



CAPÍTULO IX

Introducción

Existen dos métodos generales para el diseño de filtros digital de respuesta al impulso infinita. El más común consiste en **diseñar un filtro analógico IIR para luego mapearlo a su equivalente digital**.

El segundo método emplea un **procedimiento de diseño algorítmico**, que por lo general requiere del uso de computadoras para resolver un conjunto de ecuaciones lineales y no lineales. Este método es utilizado para resolver filtros con respuesta en frecuencia arbitraria, no caracterizados por las respuestas en frecuencia de filtros analógicos existentes.

1 Prototipos de filtros analógicos pasabajos

La mejor aproximación consiste en desarrollar el diseño de un filtro analógico cuya ganancia sea menor a la unidad.

$$1 - \delta_p \leq |H_a(j\Omega)| \leq 1 \quad \text{Ec. 1}$$

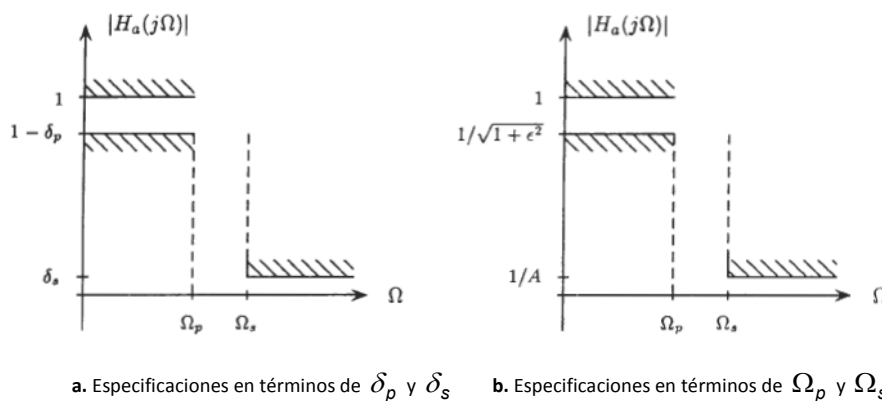


Figura 1. Diferentes convenciones para especificar los requerimientos de los filtros (Monson Hayes, 1999)

Existen diversos factores de interés:

$$\text{Factor de discriminación } d = \left[\frac{(1 - \delta_p)^2 - 1}{\delta_s^{-2} - 1} \right]^{1/2} \quad \text{Ec. 2}$$



Desarrollando:

$$d = \left[\frac{1 - 2\delta_p + \delta_p^2 - 1}{\frac{1 - \delta_s^2}{\delta_s^2}} \right]^{1/2} = \left[\frac{2\delta_p + \delta_p^2}{\frac{1}{\delta_s^2} - 1} \right]^{1/2}$$

Así:

$$d = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}$$

Ec. 3

Otro factor de interés es:

$$\text{Factor de selectividad} \quad k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$$

Ec. 4

Los filtros analógicos más utilizados son: **Butterworth, Chebyshev y elíptico.**

1.1 Filtro Butterworth

Un filtro pasabajo de Butterworth está conformado principalmente por polos:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c} \right)^{2N}}$$

Ec. 5

Siendo N el orden del filtro que es igual al número de polos de la función de transferencia. Ω_c es la frecuencia de corte a -3dB.

La respuesta en frecuencia del módulo también puede ser escrita como:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_p} \right)^{2N}}$$

Ec. 6

Donde:

$$\varepsilon = \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^N$$

Ec. 7



La respuesta en frecuencia de un filtro de Butterworth decrece monotónicamente cuando aumenta Ω y cuando el orden del filtro se incremente la banda de transición se estrecha.

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(s)H_a(-s)|_{s=j\Omega} \quad \text{Ec. 8}$$

De igual manera, se puede escribir:

$$G_a(s) = |H_a(j\Omega)|^2 = H_s(s)H_a(-s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} \quad \text{Ec. 9}$$

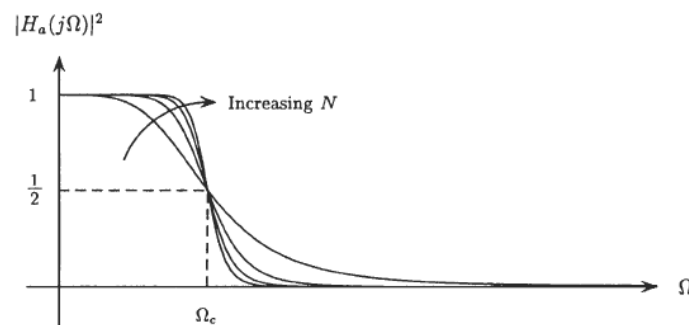


Figura 2. La magnitud de la respuesta en frecuencia en Función de la cantidad de polos (Monson Hayes, 1999)

Por lo tanto, $G_a(s)$ tendrá $2N$ polos ubicados a igual distancia sobre el círculo de radio Ω_c :

$$s_k = (-1)^{1/2N} (j\Omega_c) = j\Omega_c \exp\left\{j \frac{(N+1+2k)\pi}{2N}\right\}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1 \quad \text{Ec. 10}$$

Estos polos son simétricos respecto al eje $j\Omega$:

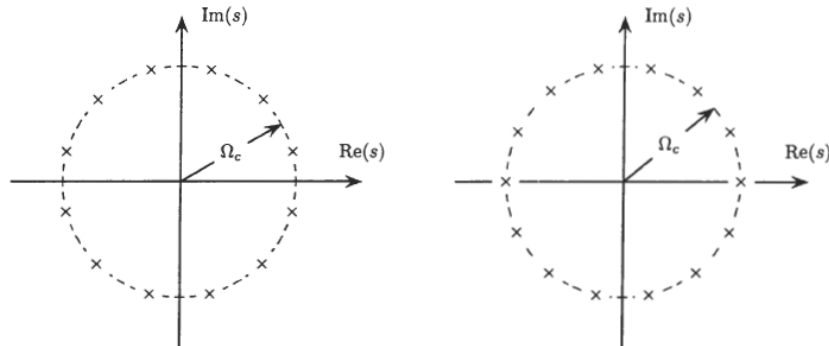


Figura 3. Polos para un filtro de orden 6 (izquierda) y orden 7 (derecha)
(Monson Hayes, 1999)

La función $H_a(s)$ está formada entonces por las N raíces de $H_a(s)H_a(-s)$ ubicadas en el semiplano izquierdo del plano s . Para un filtro Butterworth normalizado con $\Omega_c = 1$ la función toma la siguiente forma:

$$H_a(s) = \frac{1}{A_N(s)} = \frac{1}{s^N + a_1 s^{N-1} + a_2 s^{N-2} + \dots + a_{N-1} s + a_N} \quad \text{Ec. 11}$$

La

Tabla 1 muestra los coeficientes de $A_N(s)$ para $1 \leq N \leq 8$. Como se puede observar, los coeficientes tienen simetría.

Tabla 1. Coeficientes de $A_N(s)$ para $1 \leq N \leq 8$ (Monson Hayes, 1999)

N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1.0000							
2	1.4142	1.0000						
3	2.0000	2.0000	1.0000					
4	2.6131	3.4142	2.6131	1.0000				
5	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361	1.0000			
6	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637	1.0000		
7	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940	1.0000	
8	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8462	13.1372	5.1258	1.0000



1.2.1 Proceso de diseño de un filtro de Butterworth pasabajo

Dado Ω_p , Ω_s , δ_p y δ_s , los pasos involucrados en el diseño son los siguientes:

1. Encontrar los valores del factor de selectividad k y el factor de discriminación d .
2. Determinar el orden del filtro requerido para cumplir las especificaciones usando la fórmula:

$$N \geq \frac{\log(d)}{\log(k)} \quad \text{Ec. 12}$$

3. Colocar la frecuencia de corte de -3dB, Ω_c , en cualquier valor dentro del rango:

$$\Omega_p \left[(1 - \delta_p)^{-2} - 1 \right]^{1/2N} \leq \Omega_c \leq \Omega_s \left[\delta_s^{-2} - 1 \right]^{1/2N} \quad \text{Ec. 13}$$

4. Sintetizar la función de transferencia de Butterworth con la siguiente función:

$$G_a(s) = H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} \quad \text{Ec. 14}$$

que recae en el semiplano izquierdo de s . Por lo tanto:

$$H_a(s) = \prod_{k=0}^{N-1} \left(\frac{-s_k}{s - s_k} \right) \quad \text{Ec. 15}$$

donde:

$$s_k = \Omega_c \cdot \exp \left\{ j \frac{(N+1+2k)\pi}{2N} \right\} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{Ec. 16}$$



1.2.2 Ejemplo de diseño de un filtro de Butterworth

Diseñar un filtro pasabaja que cumpla con los siguientes requisitos:

$$f_p = 6\text{KHz} \quad f_s = 10\text{KHz} \quad \delta_p = \delta_s = 0,1$$

1. Se determinan los factores de selectividad y discriminación:

$$d = \left[\frac{(1 - \delta_p)^2 - 1}{\delta_s^{-2} - 1} \right]^{1/2} = \left[\frac{(1 - 0,1)^2 - 1}{0,1^{-2} - 1} \right]^{1/2} \Rightarrow d = 0,0487$$

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{f_p}{f_s} = \frac{6\text{KHz}}{10\text{KHz}} \Rightarrow k = 0,6$$

2. Se determina el orden del filtro:

$$N \geq \frac{\log(d)}{\log(k)} = \frac{\log(0,0487)}{\log(0,6)} = 5,92$$

Redondeando:

$$N = 6$$

3. Luego, los límites donde se encontrará la frecuencia de corte serán:

$$f_{\text{inf}} = f_p \left[(1 - \delta_p)^{-2} - 1 \right]^{-1/2N} = 6\text{KHz} \cdot \left[(1 - 0,1)^{-2} - 1 \right]^{-1/2 \cdot 6} = 6770\text{Hz}$$

$$f_{\text{sup}} = 6\text{KHz} \cdot \left[0,1^{-2} - 1 \right]^{-1/2 \cdot 6} = 6819\text{Hz}$$

Por lo tanto:

$$f_{\text{inf}} \leq f_c \leq f_{\text{sup}}$$

$$6770\text{Hz} \leq f_c \leq 6819\text{Hz}$$



La función de transferencia del filtro Butterworth queda definida construyendo un polinomio normalizado de orden 6 de la siguiente forma:

$$H_a(s) = \frac{1}{s^6 + 3,8637 \cdot s^5 + 7,4641 \cdot s^4 + 9,1416 \cdot s^3 + 7,4641 \cdot s^2 + 3,8637 \cdot s + 1}$$

Luego hay que reemplazar s por s/Ω_c para $\Omega_c \neq 1$. Como:

$$6770\text{Hz} \leq f_c \leq 6819\text{Hz}$$

se toma el valor medio de la ventana:

$$f_c = 6790\text{Hz} \Rightarrow \Omega_c = 2\pi \cdot f_c = 2\pi \cdot 6790\text{Hz}$$

Finalmente, la función de transferencia será:

$$H_a(s) = \frac{1}{\frac{1}{\Omega_c^6} s^6 + \frac{3,8637}{\Omega_c^5} \cdot s^5 + \frac{7,4641}{\Omega_c^4} \cdot s^4 + \frac{9,1416}{\Omega_c^3} \cdot s^3 + \frac{7,4641}{\Omega_c^2} \cdot s^2 + \frac{3,8637}{\Omega_c} \cdot s + 1}$$

1.3 Filtros de Chebyshev

Los filtros de Chebyshev están definidos en términos de los polinomios de Chebyshev:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cdot \cos^{-1}(x)) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cdot \cosh^{-1}(x)) & |x| > 1 \end{cases}$$

Ec. 17

Estos polinomios pueden ser generados recursivamente de la siguiente manera:



$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad k \geq 1$$

Ec. 18

Con $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$. Los polinomios de Chebyshev tienen propiedades distintivas. Las mismas se listan a continuación.

1. Para $|x| \leq 1$ los polinomios están limitados a 1 en magnitud, $|T_N(x)| \leq 1$ y oscila entre ± 1 . Para $|x| > 1$, el polinomio se incrementa monótonicamente con el valor de x .
2. $T_N(1) = 1$ para todo N .
3. $T_N(0) = \pm 1$ para N par y $T_N(0) = 0$ para N impar.
4. Todas las raíces de $T_N(x)$ están en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

Hay dos tipos de filtros de Chebyshev. Un filtro **tipo I** compuesto **solamente por polos**, con una **banda pasante equiripple** y un **decrecimiento monótonico** en la banda de rechazo.

La magnitud de la respuesta en frecuencia es:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$$

Ec. 19

Donde N es el orden del filtro, Ω_p es la frecuencia de corte de la banda de paso y ε es el parámetro que controla la amplitud del ripple en la banda de paso. Debido a que $T_N^2(\Omega / \Omega_p)$ varía entre 0 y 1 para $|\Omega| < \Omega_p$, $|H_a(j\Omega)|^2$ oscila entre 1 y $1/(1 + \varepsilon^2)$.

A medida que el orden del filtro se incrementa, el número de oscilaciones del ripple en la banda de paso se incrementa y la transición entre la banda de paso y la de rechazo se hace más angosta.

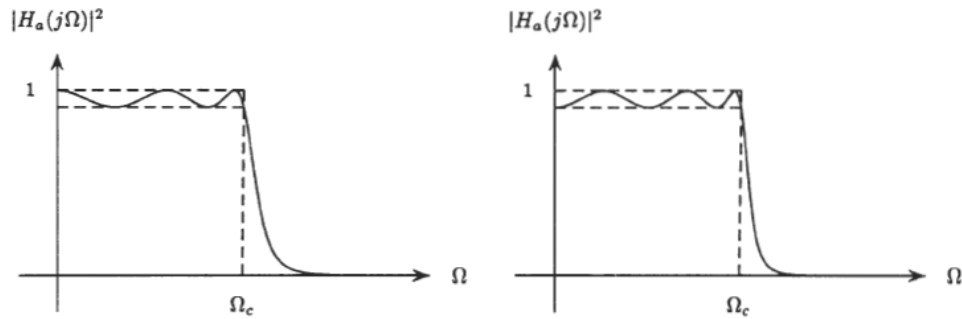


Figura 4. Respuesta de un filtro de Chebyshev tipo I de orden $N = 5$ (izquierda) y orden $N = 6$ (derecha) (Monson Hayes, 1999)

La función de un filtro Chebyshev tipo I tiene la siguiente forma:

$$H_a(s) = H_a(0) \cdot \prod_{k=0}^{N-1} \frac{-s_k}{s - s_k} \quad \text{Ec. 20}$$

donde:

$$\begin{aligned} H_s(0) &= (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} \text{ si } N \text{ es par} \\ H_a(0) &= 1 \text{ si } N \text{ es impar} \end{aligned} \quad \text{Ec. 21}$$

1.3.1 Proceso de diseño de un filtro de Chebyshev pasabajo

Dado Ω_p , Ω_s , δ_p y δ_s o ε y A , los pasos involucrados en el diseño son los siguientes:

1. Encontrar los valores de los factores de discriminación k y selectividad d :

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} \quad d = \left[\frac{(1 - \delta_p)^2 - 1}{\delta_s^{-2} - 1} \right]^{1/2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} \quad \text{Ec. 22}$$

2. Determinar el orden del filtro usando la siguiente ecuación:



$$N \geq \frac{\cosh^{-1}(1/d)}{\cosh^{-1}(1/k)} \quad \text{Ec. 23}$$

3. De la función racional:

$$G_a(s) = H_a(s) \cdot H_a(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_p}\right)} \quad \text{Ec. 24}$$

donde $\varepsilon = \left[(1 - \delta_p)^2 - 1\right]^{1/2}$, se construye la función del filtro $H_a(s)$ tomando los N polos de $G_a(s)$ que caen en el semiplano izquierdo de s.

1.3.2 Ejemplo de diseño de un filtro de Chebyshev

Se diseñará un fiiltro pasabajo de Chebyshev tipo I que cumpla con las siguientes especificaciones:

$$f_p = 6\text{KHz} \quad f_s = 10\text{KHz} \quad \delta_p = \delta_s = 0,1$$

1. Se calculan los factores de discriminación y selectividad:

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{f_p}{f_s} = \frac{6\text{KHz}}{10\text{KHz}} = 0,6 \quad d = \left[\frac{(1 - 0,1)^2 - 1}{0,1^2 - 1} \right]^{1/2} = 0,0487$$

2. El orden del filtro para cumplir con los requerimientos será:

$$N \geq \frac{\cosh^{-1}(1/d)}{\cosh^{-1}(1/k)} = \frac{\cosh^{-1}(1/0,0487)}{\cosh^{-1}(1/0,6)} = 3,38$$

Redondeando:

$$\boxed{N = 4}$$



3. Se calcula ε :

$$\varepsilon = \left[(1 - \delta_p)^{-2} - 1 \right]^{1/2} = \left[(1 - 0,1)^{-2} - 1 \right]^{1/2} = 0,4843$$

Y:

$$T_4(x) = 4x^3 - 4x$$

Entonces:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + 3,7527 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p} \right)^2 \left[\left(\frac{\Omega}{\Omega_p} \right)^2 - 1 \right]^2}$$

donde:

$$\Omega_p = 2\pi \cdot 6000 \text{ Hz}$$

1.4 Filtro de Chebyshev tipo II

A diferencia del tipo I, el filtro Chebyshev tipo II tiene una banda de paso monotonía y una banda de rechazo equiripple. La función de transferencia tiene tanto polos como ceros:

$$|H_a(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[\frac{T_N(\Omega_s / \Omega_p)}{T_N(\Omega_p / \Omega_s)} \right]^2} \quad \text{Ec. 25}$$

donde ε es el parámetro que controla el ripple en la banda de rechazo, Ω_p es la frecuencia de paso y Ω_s la frecuencia de rechazo. N es el orden del filtro.

A medida que el orden del filtro se incrementa, la frecuencia del ripple se incrementa y la banda de transición se hace más angosta.

La función del filtro tipo II tiene la forma:

$$H_a(s) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{b_k} \frac{s - b_k}{s - a_k} \quad \text{Ec. 26}$$



Los polos están en:

$$a_k = \frac{\Omega_s^2}{s_k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{Ec. 27}$$

Donde s_k son los polos de Chebyshev tipo I. Los ceros b_k caen sobre el eje $j\Omega$ en ciertas frecuencias tal que se cumpla $T_N(\Omega_s / \Omega) = 0$.

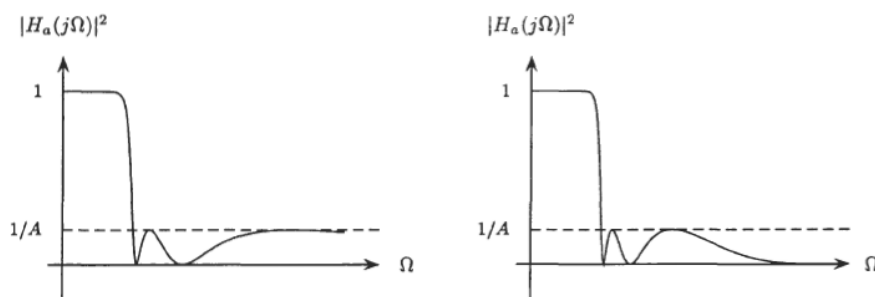


Figura 5. Respuesta de un filtro de Chebyshev tipo II de orden $N = 5$ (izquierda) y orden $N = 6$ (derecha) (Monson Hayes, 1999)

El procedimiento de diseño de un filtro de Chebyshev de tipo II es el mismo que el aplicado para el de tipo I, exceptuando que:

$$\varepsilon = (\delta_s^2 - 1)^{-1/2} \quad \text{Ec. 28}$$

1.5 Filtro elíptico

El filtro elíptico en su función de transferencia posee polos y ceros. La misma está dada por:

$$|H_a(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2(\Omega / \Omega_p)} \quad \text{Ec. 29}$$



donde $U_N(\Omega/\Omega_p)$ es la función elíptica jacobiana. Esta es una función racional de orden N con la siguiente propiedad:

$$U_N(1/\Omega) = \frac{1}{U_N(\Omega)} \quad \text{Ec. 30}$$

Los filtros elípticos **tienen un equiripple en la banda de paso y en la de rechazo**. Los ripples son distribuidos uniformemente a lo largo de ambas bandas.

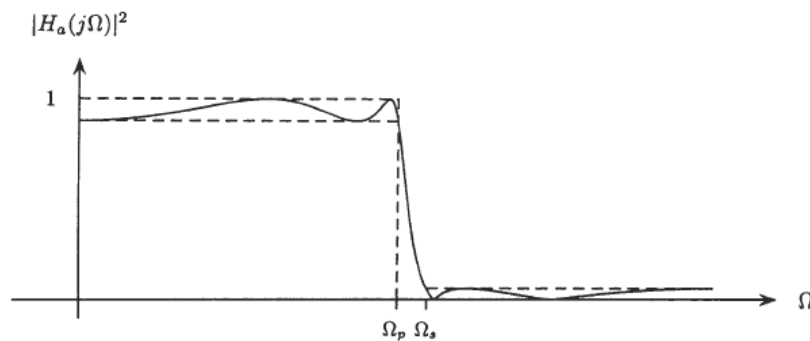


Figura 6. Equiripple en la banda de paso y de rechazo de un filtro elíptico
(Monson Hayes, 1999)

Estos filtros son óptimos en el sentido de que tienen el **ancho de banda de transición más angosto**, para un filtro dado del mismo orden. El diseño de un filtro elíptico es más dificultoso que uno de Butterworth o uno de Chebyshev ya que su diseño recae en el uso de tablas o series de aproximación.

Sin embargo, el orden del filtro puede ser estimado por la siguiente ecuación:

$$N \geq \log \left(\frac{16/d^2}{1/q} \right) \quad \text{Ec. 31}$$

donde d es el factor de discriminación y q se expresa como:



$$q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13} \quad \text{Ec. 32}$$

Asimismo:

$$q_0 = \frac{1}{2} \frac{1 - (1 - k^2)^{1/4}}{1 + (1 - k^2)^{1/4}} \quad \text{Ec. 33}$$

siendo k el factor de selectividad.

1.6 Diseño de filtros IIR desde un filtro analógico

El diseño de un filtro digital desde su prototipo analógico requiere transformar $h_a(t)$ en $h_a(n)$ o lo que es lo mismo, $H_a(s)$ en $H_a(z)$. El mapeo del plano s en el plano z puede ser escrito como:

$$H_a(z) = H_a(s) \Big|_{s=m(z)} \quad \text{Ec. 34}$$

donde $m(z)$ es la función de mapeo. Para que la transformación produzca un filtro digital aceptable el mapeo $m(z)$ debe cumplir con las siguientes propiedades:

1. Mapeo del eje $j\Omega$ al círculo unidad $|z| = 1$. Este mapeo debe ser uno a uno sobre el círculo unidad en función de **preservar la característica de respuesta en frecuencia del filtro analógico**.
2. Los puntos del semiplano izquierdo deben ser mapeados en puntos dentro del círculo unidad para **preservar la estabilidad de los filtros analógicos**.
3. El mapeo $m(z)$ debe ser una **función racional** de z para que $H_a(s)$ sea mapeada a una función racional en z .

Se describen a continuación dos métodos comúnmente utilizados para mapear filtros analógicos en filtros digitales.



1.6.1 Invarianza al impulso

Con el método de invarianza al impulso un filtro digital es diseñado por el muestreo de la respuesta al impulso del filtro analógico:

$$h(n) = h_a(nT_s) \quad \text{Ec. 35}$$

Por el teorema del muestreo, se dice que la respuesta en frecuencia del filtro digital $H(e^{j\omega})$ se relaciona con la respuesta en frecuencia del filtro analógico $H_a(j\Omega)$ a través de:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega}{T_s} + j\frac{2\pi k}{T_s}\right) \quad \text{Ec. 36}$$

Generalizando, esto puede ser extendido al plano complejo de la siguiente forma:

$$H(z)\big|_{z=e^{sT_s}} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s + j\frac{2\pi k}{T_s}\right) \quad \text{Ec. 37}$$

El mapeo entre el plano s y el plano z es ilustrado en la siguiente figura:

Se advierte que a pesar de que el eje $j\Omega$ es mapeado en el círculo unidad el mapeo no es uno a uno. En particular cada intervalo de longitud $2\pi/T_s$ a lo largo del eje $j\Omega$ es mapeado al círculo unidad y el contenido del semiplano izquierdo es mapeado al interior de este círculo.

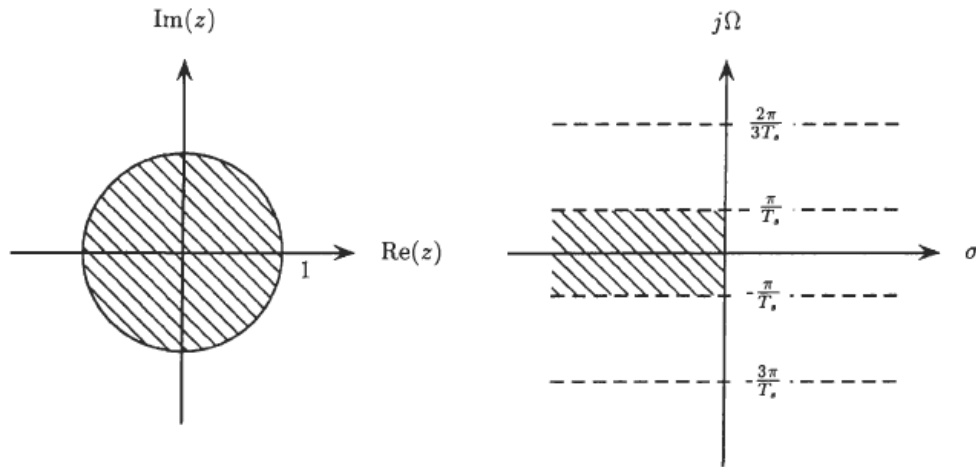


Figura 7. Mapeo del plano s en el plano z (Monson Hayes, 1999)

Si la respuesta en frecuencia del filtro analógico $H_a(j\Omega)$ es suficientemente limitada en banda, entonces:

$$H(e^{j\omega}) \approx \frac{1}{T_s} H_a\left(\frac{j\omega}{T_s}\right) \quad \text{Ec. 38}$$

Aunque la invarianza al impulso puede producir un diseño razonable, en algunos casos, esta técnica es esencialmente aplicada a filtros analógicos de banda limitada.

Se supone el siguiente filtro:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^P \frac{A_k}{s - s_k} \quad \text{Ec. 39}$$

La respuesta al impulso $h_a(t)$ es:

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^P A_k e^{s_k t} \mu(t) \quad \text{Ec. 40}$$



Puesto que el filtro digital se genera utilizando la técnica de invarianza al impulso, se tiene lo siguiente:

$$h(n) = h_a(nT_s) = \sum_{k=1}^P A_k e^{s_k n T_s} \mu(t) = \sum_{k=1}^P A_k \left(e^{s_k T_s} \right)^n \mu(t) \quad \text{Ec. 41}$$

Y la función del sistema:

$$H(z) = \sum_{k=1}^P \frac{A_k}{1 - e^{s_k T_s} z^{-1}} \quad \text{Ec. 42}$$

Así que el polo $s = s_k$ del filtro analógico es mapeado al polo $z = e^{s_k T_s}$ en el filtro digital.
Generalizando:

$$\frac{1}{s - s_k} \rightarrow \frac{1}{1 - e^{s_k T_s} z^{-1}} \quad \text{Ec. 43}$$

Por el contrario, los ceros no son mapeados de ninguna manera obvia.

1.6.2 La transformada bilineal

La transformada bilineal es un mapeo entre el plano s y el plano z definido por:

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \text{Ec. 44}$$

Dado un filtro analógico cuyo función de transferencia es $H_a(s)$ su equivalente digital es:

$$H(z) = H_a \left(\frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad \text{Ec. 45}$$



La transformada bilineal es una función racional que mapea el semiplano izquierdo s en el interior del círculo unidad y el eje $j\Omega$ en el círculo unidad uno a uno. Sin embargo, la relación entre el eje $j\Omega$ y el círculo unitario es altamente no lineal y está dada por la **función de curvatura de frecuencia** o “frequency prewarping”:

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T_s}{2}\right)$$

Ec. 46

Como resultado de esta curvatura, la transformada bilineal solamente preserva la respuesta de la magnitud de los filtros analógicos cuya respuesta en frecuencia es prácticamente constante. Por lo tanto, **la transformada bilineal generalmente es utilizada para filtros selectivos en frecuencia.**

El parámetro T_s en la transformada bilineal es normalmente incluido por razones históricas. Sin embargo no entra en el proceso de diseño porque solamente escala el eje $j\Omega$ en la función de curvatura de frecuencia y este escalamiento puede ser hecho en la especificación del filtro analógico. Por lo tanto, T_s puede ser colocado a cualquier valor para simplificar el proceso de diseño.

El procedimiento de diseño con los parámetros ω_p , ω_s , δ_p y δ_s es el siguiente:

1. Aplicar la inversa de la función de curvatura a las frecuencias de corte de la banda de paso y de rechazo del filtro digital para obtener las frecuencias de paso y de rechazo del filtro analógico. Este paso se conoce como “pre-warp”, “precursar” o “pandear” las frecuencias del filtro analógico. Con $T_s = 2$ se tiene:

$$\Omega = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ o } \Omega = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Ec. 47



2. Diseñar el filtro analógico con las frecuencias de corte halladas en el paso 1 y haciendo uso de δ_p y δ_s . Cabe aclarar que el filtro analógico se puede diseñar mediante cualquiera de los métodos anteriormente vistos.
3. Aplicar la transformada bilineal al filtro resultante del paso 2.

1.6.2.1 Ejemplo de diseño de un filtro digital con la transformada bilineal

Se diseñará un filtro de primer orden pasabajo digital con frecuencia de corte a -3dB de $\omega_c = 0,25\pi$ aplicando la transformada bilineal a un filtro de Butterworth, cuya función de transferencia es:

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\Omega_c}} \quad \text{Ec. 48}$$

Se aplica el “pre-warpping”:

$$\Omega_c = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{0,25\pi}{2}\right) = \frac{0,828}{T_s} \quad \text{Ec. 49}$$

Entonces:

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + s \frac{T_s}{0,828}} \quad \text{Ec. 50}$$

Aplicando la transformada bilineal:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \frac{T_s}{0,828}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{0,828} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} \quad \text{Ec. 51}$$

$$H(z) = 0,2920 \frac{1+z^{-1}}{1-0,4159z^{-1}}$$



Queda demostrado que T_s no participa en el diseño.

1.7 Transformaciones en frecuencia

Hay dos métodos que pueden ser usados para diseñar filtros de frecuencia selectivos de otros tipos, tales como pasaaltos, pasabanda, eliminabanda. El primer método es diseñar un filtro pasabajo analógico y luego aplicar las transformaciones en frecuencia (Tabla 2), para finalmente aplicar el mapeo del plano s al plano z .

El segundo método es diseñar un filtro pasabajo analógico, mapearlo a un filtro digital mediante algún método de transformación del plano s al plano z y finalmente aplicar las transformaciones en frecuencia ya en el mundo discreto (Tabla 3), de acuerdo al tipo de filtro que se necesite.

Tabla 2. Transformaciones de un filtro analógico pasabajo a otras clases de filtros selectivos (Monson Hayes, 1999)

Transformation	Mapping	New Cutoff Frequencies
Low-pass	$s \rightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s$	Ω'_p
High-pass	$s \rightarrow \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s}$	Ω'_p
Bandpass	$s \rightarrow \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$	Ω_l, Ω_u
Bandstop	$s \rightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}$	Ω_l, Ω_u

Tabla 3. Transformaciones de un filtro digital pasabajo a otras clases de filtros selectivos (Monson Hayes, 1999)



Filter Type	Mapping	Design Parameters
Low-pass	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin[(\omega_c - \omega'_c)/2]}{\sin[(\omega_c + \omega'_c)/2]}$ ω'_c = desired cutoff frequency
High-pass	$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$	$\alpha = -\frac{\cos[(\omega_c + \omega'_c)/2]}{\cos[(\omega_c - \omega'_c)/2]}$ ω'_c = desired cutoff frequency
Bandpass	$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - [2\alpha\beta/(\beta + 1)]z^{-1} + [(\beta - 1)/(\beta + 1)]}{[(\beta - 1)/(\beta + 1)]z^{-2} - [2\alpha\beta/(\beta + 1)]z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos[(\omega_{c2} + \omega_{c1})/2]}{\cos[(\omega_{c2} - \omega_{c1})/2]}$ $\beta = \cot[(\omega_{c2} - \omega_{c1})/2] \tan(\omega_c/2)$ ω_{c1} = desired lower cutoff frequency ω_{c2} = desired upper cutoff frequency
Bandstop	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - [2\alpha/(\beta + 1)]z^{-1} + [(1 - \beta)/(1 + \beta)]}{[(1 - \beta)/(1 + \beta)]z^{-2} - [2\alpha/(\beta + 1)]z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos[(\omega_{c1} + \omega_{c2})/2]}{\cos[(\omega_{c1} - \omega_{c2})/2]}$ $\beta = \tan[(\omega_{c2} - \omega_{c1})/2] \tan(\omega_c/2)$ ω_{c1} = desired lower cutoff frequency ω_{c2} = desired upper cutoff frequency

Ejemplo. Usando la transformada bilineal diseñar un filtro discreto pasaaltos de Chebyshev con un equiripple y banda de paso:

$$\begin{aligned} 0 \leq |H(e^{j\omega})| &\leq 0,1 & 0 \leq \omega \leq 0,1\pi \\ 0,9 \leq |H(e^{j\omega})| &\leq 1 & 0,3 \leq \omega \leq \pi \end{aligned} \quad \text{Ec. 52}$$

Para diseñar un filtro pasaalto de tiempo discreto hay dos métodos aplicables. Se puede diseñar un filtro analógico de Chebyshev tipo I pasabajo y luego mapearlo a un filtro digital usando la transformada bilineal y luego aplicar la transformada de pasabajo a pasaalto en el dominio z (Tabla 3).

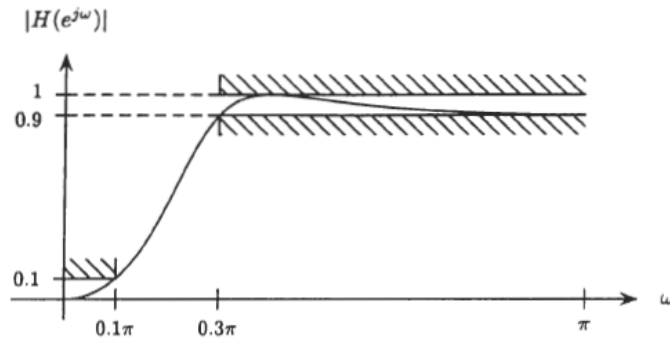


Figura 8. Respuesta en frecuencia del filtro deseado (Monson Hayes, 1999)

Alternativamente, antes de aplicar la transformada bilineal se puede realizar la transformación de pasabajo a pasaalto en el plano s (Tabla 2) y luego mapear el filtro pasaalto analógico a un filtro pasaalto discreto aplicando la transformada bilineal.

Debido a que ambos métodos resultan en el **mismo diseño** no es de importancia cuál se utilizará. En este caso se aplicará el segundo ya que es más simple algebraicamente.

Dado que se quiere diseñar un filtro pasaalto con una frecuencia de corte en la banda de rechazo $\omega_s = 0,1\pi$ y una frecuencia de corte en la banda de paso $\omega_p = 0,2\pi$, primero se transformarán las especificaciones del filtro digital al tiempo continuo con $T_s = 2$:

$$\Omega_s = \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = \tan\left(\frac{0,1\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\Omega_s = 0,1584}$$

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = \tan\left(\frac{0,3\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\Omega_p = 0,5095}$$

Empleando la transformación $s \rightarrow 1/s$ para mapear las frecuencias del filtro pasaalto a frecuencias del filtro pasabajo, se tiene:

$$\Omega_p = \frac{1}{0,5095} \Rightarrow \boxed{\Omega_p = 1,9627}$$



$$\Omega_s = \frac{1}{0,1584} \Rightarrow \boxed{\Omega_p = 6,3138}$$

Luego, el factor de selectividad del filtro Chebyshev tipo I será:

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{1,9627}{6,3138} \Rightarrow \boxed{k = 0,3109}$$

Con $\delta_p = \delta_s = 0,1$ el factor de discriminación es:

$$d = \left[\frac{(1 - \delta_p)^2 - 1}{\delta_s^{-2} - 1} \right]^{1/2} = \left[\frac{(1 - 0,1)^2 - 1}{0,1^{-2} - 1} \right]^{1/2} \Rightarrow \boxed{d = 0,04867}$$

Por lo tanto, el orden del filtro requerido es:

$$N = \frac{\cosh^{-1}(1/d)}{\cosh^{-1}(1/k)} = \frac{\cosh^{-1}(1/0,04867)}{\cosh^{-1}(1/0,3109)} \Rightarrow \boxed{N = 2,03}$$

Se redondea hacia abajo, resultando el orden del filtro en $N = 2$. Con un filtro de Chebyshev de 2^{do} orden se está lo suficientemente cerca como para cumplir con las especificaciones-

El próximo paso es diseñar un filtro de Chebyshev tipo I pasabajo de 2^{do} orden con los siguientes datos:

$$\begin{aligned} 0,9 &\leq |H_a(j\Omega)| \leq 1 & 0 &\leq \Omega \leq \Omega_p \\ |H_a(j\Omega)| &\leq 0,1 & \Omega_s &\leq \Omega \end{aligned}$$

donde $\Omega_p = 1,9627$ y $\Omega_s = 6,3138$. Ahora se debe hallar el factor ε :



$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = 1 - \delta_p$$

Despejando:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{(1-\delta_p)^2} - 1 = \frac{1}{(1-0,1)^2} - 1 = 0,2346$$

Para un filtro de Chebyshev de 2^{do} orden el polinomio es:

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

Potenciando $T_2(x)$ se tiene:

$$T_2^2(x) = 4x^4 - 4x^2 + 1$$

Y por lo tanto, la magnitud al cuadrado de la respuesta en frecuencia del filtro de Chebyshev será:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [4(\Omega/\Omega_p)^4 - 4(\Omega/\Omega_p)^2 + 1]}$$

Sustituyendo Ω_p y ε por sus valores:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1,2346 - 0,2436\Omega^2 + 0,0632\Omega^4}$$

Luego es necesario encontrar $H_a(s)H_a(-s)$ sustituyendo $\Omega = -js$:

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|_{\Omega=-js}^2 = \frac{1}{1,2346 + 0,2436s^2 + 0,0632s^4}$$



Factorizando el polinomio denominador, se encuentra que hay dos raíces en el semiplano izquierdo de s :

$$s_1 = -1,163 + j1,7811 \quad s_2 = s_1^* = -1,163 - j1,7811$$

Por lo tanto, el filtro resultante es:

$$H_a(s) = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{s_1 s_1^*}{(s - s_1)(s - s_1^*)} = \frac{3,9778}{s^2 + 2,2375s + 4,4185}$$

Ahora se transforma este filtro pasabajos en un filtro pasaaltos utilizando la transformación $s \rightarrow 1/s$:

$$H_a(s) = \frac{3,9778s^2}{1 + 2,2327s + 4,4185s^2}$$

Finalmente, aplicando la transformada bilineal se obtiene:

$$H_a(s) = \frac{3,9778 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2}{1 + 2,2327 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + 4,4185 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2}$$

Multiplicando numerador y denominador por $(1+z^{-1})^2$ se obtiene:

$$H_a(s) = \frac{3,9778(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2 + 2,2327(1+z^{-1})(1-z^{-1}) + 4,4185(1-z^{-1})^2}$$

Resolviendo, la función de transferencia del filtro digital pasaalto es:



$$H_a(s) = \frac{0,52(1 - 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 0,894z^{-1} + 0,4164z^{-2}}$$

La respuesta en frecuencia resultante es:

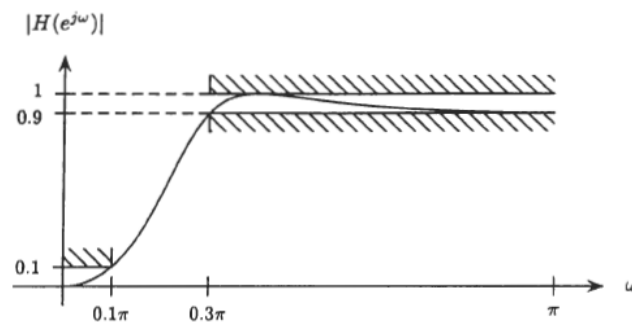


Figura 9. Respuesta en frecuencia del filtro pasaalto digital resultante (Monson Hayes, 1999)

A modo de verificación, se computará la magnitud de la respuesta en frecuencia para $\omega = 0,1\pi$:

$$\left| H_a(e^{j\omega}) \right|_{\omega=0,1\pi} = 0,1044$$

valor muy próximo al requerido. Hay que recordar que el orden del filtro se redondeó hacia abajo para obtener un filtro más sencillo a expensas del cumplimiento exacto de las especificaciones.

Para $\omega = 0,9\pi$:

$$\left| H_a(e^{j\omega}) \right|_{\omega=0,9\pi} = 0,9044$$

Ejercicios teóricos

1. a. Se desea diseñar un filtro digital pasabajo cuya frecuencia de corte en la banda de paso sea $\omega_p = 0,375\pi$ con $\delta_p = 0,01$ y frecuencia de corte en la banda de rechazo $\omega_s = 0,5\pi$ con $\delta_s = 0,01$.

Utilizar la transformada bilineal.



b. Qué orden de filtro es necesario para cumplir con las especificaciones para un diseño de Butterworth, Chebyshev y elíptico.

2. Empleando el método de invarianza al impulso, diseñar un filtro digital a partir del siguiente prototipo analógico:

$$H_a(s) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$$

3. Se desea diseñar un filtro pasabajo en tiempo discreto utilizando el método de invarianza al impulso sobre un filtro continuo de Butterworth cuya función de transferencia es:

$$|H_a(s)|^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

Las especificaciones del filtro de tiempo discreto son:

$$\begin{aligned} 1 - \delta_p &\leq |h(e^{j\omega})| \leq 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ |H(e^{j\omega})| &\leq \delta_s & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{aligned}$$

Demostrar que el diseño no es afectado por el periodo de muestreo empleado en el método de invarianza al impulso.

Bibliografía

Monson H. Hayes, 1999. Digital signal processing. Editorial Schaum's outline