Aufgabe 1.3.)

1.) numerische Lösung der Dgl 3. Ordnung

$$\dddot{x} + \cos(x)^2 \ddot{x} + \dot{x} + e^{-x} u = 0$$

mit $\ddot{x}(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -2$, $x(0) = 3$

$\Rightarrow$ Dgl 3. Ordnung in Dglsystem 1. Ordnung umformen

3 neue Zustände einführen (weil Dgl 3. Ordnung)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ x_3 &= \ddot{x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dddot{x} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -\cos(x_1)^2 x_3 - x_2 - e^{-x_1} \cdot u \end{pmatrix}$$

numerische Lösung mittels sukzessiver Approx. nach Picard:

allg.: $y' = f(x, y)$ und $y(x_0) = y_0$ ist gleichwertig zu

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

$\Rightarrow$

$$x_1(t) = x_{1,0} + \int_0^t x_2(\tau)\, d\tau$$

$$x_2(t) = x_{2,0} + \int_0^t x_3(\tau)\, d\tau$$

$$x_3(t) = x_{3,0} + \int_0^t -\cos(x_1)^2 x_3(\tau) + x_2(\tau) + e^{-x_1(\tau)} u \, d\tau$$

Aufgabe 1.3)

2.) Linearisierung des Dglsystems 1. Ordnung um die Ruhelage $x_R = 0 \quad u_R = 0$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = f(x,u) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + B \cdot u$$

$$h(x,u) = C \cdot x$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\cos(x_1)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-x_1} \end{bmatrix} \cdot u}$$

$$A_{Lin} = \frac{\partial}{\partial x} f(x_R, u_R) = \cancel{\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ -2\cos(x_{1R}) \cdot (-\sin(x_{1R})) \cdot & & \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2\cos(x_{1R}) \cdot (-\sin(x_{1R})) \cdot x_{3R} + e^{-x_{1R}} \cdot u_R & -1 & -\cos(x_{1R})^2 \end{bmatrix}$$

$$B_{Lin} = \frac{\partial}{\partial u} f(x_R, u_R) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-x_{1R}} \end{bmatrix}$$

$$C_{Lin} = \frac{\partial}{\partial x} h(x_R, u_R) = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \Delta u$$

$$\Delta y = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \Delta x$$

Stabilität: alle Eigenwerte < 0, dann stabil

Eigenwerte: $\det(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$$= (-\lambda^2 \cdot (-1-\lambda) + 0 + 0) - (0 + \lambda) = +\lambda^2 + \lambda^3 - \lambda$$

$$= \lambda \cdot (\lambda^2 + \lambda - 1)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow$ nicht stabil!