

## Procesamiento digital de señales

Guía de trabajos prácticos: Unidad IV

# Transformada Discreta de Fourier

## 1. Objetivos

- Aplicar los conceptos de producto interno y transformaciones lineales al caso de la Transformada Discreta de Fourier (TDF).
- Reinterpretar el fenómeno de alias desde la perspectiva del análisis frecuencial.
- Aplicar la TDF a ejemplos sencillos y aplicaciones con señales reales.
- Comprender los conceptos de resolución frecuencial, y frecuencia máxima, y sus relaciones con parámetros temporales: período de muestreo, duración de la señal, frecuencia de muestreo.

## 2. Trabajos prácticos

Los ejercicios están marcados según su grado de dificultad. Los marcados con <sup>(\*)</sup> son de mayor complejidad que los demás. Los ejercicios marcados con <sup>(+)</sup> son optativos, los demás obligatorios.

**Ejercicio 1:** Genere una señal  $s(t) = \sin(2\pi f_1 t) + 4\sin(2\pi f_2 t)$ , con  $f_1 = 10$  Hz y  $f_2 = 20$  Hz, y obtenga su versión discreta  $s[n]$  con período de muestreo  $T = 0,001$  s en el intervalo de tiempo  $t = [0 \dots 1]$  s. A continuación:

1. Calcule la TDF  $S[k]$  de la señal  $s[n]$  y grafique el espectro de magnitud de  $S[k]$ .
2. Verifique la relación de Parseval para la TDF:

$$E_s = \sum_{n=1}^N s[n]^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |S[k]|^2 ,$$

donde  $N$  es la cantidad de muestras de  $s[n]$ .

Realice los siguientes cambios y analice los resultados obtenidos:

1. Modifique  $s[n]$  de forma tal que:

$$s[n] = \sin(2\pi f_1 t) + 4 \sin(2\pi f_2 t) + 4$$

y analice los cambios en el espectro de magnitud de  $S[k]$ .

2. Modifique las frecuencias de las señales seno de forma tal que  $f_1 = 10$  Hz y  $f_2 = 11$  Hz y analice los cambios en el espectro de magnitud de  $S[k]$ .
3. Modifique nuevamente las frecuencias de las señales seno de forma tal que  $f_1 = 10$  Hz y  $f_2 = 10,5$  Hz. ¿Qué ocurre en el espectro de magnitud de  $S[k]$ ?
4. Modifique el intervalo de tiempo de análisis de la siguiente manera  $t = [0 \dots 0,72]$  seg. y analice los cambios en la TDF.

**Ejercicio 2:** Genere: a) una señal senoidal discreta de frecuencia 2 Hz, b) una señal cuadrada periódica de frecuencia 2 Hz, y c) una señal senoidal de frecuencia 4 Hz. Para todas ellas utilice fase cero, una frecuencia de muestreo de 100 Hz, y una duración total de 1 segundo. Con estas señales realice las siguientes operaciones:

1. Verifique si son ortogonales las señales a) y b), a) y c), b) y c).
2. Calcule la TDF de las tres señales, y verifique la ortogonalidad de los pares como en el ejercicio anterior, en este dominio transformado.
3. Redefina la señal c), como una senoidal pero de frecuencia 3.5 Hz. Verifique si es ortogonal respecto a la señal a), en ambos dominios.

**Ejercicio 3:** En el desarrollo teórico de las páginas 88 y 89 del libro se verificó que no todas las exponenciales complejas de  $N$  muestras dan lugar en su extensión periódica a exponenciales complejas, y que las frecuencias discretas deben estar restringidas a  $\Omega_k = \frac{2\pi k}{N}$  con  $k = 0, \dots, N-1$  para que esto pueda realizarse. Para verificar esta propiedad, genere señales senoidales muestreadas a 10 Hz, con duración de un segundo, y de a) una frecuencia que cumpla con la ecuación, y b) otra frecuencia que no cumpla con la misma (siempre respetando el teorema de muestreo). Luego genere otras del doble de longitud, de dos maneras diferentes:

1. Concatenando dos veces la misma señal.
2. Volviendo a generar ambas señales, pero muestreándolas por 2 segundos.

Grafique, para cada señal extendida, la parte real e imaginaria (utilizando stem para mayor claridad) y verifique si cumplen con la ecuación de exponenciales complejas periódicas.

**Ejercicio 4:** Se sabe que el efecto del ángulo de fase de la transformada de Fourier tiene relación con retardos de la señal senoidal correspondiente. En particular se conoce que una señal cuya fase se modifique en forma lineal (proporcional a la frecuencia), experimentará un retardo igual a la pendiente de dicha variación (ver propiedad de retardo temporal de la transformada de Fourier). Para verificar esta propiedad:

1. Genere una señal cuadrada de frecuencia 4 Hz, muestreada a 100 Hz, durante 1 segundo.
2. Extienda esta señal al doble de su duración, agregando ceros al final de la misma.
3. Calcule la TDF, y modifique la fase con una pendiente que genere un retardo de 10 muestras. Antitransforme y verifique que la señal esté efectivamente retardada el número de muestras deseadas.
4. Genere la misma señal pero retardada 10 muestras.
5. Calcule la TDF y compárela con la que generó anteriormente.

**Ejercicio 5:** Las señales verifican que cuanto más concentrada esté su energía en cierta región del dominio temporal, más dispersa estará en el dominio frecuencial, y viceversa. Ejemplos extremos de esto son una señal senoidal, que tiene su energía distribuida a lo largo de toda la señal, pero en dominio frecuencial ésta se concentra en la frecuencia de la misma, y un delta de Dirac, que en dominio temporal tiene toda su energía concentrada en un instante, pero en dominio frecuencial contiene todas las frecuencias. Explore esta propiedad utilizando ventanas temporales, más o menos concentradas alrededor de cierto tiempo, y calculando sus respectivas transformadas de Fourier.

**Ejercicio 6:** <sup>(+)</sup> En los archivos de datos `ecg.txt`, `eeg.txt`, `emg.txt`, `presion.txt` y `respiracion.txt` se encuentran almacenados registros homónimos, y en el archivo `frecuencias.txt` se listan las frecuencias de muestreos utilizadas en cada caso para obtener las señales. Cargue los archivos mencionados y calcule las respectivas TDF. Luego grafique en una ventana los registros y en otra los espectros de magnitud de cada TDF ordenados de forma tal que el ancho de banda vaya aumentando.

**Ejercicio 7:** <sup>(\*)</sup> <sup>(+)</sup> En la Figura 1 se observa el espectro de magnitud obtenido al aplicar la FFT a una señal generada mediante la función  $g(t) = \sin(2\pi f_1 t) + 4 \sin(2\pi f_2 t)$  y luego digitalizada.

Siendo  $T$  la duración total de la señal adquirida, y  $f_m$  la frecuencia de muestreo, indique (y justifique) cuáles de los siguientes conjuntos de parámetros puede ser correcto:

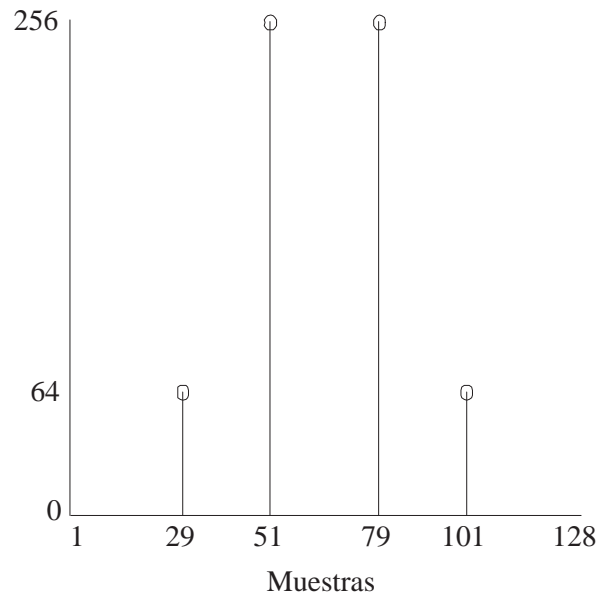


Figura 1: Espectro de magnitud de la señal para el ejercicio 7

1.  $T = 249$  ms,  $f_m = 512$ ,  $f_1 = 112$ ,  $f_2 = 200$  Hz
2.  $T = 498$  ms,  $f_m = 128$ ,  $f_1 = 56$ ,  $f_2 = 200$  Hz
3.  $T = 993$  ms,  $f_m = 128$ ,  $f_1 = 100$ ,  $f_2 = 50$  Hz
4.  $T = 498$  ms,  $f_m = 256$ ,  $f_1 = 56$ ,  $f_2 = 868$  Hz
5.  $T = 993$  ms,  $f_m = 128$ ,  $f_1 = 100$ ,  $f_2 = 78$  Hz
6.  $T = 124,5$  ms,  $f_m = 1024$ ,  $f_1 = 3872$ ,  $f_2 = 5520$  Hz

**Ejercicio 8:** La Figura 2 representa la magnitud de la FFT de una señal senoidal de 27 Hz, muestreada durante 1 s y a una frecuencia de muestreo de 50 Hz. La señal muestreada responde a la ecuación  $x(t) = 2 \sin(2\pi 27t)$ .

1. Determine la frecuencia de la señal que observa. Explique la discrepancia con frecuencia de la señal original.
2. Deduzca una ecuación para determinar cómo se genera la señal de la frecuencia observada, a partir de la frecuencia original y los parámetros del muestreo. Verifique la validez de su ecuación para otras señales, por ejemplo una de 105 Hz.
3. Determine la relación entre la magnitud observada de la transformada y la amplitud de la señal original.

$$M = (A \cdot f_m \cdot \text{tiempo\_total}) / 2$$

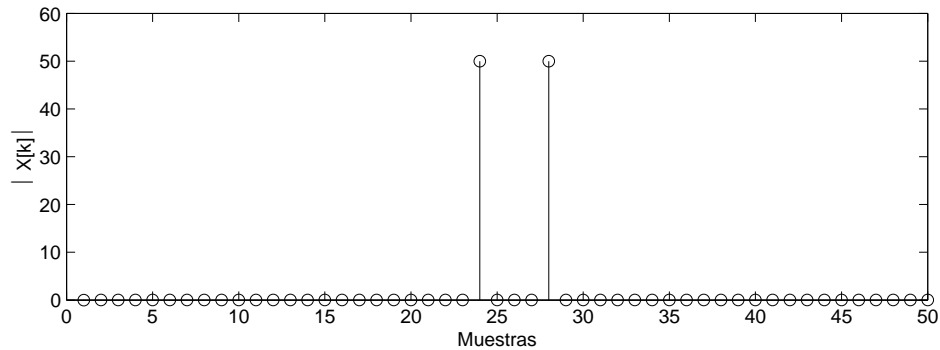


Figura 2: FFT de la señal para el ejercicio 8

**Ejercicio 9:** (\*) (+) Un método simple de interpolación consiste en agregar ceros en la TDF de la señal en cuestión y luego utilizar la TDF inversa. Investigue los detalles de implementación de este método para el caso de la señal `merval1.txt`, correspondiente al Índice Merval del último día de cada mes. El primer valor corresponde al índice del 30 de enero de 2001, el segundo al 28 de febrero de 2001, y así sucesivamente. Suponiendo que los valores se encuentran separados uniformemente a un mes, obtenga una estimación para los valores a mediados de cada mes. En el archivo `merval2.txt` se encuentran los valores tomados tanto a fines como a mediados de mes para poder comparar y obtener conclusiones.

**Ejercicio 10:** (\*) La señal que se encuentra en el archivo `necg.txt` corresponde al registro de la actividad eléctrica del corazón de un paciente. Esta señal se ha digitalizado a razón de 360 muestras por segundo. Se sabe que el registro ha sido contaminado con un ruido en la banda de 40 a 180 Hz y se necesita eliminarlo para poder realizar un diagnóstico adecuado. Utilice la TDF para filtrar la señal.

**Ejercicio 11:** (\*) (+) Se desea detectar en qué intervalos de tiempo el instrumento grabado en el archivo `nshima.txt` ha ejecutado la nota LA. La frecuencia de muestreo con que se tomó el registro es de 11025 Hz.