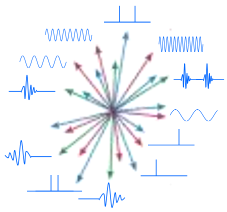
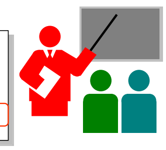
Espacios de Señales



Temas a tratar

- **Señales y vectores.**
- **La relación entre álgebra lineal y señales.**
- **Espacios vectoriales y espacios de señales.**
- Bases y transformaciones lineales.

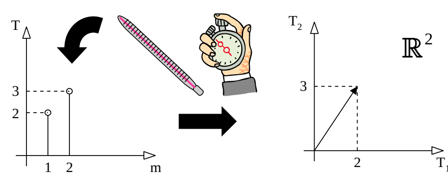
Unidad II - Señales
Señal, ruido y relación señal ruido. Definiciones. Clasificación de las señales. Caracterización de señales estocásticas. Señales y teoría de la información. Señales de tiempo discreto. Transformaciones de la variable independiente y del rango. Procesamiento de señales. Operaciones básicas de procesamiento. Cuantización e interpolación. Espacios de señales. Interpretación geométrica. Espacios normados. Norma-p. Producto interno de señales: concepto, aplicaciones. Bases y transformaciones lineales.



Introducción

- En general asociamos a las señales con "elementos aislados".
- Ahora vamos a incorporar a las señales en "marcos estructurados" como los espacios vectoriales.
- Considerando a las señales como vectores de un espacio *n*-dimensional, podemos:
  - aprovechar las propiedades de la estructura algebraica de los espacios vectoriales. podemos operar con ella
  - interpretar el procesamiento de las señales desde una perspectiva geométrica.
  - con un abordaje conceptual sencillo e intuitivo…

Experimento conceptual

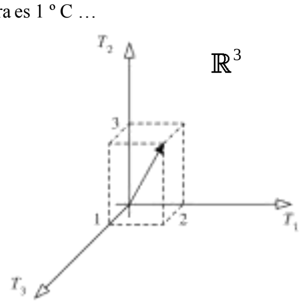


•Medimos la temperatura ambiente a intervalos de 1 minuto...

•Representamos en una gráfica en donde el eje de las ordenadas indica el tiempo y el de las abscisas la magnitud de la temperatura.

Señales y vectores...

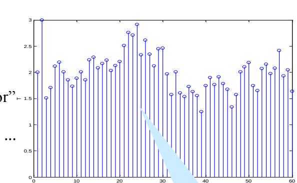
•Si volvemos a medir luego de 1 minuto y vemos que la temperatura es 1 º C …



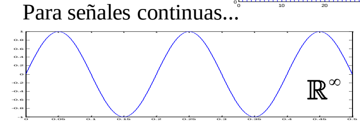
Señales y vectores...

En 1 hora ... $\mathbb{R}^{60}$

Ya no puedo representarlo gráficamente como un "vector" en el espacio "tradicional", pero el concepto es el mismo ...



Para señales continuas...



Es un solo elemento, vector o punto

una señal continuia puede verse como una señal en r(infinito) q es un punto

Señales y vectores...

- Definimos una señal **x** discreta en R^N como:

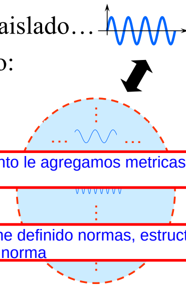
$$\mathbf{x} = [x_n]; \quad n \in \mathbb{N}; x_n \in \mathbb{R}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

- Definimos una señal **x** continua en R$^\infty$ como:

$$\mathbf{x} = [x(t)]; \quad t \in \mathbb{R}; x(t) \in \mathbb{R}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty$$

Ahora con varios elementos...

- No nos interesa un elemento aislado…
- Sino c/u en “relación” al resto:



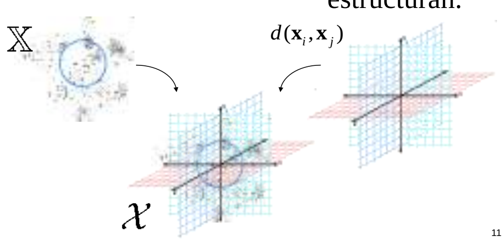
  - Conjuntos de señales
  - Espacios de señales
  - Espacios lineales o vectoriales
  - Espacios normados

cdo al conjunto le agregamos metricas

espacio q tiene definido normas, estructura geometrica y norma

Espacio

Un conjunto de “puntos” + un conjunto de relaciones que lo estructuran.



Espacios

Relaciones geométricas:
distancias, tamaños, formas,
alineaciones, ángulos, conexidad.

Otras relaciones definen
otros tipos de estructuras.

El caso más interesante es cuando
distintas estructuras interactúan
en un mismo espacio.

Tipos de espacios

Métricos, topológicos, vectoriales,
afines, euclídeos, de medida,
de probabilidad, de distribuciones, ...

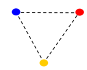
De Hilbert, de Banach, de Krein,
de Orlicz, de Sobolev,
de Schwartz, de Lebesgue,
…

Analogías entre Señales y Vectores

Normas

Norma

- Nos proporciona información acerca del "tamaño" de una señal o vector x:
  - Es un número real no negativo:
    $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$
  - Es homogénea con respecto a la escala:
    $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
  - Satisface la desigualdad triangular:
    $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$



- Hay diferentes normas pero la más empleada es la denominada norma-*p*.

Norma - *p*

- Secuencias temporales:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

- Señales continuas:

$$1 < p < \infty$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

Cuando *p* es infinito

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$$

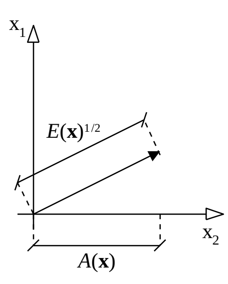
Otros nombres...

$\|\mathbf{x}\|_\infty$ Se denomina amplitud de la señal **x**

$\|\mathbf{x}\|_2^2$ Se conoce como energía de la señal **x**

$\|\mathbf{x}\|_1$ Suele llamarse acción de la señal **x**

Ejemplo: amplitud y energía



¿ Y cuando *p* es = 0 ?

determina la cantidad de elementos distintos de cero del vector. (basicamente consiste en contar

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \lim_{p \to 0} \|\mathbf{x}\|_p^p$$

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \#\{n : x_n \neq 0\}$$

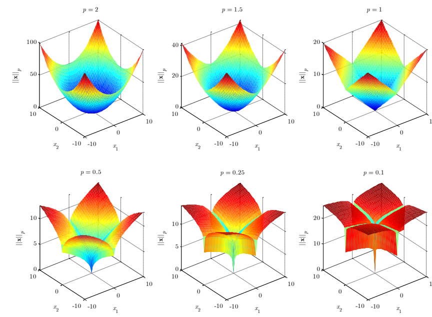
Medida de "dispersión"

¿La norma-p es la única?

- Existen muchas normas, pero esta es la más utilizada porque permite diferentes comportamientos variando p.

¿Qué ocurre cuando varío p?

Superficie de $\|\mathbf{x}\|_p$ para $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$



¿La norma-p es la única?

- Otros ejemplos:
  - Norma del Volumen Mínimo (similar a $\|\mathbf{x}\|_0$)
  - Norma de Cauchy
  - Norma Varimax
  - Otras dependiendo de la aplicación...

Otras medidas útiles:

Potencia media de una señal

$$P_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N} \left|x_n\right|^2$$

$$P_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left|x(t)\right|^2 dt$$

Otras medidas útiles:

Potencia media TOTAL de una señal

$$P_{\mathbf{x}} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N} \left|x_n\right|^2$$

$$P_{\mathbf{x}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left|x(t)\right|^2 dt$$

Otras medidas útiles:

Valor cuadrático medio (RMS):

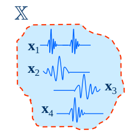
$$\sqrt{P_{\mathbf{x}}}$$

Otras: Valor medio …

Conjuntos de Señales

El matemático alemán George Cantor introdujo la Teoría de Conjuntos en siglo XIX.

Una "señal" es un "punto" o elemento de un conjunto

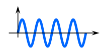


Para ello debo primero definir un conjunto:

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x};\, p\} \qquad p \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{X}$$

O el conjunto de las x, tal que p sea cierto, o p es cierto, implica que x pertenece a $\mathbb{X}$.

Ejemplo: conjunto de las **señales sinusoidales** **(1)**



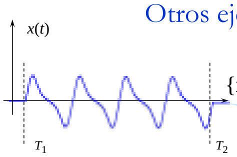
$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x};\, x(t) = \mathrm{Re}[\alpha \exp(\beta + j\omega t)]\}$$

$$\omega = 2\pi f \qquad -\infty \le t \le \infty \qquad \alpha, \beta, f \in \mathbb{R}$$

Otra forma es como solución de la ecuación diferencial:

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x};\, \frac{dx}{dt} + x = 0\}$$

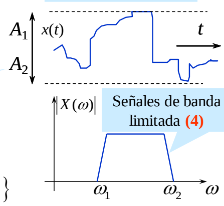
Otros ejemplos...



$\{\mathbf{x};\, x(t) = 0,\, T_1 > t \;\; v\; t > T_2\}$

Señales limitadas temporalmente **(2)**

$\{\mathbf{x};\, x(t) \le A_1 v\; x(t) \ge A_2 \}$



Señales limitadas en amplitud **(3)**

Señales de banda limitada **(4)**

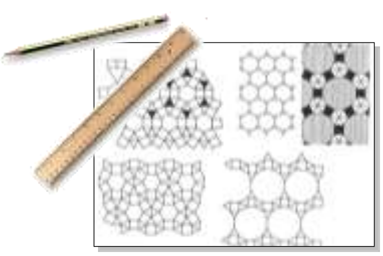
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x};\, |X(\omega)| = 0, \omega \le \omega_1, \omega \ge \omega_2\}$$

Sin embargo, ...

- Un espacio es un conjunto $\mathbb{X}$ de elementos **x** que satisfacen una condición p, pero además...
  - Se requieren otra/s propiedad/es para poder llamar al conjunto "espacio"...
  - En particular, se debe dotar al conjunto de (al menos una):
    - **Estructura geométrica** (espacio de señales).
    - **Estructura algebraica** (espacio vectorial).
    - …

Estructura Geométrica



Espacio de Señales

- Si al conjunto de señales $\mathbb{X}$ definido anteriormente le agregamos una métrica d entonces se convierte en un espacio de señales $\mathcal{X}$.
- Los espacios de señales son espacios métricos cuyos elementos son señales.

$$\mathcal{X} = \{\mathbb{X}; d\}$$

Espacio de señales

Conjunto de señales

+

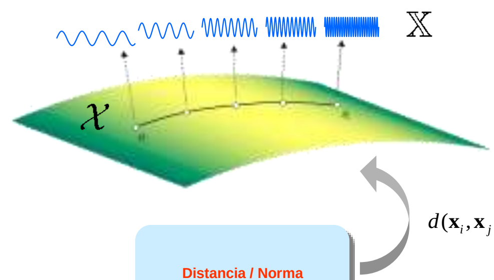
Estructura geométrica

$$\mathcal{X} = \{\mathbb{X}; d\}$$

Distancia / Norma

Procesamiento Digital de Señales

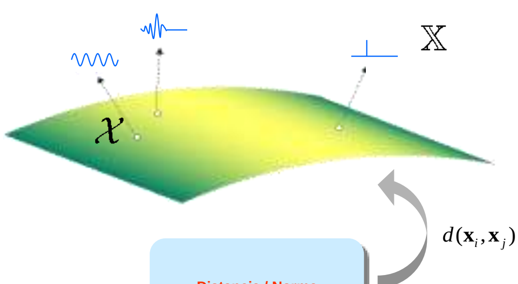
Espacio de señales



Distancia / Norma

Procesamiento Digital de Señales

Espacio de señales



Distancia / Norma

Procesamiento Digital de Señales

¿A qué distancia está ....

Procesamiento Digital de Señales

Distancia en Internet

- ¿Cómo medirían las distancias de comunicación por Internet?
- ¿Es razonable medirlas en Kms?

Procesamiento Digital de Señales

Distancia en Internet

- Mapa parcial de Internet (30%, Enero 2005, opte.org).
- Cada línea se dibuja entre dos nodos (direcciones IP).
- La longitud indica el retardo entre nodos.
- Los colores corresponden a los dominios:
  - Azul: net, ca, us
  - Verde: com, org
  - Rojo: mil, gov, edu
  - Amarillo: jp, cn, tw, au, de
  - Magenta: uk, it, pl, fr
  - Oro: br, kr, nl
  - Blanco: desconocido

Distancia en Internet

- El mundo visto desde Internet: ¿Qué pasa si modificamos las distancias teniendo en cuenta la cantidad de conexiones?

Procesamiento Digital de Señales

Distancia en habla ruidosa

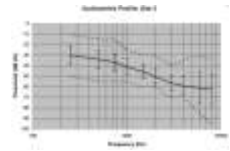


TABLA 1: Porcentaje de reconocimiento de palabras

	RUIDO BLANCO			RUIDO MURMULLO		
	-5 dB	0 dB	5 dB	-5 dB	0 dB	5 dB
PSA	84.7	94.1	90.1	78.4	88.7	95.6
WIENER	84.8	92.1	91.1	87.9	84.7	97.6
LogSTSA	92.9	96.3	98.8	82.9	99.2	97.6

- La SNR no es una buena medida de la inteligibilidad del habla, ¿Cómo la medimos entonces?

Procesamiento Digital de Señales

Distancia en habla ruidosa

- LAR
  - Diferencia entre los espectros limpio y ruidoso:

$$LAR(m)=\left[\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(\log\frac{1+r_i(m)}{1-r_i(m)}-\log\frac{1+r_j(m)}{1-r_j(m)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

- PESQ
  - Modelo de percepción auditiva:

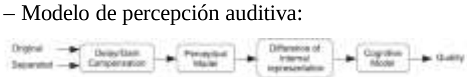


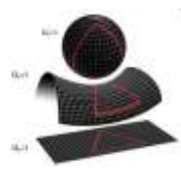
Fig. 1. Scheme of the stages in PESQ calculation.

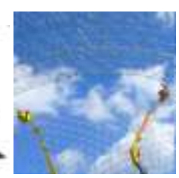
Leandro Di Persia, Diego Milone, Hugo Leonardo Rufiner, Masuzo Yanagida, *"Perceptual evaluation of blind source separation for robust speech recognition"*, Signal Processing 88 (2008) 2578– 2583.

Procesamiento Digital de Señales

Entonces …

- Diferentes relaciones, diferentes maneras de medir distancias, estructuran el espacio de diferentes formas.





Procesamiento Digital de Señales

Ejemplo: Espacios señales "equidistantes"

$$\{\, A,\ \ B,\ \ C,\ \ D,\ \ F\ \} = E$$

Definimos:

$d(P,Q)=0$, si P es igual a Q,

$d(P,Q)=1$, si P es distinto de Q.

Procesamiento Digital de Señales

Algunos bytes, señales, puntos

0000000	0111100
0001111	1011010
0110011	1100110
1010101	1101001

¿En cuántas posiciones difieren?

1011010

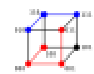
1010101

0001111

Difieren todos exactamente en cuatro posiciones → equidistantes

Distancia de Hamming

La distancia de Hamming (1915-1998) entre dos "palabras" es el número de posiciones en que difieren.

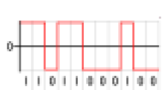


Aplicación: Codificación señales "binarias"

100 → 0001111

010 → 0110011

001 → 1010101



Ocho "puntos" para codificar las "señales" de 3 bits

000 100
010 001
110 101
011 111

Codificación

100 → 0001111

010 → 0110011

001 → 1010101

000 → 0000000

Codificación

100 →	0001111	110 →	0111100
010 →	0110011		
001 →	1010101		
000 →	0000000		

Codificación

100 →	0001111	110 →	0111100
010 →	0110011	101 →	1011010
001 →	1010101	011 →	1100110
000 →	0000000	111 →	1101001

Corrección de errores y borrones

100 - 0001111	110 - 0111100
010 - 0110011	101 - 1011010
001 - 1010101	011 - 1100110
000 - 0000000	111 - 1101001

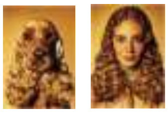
¿1X00010?

1100110

011

Distancia

- La distancia es un concepto muy importante asociado a un espacio.
- Nos permite dar sentido geométrico al espacio a través de una “métrica”.
- **Significados:** “error” o “diferencia”, “disimilitud” o “grado de aproximación” entre dos señales.



Distancia *vs* Norma

- Una métrica puede derivarse a partir de una norma:

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

Pueden existir métricas que no deriven de normas

- La norma se refiere a un solo elemento, mientras que la distancia a dos (norma ≡ distancia al origen).

Distancia: Propiedades

1) Es una función de dos puntos *x*, *y* con valor real positivo:

$$d(x,y)\geq 0 \wedge d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$$

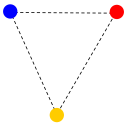
?

2) Es simétrica:

$$d(x,y)=d(y,x)$$

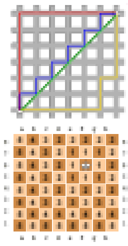
3) Cumple con la desigualdad del triángulo:

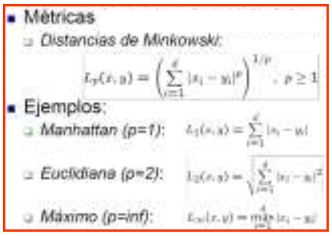
$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$



Distancias definida por la norma-*p*

- Como vimos una métrica se puede definir a partir de una norma, por ejemplo la norma-*p*: $d(x,y)=\|x-y\|_p$





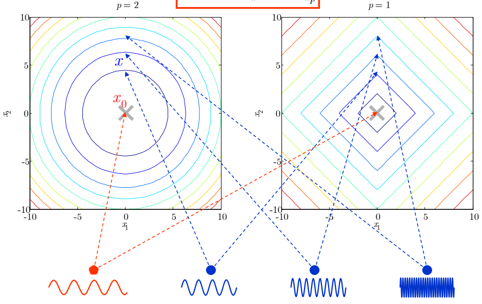
- Métricas
  - *Distancias de Minkowski:*

$$L_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{d}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}, \quad p\geq 1$$

- Ejemplos:
  - *Manhattan (p=1):* $L_1(x,y)=\sum_{i=1}^{d}|x_i-y_i|$
  - *Euclidiana (p=2):* $L_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{d}|x_i-y_i|^2}$
  - *Máximo (p=inf):* $L_\infty(x,y)=\max_{i=1}^{d}|x_i-y_i|$

¿Qué ocurre cuando varío *p*?

$$\boxed{d(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_p}$$



Otras distancias…

Distancia de Levenshtein (distancia de edición)

- Distancia entre palabras:
  - Número mínimo de operaciones requeridas para transformar una cadena de caracteres en otra.
  - Operaciones: inserción, eliminación o sustitución de un carácter.
- Es útil en programas que determinan cuán similares son dos cadenas de caracteres, como es el caso de los correctores de ortografía.

Otras distancias…

Distancia de Levenshtein (distancia de edición)

- Ejemplo: la distancia de Levenshtein entre "kitten" y "sitting" es de 3 porque se necesitan al menos tres ediciones elementales para cambiar una en la otra:
  - kitten → sitten (sustitución de 'k' por 's')
  - sitten → sittin (sustitución de 'e' por 'i')
  - sittin → sitting (inserción de 'g' al final)
- Generalización de la distancia de Hamming, que se usa para cadenas de la misma longitud y solo considera como operación la substitución.

Vladimir Levenshtein, Rusia 1965.

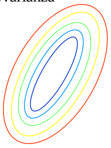
Otras distancias…

Distancia de Mahalanobis:

$$d(x,y)=\sqrt{(x-y)^T \underbrace{C^{-1}}_{\text{matriz de covarianza}}(x-y)}$$

Toma en cuenta la estadística de los datos

Prasanta Chandra Mahalanobis, India 1936.



Otras distancias…

Distancia de Mahalanobis:

$$d(x,y)=\sqrt{(x-y)^T C^{-1}(x-y)}$$

- Ejemplo:
  - Un pescador quiere medir la similitud entre salmones para vender los grandes más caros.
  - Para cada salmón mide su anchura y su longitud $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ (diferencias de escala).
  - Si usa la distancia Euclídea el ancho casi no cuenta.
  - Entonces debe incorporar la estadística de los datos: las variables con menos varianza tendrán más importancia que las de mayor varianza (σ_{11} y σ_{22} en C).
  - Y debe tener en cuenta también que la longitud y anchura no son independientes (σ_{12} y σ_{21} en C).

Otras distancias…

- Distancia de Minkowski con pesos.
- Distancia de Hamming (ya vista).
- ….

Ejemplos de espacios de señales

- Espacio de secuencias temporales reales:

$$\mathbb{X}=\{x[n]\};\quad n\in\mathbb{N};\quad x[n]\in\mathbb{R};\quad 1\le n\le N$$

- Espacio de señales de tiempo continuo reales:

$$\mathbb{X}=\{x(t)\};\quad t\in\mathbb{R};\quad x(t)\in\mathbb{R};\quad -\infty\le t\le\infty$$

  - Ambos suelen usar la métrica euclideana:

$$d(x,y)=\|x-y\|_2$$

Analogías entre Señales y Vectores

Producto Interno

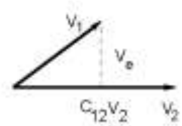
Producto interno

Otra medida de

similitud

entre señales

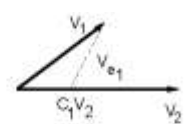
Componente de un vector en otro

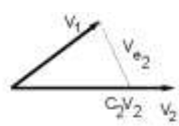


- Proyección de $\mathbf{v}_1$ sobre $\mathbf{v}_2$
- Menor error de modo que:

$$\mathbf{v}_1 = c_{12}\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_e$$

Otras alternativas podrían ser





Pero no cumplen la condición de error mínimo

¿Cómo calculamos c_{12}?

La componente de la componente de $\mathbf{v}_1$ a lo largo de $\mathbf{v}_2$ será:

$$c_{12}\,|\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1|\cos(\theta)$$

¿Cómo calculamos c_{12}?

La componente de la componente de $\mathbf{v}_1$ a lo largo de $\mathbf{v}_2$ será:

$$c_{12}\,|\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1|\cos(\theta)$$

Además, sabemos que: por producto interno

$$<\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2> = |\mathbf{v}_1|\,|\mathbf{v}_2|\cos(\theta)$$

¿Cómo calculamos c_{12}?

Ahora podemos escribir:

$$c_{12} = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}$$

Procesamiento Digital de Señales

c_{12} mide el ***parecido*** entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$

Procesamiento Digital de Señales

c_{12} mide el ***parecido*** entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$

Si $\mathbf{v}_2$ tiene norma unitaria:

$$\boxed{c_{12} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}$$

Procesamiento Digital de Señales

Producto interno en *¿señales continuas?*

Procesamiento Digital de Señales

Producto interno …

- El concepto de proyección y ortogonalidad de vectores se puede extender a las señales.
- Se considerarán dos señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ donde se se desea aproximar $f_1(t)$ en términos de $f_2(t)$ en un cierto intervalo (t_1, t_2)

Procesamiento Digital de Señales

Se desea aproximar f_1 mediante f_2

$f_1(t) \approx C_{12}\, f_2(t)$ en $(t_1 < t < t_2)$.

Se define la función error $f_e(t)$:

$f_e(t) = f_1(t) - C_{12}\, f_2(t)$.

Debemos encontrar un valor de C_{12} que minimice el error entre las dos funciones

Procesamiento Digital de Señales

EM= error medio, el problema es q los errores por mayor y menor se pueden anular, lo que sirve mas es el error cuadratico medio porque al aplicar cuadrado pesan todos los errores(no hay errore negativos

$$EM = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \left[f_1(t) - C_{12} f_2(t) \right] dt}{t_2 - t_1}$$

$$ECM = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_e^2(t)\, dt}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{\partial ECM}{\partial C_{12}} = 0$$

producto interno entre señales

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} (f_2(t))^2\, dt}$$

$$\frac{\partial ECM}{\partial C_{12}} = 0$$

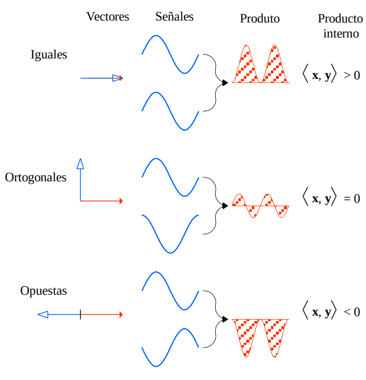
si es complejo se agregan los conjugados

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \overline{f_2(t)}\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t) \overline{f_2(t)}\, dt}$$

Si nuestra señal puede tomar valores complejos

Ortogonalidad de Funciones

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \overline{f_2(t)}\, dt = 0$$



Transformaciones lineales...

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

furier

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$$

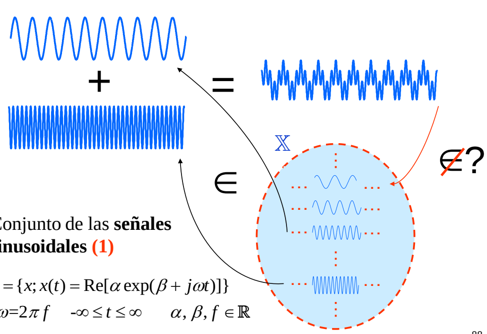
Otras operaciones lineales...

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$ combolucion

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t+\tau) d\tau$$ correlacion

Estructura Algebraica

¿Qué pasa si sumo dos señales de $\mathbb{X}$?



Conjunto de las **señales sinusoidales** **(1)**

$$\mathbb{X} = \{x; x(t) = \mathrm{Re}[\alpha \exp(\beta + j\omega t)]\}$$

$$\omega = 2\pi f \quad -\infty \le t \le \infty \quad \alpha, \beta, f \in \mathbb{R}$$

Campo Escalar

si cumple con las siguientes cosas

- $\mathbb{K}$ es un campo escalar (un conjunto)
  - Adición $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$
  - Producto $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$
  - Neutro aditivo: 0
  - Neutro multiplicativo: 1
- Ejemplos: $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Espacio Lineal (Vectorial)

- Conjunto para el que están definidas las operaciones binarias (cerradas) de:
  - Multiplicación de cualquier elemento por un escalar
  - Adición entre cualesquiera de sus elementos
- Estas operaciones son conmutativas, asociativas y distributivas.
- Poseen elemento neutro y cancelativo.

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{S}; \mathbb{K}; +; \cdot\}$$

Espacio Lineal

- A los elementos de los espacios lineales los llamamos vectores y podemos referirnos al espacio como espacio vectorial.

(1) no es un espacio vectorial.

Espacios Normados

- Son aquellos espacios vectoriales en los que todos sus elementos poseen norma finita.

- Ejemplos:
  - Los subconjuntos de señales que poseen energía finita o acción finita son espacios normados:

$$L_1(\mathbb{R}) \quad L_2(\mathbb{R}) \quad \ell_1(\mathbb{Z}) \quad \ell_2(\mathbb{Z})$$

Espacios Normados

- Ejemplos:

$$L_1(\mathbb{R}) = \left\{ x;\ \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty \right\};\quad t \in \mathbb{R};\quad x(t) \in \mathbb{R},\quad -\infty \le t \le \infty$$

$$L_2(\mathbb{R}) = \left\{ x;\ \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty \right\};\quad t \in \mathbb{R};\quad x(t) \in \mathbb{R};\quad -\infty \le t \le \infty$$

$$\ell_1(\mathbb{R}) = \left\{ x;\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \right\};\quad n \in \mathbb{N};\quad x[n] \in \mathbb{R};\quad -\infty \le n \le \infty$$

$$\ell_2(\mathbb{R}) = \left\{ x;\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \right\};\quad n \in \mathbb{N};\quad x[n] \in \mathbb{R};\quad -\infty \le n \le \infty$$

(pueden definirse también en $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Z}$):

Espacios con Producto Interno

- Debido a la importancia del producto interno para comparar señales aparece este tipo particular de espacios.
- Un espacio con producto interno:

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = < \mathbf{x}, \mathbf{y} >,$$

es un espacio vectorial con un producto interno definido en él.

Espacios con Producto Interno

- Al definir el producto interno se obtiene también una norma y una métrica para el espacio:

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

Espacio Euclídeo

- Es el espacio matemático *n*-dimensional usual, una generalización de los espacios de 2 y 3 dimensiones estudiados por Euclides.
- Estructuralmente es:
  - un espacio vectorial normado de dimensión finita sobre los reales
  - la norma es la asociada al producto escalar ordinario (norma 2).
- Se denota como: $\mathbb{R}^N$

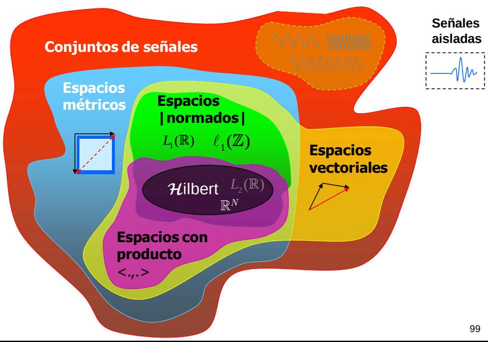
Euclides
(300 a.C, Grecia)

Espacios de Hilbert

- $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert si es completo con respecto a la norma generada por $< \mathbf{x}, \mathbf{x} >$.
- Completo significa que no tiene "agujeros".
- Constituye una generalización del concepto de espacio euclídeo.
- Permite extender nociones de espacios de dimensión finita a los de dimensión infinita.

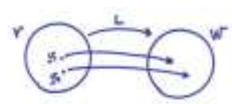
David Hilbert
(1862-1943, Alemania)

Conjuntos, espacios y señales …



Procesamiento Digital de Señales

Bases y transformaciones



Próxima clase ….

Procesamiento Digital de Señales

Bibliografía

- Mertins, *"Signal Analysis",* John Wiley & Sons
- Franks, "*Teoría de la señal"*, Reverté.
- De Coulon, "*Signal Theory and Processing"*, Artech-House.
- Lathi, "*Modern Digital and Analog Communication Systems"*, Holt, Rinehart & Winston.
- Citas completas y repaso en:
  - Milone, Rufiner, Acevedo, Di Persia, Torres, *"Introducción a las señales y los sistemas discretos"*, EDUNER (Cap. 2).