/ Ejercicios Preparcial /

1. Ejemplo 3.3 ->

Considere el sistema amortiguador masa-resorte montado en un carro sin masa como se muestra en la figura. Obtenga los modelos matemáticos de este sistema suponiendo que el carro está parado durante $t<0$ y que el sistema también está parado durante $t<0$. En este sistema, $u(t)$ es el dezplazamiento del carro y es la entrada del sistema. En $t=0$, el carro se mueve a una velocidad constante, o $\dot{u}(t)=$ constante. El desplazamiento $y(t)$ de la masa es la salida.

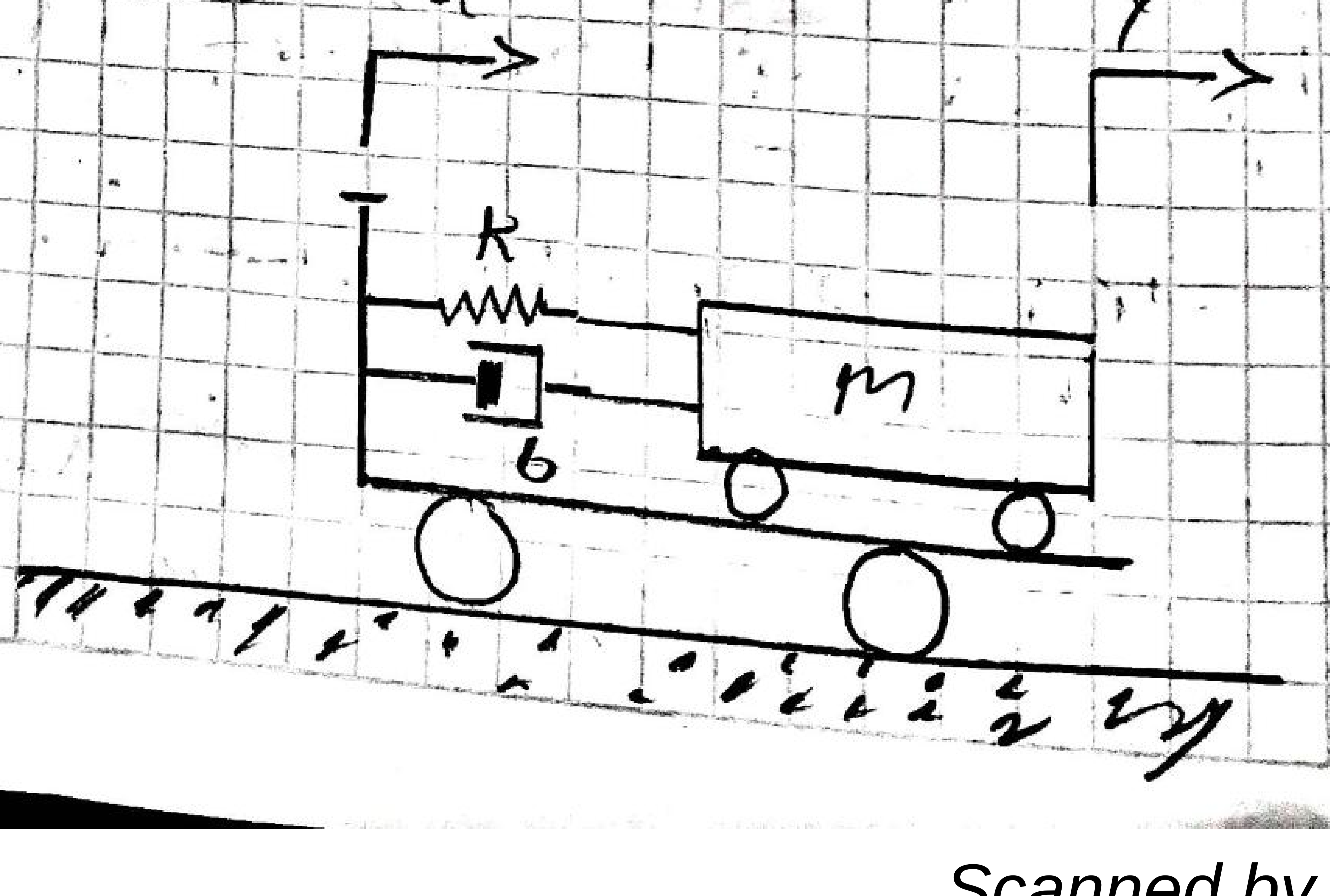
En donde -> m = masa, b = coeficiente de fricción viscosa

k = constante del resorte.

Suponga -> Que la fuerza de fricción del amortiguador es proporcional a $\dot{y}-\dot{u}$.

Que el resorte es lineal, la fuerza del resorte es proporcional a $y-u$

Figura ->



R→ Aplicando la Ley de Newton → $ma = \sum F$

tenemos que → $m\frac{d^2y}{dt^2} = -b\left[\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right] - k(y-u)$ →

Con $\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$; $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$; $\frac{du}{dt} = \dot{u}$ →

$$m\ddot{y} = -b\dot{y} + b\dot{u} - ky + ku$$

Aplicando Laplase →

$$mY(s)S^2 = -bY(s)S + bU(s)S - kY(s) + kU(s)$$

$$\rightarrow mY(s)S^2 + bY(s)S + kY(s) = bU(s)S + kU(s) \rightarrow$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bS + k}{mS^2 + bS + k}$$ → Función de transferencia

Despejando $\ddot{y}$ →

$$\ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} + \frac{b}{m}\dot{u} - \frac{k}{m}y + \frac{k}{m}u \rightarrow$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

Identificación de variables →

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2u \rightarrow$$

$a_1 = \frac{b}{m}$; $a_2 = \frac{k}{m}$; $b_0 = 0$; $b_1 = \frac{b}{m}$; $b_2 = \frac{k}{m}$

Constantes Beta ->

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left[\frac{b}{m}\right]^2$$

Variables de estado ->

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m} u$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m} u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u \rightarrow$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{b}{m} x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left[\frac{b}{m}\right]^2\right] u$$

Espacio de estados ->

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left[\frac{b}{m}\right]^2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Diagrama de Bloques

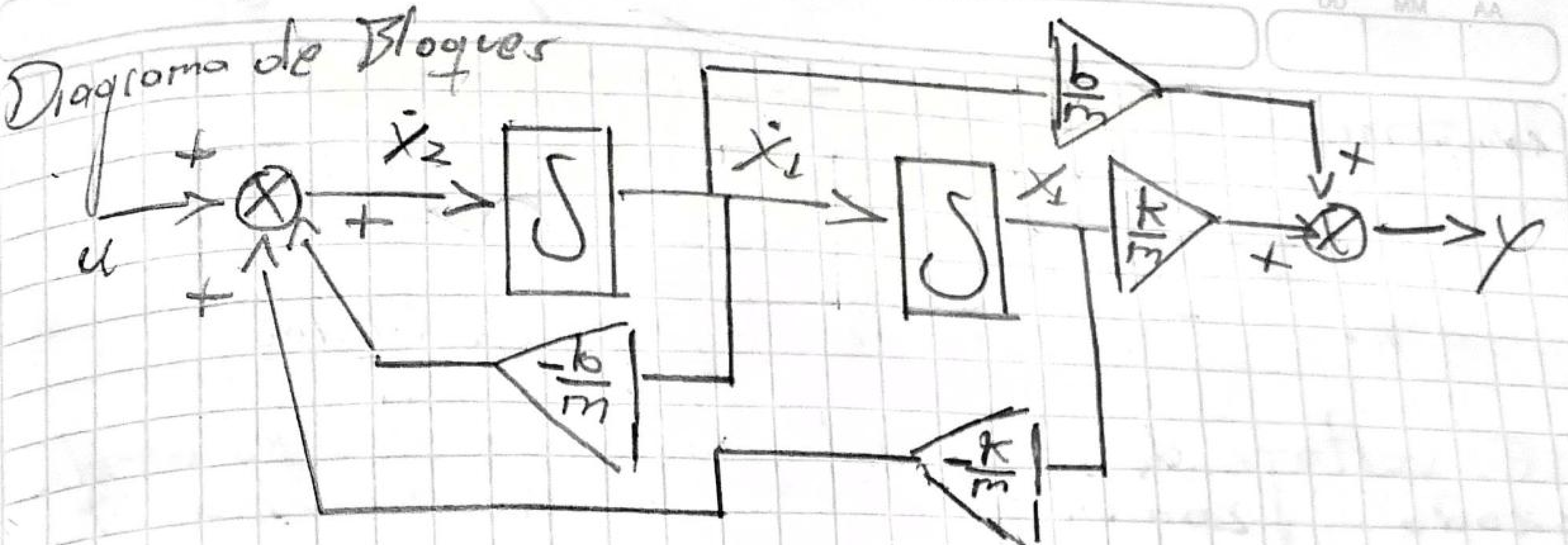
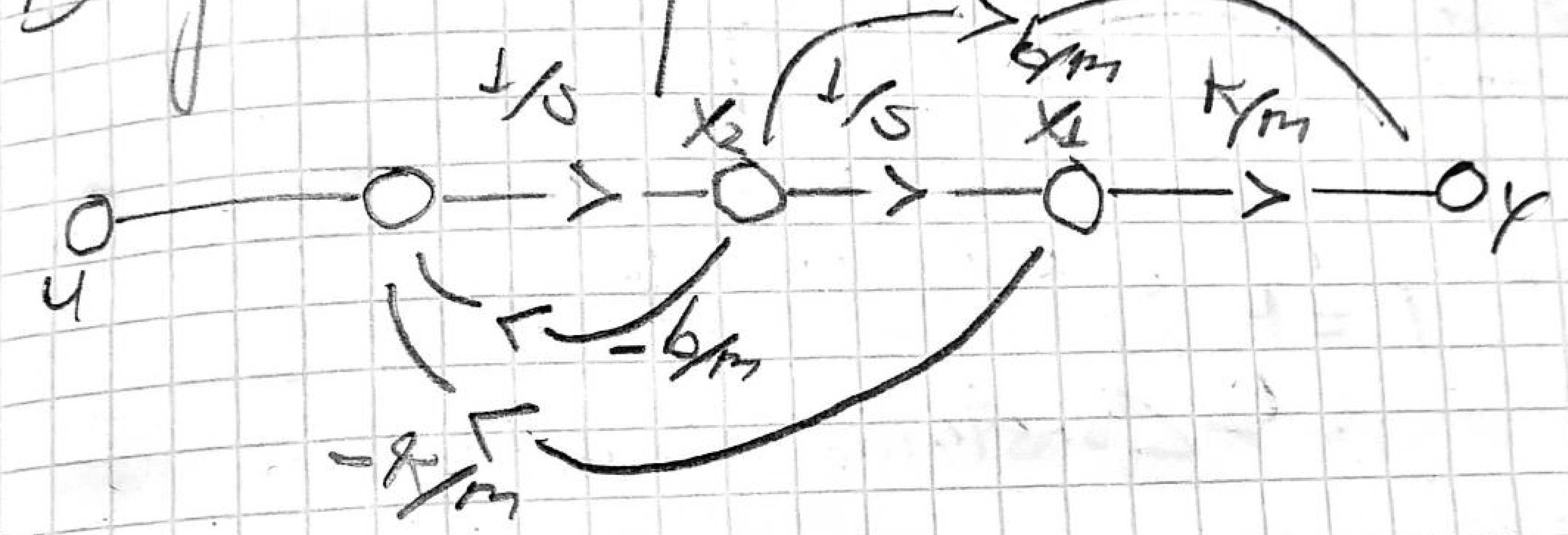


Diagrama de Flujo de señal - s



Ejercicio A-3-1 ->

Considere el sistema servo que se muestra en la figura. El servomotor se utiliza en un sistema de control. La operación de este sistema es: Un par de potenciometros miden los errores y convierten las posiciones de entrada y salida en señales eléctricas. La señal de entrada determina la posición angular "r" del brazo del limpiaparabrisas del potenciometro de entrada. La posición angular "r" es la entrada de referencia del sistema y el potencial eléctrico del brazo es proporcional al angulo del la posición del brazo. La posición del eje de salida determina la posición angular "c" del brazo del limpiaparabrisas del potenciometro de salida la diferencia entre la posición de entrada y de salida es la señal de error

$$e = r - c$$

Diferencia de potencial $\rightarrow e_v = e_r - e_c$

$e_r = k_0 r \; ; \; e_c = k_0 c$

↳ Constante de proporcionalidad

"El voltaje de error del potenciometro es amplificado con un amplificador de ganancia K_L"

"Si existe un error, el motor gira y reduce el error a cero"

Con corriente constante el par desarrollado por el motor es →

$T = k_2 i_a$

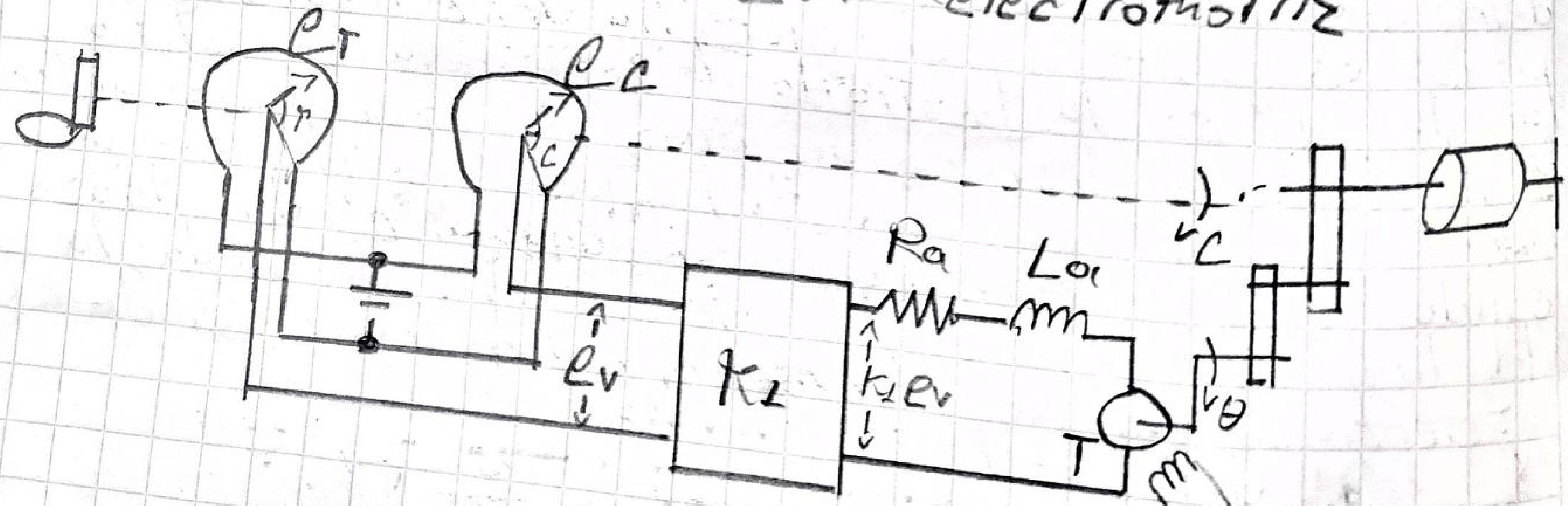
↳ Constante par del motor

e_b es directamente proporsional a la velocidad angular →

$e_b = k_3 \frac{d\theta}{dt}$ → Desplazamiento angullar

↳ Constante emf del motor

↳ Fuerza Contraelectromotriz



Obtener la función ... y diagrama de bloques simplificado cuando $La=0$

R-> La ecuación diferencial del circuito de armadura es ->

$$L_a\frac{di_a}{dt}+R_ai_a+e_b=e_a$$

Con $e_a=k_1e_v$ y $e_b=k_3\frac{d\theta}{dt}$

$$L_a\frac{di_a}{dt}+R_ai_a+k_3\frac{d\theta}{dt}=k_1e_v \quad (1)$$

Ecuación de torque ->

$$J_0\frac{d^2\theta}{dt^2}+b_0\frac{d\theta}{dt}=T=k_2i_a \quad (2)$$

Despejando i_a y reemplazando en (1) ->

$$L_a\frac{d}{dt}\left[\frac{J_0}{k_2}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{b_0}{k_2}\frac{d\theta}{dt}\right]+R_a\left[\frac{J_0}{k_2}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{b_0}{k_2}\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$+k_3\frac{d\theta}{dt}=k_1e_v$$

Realizando el desarrollo matemático tenemos que la función de transferencia es:

$$\frac{\theta(s)}{E_v(s)}=\frac{k_1k_2}{s(L_as+R_a)(J_0s+b_0)+k_2k_3}$$

Ahora suponiendo una relación de transmisión del tren de engranajes -> $C(s) = n\,\Theta(s)$

Y estableciendo la relación entre $E_v(s)$, $R(s)$, y $C(s)$ se tiene ->

$$E_v(s) = K_0\left[R(s) - C(s)\right] = K_0 E(s)$$

Teniendo en cuenta esto la función de transferencia del sistema es ->

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s\left[(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3\right]}$$

Despreciando L_a se tiene ->

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s\left[R_a(J_0 s + b_0) + K_2 K_3\right]}$$

Realizando el desarrollo matemático se tiene que la función de transferencia es ->

$$G(s) = \frac{K}{J s^2 + B s}$$

En donde ->

$$J = J_0/n \; ; \; B = \left[b_0 + (K_2 K_3/R_a)\right]/n^2$$

$$K = K_0 K_1 K_2 / n R_a$$

Diagrama de bloques sin despreciar La ->

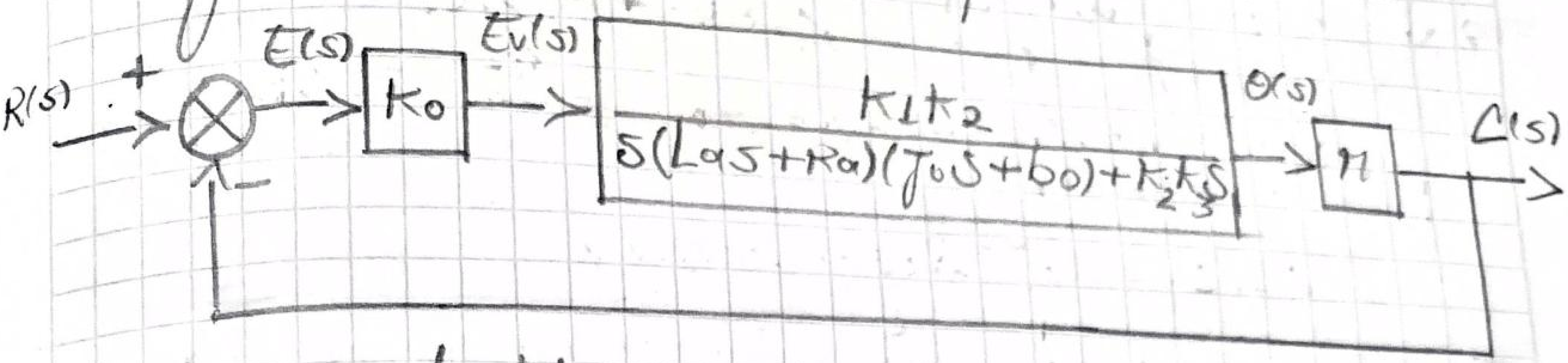
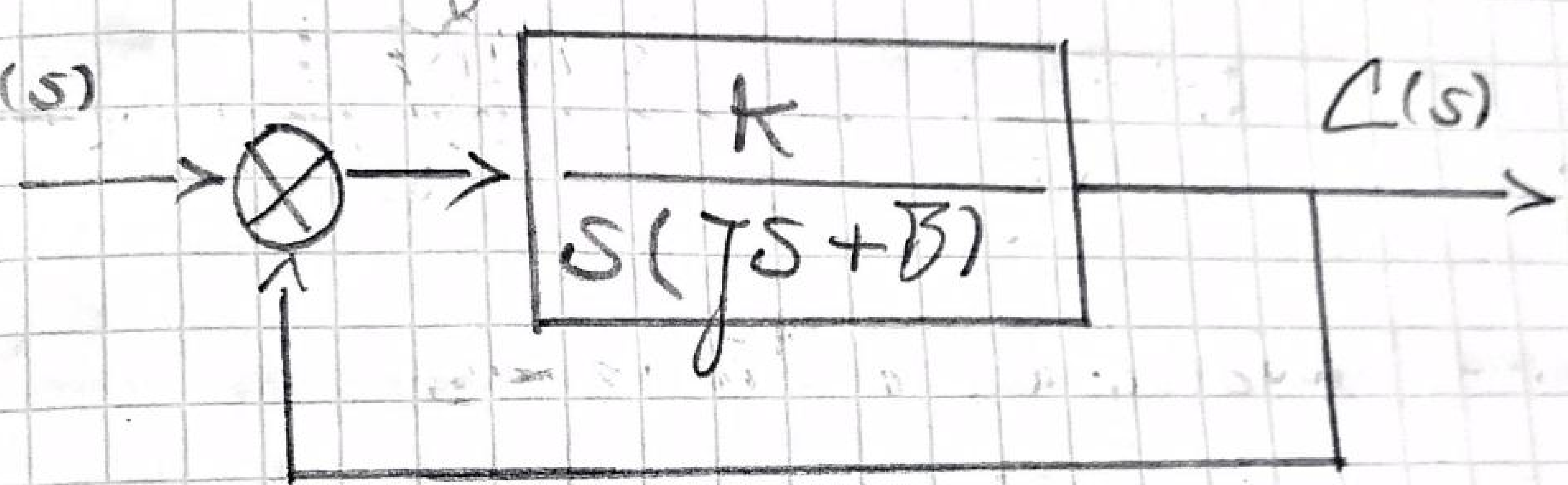
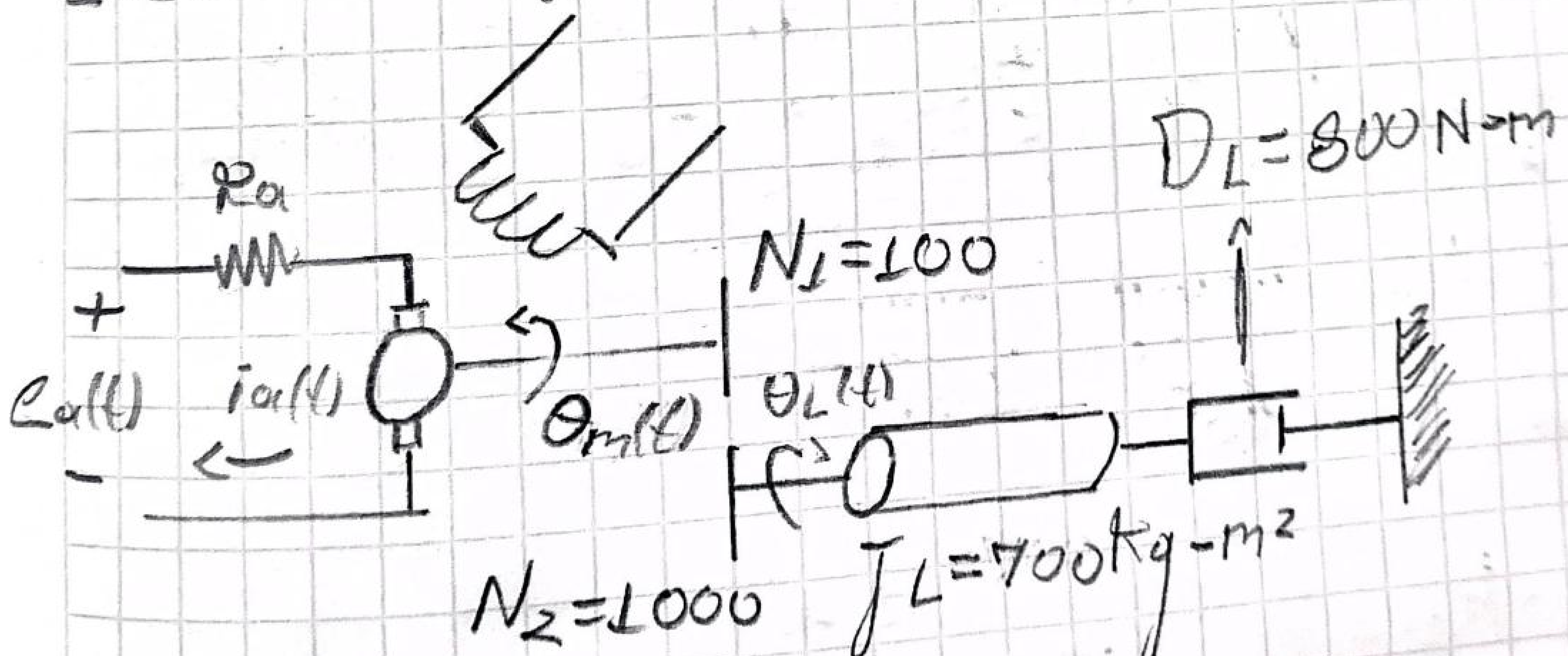


Diagrama de bloques despreciando La ->



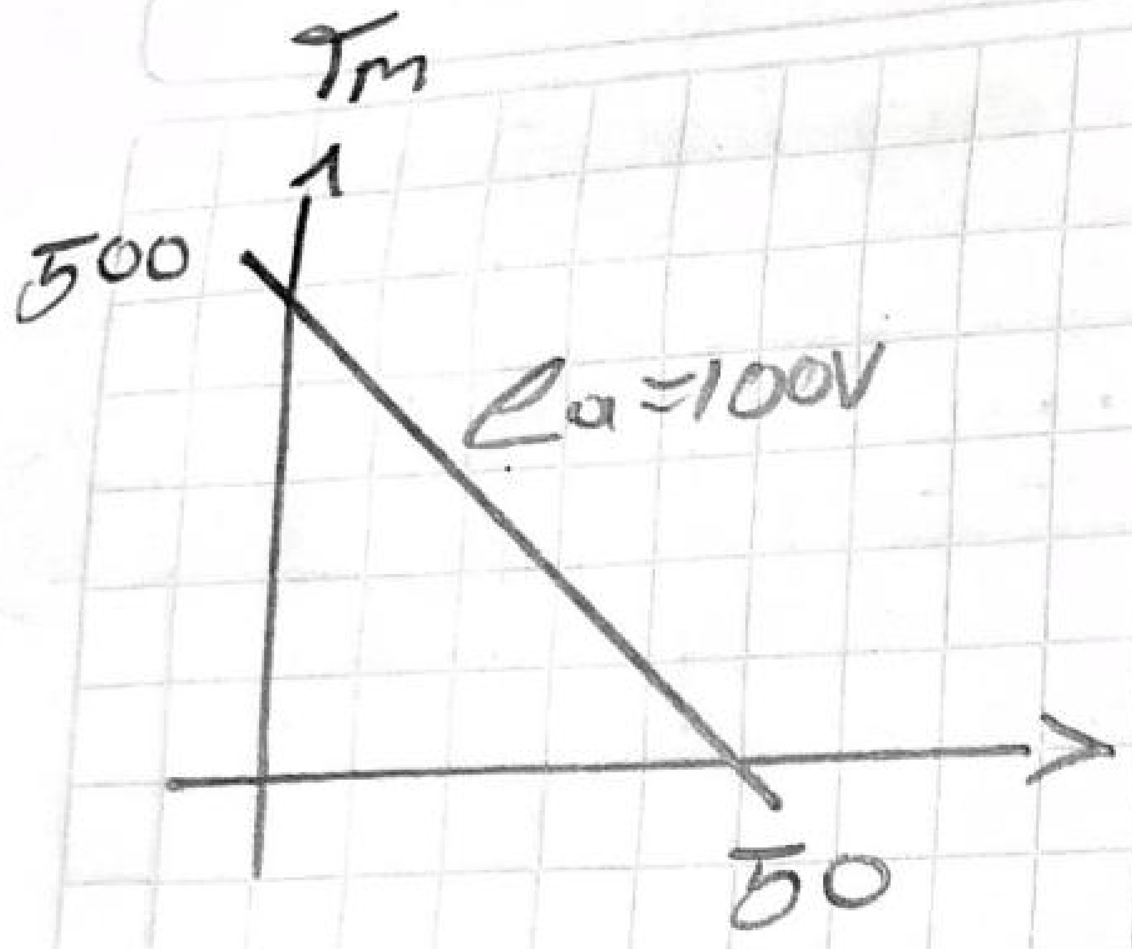
Ejercicio 2,23 ->

Dado el sistema y la curva par-velocidad encontrar la función de transferencia -> $\theta_L(s)/E_a(s)$



$J_a = 5\ kg\text{-}m^2$

$D_a = 2\ N\text{-}m\ s/rad$



$$E_a(s) \rightarrow \boxed{\dfrac{0{,}0417}{s(s+1{,}667)}} \rightarrow \theta_L(s)$$

R-> Inercia total de la armadura del motor ->

$$J_m = J_a + J_L\left[\frac{N_1}{N_2}\right]^2 = 5 + 700\left[\frac{1}{10}\right]^2 = 12$$

La amortiguación de la armadura del motor ->

$$D_m = D_a + D_L\left[\frac{N_1}{N_2}\right]^2 = 2 + 800\left[\frac{1}{10}\right]^2 = 10$$

Obtención de las constantes electricas Kt/Ra y Kb por medio del par-velocidad ->

$T_{stall} = 500$; $W_{no\text{-}load} = 50$; $e_a = 100$ ->

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{T_{stall}}{e_a} = \frac{500}{100} = 5$$

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_{no\text{-}load}} = \frac{100}{50} = 2$$

Teniendo en cuenta que →

$$\frac{\theta m(s)}{Ea(s)} = \frac{Kt/RaJm}{s\left[s+\frac{1}{Jm}\left[Dm+\frac{KtKb}{Ra}\right]\right]}$$

Reemplazando nos queda →

$$\frac{\theta m(s)}{Ea(s)} = \frac{5/12}{s\left[s+\frac{1}{12}\left[10+5(2)\right]\right]} = \frac{0{,}417}{s(s+1{,}667)}$$

Teniendo en cuenta que la relación $\frac{N_1}{N_2}=\frac{1}{10}$ se tiene que →

$$\frac{\theta_L(s)}{Ea(s)} = \frac{0{,}0417}{s(s+1{,}667)}$$