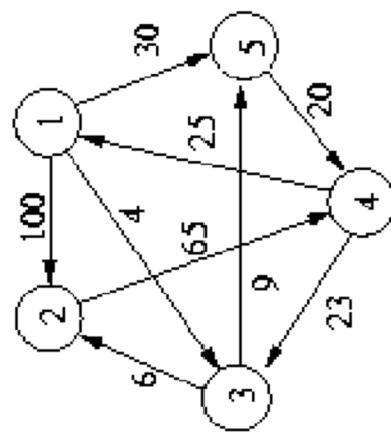
Exercícios

- Execute o algoritmo de Dijkstra com o grafo da figura a, começando com o vértice 1.
- Execute o algoritmo de Dijkstra com o grafo da figura a, mas começando com o vértice 4. A resposta é a mesma?
- Para o grafo ilustrado na figura b, mostre cada passo da execução do algoritmo de Dijkstra. Começando com o vértice 1.

Grafos



(a)



(b)

Fim

