Onde Elettromagnetiche e Metodo delle Differenze Finite

Cristian Caruso

Maggio 2025

1 L'equazione delle onde elettromagnetiche

Nel vuoto, le equazioni di Maxwell assumono la forma:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

Applichiamo l'identità vettoriale:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \vec{E}\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

(dato che $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ nel vuoto)

Calcoliamo il secondo membro:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Otteniamo quindi l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{5}$$

Questa è l'equazione di un'onda vettoriale, estensione tridimensionale dell'equazione di D'Alembert. Essa mostra che il campo elettrico (e, analogamente, il campo magnetico) si propaga come un'onda nel vuoto.

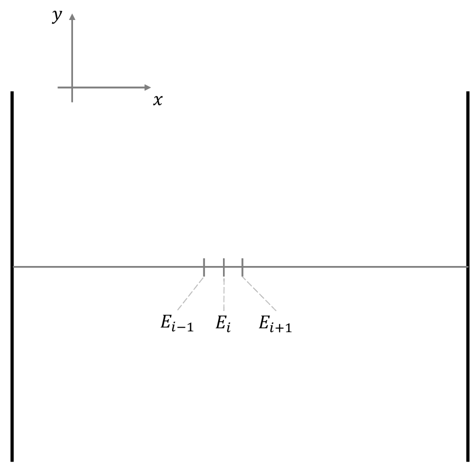

Figure 1: Rappresentazione schematica della configurazione del problema

2 Formulazione del problema

Consideriamo due lastre metalliche parallele e un'onda elettromagnetica piana che si propaga perpendicolarmente a esse. Supponiamo che il campo elettrico sia polarizzato lungo l'asse y:

$$\vec{E}(x,t) = E(x)e^{-i\omega t}\hat{\jmath}$$

Poiché la dipendenza spaziale è solo lungo x, il laplaciano si riduce a:

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2}e^{-i\omega t}\hat{\jmath} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E(x)e^{-i\omega t}\hat{\jmath}$$

Sostituendo nell'equazione delle onde otteniamo:

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} = -\mu_0\varepsilon_0\omega^2 E(x) \tag{6}$$

3 Discretizzazione con il metodo delle differenze finite

Dividiamo l'intervallo $[0, L]$ (escludendo le estremità in cui $E = 0$ per le condizioni di contorno) in $n-1$ punti interni $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, con passo Δx. Denotiamo con E_i il valore del campo elettrico nel punto x_i.

Approssimiamo la derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{E_{i+1}-E_i}{\Delta x} - \frac{E_i - E_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{-2E_i + E_{i+1} + E_{i-1}}{\Delta x^2} \tag{7}$$

L'equazione diventa:

$$\frac{E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}}{\Delta x^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 E_i \tag{8}$$

che riscritta è:

$$-E_{i-1} + 2E_i - E_{i+1} = \lambda E_i \quad \text{con} \quad \lambda = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \Delta x^2 \tag{9}$$

4 Formulazione matriciale del problema

La discretizzazione conduce a un problema agli autovalori della forma:

$$\mathbf{M}\mathbf{E} = \lambda \mathbf{E}$$

dove $\mathbf{E}$ è il vettore colonna dei valori E_i:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_{n-1} \end{pmatrix} \tag{10}$$

e la matrice $\mathbf{M}$ ha la forma tridiagonale:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Il problema si riduce quindi alla determinazione degli **autovalori** λ e **autovettori** $\mathbf{E}$ della matrice $\mathbf{M}$, che rappresentano i **modi normali di oscillazione** del campo elettrico nella cavità delimitata dalle piastre.

5 Inserimento di dielettrici

Analizziamo ora il caso in cui siano presenti materiali dielettrici con costanti dielettriche relative differenti. Supponiamo, ad esempio, di avere un tratto di materiale (ad esempio acqua, con costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 80$, nell'intervallo $0.3 \leq x \leq 0.6$).

In presenza di dielettrici, l'equazione 6 si modifica diventando:

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(x) \omega^2 E(x) \tag{12}$$

La sua forma discretizzata diventa:

$$E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \Delta x^2 \varepsilon_i E_i \tag{13}$$

In forma matriciale, possiamo riscrivere l'equazione come:

$$\mathbf{M}\mathbf{E} = \lambda \mathbf{D}\mathbf{E} \tag{14}$$

dove:

- $\lambda = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \Delta x^2$
- **M** è la matrice tridiagonale definita in precedenza
- **E** è il vettore definito in precedenza
- **D** è una matrice diagonale contenente le ε_i lungo la diagonale principale:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix} \tag{15}$$

La matrice inversa $\mathbf{D}^{-1}$ è anch'essa diagonale, con gli inversi delle ε_i sulla diagonale:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\varepsilon_{n-1}} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Moltiplicando entrambi i membri per $\mathbf{D}^{-1}$, otteniamo:

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{E} = \lambda \mathbf{E} \tag{17}$$

Definiamo quindi:

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\varepsilon_1} & -\frac{1}{\varepsilon_1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon_2} & \frac{2}{\varepsilon_2} & -\frac{1}{\varepsilon_2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon_3} & \frac{2}{\varepsilon_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon_{n-1}} & \frac{2}{\varepsilon_{n-1}} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Otteniamo infine una nuova equazione agli autovalori:

$$\mathbf{T}\mathbf{E} = \lambda \mathbf{E} \tag{19}$$

In altre parole, stiamo cercando gli autovalori e gli autovettori della matrice **T**, i cui autovettori rappresentano i modi normali di oscillazione del campo elettrico in presenza di materiali dielettrici.

6 Spiegazione del codice Python

Ora vogliamo mostrare a schermo i modi di oscillazione del campo elettrico. Innanzittutto importiamo le librerire necessarie:

```
import numpy as np
from scipy import linalg
from scipy.sparse import diags
from matplotlib import pyplot as plt
```

A questo punto definiamo le variabili necessarie, come il numero N di suddivisioni (consideriamo solo i punti interni), la lunghezza L e i valori x_1 e x_2 all'interno dei quali abbiamo il dielettrico.

```
N = 100
L = 1
x1 = 0.3
x2 = 0.6
```

Suddividiamo, usando *linspace* di *numpy*, la lunghezza L in N parti. Successivamente, usando *where*, indichiamo dove si trova il dielettrico.

```
x = np.linspace(0, L, N)
e_r = np.where((x<x1) | (x>x2), 1.0, 80)
```

Per costruire la matrice, innanzitutto definiamo le diagonali. Sulla principale avremo 2 diviso la costante dielettrica, sulla diagonale adiacente superiore e inferiore -1 diviso la costante dielettrica. A queste due, però, bisogna togliere rispettivamente il valore finale e quello iniziale.

```
d = 2 / e_r
d_sup = -1 / e_r[:-1]
d_inf = -1 / e_r[1:]

M = diags([d, d_sup, d_inf], offsets = [0,1,-1]).toarray()
```

Per calcolare e gli autovalori e gli autovettori e poi ordinarli usiamo *linalg*:

```
eig_val, eig_vect = linalg.eig(M)

eig_vect = eig_vect[:, eig_val.real.argsort()]
```

Infine, andiamo a mostrare il grafico:

```
    plt.figure(num="Modi di oscillazione")


for i in range(4):
plt.plot(x, eig_vect[:,i], label = f"Modo {i+1}")


plt.legend()
```

```python
plt.grid(True)
plt.title("Ricostruzione del campo con modi normali")
plt.xlabel("Posizione x")
plt.ylabel("Modo normale E")
plt.axvline(0, color='gray', linewidth=2)
plt.axvline(L, color='gray', linewidth=2)
plt.axvspan(x1, x2, color='lightblue', alpha=0.4, label='
    Dielettrico')
plt.show()
```

7 Comportamento del campo elettrico nel dielettrico

Quando un'onda elettromagnetica si propaga in un mezzo dielettrico lineare con indice di rifrazione $n > 1$, la frequenza ν rimane invariata rispetto a quella nel vuoto, poiché è determinata dalla sorgente. Tuttavia, la velocità dell'onda si riduce a

$$v = \frac{c}{n},$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto. Di conseguenza, la lunghezza d'onda λ nel mezzo dielettrico si modifica secondo la relazione

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n},$$

dove $\lambda_0 = c/\nu$ è la lunghezza d'onda nel vuoto. Di conseguenza, i modi normali del campo elettrico risultano più fitti nella regione contenente il dielettrico. Questo comportamento è evidente nel confronto tra il grafico dei modi normali con (3) e senza (2) dielettrico, dove si osserva chiaramente una maggiore densità di oscillazioni del campo all'interno della zona dielettrica. Tale effetto è coerente con la teoria ondulatoria e le equazioni di Maxwell in mezzi materiali.

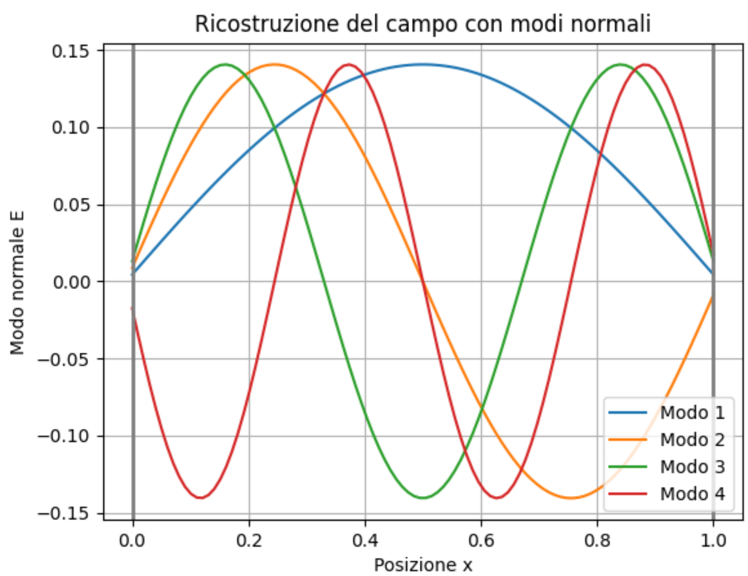

Figure 2: Campo elettrico senza dielettrico

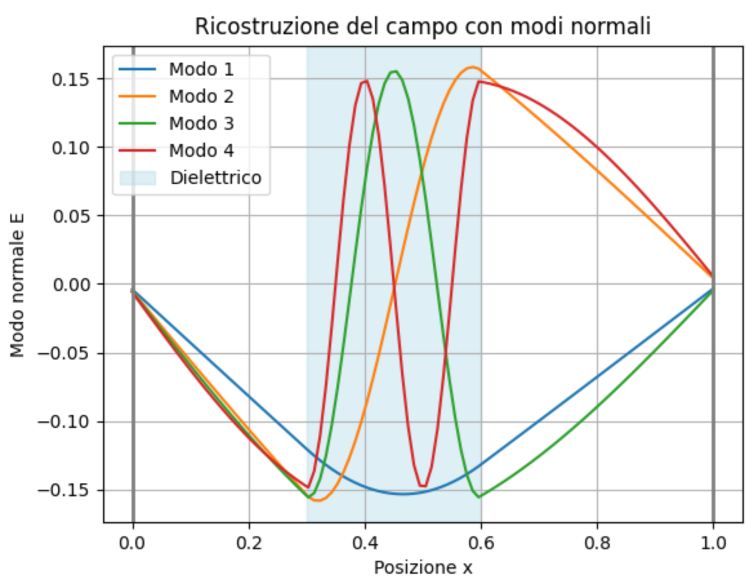

Figure 3: Campo elettrico con dielettrico