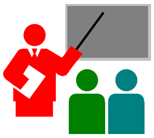
Análisis de Fourier
DFT
FFT

Temas a tratar

- Introducción
- Series de Fourier
- Transformada continua de Fourier
- Propiedades y transformada inversa
- Transformada discreta de Fourier
- Alias de muestreo en el dominio de la frecuencia
- Algoritmos de cálculo.



"Análisis" en frecuencias

La luz del sol puede descomponerse en un espectro de colores.

El sonido puede descomponerse en señales de frecuencias puras.

Este análisis puede hacerse también para una señal digital de audio o sonido.

Un poco de historia...

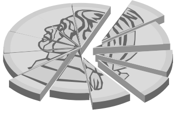
- Fourier, estaba estudiando la conducción del calor.
- Sabía que una cuerda puede vibrar de varios modos, pero todos armónicos:
  - es decir que la relación entre sus frecuencias es un número fraccionario.
- Sabía tb. que las proyecciones de un vector rotativo que gira a una velocidad angular fija sobre los ejes ortogonales *x* e *y* dan respectivamente:
  - el coseno y el seno del ángulo del vector rotativo.

Un poco de historia...

- Con estos conceptos Fourier elaboró su teoría:
  - Sumando funciones armónicas de diferente amplitud y fase podemos construir cualquier función periódica.
  - El conjunto de estas armónicas forma el **espectro** (spectrum).

¿Qué es el Análisis de Fourier...?

- Análisis:
  - Consiste en aislar los componentes del sistema que tienen una forma compleja para tratar de comprender mejor su naturaleza u origen.



¿Qué es el Análisis de Fourier...?

- Se dedica al estudio de señales: periódicas o no periódicas, continuas o discretas, en el dominio del tiempo, o de cualquier otra variable unidimensional, bidimensional o multidimensional.
- En sus versiones más avanzadas estudia: procesos estocásticos, funciones de distribución, y topologías complejas, pero sus fundamentos siguen siendo muy simples.

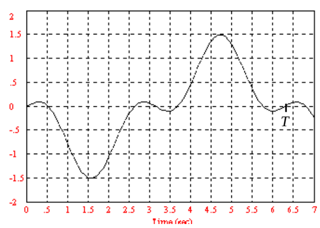
¿Qué es el Análisis de Fourier...?

Las señales pueden ser tan variadas como:

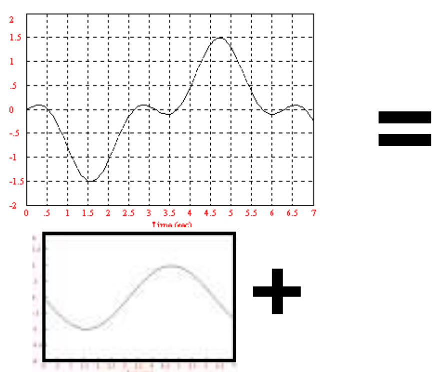
- La población de un país a lo largo de los siglos.
- La altura de las mareas en su ciclo mensual.
- La irradiación de una antena, en función del ángulo.
- La forma de onda de la vocal /A/ del francés.
- La iluminación en cada punto de una imagen de TV.
- Las espigas de un electroencefalograma (EEG).
- las rugosidades en el perfil de un terreno.
- las variaciones de resistividad eléctrica, mientras se explora el perfil de un pozo de petróleo.

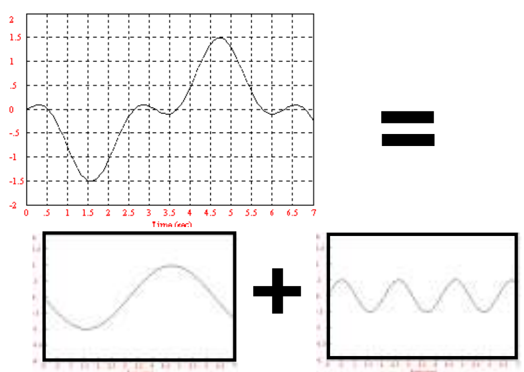
Transformada de Fourier

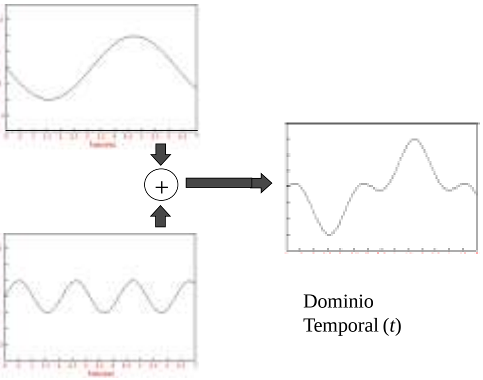
- La TF es una representación de una función en el dominio de la frecuencia:
  - Contiene exactamente la misma información que la señal original
  - Sólo difiere en la manera en que se presenta



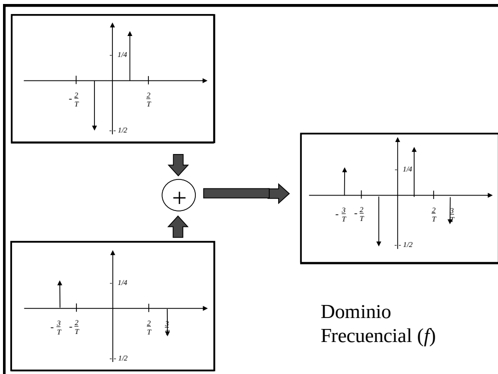
Funcion definida desde $-\infty$ a ∞





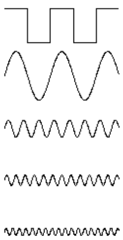


Dominio
Temporal (t)



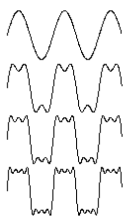
Dominio
Frecuencial (f)

Por ejemplo:



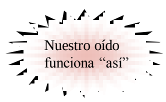
Una onda cuadrada puede obtenerse sumando:

- la fundamental
- menos 1/3 de la 3er armónica...
- más 1/5 de la 5ta armónica...
- menos 1/7 de la 7ma armónica....

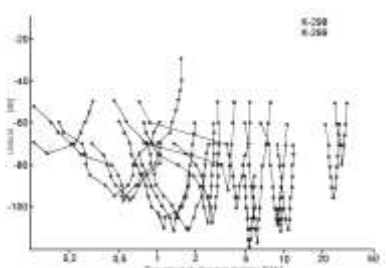


El piano como "analizador" espectral:

- Abrir la tapa del piano y presionar el pedal que controla la intensidad.
- Aplaudir fuerte sobre el piano.
- Se verán y oirán las cuerdas vibrando como eco al sonido del aplauso.
- Las cuerdas que vibran muestran las componentes de frecuencia.
- La cantidad de vibración muestra la amplitud de cada una.
- Cada cuerda actúa como un resonador sintonizado cuidadosamente.



El oído como analizador espectral



- Curvas de sintonía de las fibras del nervio auditivo

Tiempo vs Frecuencia

- Entender la relación entre tiempo y frecuencia es útil:
  - Algunas señales se visualizan mejor en la frecuencia.
  - Algunas señales se visualizan mejor en el tiempo.
  - Esto tiene que ver con la forma en que se presenta la información en cada dominio.
- Ejemplo:
  - Una onda senoidal utiliza "mucha" información para definirse adecuadamente en el tiempo, pero no en la frecuencia.

La familia de Fourier

Funciones de Fourier

- Senos y cosenos con frecuencias discretas
  - Series seno y coseno
- Exponenciales complejos con frecuencia discreta
  - Series de Fourier
- Exponenciales complejos continuos
  - Transformada continua de Fourier
- Exponenciales complejos discretos
  - Transformada discreta de Fourier

$x(t)$
- periódica → Serie de Fourier (discreta e infinita) (FS) (Caso Par/Impar Coseno/Seno)
- no periódica → Transformada de Fourier (continua) (FT)
- muestreada → Transformada de Fourier de una Secuencia Discreta (continua y periódica) (DTFT)

↓ Transformada Discreta de Fourier (DFT) (discreta y finita)

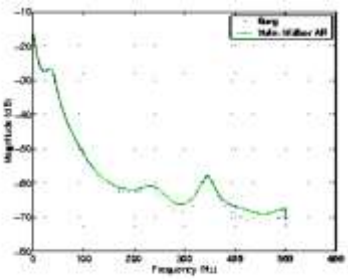
↓ Transformada Rápida de Fourier (FFT)

¿Y si $x(t)$ es aleatoria?

↓ Estimación Espectral

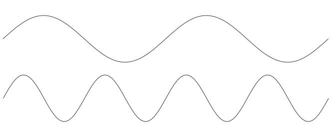
Estimación espectral

- Si $x(t)$ es aleatoria no puedo conocer exactamente su espectro, debo estimarlo.
- Métodos:
  - No paramétricos
  - Paramétricos
  - Subespacio



Series seno: base

$$\varphi_n(t) = \sin\left(2\pi n f_0 t\right)$$



⋮

Series seno: transformación

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin\left(2\pi n f_0 t\right) dt$$

Series seno: inversa

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(2\pi n f_0\, t\right)$$

Series coseno:

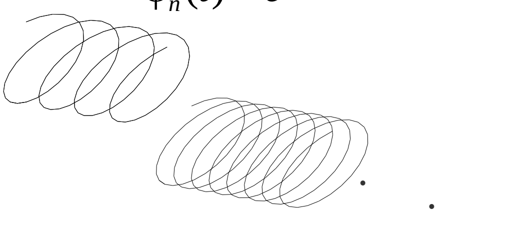
$$\varphi_n(t)=\cos\left(2\pi n f_0\, t\right)$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos\left(2\pi n f_0\, t\right)dt$$

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\left(2\pi n f_0\, t\right)$$

Series de Fourier: base

$$\varphi_n(t)=e^{j2\pi n f_0 t}$$



Serie de Fourier

Si $x(t) = x(t+T)$ $\forall\, t$

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(2\pi kt/T)+b_k \operatorname{sen}(2\pi kt/T)]$$

donde

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).\cos(2\pi kt/T)\,dt \qquad k=0,1,2,\ldots$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).\operatorname{sen}(2\pi kt/T)\,dt \qquad k=1,2,\ldots$$

Serie de Fourier

$\frac{1}{T}=f_0$

$2\pi f_0=\omega_0$

Si $x(t) = x(t+T)$ $\forall\, t$

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(2\pi kt/T)+b_k \operatorname{sen}(2\pi kt/T)]$$

donde

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).\cos(2\pi kt/T)\,dt \qquad k=0,1,2,\ldots$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).\operatorname{sen}(2\pi kt/T)\,dt \qquad k=1,2,\ldots$$

Serie de Fourier

La forma compleja de la serie de Fourier es

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{(j2k\pi t/T)}$$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{(-j2k\pi t/T)}dt \qquad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Serie de Fourier

La forma compleja de la serie de Fourier es

Ecuación de Síntesis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{(j2k\pi t/T)}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{(-j2k\pi t/T)} dt \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

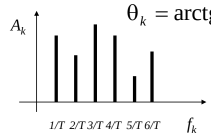
Ecuación de Análisis

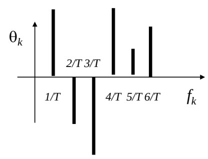
Serie de Fourier

x(t) puede expresarse como una suma de armónicos de la frecuencia fundamental 1/T

$$A_k = (a_k^{\,2} + b_k^{\,2})^{1/2}$$

$$\theta_k = \text{arctg}(-b_k / a_k)$$



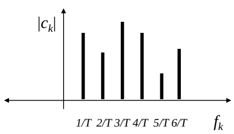


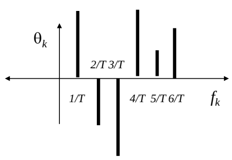
Espectro de una señal periódica

Espectro de Magnitud

(Discretos)

Espectro de Fase





¿Qué ocurre cuando $T \rightarrow \infty$?

¿ó $f_0 \rightarrow 0$?

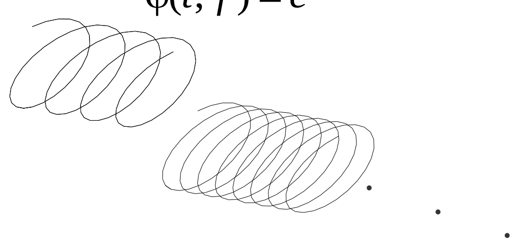
Transformada de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{\,j2\pi f t} df$$

Transformada continua de Fourier: base

$$\varphi(t, f) = e^{j2\pi f t}$$



Propiedades de la Transformada de Fourier

En general la TF es un complejo:

$$X(f)=R(f)+j\,I(f)=|X(f)|\,e^{j\theta(f)}$$

donde:

- $R(f)$ es la parte real de la TF
- $I(f)$ es la parte imaginaria
- $|X(f)|$ es la amplitud o espectro de Fourier de $x(t)$
- $\theta(f)$ es el ángulo de fase de la TF

$$|X(f)|=\sqrt{R^2(f)+I^2(f)}$$
$$\theta(f)=tan^{-1}[I(f)/R(f)]$$

Existencia de la FT

$$\exists\, X(f)\quad si \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt<\infty$$

Es decir, si la señal es de *energía finita*

Las señales transitorias cumplen con esa condición

Existencia de la FT

- Las señales periódicas $(-\infty,\infty)$ no cumplen con esa condición.
- Se requiere la utilización de *funciones generalizadas* o *teoría de distribuciones.*

Linealidad

- Si $x(t)$ y $y(t)$ tienen transformadas de Fourier $X(f)$ y $Y(f)$, entonces:

$$x(t)+y(t) \Longleftrightarrow X(f)+Y(f)$$

Simetría (Dualidad)

- Si $h(t)$ *y* $H(f)$ son un par de transformadas de Fourier, entonces:

$$H(t) \Longleftrightarrow h(-f)$$

Desplazamiento Temporal (retardo)

- Si h(t) está desplazada un valor t_o, entonces:

$$h(t - t_0) \Longleftrightarrow H(f)e^{-j2\pi f t_o}$$

el desplazamiento temporal no afecta la magnitud de la TF

Desplazamiento Frecuencial (modulación)

- Si $H(f)$ está desplazada un valor f_0, entonces:

$$H(f - f_0) \Longleftrightarrow h(t)\, e^{j2\pi t f_o}$$

Escala Temporal

- Si $H(f)$ es la transformada de $h(t)$, entonces:

$$h(k\,t) \Longleftrightarrow 1/k\; H(f/k)$$

Escala Frecuencial

- Si $H(f)$ es la transformada de $h(t)$, entonces:

$$H(k\,f) \Longleftrightarrow 1/|k|\; h(t/k)$$

Funciones pares

- Si $h_p(t)$ es una función par, la FT de $h_p(t)$ será par y real:

$$h_p(t) \Longleftrightarrow R_p(f)$$

Funciones impares

- Si $h_i(t)$ es una función impar, la FT de $h_i(t)$ será impar e imaginaria pura:

$$h_i(t) \Longleftrightarrow I_i(f)$$

Convolución en el tiempo

$$x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$$

Convolución en la frecuencia

$$x(t)y(t) \Leftrightarrow X(\omega) * Y(\omega)$$

No se cumple para la DFT

Descomposición de señales

$h(t)$ función periódica arbitraria

$$h(t) = h(t)/2 + h(t)/2$$

$$h(t) = [h(t)/2 + h(-t)/2] + [h(t)/2 - h(-t)/2]$$

$$h(t) = h_p(t) + h_i(t)$$

Además por ser periódica

$$h(-t) = h(T-t)$$

entonces

$$h_p(t)=[h(t)/2 + h(T-t)/2]$$

$$h_i(t)=[h(t)/2 - h(T-t)/2]$$

Descomposición de señales

Sabemos entonces que:

$$H(\omega) = R(\omega) + j\,I(\omega) = H_p(\omega) + H_i(\omega)$$

Donde:

$$H_p(\omega) = R(\omega) \quad \text{y} \quad H_i(\omega) = j\,I(\omega)$$

¿Qué ocurre ahora cuando discretizamos?:

$$t \cong nT \qquad f \cong kF$$

$$n = 1 \cdots N,$$

$$k = 1 \cdots N,$$

(simplificando un poco...)

Transformada discreta de Fourier: transformación

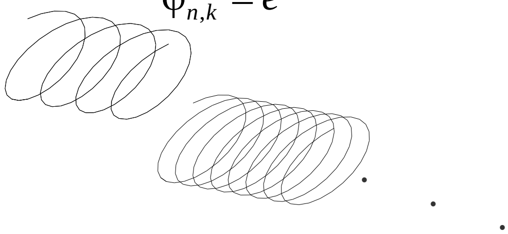
$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n e^{-j\frac{2\pi\ nk}{N}}$$

Transformada discreta de Fourier: inversa

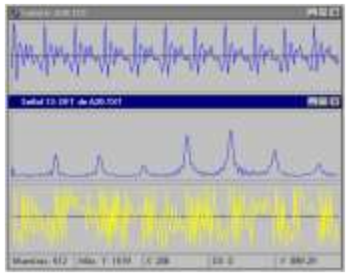
$$x_n = \sum_{k=1}^{N} X_k e^{j\frac{2\pi\ nk}{N}}$$

Transformada discreta de Fourier: base

$$\varphi_{n,k} = e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$$

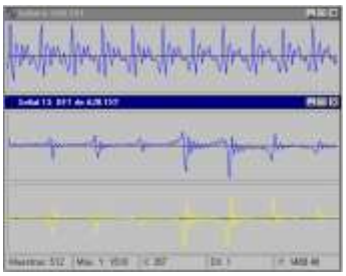


Ejemplo: SigTeach...



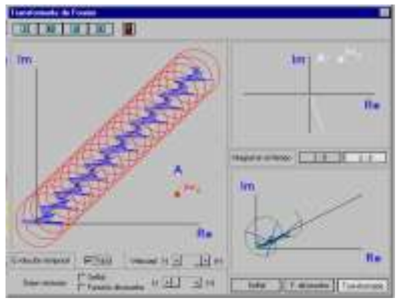
- Magnitud y fase de la DFT de una señal de voz (/a/)

Ejemplo: SigTeach...



- Parte Real e Imaginaria de la DFT de una señal de voz (/a/)

Ejemplo: SigTeach...



- Otra forma de verlo...

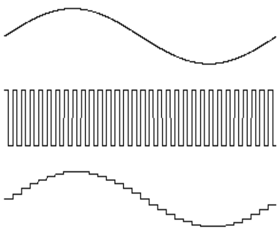
Algunas observaciones...

- Para poder realmente calcular la DFT en la práctica debemos pasar de la señal analógica a una digital
- Esto parece relativamente sencillo, pero no debemos olvidar que en general perdemos información.
- La señal original "sufre" 3 transformaciones:
  - Muestreo (variable independiente)
  - Ventaneo (variable independiente)
  - Cuantización (variable dependiente)

Algunas observaciones...

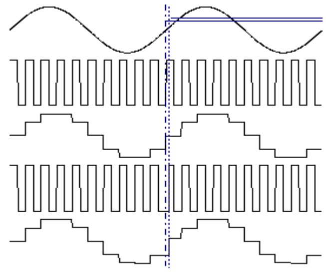
- Muestreo:
  - Solo medimos a intervalos prefijados por lo cual perdemos los cambios rápidos.
  - Dependemos de la fiabilidad del reloj del sistema.
- Ventaneo:
  - Solo medimos durante un intervalo finito de tiempo por lo cual perdemos los cambios más lentos.
  - La forma de esta ventana también afecta el resultado.

Algunas observaciones...



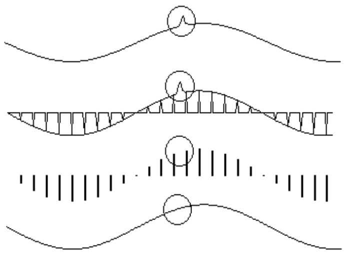
- Una señal continua
- ...medida contra un reloj...
- ...mantiene su valor entre cada pulso del reloj...

Algunas observaciones...



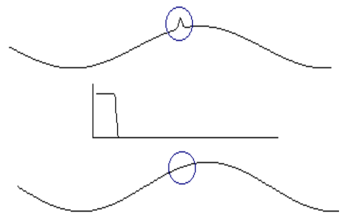
- Un reloj preciso...
- .... conduce a valores precisos.
- Un error en el reloj...
- ... se traduce en error en los valores.

Algunas observaciones...



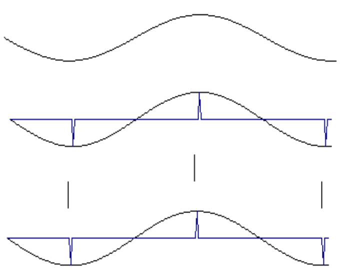
- Una “evento” de la señal...
- que ocurre entre muestras...
- parece como...
- si no hubiese estado allí

Algunas observaciones...



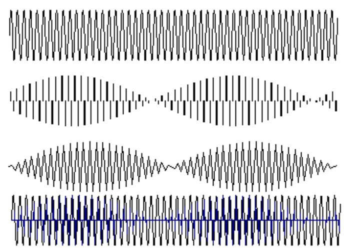
- Las componentes de alta frecuencia...
- ...pasadas por un filtro pasa bajos...
- ...desaparecen

Algunas observaciones...



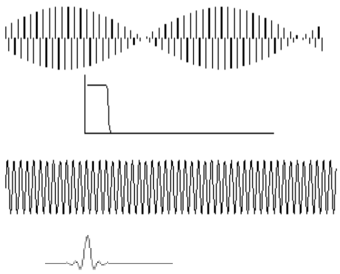
- Una señal periódica...
- muestreada dos veces por ciclo...
- tiene suficiente información como...
- para ser reconstruida

Algunas observaciones...



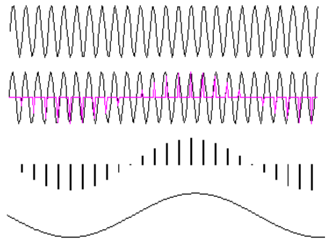
- Una señal de alta frecuencia...
- ...muestreada suficientemente rápido...
- ...puede verse todavía mal...
- ...pero puede ser reconstruida.

Algunas observaciones...



- Una señal muestreada...
- ...debe ser procesada por un filtro pasa-bajos...
- ...para reconstruir la señal original.
- La respuesta al impulso del filtro debe ser una sincrónica.

Algunas observaciones...

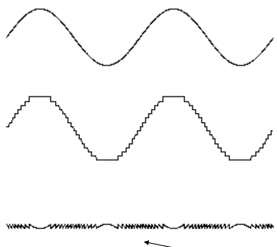


- Una señal de alta frecuencia...
- muestreada a una tasa muy baja...
- parece como...
- una señal de menor frecuencia.

Algunas observaciones...

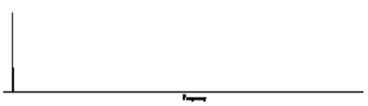
- Cuantización:
  - La precisión está limitada al número de bits disponible.
  - Depende también del rango dinámico de la señal.
  - Los errores introducidos en el proceso son no lineales y dependientes de la señal.
  - También pueden cometerse errores aritméticos dentro del procesador debido a la precisión.

Algunas observaciones...

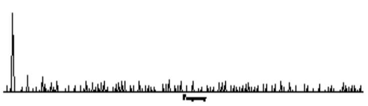


- La precisión limitada en la cuantización...
- ...conduce a errores...
- ... que dependen de la señal

Algunas observaciones...



- Por ello el espectro de un tono puro...



- ...se ensucia cuando lo cuantizamos.

Algunas observaciones...

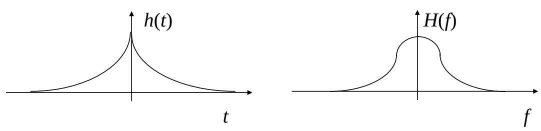
- Ya no podemos movernos libremente entre el dominio frecuencial y temporal sin perder información:
  - Debido a los errores producidos en los cálculos por la precisión, o a que hay información que no podemos medir o calcular.

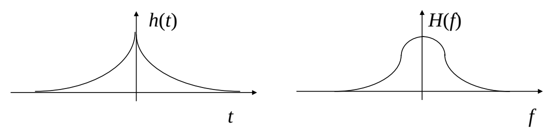
Algunas observaciones...

- Como resumen:
  – Debemos tener bien claros todos estos efectos y tratar de minimizarlos al máximo, en función de los recursos disponibles.

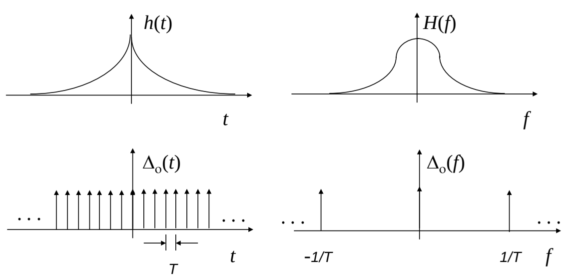
Transformada Discreta de Fourier DFT

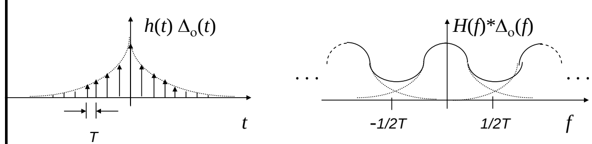
Desarrollo Intuitivo

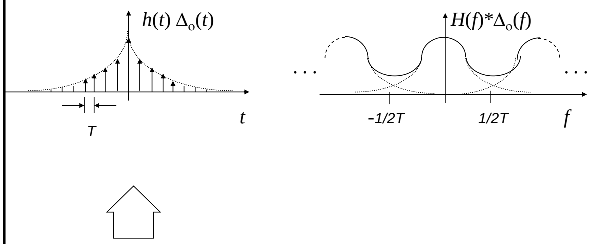




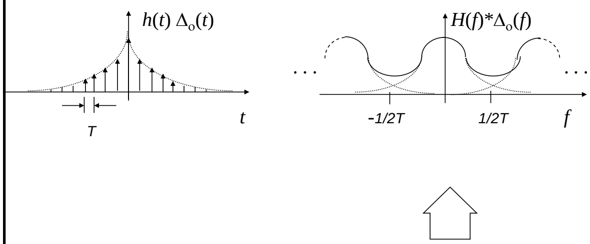
- Buscamos modificar el dominio de la variable tiempo y el de la variable frecuencia para obtener secuencias en ambos dominios aptas de tratarse mediante procesamiento digital.



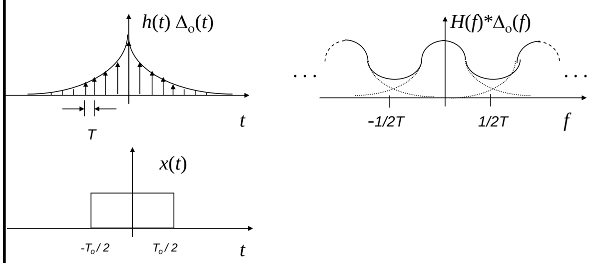


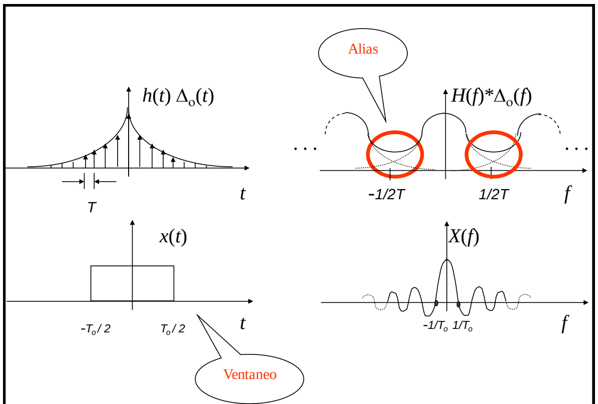


Infinitas muestras



espectro continuo

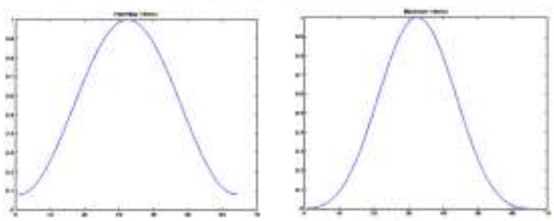


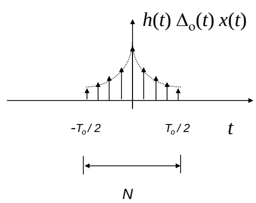


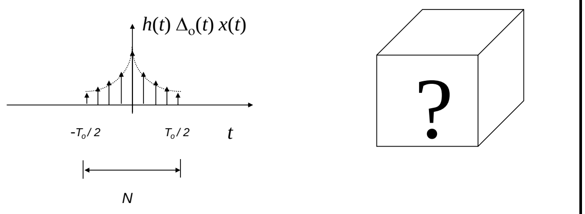
Ventanas: Hamming y Blackman

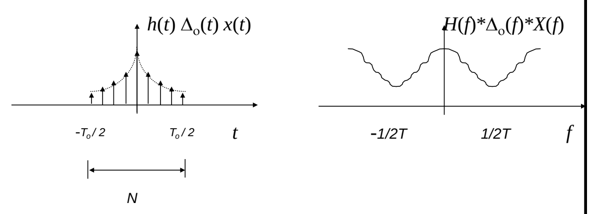
$$w[k+1] = 0.54 - 0.46\cos\left(2\pi\frac{k}{n-1}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1$$

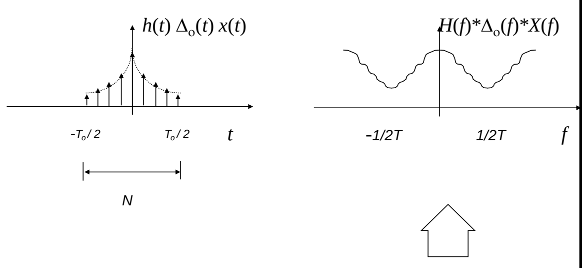
$$w[k+1] = 0.42 - 0.5\cos\left(2\pi\frac{k}{n-1}\right) + 0.08\cos\left(4\pi\frac{k}{n-1}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1$$



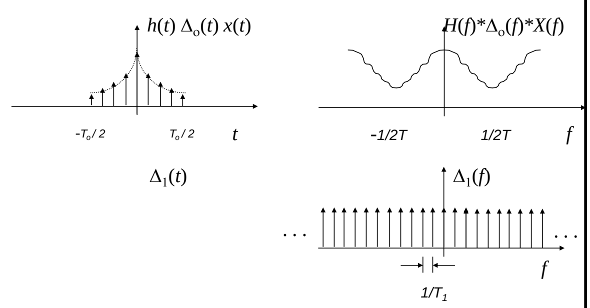


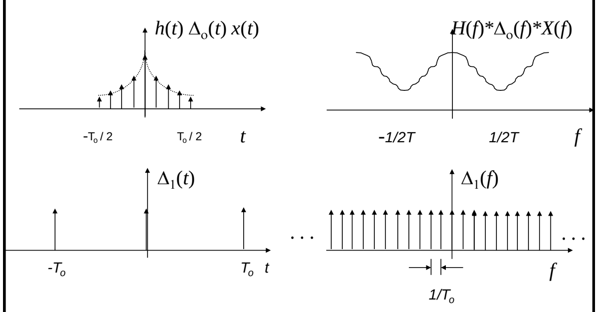


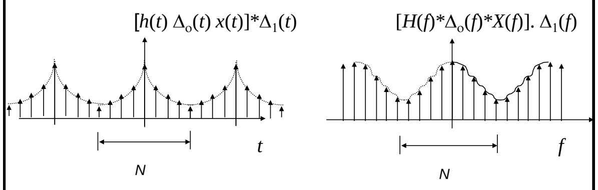




sigue continuo







$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

$n, k = 0, 1, 2, 3, \ldots N - 1$

Transformada Rápida de Fourier
FFT

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

Si consideramos que $W = e^{-j2\pi/N}$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W^{nk}$$

n=0, 1, 2, 3 ,... N-1

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W^{nk}$$

Esta expresión define un sistema de N ecuaciones.

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W^{nk}$$

Si N = 4

$$X(0) = x(0)W^0 + x(1)W^0 + x(2)W^0 + x(3)W^0$$
$$X(1) = x(0)W^0 + x(1)W^1 + x(2)W^2 + x(3)W^3$$
$$X(2) = x(0)W^0 + x(1)W^2 + x(2)W^4 + x(3)W^6$$
$$X(3) = x(0)W^0 + x(1)W^3 + x(2)W^6 + x(3)W^9$$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{3} x(k) W^{nk}$$

Que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{3} x(k) W^{nk}$$

Que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Como W es complejo y *x(n)* puede serlo, son necesarias N^2 **multiplicaciones complejas** y $N(N-1)$ **sumas complejas** para realizar este cálculo.

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Como $W^{nk} = W^{(nk \mod N)}$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Como $W^{nk} = W^{(nk \mod N)}$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Es posible factorizar la matriz $\boldsymbol{W}$ de modo que

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Observación: Se intercambiaron los renglones 2 y 3 de X

Podemos tomar un vector intermediario

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Podemos tomar un vector intermediario

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

donde $x_1(0)$ puede calcularse como $x_1(0) = x(0) + W^0 x(2)$

$x_1(0) = x(0) + W^0\, x(2)$

Una multiplicación y una suma complejas

$x_1(2) = x(0) + W^2\, x(2)$

Una multiplicación y una suma complejas

$x_1(2) = x(0) + W^2\, x(2)$

donde además se verifica que $W^0 = -W^2$
por lo que

$x_1(2) = x(0) - W^0\, x(2)$

pero el segundo término **ya fue calculado** para hallar $x_1(0)$

$x_1(2) = x(0) - W^0\, x(2)$

por lo cual estamos ahorrando una multiplicación compleja

Análogamente $x_1(3)$ también puede calcularse con sólo **una** suma y **ninguna** multiplicación adicional.

Por lo que el vector intermediario $\mathbf{x_1}$ puede calcularse con cuatro sumas y dos multiplicaciones

Volviendo al cálculo inicial tenemos

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix}$$

Donde, por un razonamiento análogo, puede realizarse la operación con cuatro sumas y 2 multiplicaciones

- En total hemos empleado 4 multiplicaciones y 8 sumas complejas
- El cálculo realizado en la forma primitiva hubiese requerido 16 multiplicaciones y 12 sumas complejas

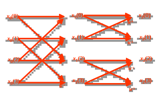
- Para $N = 2^{\gamma}$ el algoritmo de la FFT es simplemente un procedimiento para factorizar una matriz $N \times N$ en γ matrices que minimizan el número de productos y sumas complejas

FFT	DFT
$N\gamma/2$ multiplicaciones complejas	N^2 multiplicaciones complejas
$N\gamma$ sumas complejas	$N(N-1)$ sumas complejas

FFT	DFT
$N\gamma/2$ multiplicaciones complejas	N^2 multiplicaciones complejas
$N\gamma$ sumas complejas	$N(N-1)$ sumas complejas

Si ***N*=1024** y asumimos que el tiempo de cómputo es proporcional al número de multiplicaciones, la relación de velocidades es de

200 a 1

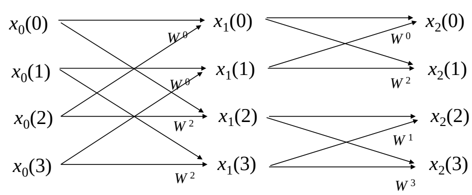


Diagramas "mariposa"

Revisando la factorización …

Gráfico de flujo de la FFT

$N = 4$



Diagramas "mariposa"

Gráfico de flujo de la FFT

$N = 4$

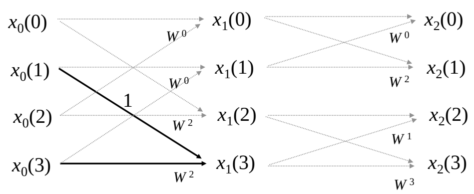


Gráfico de flujo de la FFT

$N = 4$

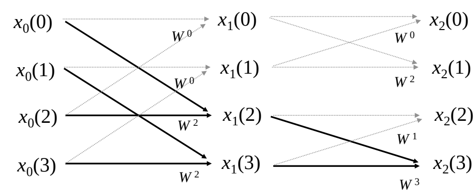
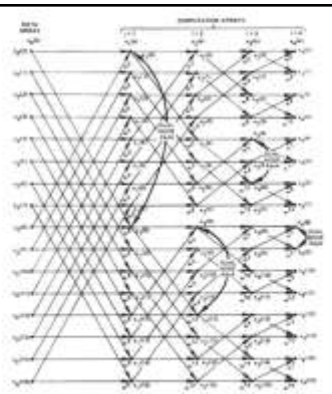
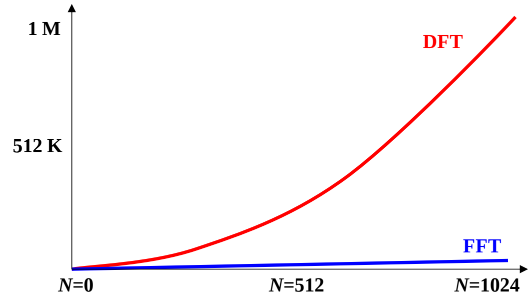


Gráfico de flujo de la FFT

$N = 16$



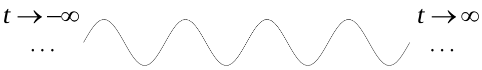
Multiplicaciones FFT vs. DFT



Análisis Tiempo-Frecuencia: Espectrograma

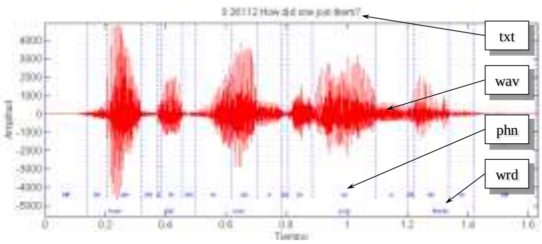
¿Problemas con señales no estacionarias o transitorias...?

- La familia de Fourier está “diseñada” para analizar señales cuyo “comportamiento” o propiedades no varien en el tiempo...



- Se requiere otra “base” que permita realizar este análisis...

Ejemplo: Señal de Voz



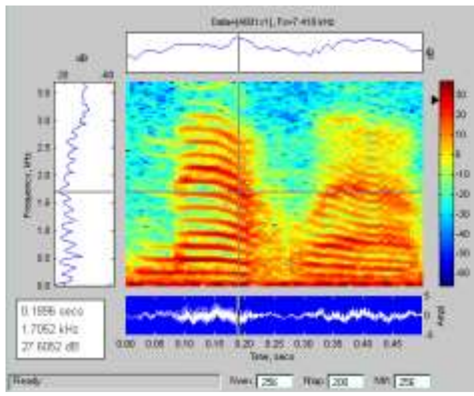
Transformada de Fourier (FT)

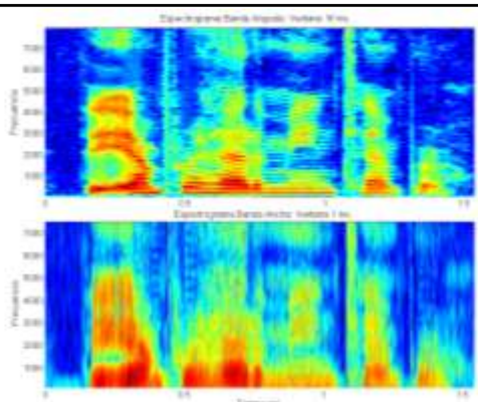
- Ha dominado el análisis de señales por mucho tiempo
- Su teoría ha sido extensamente estudiada
- Existe un algoritmo rápido para calcularla (discreta)
- Para señales no estacionarias se utiliza la versión de tiempo corto (STFT)
- La STFT posee limitaciones debido a que usa una única ventana de análisis

$$STFT(\tau, f) = \int x(t) \cdot g^*(t-\tau) \cdot e^{-2j\pi ft} dt$$

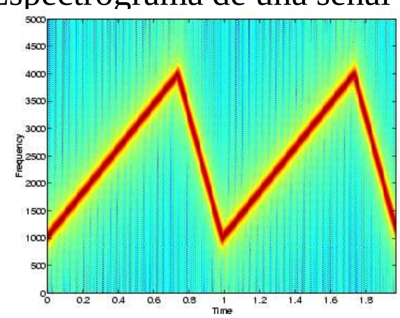
Espectrograma

- Una vista alternativa (3D) de la señal
- El eje horizontal es el tiempo
- El eje vertical es la frecuencia
- La oscuridad o color es proporcional a la energía





Espectrograma de una señal FM

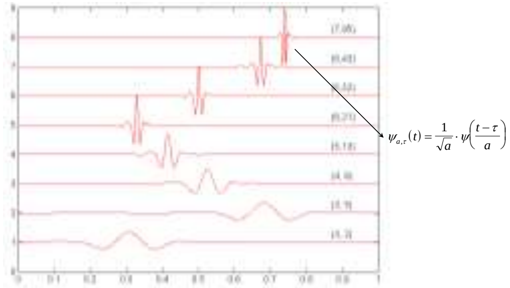


Transformada Ondita (WT)

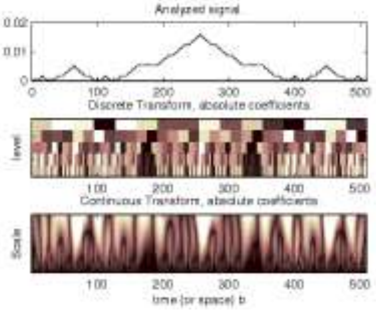
- Es de aparición reciente
- Su teoría todavía continua desarrollándose
- Está “diseñada” para señales no estacionarias
- Existe un algoritmo rápido para calcularla (discreta)
- Utiliza ventanas de ancho variable de acuerdo a la frecuencia (de forma similar al oído)
- Su descomposición jerárquica permite el análisis a distintas escalas (multiresolución)

$$CWT_x(\tau, a) = \int x(t) \cdot \psi *_{a,\tau}(t) \cdot dt$$

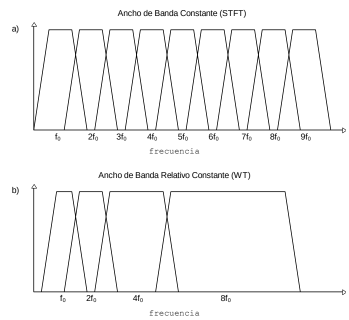
Onditas: escala y localización



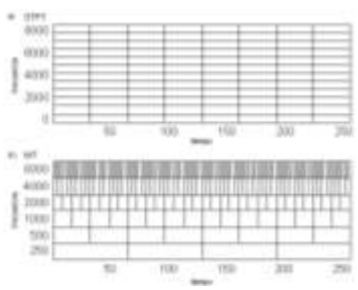
Análisis con Onditas

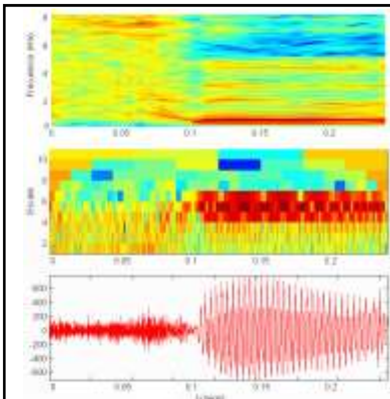


Distribución de los Filtros



Resolución Tiempo-Frecuencia





Espectrograma

Escalograma

Sonograma

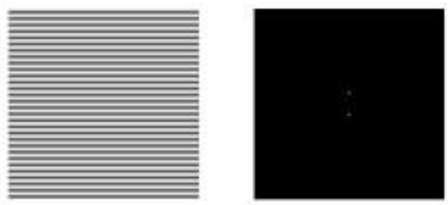
Análisis bidimensional

Transformada de Fourier en 2D

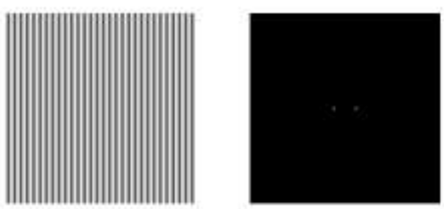
sen(y) = sen($1y$)

sen($2y$)

sen($15y$)

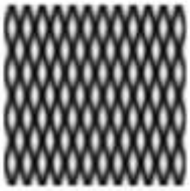


sen($15x$)



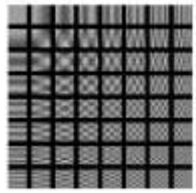
sen($3.5x + 7y$)

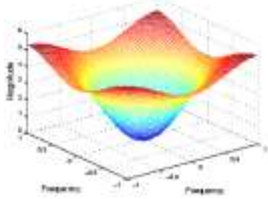
sen(12x) + sen(4y)

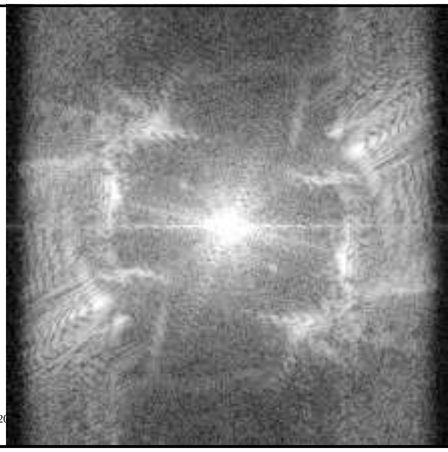


Fourier Bidimensional

- Ahora la base es:





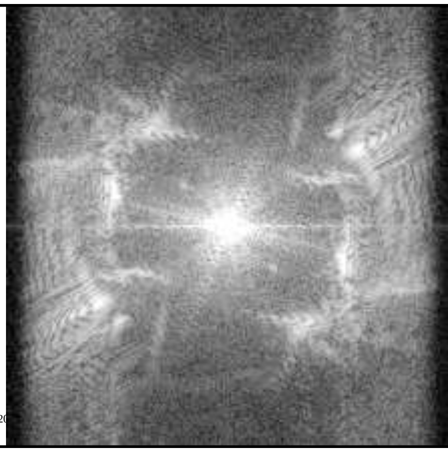


Ejemplo: Compresión 2D

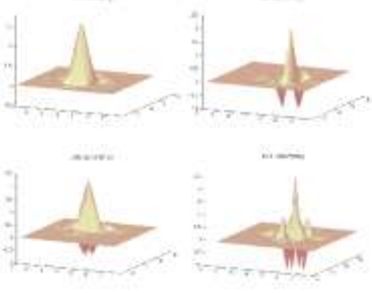
Para almacenar o transmitir.

Submuestreo,
en el espacio de la imagen.

Filtrado,
en el espacio de frecuencias.



Onditas Bidimensionales



Bibliografía recomendada

- Brigham: 2.1 a 2.3, 5.1, 5.3, 5.4, 6.1 a 6.3, 6.5
- Oppenheim, A. V. and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989, p. 611-619.
- Cooley, J. W. and J. W. Tukey, *"An Algorithm for the Machine Computation of the Complex Fourier Series,"* Mathematics of Computation, Vol. 19, April 1965, pp. 297-301.
- Duhamel, P. and M. Vetterli, *"Fast Fourier Transforms: A Tutorial Review and a State of the Art,"* Signal Processing, Vol. 19, April 1990, pp. 259-299.