UNL - FICH - Departamento de Informática - Ingeniería Informática

Procesamiento digital de señales

Guía de trabajos prácticos: Unidad VI

# Convolución y Transformada $Z$

## 1. Objetivos

- Entender el concepto de convolución lineal en tiempo discreto.
- Comprender la relación entre la convolución circular y la TDF
- Utilizar la Transformada Z como herramienta para obtener la expresión de tiempo discreto de un sistema a partir de la ecuación diferencial que rige su dinámica.
- Obtener la respuesta en frecuencia de sistemas discretos.
- Analizar las limitaciones de las transformaciones conformes.

## 2. Trabajos prácticos

### 2.1. Convolución

**Ejercicio 1**: Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ y muestre que cuando la entrada $x[n]$ es una secuencia periódica con período $N$, la salida $y[n]$ también es periódica con el mismo período. Puede tomar la respuesta al impulso de alguno de los sistemas LTI de la guía anterior y convolucionarlo con una señal periódica. Grafique la señal de entrada y la salida.

**Ejercicio 2**: Verifique las condiciones de aplicabilidad para la propiedad:

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{x}\}\mathcal{F}\{\mathbf{y}\}\}$$

utilizando señales de $N$ muestras y comparando los resultados de la convolución calculada mediante:

1. la sumatoria de convolución con ciclos `for`,

2. la función `conv`,
3. la función `filter`,
4. las funciones `fft` e `ifft` utilizadas directamente como lo indica la propiedad,
5. las funciones `fft` e `ifft`, pero agregando $N-1$ ceros tanto a **x** como a **y**.

La función `Y = filter(B,A,X)` implementa la ecuación en diferencias, para los coeficientes dados en los vectores `A` y `B` y la señal de entrada `X`, según:

```
a(1)*y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + ... - a(2)*y(n-1) - ...
```

A partir de esto, determine los valores a ingresar en los vectores `A` y `B` para obtener la salida esperada.

Se sugiere generar una gráfica del resultado del lado izquierdo de la igualdad, otra del lado derecho y luego variar las cinco maneras de cálculo actualizando las gráficas. Analice los resultados obtenidos.

**Ejercicio 3**: Considere dos sistemas LTI conectados en cascada (Figura 1), con respuestas al impulso dadas por $h_A[n] = \sin(8n)$ y $h_B[n] = a^n$, donde $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$ y $0 \leq n \leq N-1$, con $N$ el número de muestras distintas de cero. Obtenga N muestras de las respuestas al impulso, $h_A$ y $h_B$, según las definiciones dadas, y determine la salida $y[n]$ para una entrada $x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$, siendo $\delta[n]$ es la función de impulso unitario. Luego invierta el orden de conexión de los sistemas y vuelva a calcular la salida. Compare con la salida obtenida originalmente.

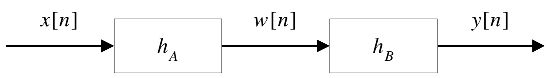


Figura 1: Sistemas en cascada.

## 2.2. Transformada Z

**Ejercicio 1**: Aplicando la Transformada Z, y utilizando la propiedad de desplazamiento en el tiempo, determine la función de transferencia $H(z)$ de los siguientes sistemas LTI causales:

1. $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$
2. $y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$
3. $y[n] = 7x[n] + 2y[n-1] - 6y[n-2]$

4. $y[n] = \sum_{k=0}^{7} 2^{-k} x[n-k]$

**Ejercicio 2**: Encuentre la respuesta en frecuencia de los sistemas anteriores suponiendo una frecuencia de muestreo de 10kHz. Tenga en cuenta la relación entre la Transformada Z y la Transformada de Fourier.

**Ejercicio 3**: Considere el sistema

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,2z^{-1})}$$

1. Dibuje el diagrama de polos y ceros. ¿Es estable el sistema?
2. Determine la respuesta al impulso del sistema.

Para ello, examine las opciones de los comandos **zplane** y **roots**.

**Ejercicio 4**: Considere el sistema continuo

$$H(s) = \frac{12500s}{44s^2 + 60625s + 625 \cdot 10^4}$$

y obtenga la función de transferencia $H(z)$ del sistema discreto correspondiente, mediante la utilización de las transformaciones conformes de Euler y Bilineal. Para ello:

1. Determine la frecuencia de corte del sistema continuo (frecuencia donde la respuesta cae 3 dB respecto al valor máximo) y utilice, para aplicar las transformaciones conformes, una frecuencia de muestreo cuatro veces superior a ésta.
2. Analice la respuesta en frecuencia de los dos sistemas discretos obtenidos y compárelas con la del sistema continuo. Determine si la frecuencia de muestreo empleada permite obtener la respuesta esperada mediante ambas transformaciones conformes.