Transformada Wavelet Diádica

por Leandro Di Persia

Introducción

- TWD → representación multirresolución de una señal
- Objetivo → Analizar lo que sucede en diferentes instantes Y en diferentes resoluciones A LA VEZ
- Para ello se realiza una discretización particular del TIEMPO y la ESCALA

Repaso

- Transformada wavelet contínua:

$$Wf(u,s) = \left\langle f(t), \psi_{u,s}(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

- Compara con una base altamente redundante
- Fórmula de reconstrucción

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Wf(u,s) \psi_{u,s}(t) du \frac{ds}{s^2}$$

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \widehat{\psi}(\omega) \right|^2}{\omega} d\omega$$

Transformada wavelet discreta

- Se computa en valores discretos de la escala

$$\psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}}\psi\left(\frac{n}{a^j}\right), \quad 2 \leq a^j \leq \frac{N}{K}$$

donde K es el soporte de la wavelet

- La fórmula se escribe como una convolución:

$$Wf\left[n, a^j\right] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m]\psi_j^*[m-n] = f[n] \otimes \psi_j^*[-n]$$

- Esta no es una representación completa de la señal, ya que se ha truncado en una escala máxima

TWD: función de escala

- Para obtener una representación completa se necesita la información de bajas frecuencias correspondientes a las escalas mayores
- Esto se logra mediante una función de escala $\phi(t)$
- A partir de esta se obtienen las componentes de bajas frecuencias como:

$$\phi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}}\phi\left(\frac{n}{a^j}\right)$$

$$Lf\left[n, a^j\right] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m]\phi_j^*[m-n] = f[n] \otimes \phi_j^*[-n]$$

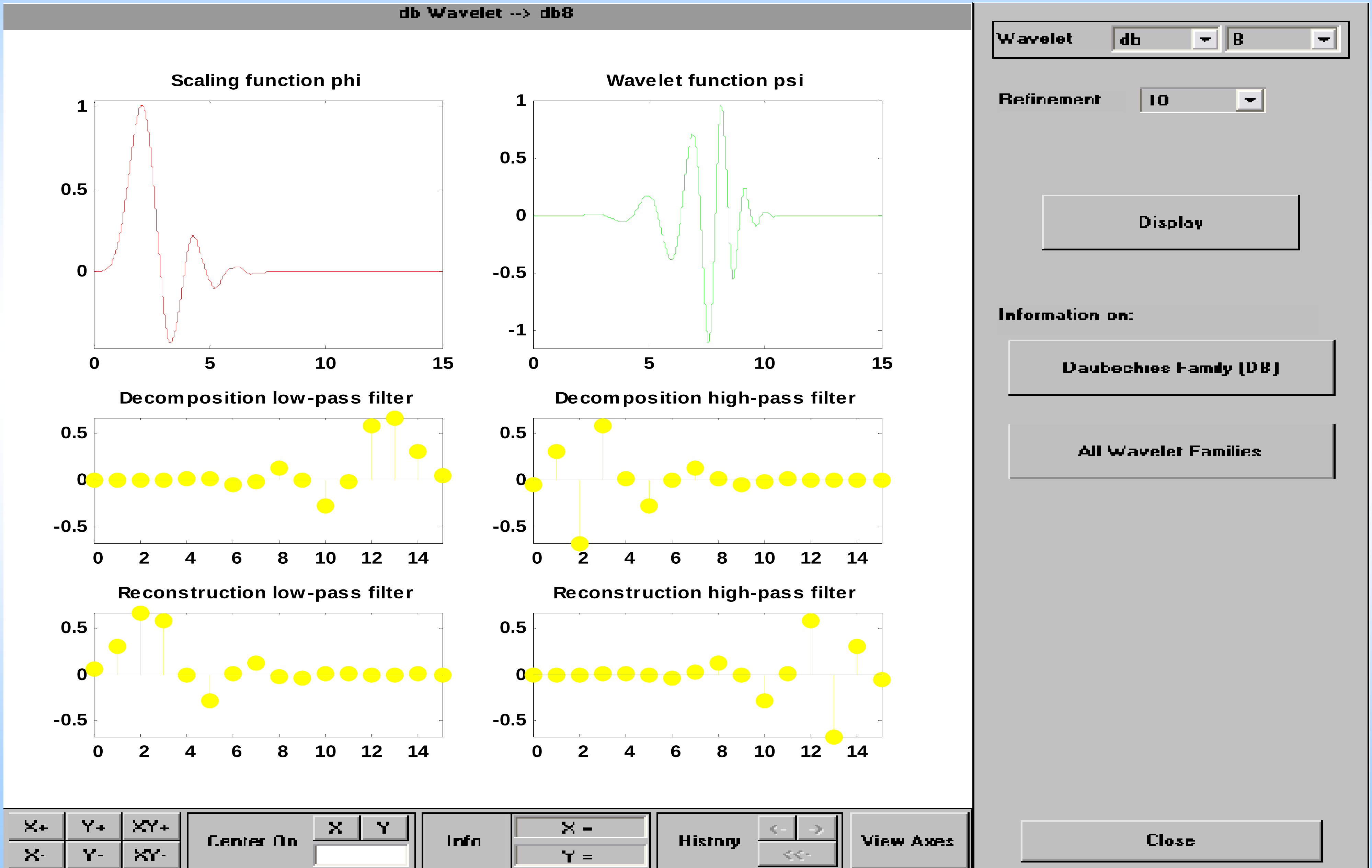
TWD: reconstrucción

- Con la descomposición con la función wavelet y la función de escala, se obtiene una representación completa
- La formula de reconstrucción es:

$$f[n] = \frac{\log_e a}{C_\psi} \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{a^j} \sum_{m=0}^{N-1} Wf\left[m, a^j\right] \psi_j [n-m]$$

$$+ \frac{1}{C_\psi a^j} \sum_{m=0}^{N-1} Lf\left[m, a^j\right] \phi_j [n-m]$$

Función Wavelet y de Escala



Transformada Wavelet Discreta

- Hasta aquí sólo se ha discretizado la escala
- Esto genera altisima redundancia
- Se suele tambien discretizar el dominio temporal
- Para esto la wavelet se modifica como sigue:

$$\psi_{j,k}[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{n - k a^j u_0}{a^j}\right)$$

- Esto genera un muestreo en intervalos $a^j u_0$

Transformada wavelet discreta

- Con esto se logra una representación menos redundante
- Desventaja: se pierde la Invarianza ante desplazamientos temporales!!!
- Esto quiere decir que la TWD calculada así para una señal que haya sido desplazada dará valores DIFERENTES
- Para resolverlo se recurre a la TW diádica con a=2 y muestreo en el tiempo en intervalos de 2^j → ANALISIS MULTIRRESOLUCIÓN

Análisis multirresolución

- Una secuencia de subespacios $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es una "aproximación multirresolución" si:

$$\forall j,k\in\mathbb{Z},\quad f(t)\in V_j \Leftrightarrow f(t-2^j k)\in V_j$$

$$\forall j\in\mathbb{Z},\quad V_{j+1}\subset V_j$$

$$\forall j\in Z,\quad f(t)\in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right)\in V_{j+1}$$

$$\lim_{j\to+\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$$

$$\lim_{j\to-\infty} V_j = Clausura\left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j\right) = L^2(\mathbb{R})$$

Análisis multirresolución

- Además, existe una función θ tal que

  $\{\theta(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base para V_0

- Utilizando ésta se construye una base para cada V_j:

$$\hat{\phi}(\omega)=\frac{\hat{\theta}(\omega)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\hat{\theta}(\omega+2k\pi)\right|^2\right)^2}$$

$$\phi_{j,n}(t)=\frac{1}{\sqrt{2^j}}\phi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right)$$

$$\Rightarrow\left\{\phi_{j,n}(t)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$ es una base para V_j

Ej. de Aproximación multirresolución:

- Compuesto por funciones constantes por tramo
- V_j es el conjunto de todas las g(t) en L^2 que son constantes en el intervalo $[n2^j,(n+1)2^j)$ con n entero
- La aproximación de f(t) en escala 2^j (resolución 2^{-j}) es la función continua por trozos en intervalos 2^j más cercana a ella.

Proyección en V_j

- Usando la base calculada, la proyección de f en V_j se puede obtener como:

$$P_{V_j} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\langle f, \phi_{j,n} \right\rangle \phi_{j,n}$$

- Se define la *aproximación* en escala 2^j como:

$$a_j[n] = \left\langle f, \phi_{j,n} \right\rangle$$

- Asociado con la función de escala se define un *filtro conjugado espejo* como:

$$h[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle$$

Proyecciones en subespacios

- Como se vio, $V_j \subset V_{j-1}$
- Sea el complemento ortogonal de V_j tal que:

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j$$

- Entonces se puede escribir:

$$P_{V_{j-1}} f = P_{V_j} f + P_{W_j} f$$

- Para poder calcular esto se necesita calcular la proyección sobre el complemento ortogonal
- Y para esto, se necesita una BASE para W_j

Base para W_j

- Dada una función wavelet cuya TF es:

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

con $\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{-i\omega}\hat{h}^{*}(\omega+\pi)$

- Se obtienen "atomos tiempo-escala" por escalado y desplazamiento:

$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right)$$

- El conjunto $\left\{\psi_{j,n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una BASE para W_j

Filtro g

- En forma similar a la función de escala, la función wavelet tiene asociado un *filtro conjugado espejo*

$$g[n]=\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right),\psi(t-n)\right\rangle$$

- Sus coeficientes se pueden calcular a partir de los del h asociado a la función de escala

$$g[n]=(-1)^{1-n}\,h(1-n)$$

Proyección en W_j - Detalle

- Usando la base para W_j se puede escribir la proyección de una f como:

$$P_{W_j} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle f, \psi_{j,n} \right\rangle \psi_{j,n}$$

- Se define el *detalle* en la escala 2^j como:

$$d[n] = \left\langle f, \psi_{j,n} \right\rangle$$

Algoritmo para la TW diadica

- A partir de los filtros h y g se pueden verificar las siguientes ecuaciones:

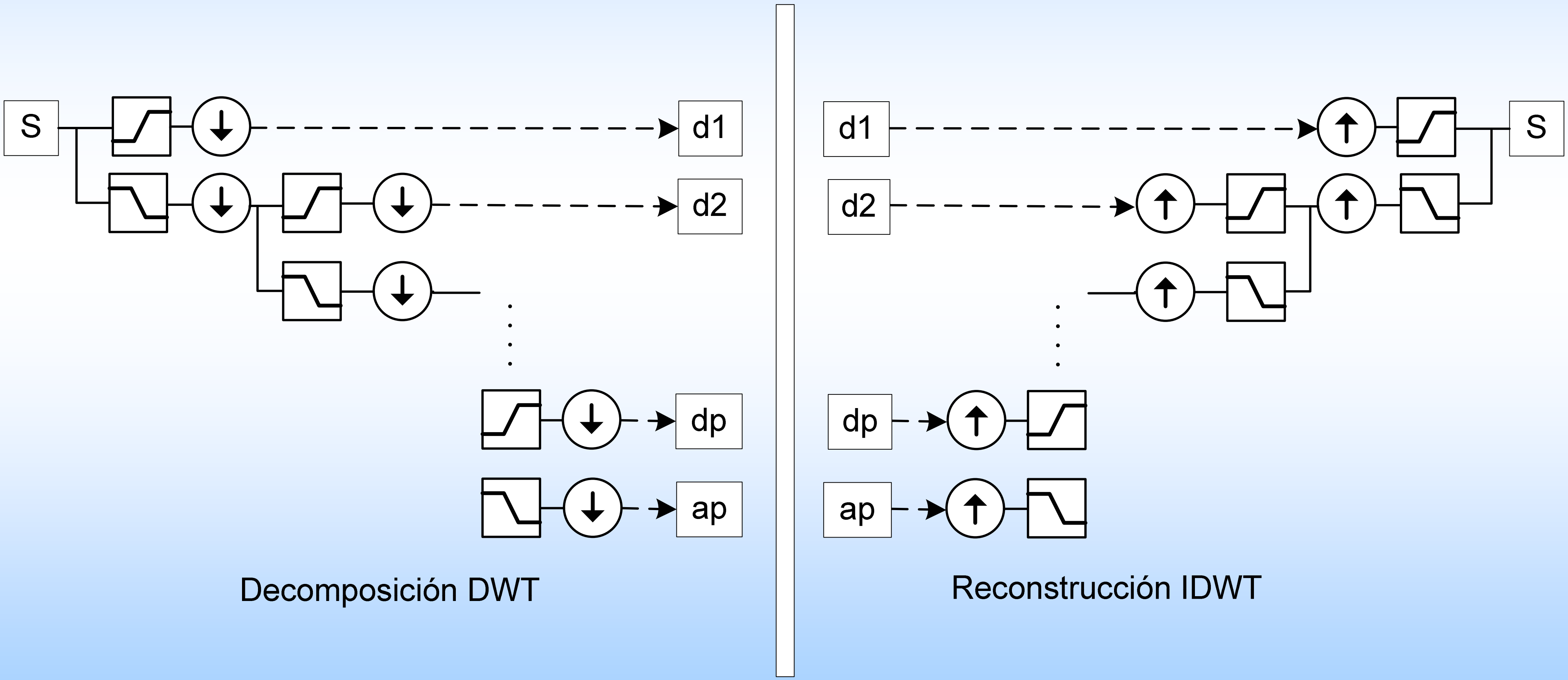
$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-2p]a_j[n]$$

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-2p]a_j[n]$$

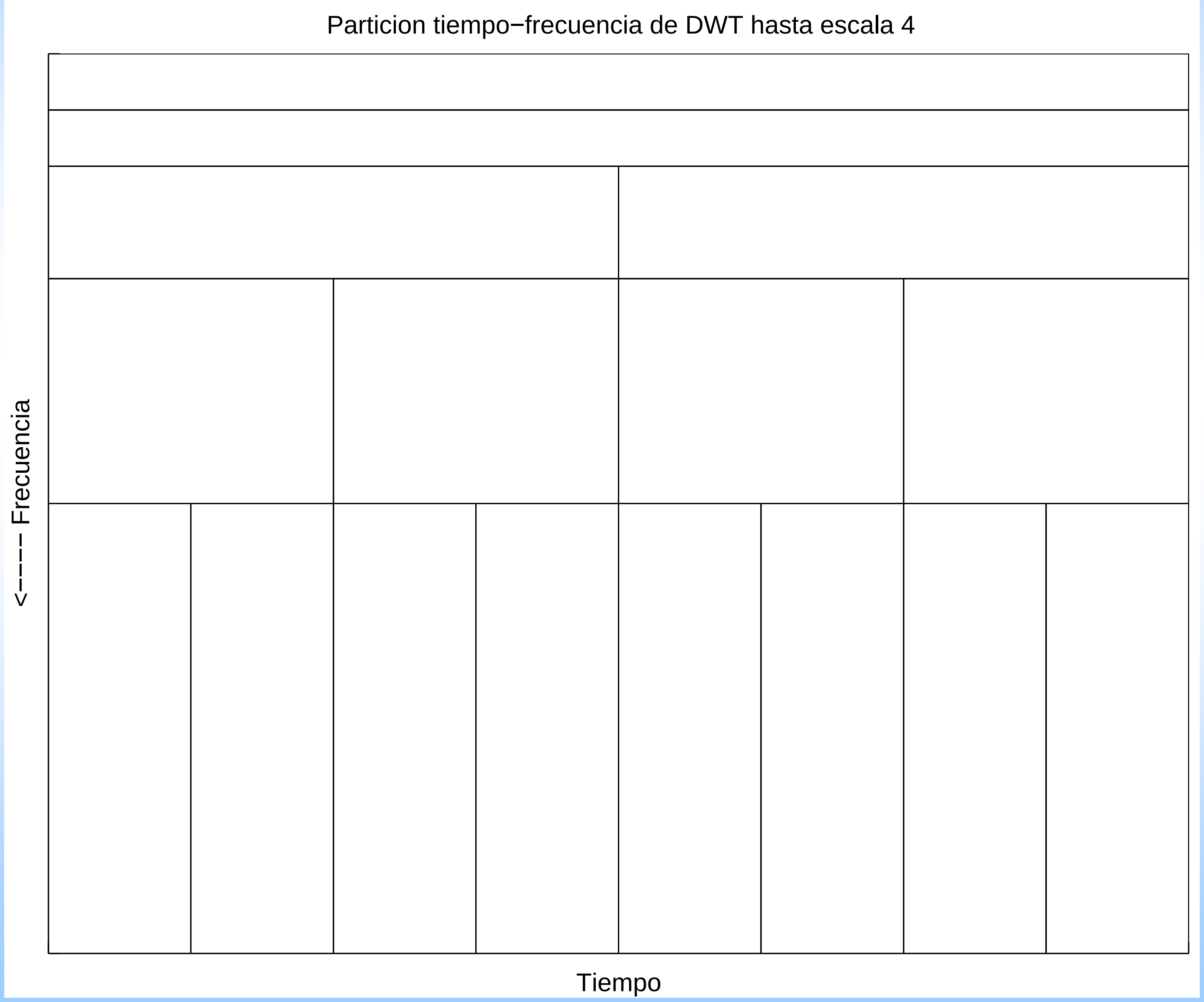
y para la reconstrucción

$$a_j[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[p-2n]a_{j+1}[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[p-2n]d_{j+1}[n]$$

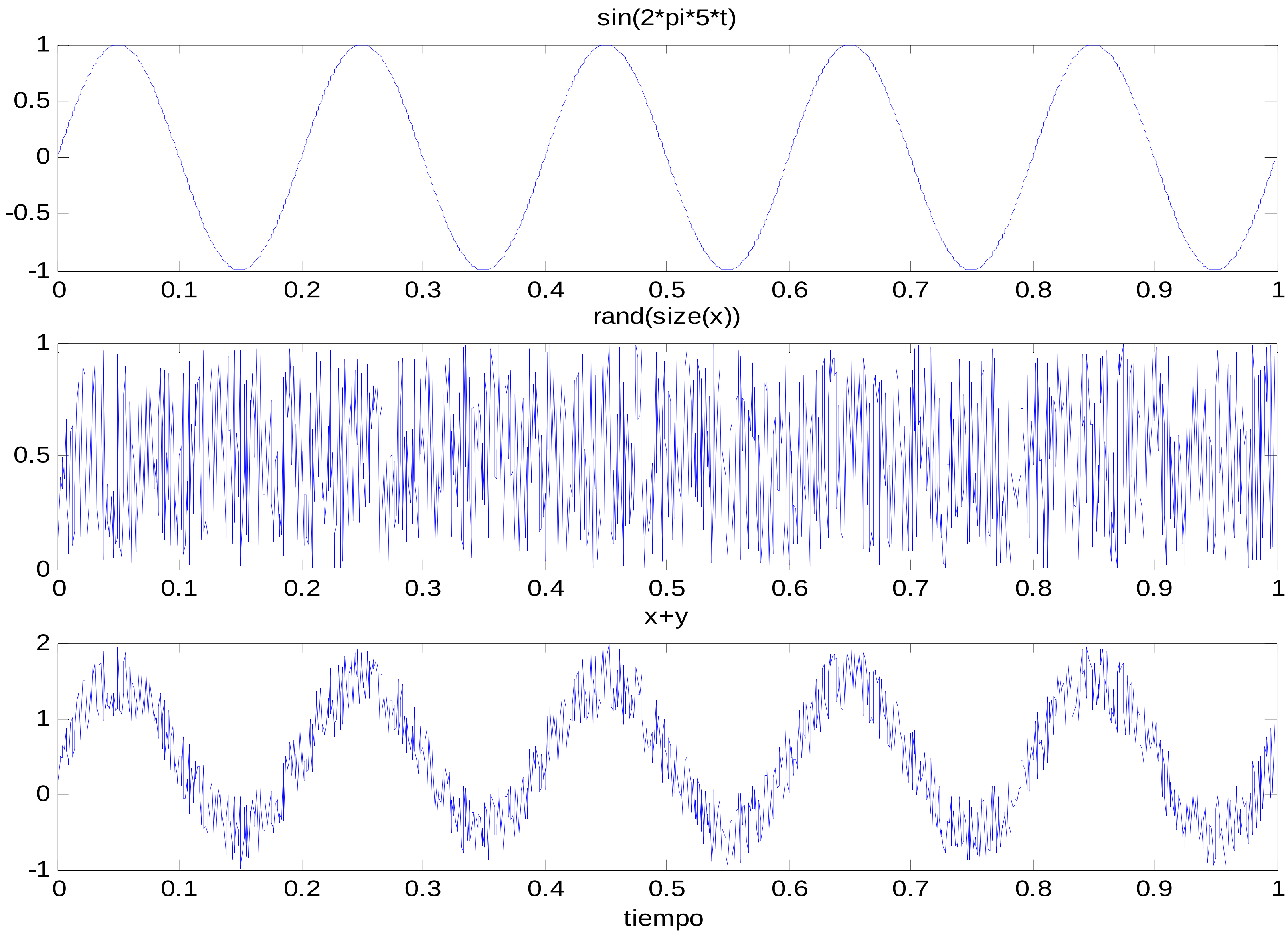
Algoritmo para TW diádica



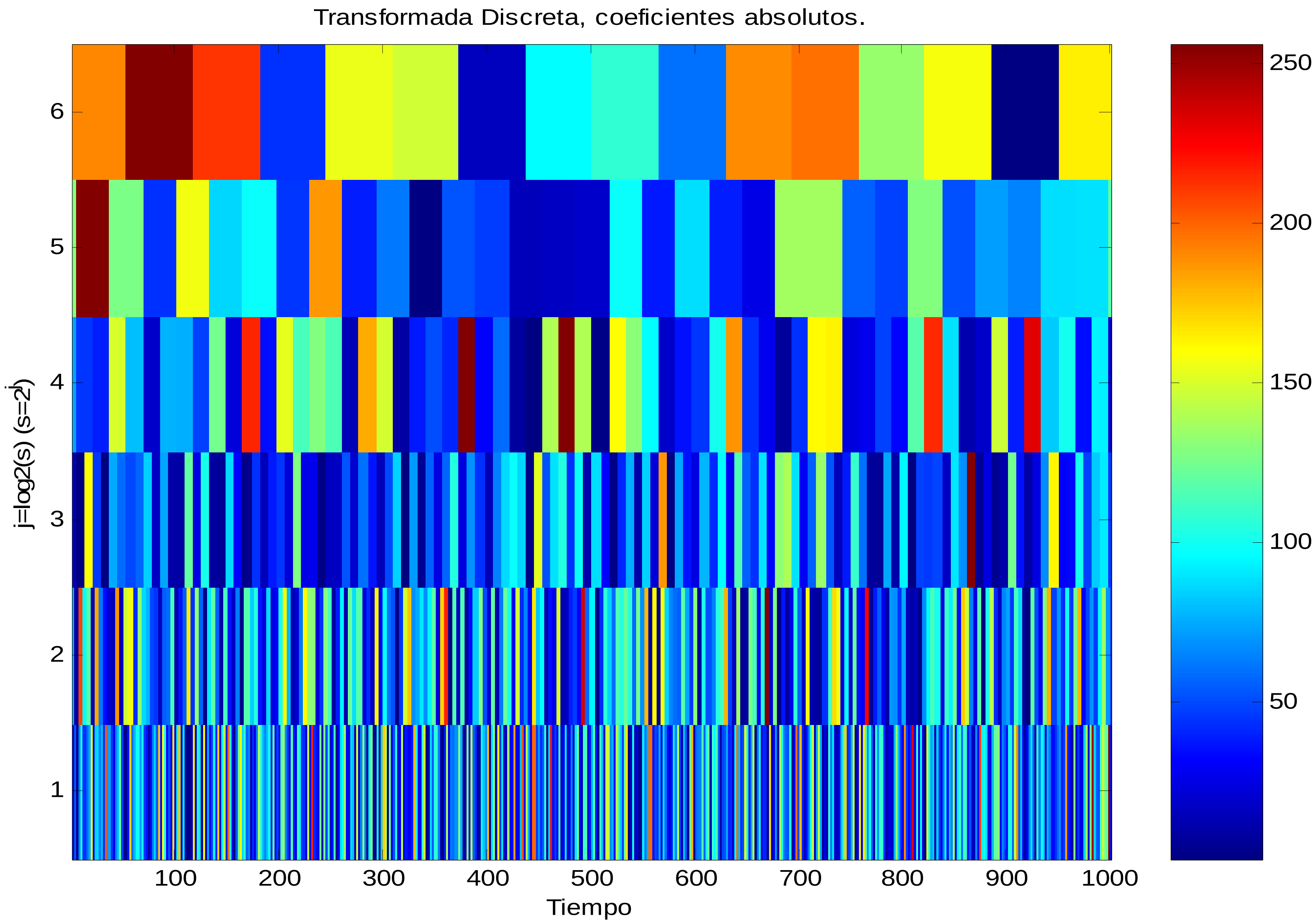
Cuadrícula tiempo-frecuencia



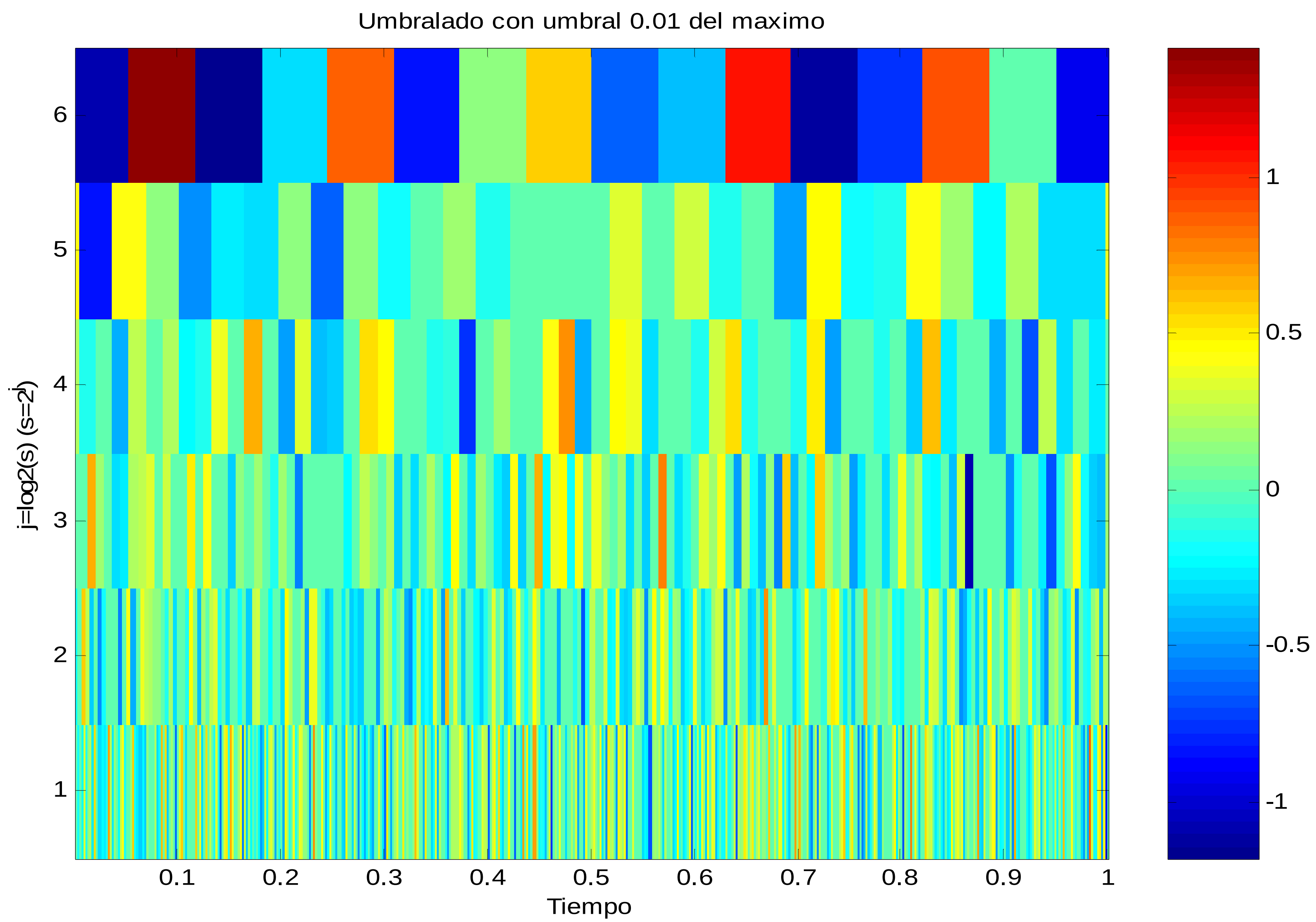
Ej.: Denoising



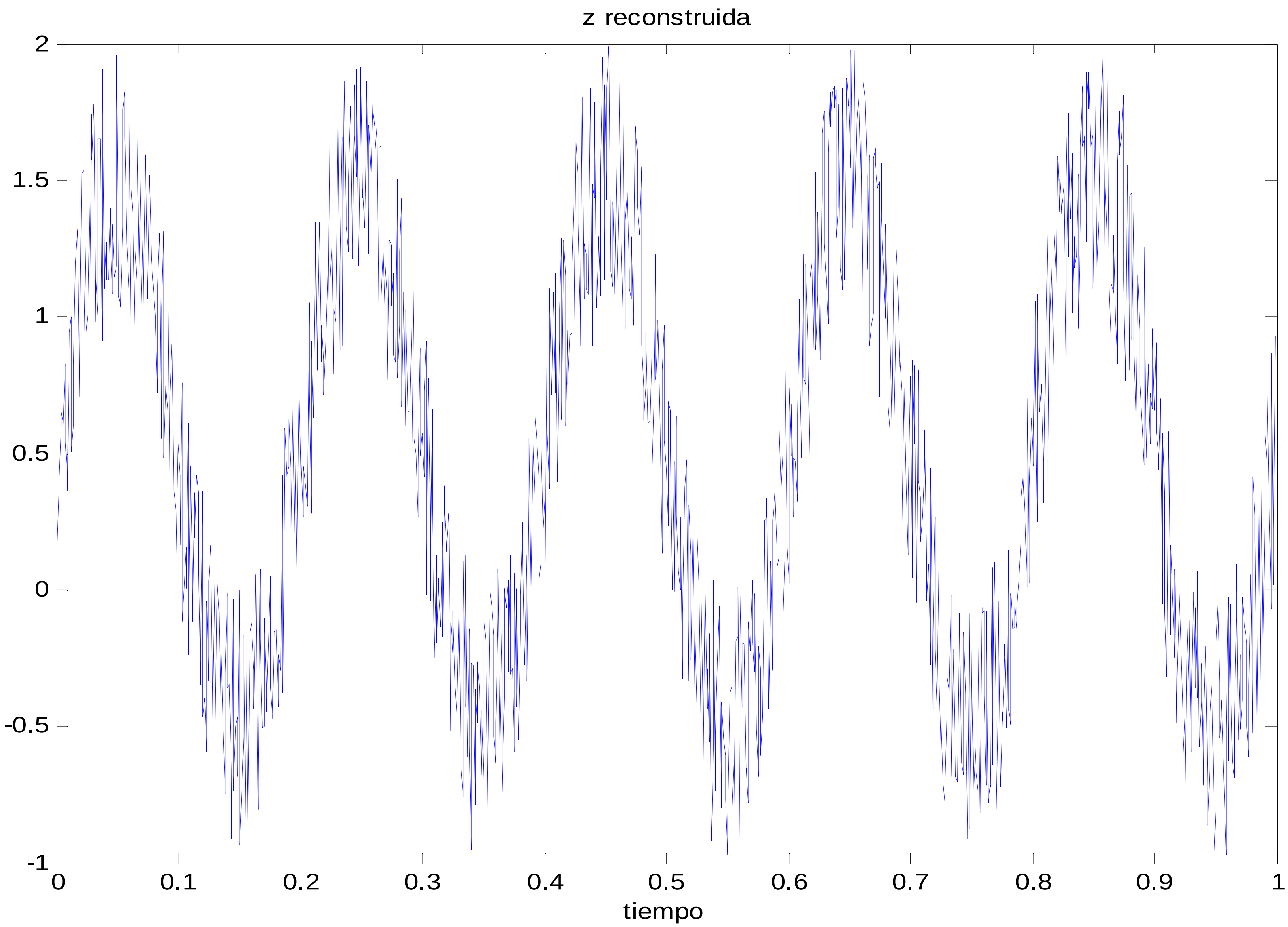
Ej.: Denoising



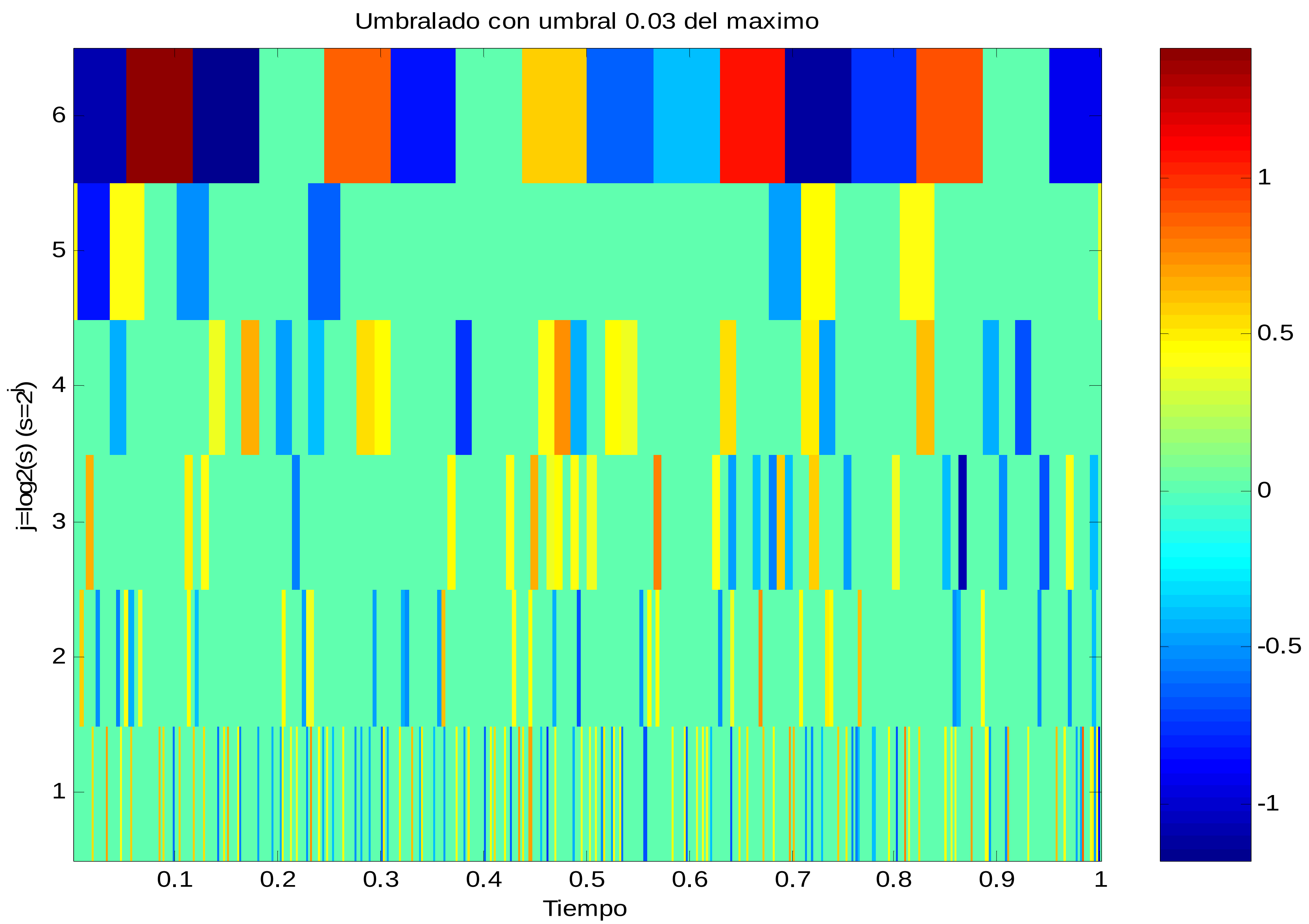
Ej.: Denoising



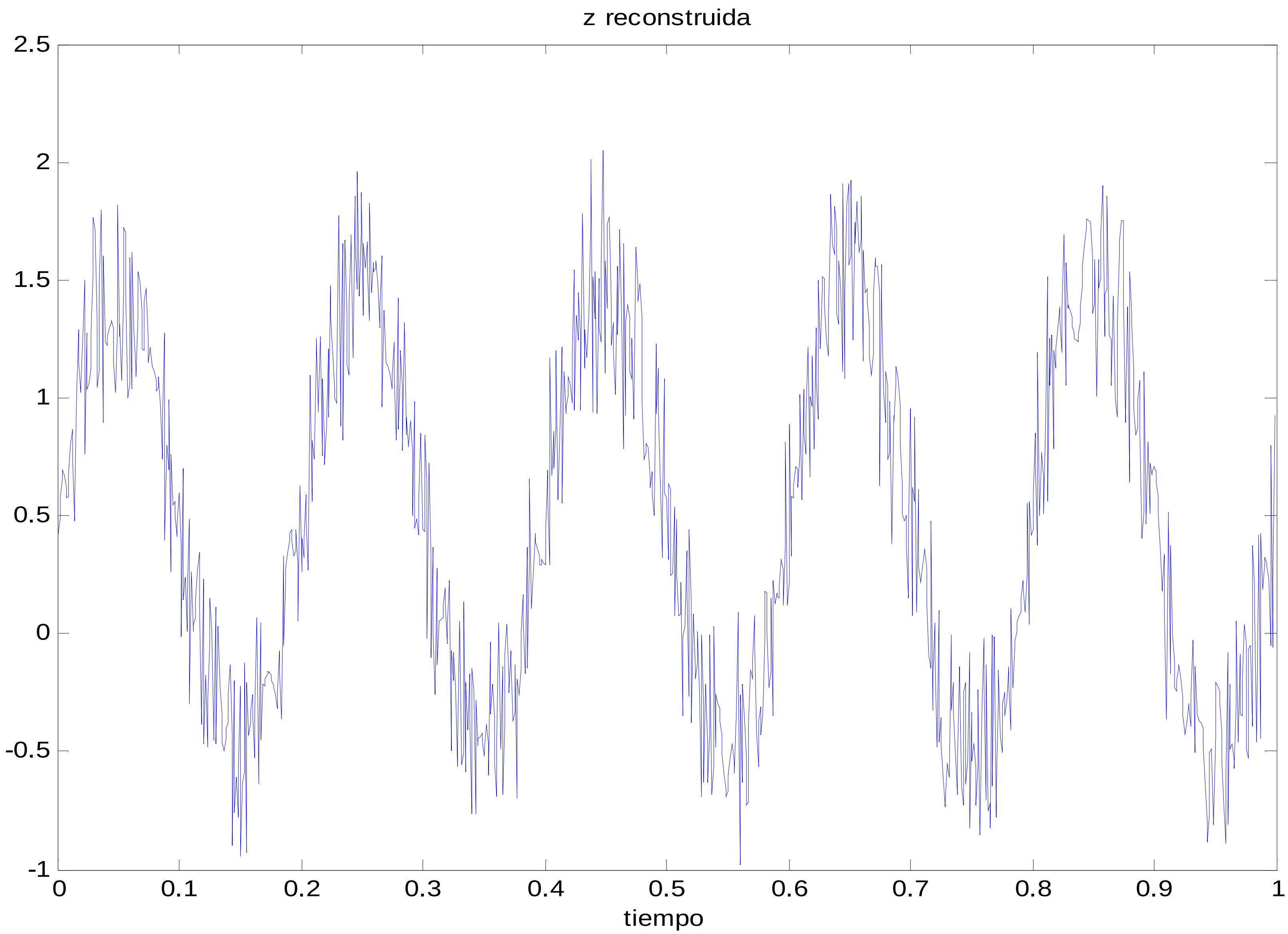
Ej.: Denoising



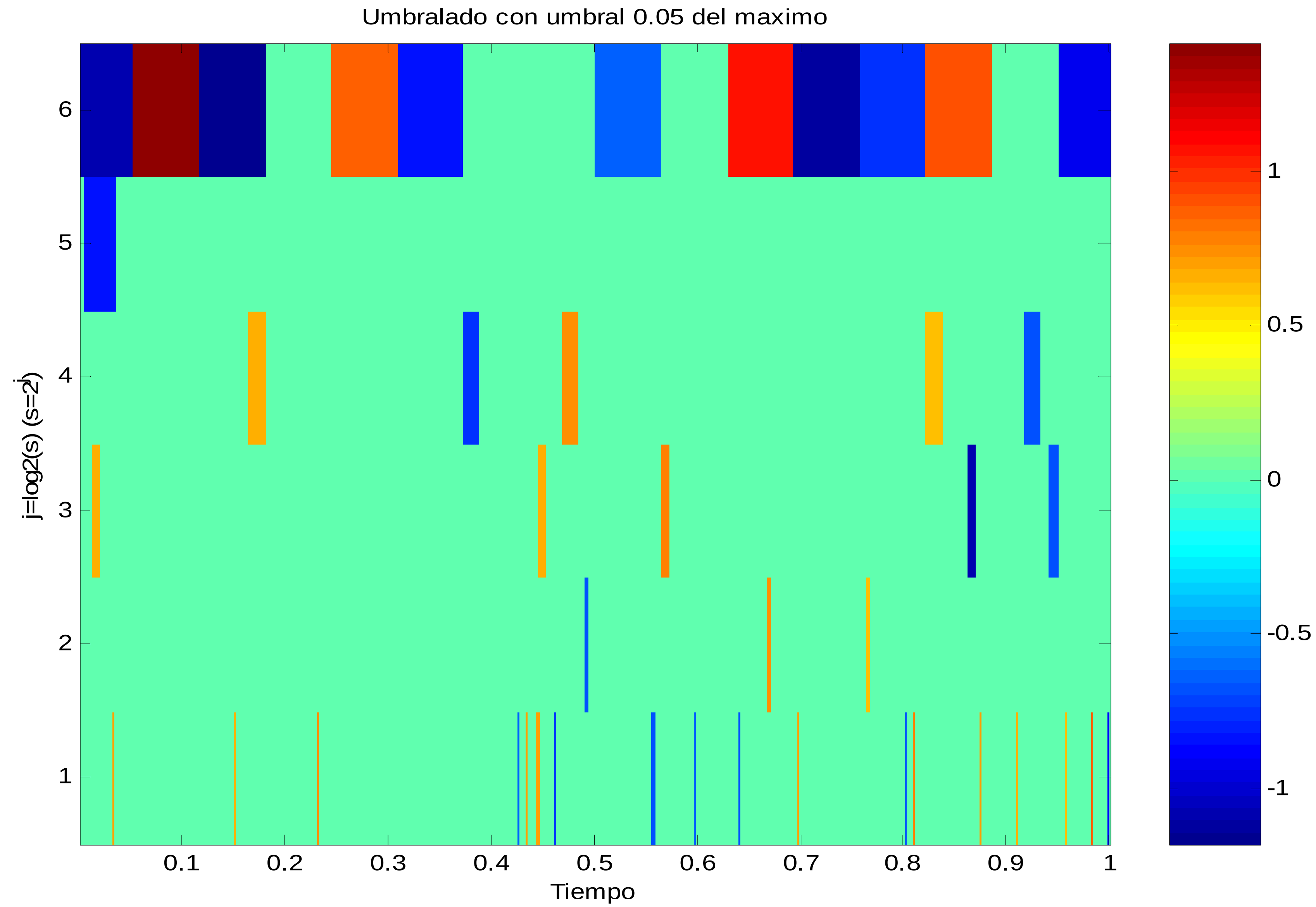
Ej.: Denoising



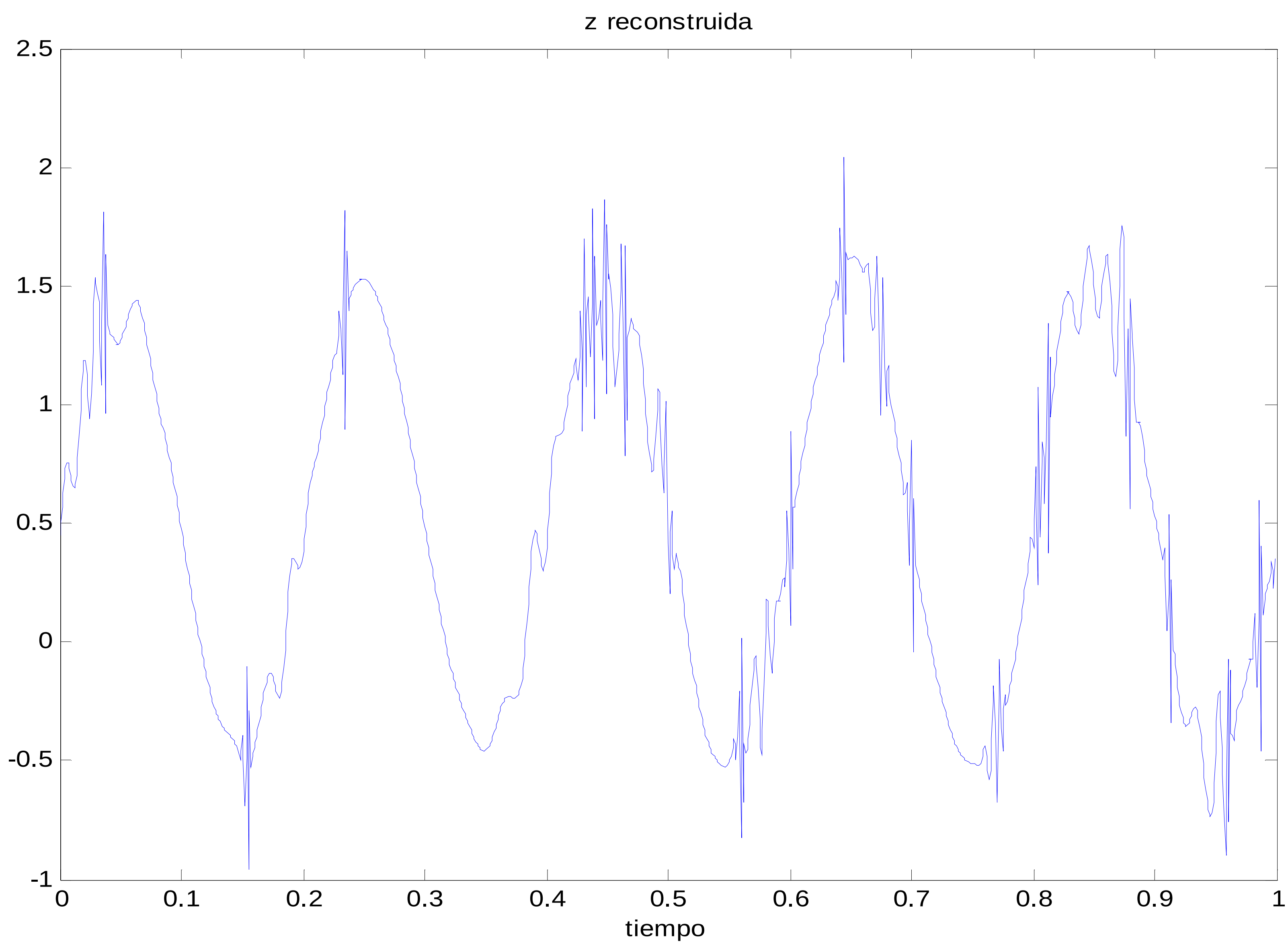
Ej.: Denoising



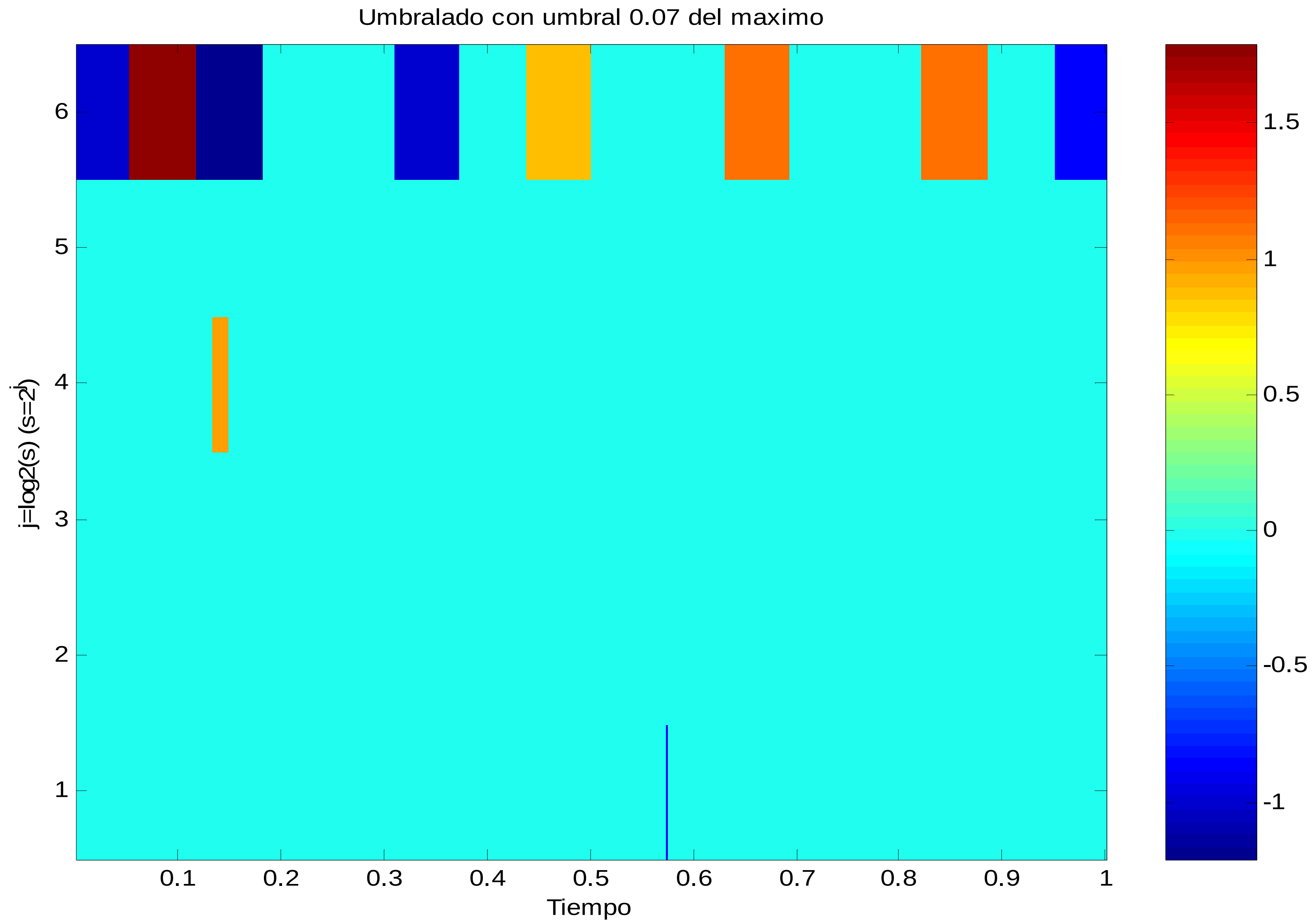
Ej.: Denoising



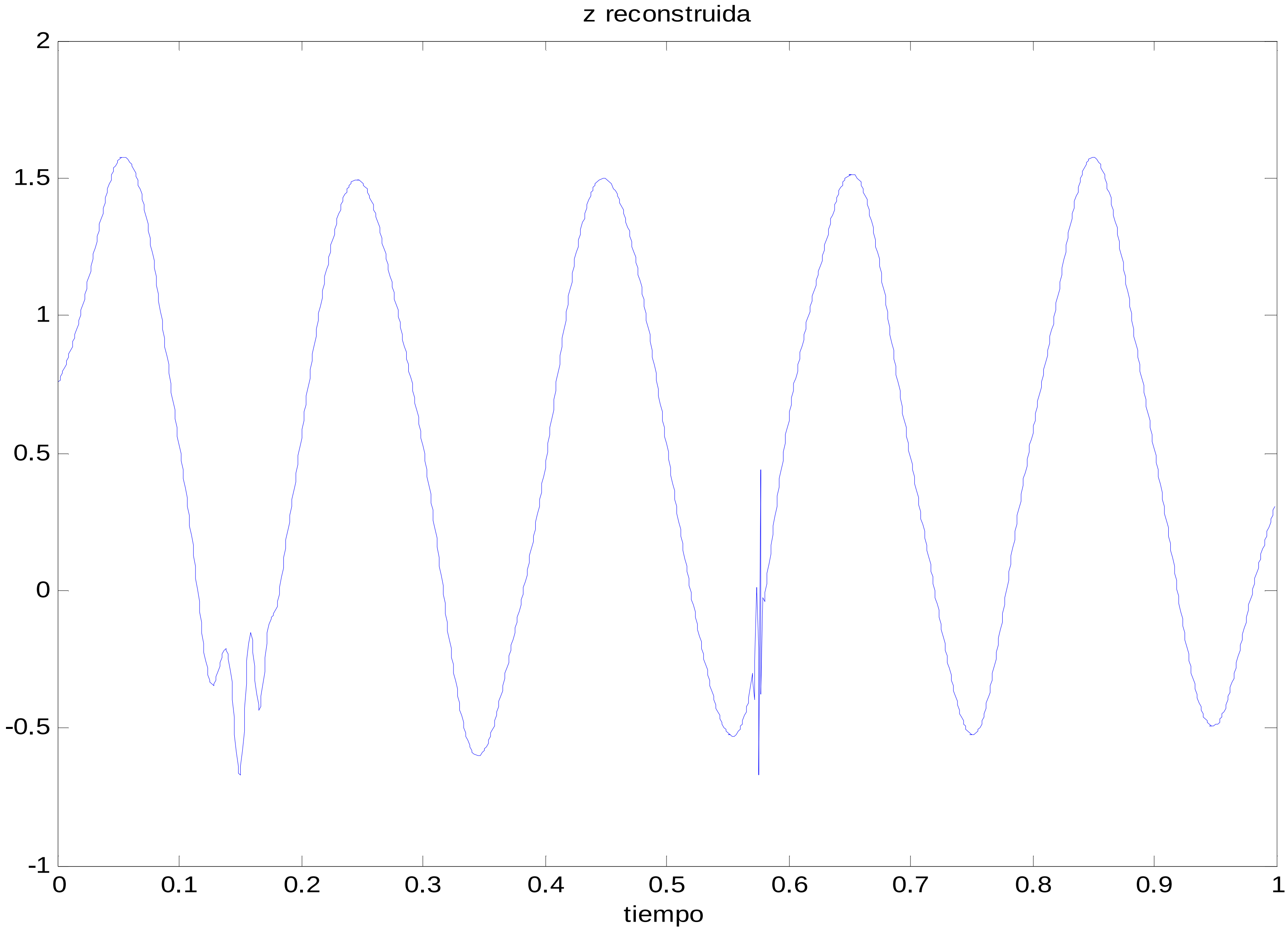
Ej.: Denoising



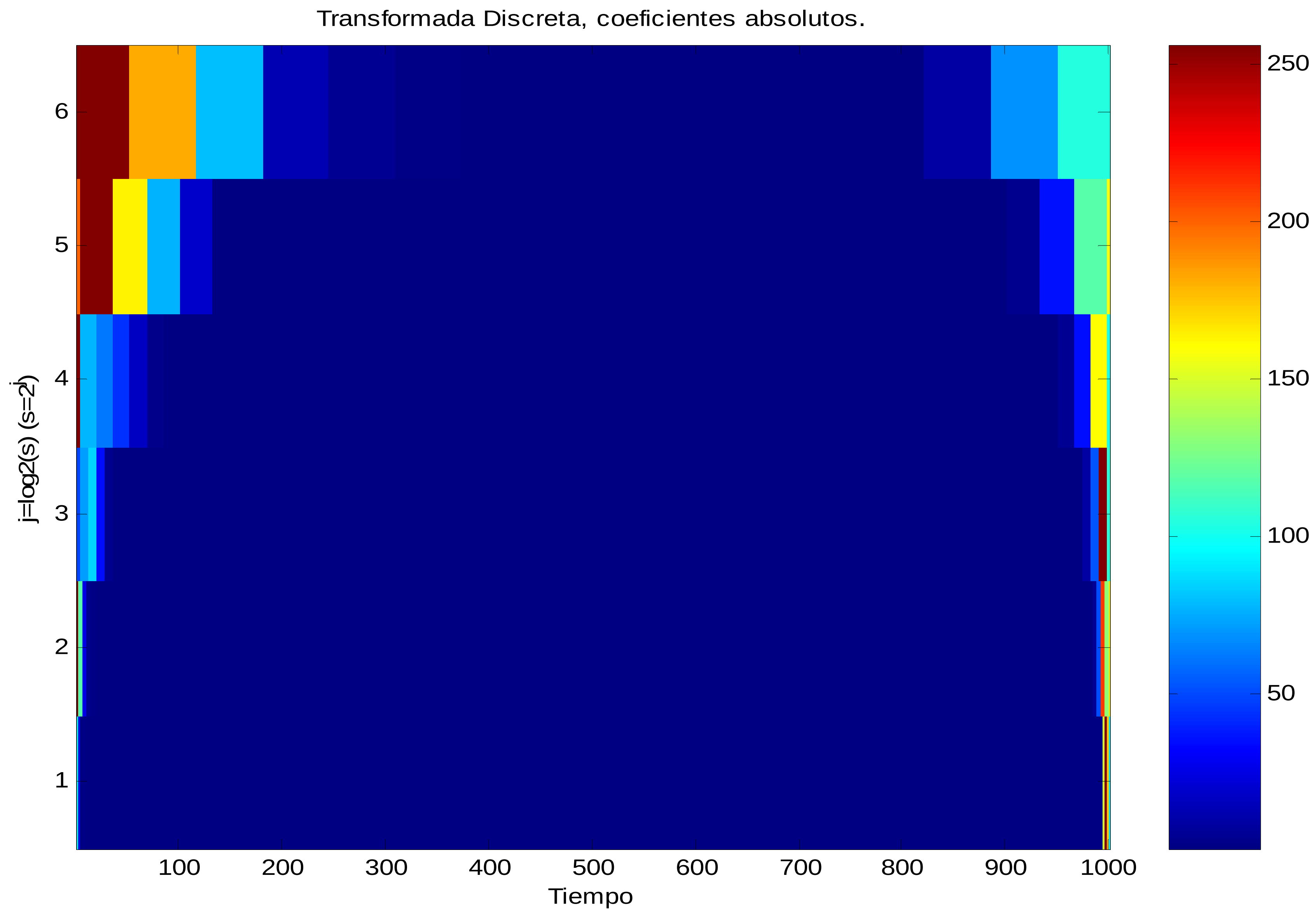
Ej.: Denoising



Ej.: Denoising



Ej.: Denoising



Bibliografía

- Apunte de cátedra
- S. Mallat, A wavelet tour of signal processing, Academic Press, 1999, Cap. 7