



**INAOE**

# **Espacios de Color RGB, HSI y sus Generalizaciones a $n$ -Dimensiones**

por

**Marco Antonio Alonso Pérez**

Tesis sometida como requisito parcial para  
obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS EN LA  
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y  
Electrónica**

Agosto 2009

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

**Dr. José Javier Báez Rojas, INAOE**

©INAOE 2009

El autor otorga al INAOE el permiso de  
reproducir y distribuir copias en su totalidad o en  
partes de esta tesis



## RESUMEN

Esta tesis doctoral trata con los espacios o modelos de color RGB (siglas del inglés: R -red-, G -green- y B -blue-), y HSI (iniciales de hue -tono-, saturation -saturación- e intesity -intensidad-), que usualmente se utilizan en el área del procesamiento digital de imágenes. Un espacio de color indica la manera en que un color está definido, y su objetivo es facilitar la especificación de los colores de una forma normalizada. Cada color en el modelo RGB tiene como componentes primarias al rojo, verde y al azul, y se forma por la mezcla aditiva de éstos. En el modelo HSI, los colores se caracterizan por su tono, saturación e intensidad; características relacionadas con la forma en que el ser humano percibe el color.

Las contribuciones científicas contenidas en este texto son las siguientes: *Conversión alternativa que va del espacio HSI al RGB*, aquí se muestra un nuevo método para obtener los valores de RGB a partir de los de HSI; *asignación de falso color a objetos en las imágenes RGB*, en este trabajo se cambia la tonalidad a objetos coloreados de manera uniforme dentro de una imagen; *modelos RGB y HSI generalizados*, se desarrolla una generalización de los espacios considerados, y se da la formulación que lleva del espacio que es la extensión de RGB al espacio HSI generalizado. De manera particular, esta conversión se aplica a imágenes que dependen de dieciséis colores primarios. Por último, se muestra una conversión inversa correspondiente a un caso particular del punto anterior (la conversión directa) que transforma el espacio HSI dependiente de cuatro colores primarios, al espacio aditivo de estos cuatro colores primarios, *conversión de  $HSI_4$  al espacio de color de 4-bandas*.

## ABSTRACT

This dissertation deals with RGB and HSI color spaces; these are usually applied to the area of digital image processing. A color model is an abstract mathematical model describing the way colors can be represented as tuples of numbers. The RGB color model is an additive color model in which red, green, and blue light are added together in various ways to reproduce a broad array of colors. The name of the model comes from the initials of the three additive primary colors, red, green, and blue. The HSI color model represents every color with three components: hue (H), saturation (S), intensity (I), attributes that correspond closely to the way humans perceive color.

The scientific contributions in this text are as follows: *Alternative conversion from HSI to RGB*, here is a new method to get the values RGB from HSI; *allocation of objects in a false-color images*, in this item we change the tone of the objects uniformly colored inside a digital image; *generalized models RGB and HSI*, we developed a generalization of the spaces considered and we give the conversion of the space that is the extension of RGB into HSI generalized space. This conversion is applied to images that depend on sixteen primary colors. Finally, we show an inverse conversion, which is corresponding to the direct conversion (particular case in point above) and transforms the HSI space, which in turn depends on four primary colors, into the additive space of these four colors.

# **AGRADECIMIENTOS**

## **A Dios:**

Por apoyarme, guiarme, iluminarme para poder alcanzar esta meta.

## **A mi director de tesis:**

Dr. José Javier Báez Rojas, por darme la oportunidad de trabajar con él y por compartirme los conocimientos necesarios para la realización de este trabajo de investigación.

## **A mis sinodales:**

Dr. Félix Aguilar Valdez, Dr. Alejandro Cornejo Rodríguez, Dr. Gonzalo Urcid Serrano, Dr. Francisco Javier Renero Carrillo y Dr. Jorge Carlos Conde Acevedo, por sus consejos y sugerencias para enriquecer el contenido de esta tesis.

## **Al CONACYT:**

Por brindarme el apoyo económico, sin el cual no me hubiera sido posible la adquisición y la contribución de nuevos conocimientos.

## **Al INAOE:**

Fue un honor y placer haber estudiado en esta institución, gracias.

## PREFACIO

Durante los últimos años, los dispositivos para la adquisición y visualización de imágenes multiespectrales (imágenes con más de tres colores primarios) han evolucionando, el objetivo es reproducir más colores reales; entre más colores primarios, se producirá una mayor gama de colores [1]. En un futuro próximo el ser humano podra ver más colores en las computadoras personales, en el cine, en la televisión, en los museos digitales, etc. En el Instituto Tecnológico de Tokio, junto con organizaciones gubernamentales de Japón, han sido desarrollados aparatos para la captura y visualización de imágenes multiespectrales en el visible con 8, 16 y 32 bandas. Estos han sido diseñados, construidos y patentados por Natural Vision Research Laboratory [1].

El campo del tratamiento digital de imágenes está intrínsecamente relacionado con las imágenes en color, esto se puede corroborar en los efectos visuales que muestran las películas, en especial, en las de ciencia ficción; en aplicaciones donde se pretende manipular el color, como en la creación de gráficos en color para animación [2]; en la industria para verificar que ciertos productos tengan un color determinado [3]; ventas por internet [4]; telemedicina [4]; en fin hay una amplia gama de aplicaciones [5]. El modelo de color HSI es ideal para llevar a cabo estas tareas, debido a que esta basado en las propiedades de la percepción del color del sistema visual del ser humano. El modelo HSI es el modelo de color RGB, sólo que transformado.

Por estas razones en este texto se han desarrollado herramientas matemáticas necesarias para procesar imágenes multiespectrales. Se ha extendido la definición de los espacios HSI y RGB, que les hemos denominamos  $HSI_n$  y espacio de  $n$  bandas de color, de mane-

---

ra respectiva. Así mismo, la transformación que va de  $\text{HSI}_n$  al espacio de  $n$  bandas, y la transformación inversa que conduce del espacio  $\text{HSI}_4$  al espacio de 4 bandas de color.

En el ámbito de las imágenes RGB, hemos desarrollado una conversión alternativa de HSI a RGB, que igualmente se puede ocupar para procesar éstas imágenes. Por otra parte, se muestra una aplicación del uso de HSI en la asignación de falso color a objetos dentro de las imágenes digitales RGB.

La tesis está organizada en nueve capítulos. El capítulo 1 introduce un panorama general acerca de los espacios de color RGB, HSI,  $n$  bandas de color, y el  $\text{HSI}_n$ . Del capítulo 2 al capítulo 4 presento los conceptos que ayudan a entender los términos relacionados con los espacios RGB y HSI, como ¿qué es subespacio vectorial?, ¿por qué vemos los colores?, ¿cómo se relacionan los espacios de color con las imágenes digitales?

La presentación del capítulo 2 que trata sobre vectores, la línea recta, el plano, y los espacios vectoriales, da la teoría necesaria para la comprensión, y el desarrollo matemático realizado en los restantes capítulos.

En el capítulo 3 se hace referencia al color. A través de sus páginas comprenderemos cómo es que vemos a los objetos coloreados por medio del ojo humano y cómo se puede registrar a cada color con un valor numérico. Esto último hace posible obtener los espacios de color.

La información del capítulo 4 define a las imágenes digitales, a los modelos RGB y HSI, y a la relación entre cada uno de ellos. También se ilustra la modelación matemática y las conversiones directa e inversa de ambos espacios.

A partir del capítulo 5 hasta el 8 se tiene el trabajo de investigación que he realizado en este doctorado. El capítulo 5 está dedicado a desarrollar un procedimiento alternativo, para encontrar los valores RGB partiendo de HSI.

Dentro del capítulo 6 se encuentra una aplicación del modelo HSI sobre imágenes

---

RGB. Ésta ilustra la manera en que se puede cambiar de color a objetos que están dentro de una escena.

El capítulo 7 es la parte trascendental de esta tesis, pues generaliza a los espacios HSI y RGB. Además se muestra la conversión directa entre ellos. Esta conversión abre las puertas al procesamiento digital de imágenes multiespectrales con fines similares al procesamiento de imágenes RGB, como por ejemplo a la segmentación y restauración de éstas.

Con el capítulo 8 se complementa un caso particular del capítulo 7. En otras palabras, aquí se da la conversión inversa que viene del espacio generalizado HSI, que lo hemos llamado  $\text{HSI}_4$  hacia el espacio que es la generalización del modelo RGB y lo hemos denominado espacio de color de 4 bandas. Con esta conversión, y haciendo  $n = 4$  en las transformaciones obtenidas en el capítulo 7 se tienen las conversiones directa e inversa necesarias para transformar las imágenes en 4 bandas de color.

Las conclusiones del trabajo realizado se encuentran en el capítulo 9.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>10</b>
<b>2. Vectores y Espacios Vectoriales</b>	<b>12</b>
2.1. Vectores . . . . .	12
2.2. La Línea Recta y el Plano . . . . .	16
2.3. Espacios Vectoriales . . . . .	17
2.3.1. Subespacios . . . . .	20
<b>3. El Color</b>	<b>21</b>
3.1. El Ojo Humano . . . . .	23
3.2. Mecanismo de la Percepción de los Colores de los Objetos . . . . .	24
3.3. Teoría Tricromática . . . . .	26
3.4. Leyes de Grassmann . . . . .	27
3.5. El Diagrama de Cromaticidad CIE . . . . .	28
<b>4. Espacios de color en el Procesamiento de Imágenes</b>	<b>33</b>
4.1. Representación Digital de las Imágenes . . . . .	34
4.2. Espacios de Color . . . . .	35
4.2.1. Espacio de Color RGB . . . . .	36
4.2.2. Espacio de Color HSI . . . . .	37
4.3. Conversión entre los espacios RGB y HSI . . . . .	40
4.3.1. Conversión de RGB a HSI . . . . .	40
4.3.2. Conversión de HSI a RGB . . . . .	44

---

## ÍNDICE GENERAL

<b>5. Conversión Alternativa de HSI a RGB</b>	<b>46</b>
5.1. Ejemplo . . . . .	52
<b>6. Asignación de falso color a objetos en las imágenes RGB</b>	<b>53</b>
6.1. Resultados . . . . .	55
<b>7. Modelos RGB y HSI Generalizados</b>	<b>65</b>
7.1. Espacio de Color de $n$ -Bandas . . . . .	66
7.2. Espacio de color $\text{HSI}_n$ . . . . .	67
7.3. Conversión del Espacio de $n$ -Bandas de Color al Espacio $\text{HSI}_n$ . . . . .	67
7.3.1. Intensidad y Tono . . . . .	70
7.3.2. Saturación . . . . .	76
7.4. Experimentos Numéricos . . . . .	78
<b>8. Conversión de <math>\text{HSI}_4</math> al espacio de color de 4-Bandas</b>	<b>87</b>
8.1. Ejemplos . . . . .	94
<b>9. Conclusiones</b>	<b>97</b>
9.1. Asistencia de Congresos y Publicaciones . . . . .	99
<b>Apéndice</b>	<b>101</b>
<b>A. Desarrollos Algebraicos para Hallar <math>H</math> y <math>S</math> en <math>n</math> Dimensiones</b>	<b>101</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Los espacios RGB y HSI, objetos de nuestro estudio, son modelos de color empleados en la reproducción del color. Un espacio de color indica la manera en que un color está definido, y su objetivo es facilitar la especificación de los colores de una forma normalizada [2]. El espacio RGB (R -red-, G -green-, B -blue-) se emplea en los monitores de una computadora, televisores, proyectores de vídeo y todos aquellos sistemas que utilizan combinaciones de materiales que fosforecen en el rojo, verde y azul [6]. Todos los colores posibles que pueden ser creados por la mezcla de estas tres luces de color son aludidos como el espectro de color de estas tres luces. Los colores rojo, verde y azul fueron escogidos porque cada uno corresponde aproximadamente con uno de los tres tipos de conos sensitivos al color en el ojo humano [7]. El modelo matemático de este espacio es el llamado cubo unitario de color, que es un cubo formado por los vectores unitarios en el espacio tridimensional.

Por otra parte, el modelo HSI, por sus siglas en inglés, H -hue-, S -saturation-, I -intensity-, y que traducidas al español significan: tono, saturación e intensidad, es un espacio muy usado en el procesamiento digital de imágenes [2]. El tono (H), se refiere a la longitud de onda dominante del color dentro del espectro visible. Es la percepción de un tipo de color, normalmente la que uno distingue en un arcoíris. La palabra "tono" se emplea debido a que la luz al igual que el sonido es una combinación de tonos de diferentes frecuencias. La luz es entonces una combinación de colores, cada color de distinta frecuencia y longitud de onda. La Saturación (S), indica la cantidad del color o a la pureza

---

de éste. Va de un color claro a un color más vivo (rosa a rojo). También se puede considerar como la mezcla de un color con blanco o gris. Intensidad ( $I$ ), es la intensidad de luz de un color. Dicho de otra manera, es la claridad u oscuridad de un color, está determinado por la cantidad de luz que un color tiene. El modelo matemático es una estructura doble piramidal triangular, en donde el tono es una medida angular, la saturación es una medida longitudinal, y la intensidad es un valor promedio.

Los espacios de color de  $n$  bandas y  $\text{HSI}_n$  son entidades matemáticas que hemos definido y desarrollado; son una generalización de los espacios RGB y HSI. El espacio de  $n$  bandas de color indica que un punto de color perteneciente a él, es el resultado de la combinación aditiva de  $n$  colores primarios. El modelo matemático es un subespacio vectorial unitario del espacio Euclíadiano real  $n$ -dimensional.

$\text{HSI}_n$  tiene las mismas características que el HSI: tono, saturación e intensidad. Además,  $\text{HSI}_n$  está en términos del espacio de  $n$  bandas de color, y como resultado del desarrollo matemático, se tiene que  $n$  se relaciona con la forma del espacio;  $\text{HSI}_n$  toma la forma de una doble pirámide  $n$  angular. Por ejemplo, para  $n = 3$ , se obtiene la estructura de una doble pirámide triangular, véase la Fig. 4.3; si  $n = 4$ , la estructura es una doble pirámide cuadrangular (Fig. 8.1), y así sucesivamente.

El espacio HSI es ampliamente utilizado en el procesamiento digital de imágenes. El espacio  $\text{HSI}_n$  puede ser empleado de la misma manera, por tener las mismas características de HSI. El procesamiento digital de imágenes consiste en realizar operaciones sobre un conjunto de datos obtenidos de las imágenes, con el fin de mejorar la imagen para alguna aplicación en particular, ó para extraer algún tipo de información útil de ella.

# **Capítulo 2**

## **Vectores y Espacios Vectoriales**

### **2.1. Vectores**

Los vectores son útiles en la geometría, pues la notación vectorial permite escribir muchas fórmulas complicadas de una manera compacta; con esta forma se puede tratar con problemas difíciles. Por ejemplo, en física muchas de sus leyes implican relaciones geométricas; los vectores sirven para representar variables físicas [8]. A veces la forma vectorial de una ley física permite ver relaciones o simetrías que de otro modo estarían dadas en términos de ecuaciones algebraicas elaboradas. En este capítulo se estudiarán algunas propiedades de los vectores que se usarán en el desarrollo de esta tesis.

Físicamente un vector se considera como una magnitud dirigida, y geométricamente como un segmento dirigido [10]. Los vectores se representan como un segmento rectilíneo dirigido, con una punta de flecha en un extremo que apunta en la dirección del vector, mientras que la longitud del segmento representa su magnitud. La fuerza tiene magnitud, newtons ( $\text{kg m/seg}^2$ ) por ejemplo [11] y dirección; por lo tanto puede representarse como un vector. Las cantidades que se comportan como desplazamientos se llaman vectores, pues la palabra vector significa portador en latín; los biólogos usan el término vector para significar un insecto, un animal u otro agente que porta una causa de enfermedad de un organismo a otro [9]. Así, geométricamente un vector es un desplazamiento que traslada un punto  $(x, y, z)$  hacia otro  $(x', y', z')$ , y se representa por el segmento que une a estos

dos puntos con la punta de flecha en  $(x', y', z')$ , Fig. 2.1.

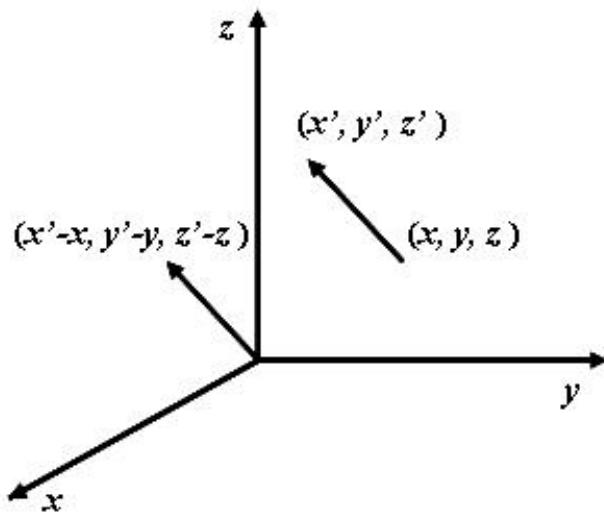


Figura 2.1: Representación gráfica de los vectores. Un vector se representa como un segmento con dirección y sentido, dibujado como una flecha. Su largo representa la magnitud y la punta de flecha indica su sentido.

A los vectores se les denotará con negritas, tales como  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . Se dice que dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son iguales si tienen la misma magnitud y la misma dirección [12]. Por tanto, el vector  $\mathbf{a}$  que va desde  $(x_1, y_1, z_1)$  hasta  $(x'_1, y'_1, z'_1)$  es igual al vector  $\mathbf{b}$  que va de  $(x_2, y_2, z_2)$  hasta  $(x'_2, y'_2, z'_2)$  si  $x'_1 - x_1 = x'_2 - x_2, y'_1 - y_1 = y'_2 - y_2$ , y  $z'_1 - z_1 = z'_2 - z_2$ , ya que entonces tendrían la misma longitud y dirección. Esto permite considerar a todos los vectores como si provinieran del origen (Fig. 2.1).

Multiplicar un vector  $\mathbf{a}$  por un escalar  $\alpha$  distinto de cero,  $\alpha\mathbf{a}$ , tiene el efecto de multiplicar la longitud del vector por el valor absoluto del escalar. Si  $\alpha > 0$  el desplazamiento es en la dirección de  $\mathbf{a}$ , y si  $\alpha < 0$  en la dirección opuesta.

**Definiciones 2.1.1** Si  $\mathbf{a} = (x, y, z)$  y  $\mathbf{b} = (x', y', z')$ , entonces

1.  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  significa  $x = x', y = y', z = z'$ .
2.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x + x', y + y', z + z')$ .
3. Si  $\alpha$  es un escalar, entonces  $\alpha\mathbf{a} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ .
4.  $-\mathbf{a}$  significa  $(-1)\mathbf{a} = (-x, -y, -z)$
5.  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ .

La suma de vectores se puede considerar como suma de desplazamientos [13], si el vector  $\mathbf{a}$  es un desplazamiento desde un punto P hasta un punto Q, y el vector  $\mathbf{b}$  es un desplazamiento que va de Q a R, entonces la suma es el desplazamiento que se origina en P y termina en R [Fig. 2.2(a)]. Esto equivale a la regla del paralelogramo en el plano que contiene a los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . Al formar el paralelogramo que tiene como a un lado a  $\mathbf{a}$  y como lado adyacente a  $\mathbf{b}$ , la suma es la diagonal del paralelogramo. Ver Fig. 2.2(b).

### Teorema 2.1.1

1.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  (Propiedad conmutativa).
2.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  (Propiedad asociativa).
3. Existe un único vector  $\mathbf{0}$  para el cual  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$  (Elemento neutro).
4. Para cada  $\mathbf{a}$  existe un vector único  $-\mathbf{a}$  tal que  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$  (Inverso aditivo).

Hay varias formas de medir el tamaño de un vector. Por ejemplo el valor absoluto del máximo de las componentes, ésta forma origina un espacio vectorial llamado de Minkowski [14]. Nosotros usaremos la longitud o norma euclíadiana que se define por

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.1)$$

A los vectores con longitud igual a uno se les llama vectores unitarios [15]. Los vectores unitarios  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  se les denomina vectores unitarios canónicos y tienen la propiedad de que cualquier vector puede ser expresado de manera única en términos de éstos.

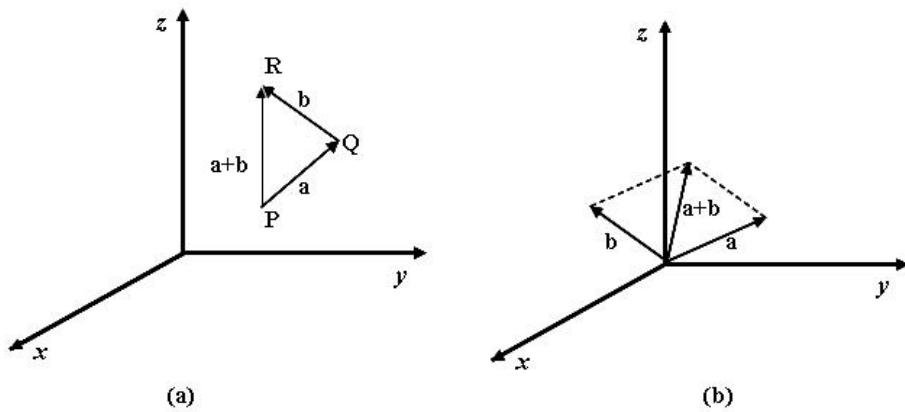


Figura 2.2: Suma de vectores. En (a), la suma se puede considerar como suma de desplazamientos; En (b), para realizar la suma gráfica de dos vectores, se utiliza el método del paralelogramo.

Los teoremas que se verán son básicos en el álgebra lineal, las demostraciones de la mayoría son fáciles, se pueden consultar por ejemplo en [10].

**Teorema 2.1.2**  $\mathbf{a} = (x, y, z)$  si y sólo si  $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ .

**Definición 2.1.2** El *producto punto o escalar* de dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  está dado por  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = xx' + yy' + zz'$ .

**Teorema 2.1.3** Sean  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  dos vectores diferentes de cero, si  $\theta$  es el ángulo entre ellos entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta, \text{ para } 0 \leq \theta \leq 180. \quad (2.2)$$

Si  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , se concluye que uno de los vectores vale cero ó que  $\theta = \pi/2$ , y se dice que los vectores son ortogonales [13]. Si en un conjunto de vectores todo par de vectores es ortogonal, dicho conjunto recibe el nombre de conjunto ortogonal de vectores. En particular, el conjunto  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  es un conjunto ortogonal.

## 2.2. La Línea Recta y el Plano

Para formular la regla por la cual un punto que está en movimiento describe una recta se hace usando la interpretación geométrica de la suma vectorial y de la multiplicación por un número escalar [16]. De la Fig. 2.3 se observa que cualquier punto de una recta  $l$  que pase por el extremo del vector  $\mathbf{a}$  en la misma dirección de  $\mathbf{b}$  es de la forma  $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ . Así, la recta  $l$  se expresa paramétricamente como

$$l(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} \quad (2.3)$$

Conforme  $t$  tiende a infinito el punto  $l(t)$  se aleja del extremo de  $\mathbf{a}$  en la dirección de  $\mathbf{b}$ ; cuando  $t$  tiende a menos infinito,  $l(t)$  se aleja del punto final de  $\mathbf{a}$  en la dirección de  $-\mathbf{b}$ .

Para nuestro fin, nos interesa hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos finales de dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . Como  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  es paralelo al segmento de recta dirigido que va de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , se obtiene que la parametrización buscada es

$$l(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}). \quad (2.4)$$

De la Fig. 2.4, se deduce que cualquier punto de un plano generado por dos vectores es de la forma  $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  no son colineales y  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares. La ecuación paramétrica del plano que pasa por un punto  $\mathbf{P}_0$  y es paralelo a otro plano puede escribirse como

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}. \quad (2.5)$$

La ecuación paramétrica del plano que pasa por tres puntos finales de tres vectores no alineados  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  es

$$\mathbf{P} = \mathbf{a} + \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \beta(\mathbf{c} - \mathbf{a}). \quad (2.6)$$

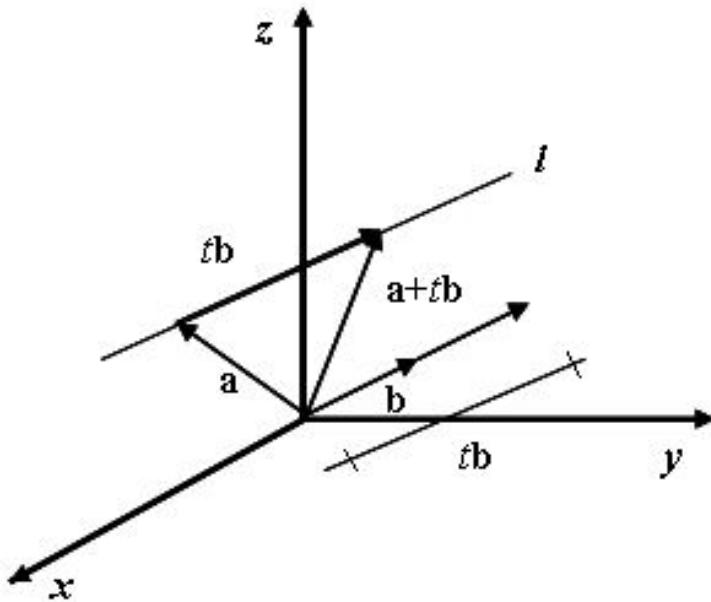


Figura 2.3: Representación gráfica de la recta. Cualquier punto de la recta  $l$  que pase por el extremo de  $\mathbf{a}$ , y en la misma dirección de  $\mathbf{b}$  es de la forma  $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ .

## 2.3. Espacios Vectoriales

Hemos visto que los vectores en el espacio (espacio  $\mathbb{R}^3$ ) tienen propiedades interesantes. Ante la adición, los vectores comutan y obedecen la ley de la asociatividad, se pueden multiplicar vectores por escalares, obteniéndose varias leyes de distribución [10]. A  $\mathbb{R}^3$  se le llama espacio vectorial. Intuitivamente, puede decirse que un espacio vectorial es un conjunto de objetos que obedecen reglas como las que se han descrito. Los espacios dimensionales de mayor tamaño son más difíciles de imaginar, pero el formalismo es idéntico al de  $\mathbb{R}^3$ . Se dará la definición para espacios vectoriales arbitrarios [10], para mostrar que existen diferentes tipos. Si se establece un resultado con respecto a estos espacios en general, dicho resultado puede aplicarse a todo espacio vectorial.

**Definición 2.3.1** Un *espacio vectorial real*  $V$  es un conjunto de objetos, denominados

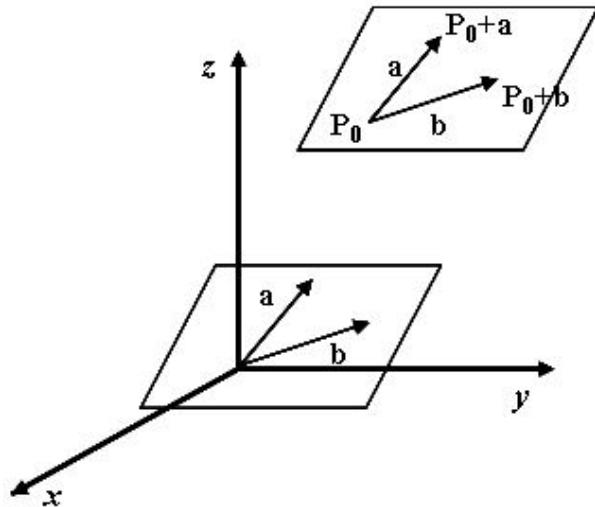


Figura 2.4: El plano. La ecuación paramétrica del plano que pasa por un punto  $\mathbf{P}_0$  y es paralelo a otro plano puede escribirse como  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ .

vectores, junto con dos operaciones llamadas adición y multiplicación que satisfacen los diez axiomas que se enuncian a continuación.

*Nota:* La palabra real aquí significa que los escalares empleados son números reales, pues pueden ser empleados números complejos.

Axiomas de un espacio vectorial.

1. Si  $\mathbf{a}$  pertenece a  $V$  y  $\mathbf{b}$  pertenece a  $V$ , entonces  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  pertenece a  $V$  (Propiedad cerradura de la adición).
2. Si  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  son elementos cualesquiera de  $V$ , entonces  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  (Asociatividad de la adición).
3. Existe un vector  $\mathbf{0}$  en  $V$  tal que para todo  $\mathbf{a}$  que está en  $V$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$  (Identidad aditiva).
4. Si  $\mathbf{a}$  pertenece a  $V$ , existe un vector  $-\mathbf{a}$  en  $V$  tal que  $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$  (Inverso aditivo).

5. Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  están en  $V$ , entonces  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  (Ley conmutativa de la adición).
6. Si  $\mathbf{a}$  está en  $V$  y  $\alpha$  es un escalar, entonces  $\alpha\mathbf{a}$  está en  $V$  (Cerradura ante la multiplicación por un escalar).
7. Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  están en  $V$  y  $\alpha$  es un escalar, entonces  $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$  (Primera ley de distribución).
8. Si  $\mathbf{a}$  pertenece a  $V$  y  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares, entonces  $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$  (Segunda ley de distribución).
9. Si  $\mathbf{a}$  está en  $V$  y  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares, entonces  $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$  (Ley de la asociatividad de la multiplicación por un escalar).
10. Para todo vector  $\mathbf{a}$  en  $V$ ,  $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$  (Identidad multiplicativa).

Por mencionar algunos ejemplos, se tiene al espacio vectorial de las matrices reales cuadradas [10]; el conjunto de funciones continuas de valor real definidas en el intervalo  $[0,1]$ , en donde la operación suma se define como  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$  y el producto por un escalar como  $(\alpha f)(x) = \alpha[f(x)]$  [8]; el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a  $n$ , con coeficientes reales [10]; finalmente se menciona al espacio sobre el que vamos a trabajar, el espacio vectorial euclíadiano  $\mathbb{R}^n$  [16], este espacio es una extensión del espacio  $\mathbb{R}^3$ , consiste de la colección de todas las  $n$ -adas ordenadas de números reales  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , que satisface los diez axiomas, y la longitud de un vector  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  está dada por

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}. \quad (2.7)$$

Se ha visto que  $\mathbf{b}-\mathbf{a}$  es paralelo al segmento de recta dirigido que va del extremo de  $\mathbf{a}$  al extremo de  $\mathbf{b}$  y tienen la misma magnitud. Se sigue que la distancia del extremo de  $\mathbf{a}$  al extremo de  $\mathbf{b}$  es

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}. \quad (2.8)$$

### 2.3.1. Subespacios

Sea  $H$  un subconjunto no vacío de un espacio vectorial  $V$  y supóngase que  $H$  es en sí mismo un espacio vectorial ante las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas en  $V$ . Entonces se dice que  $H$  es un *subespacio* de  $V$  [17].

**Teorema 2.3.1** Un subconjunto no vacío de  $H$  del espacio vectorial  $V$  es un subespacio de  $V$  si se cumplen las dos regla de cerradura:

1. Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  pertenecen a  $H$ , entonces  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  pertenece a  $H$ .
2. Si  $\mathbf{a}$  está en  $H$ , entonces  $\alpha\mathbf{a}$  está en  $H$  para todo escalar  $\alpha$ .

**Definición 2.3.2** Sean  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  vectores en un espacio vectorial  $V$ , entonces cualquier expresión de la forma

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  son escalares, se le llama *combinación lineal* de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ .

**Definición 2.3.3** Se dice que los vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  en un espacio vectorial  $V$  *generan*  $V$  si todo vector de  $V$  se puede expresar como una combinación lineal de ellos.

**Definición 2.3.4** Sean  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  vectores de un espacio vectorial  $V$ . Entonces se dice que los vectores son *linealmente dependientes* si existen  $n$  escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  no todos ceros, tales que la combinación lineal

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = 0$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son *linealmente independientes*.

**Definición 2.3.5** Un conjunto de vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  es una *base* del espacio vectorial  $V$  si

1.  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  es linealmente independiente.
2.  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  genera  $V$ .

Para  $\mathbb{R}^n$  se demuestra que el conjunto de vectores denominados canónicos  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$  constituye una base [10].

# Capítulo 3

## El Color

En este capítulo se establecerán algunos conceptos básicos de la colorimetría, con objeto de entender por qué vemos en color; cómo es que se cuantifica el color. Este capítulo va a estar enfocado a la posterior aplicación de esta ciencia, a los modelos de color RGB, HSI y a las imágenes en color.

La *colorimetría* según la Sociedad Óptica de los Estados Unidos (OSA) es la ciencia de la medición de la luz en su aspecto de color, luminosidad y cromaticidad [18]. Esta definición implica que a la colorimetría le interesa descubrir una manera práctica de especificar el color de luces proveniente de los objetos.

El color es un atributo de la visión, es una sensación que es percibida por los órganos visuales [19]; está producida por los rayos luminosos y depende de su longitud de onda y de las características del órgano receptor [20]. Si el ser humano no tuviera ojos que detectan las radiaciones electromagnéticas visibles (Fig. 3.1), no sería posible identificar subjetivamente cada uno de los colores. Una definición del color es:

**Definición 3.0.6** *Color* es el atributo de la luz que hace corresponder únicamente a cada distribución espectral una sensación. Esta sensación está condicionada por la intensidad y duración del estímulo, el estado de adaptación del observador, el área de la retina afectada y el contraste luminoso y cromático con que se percibe [18].

Para una distribución espectral de una luz en la condición que se encuentre, se produce

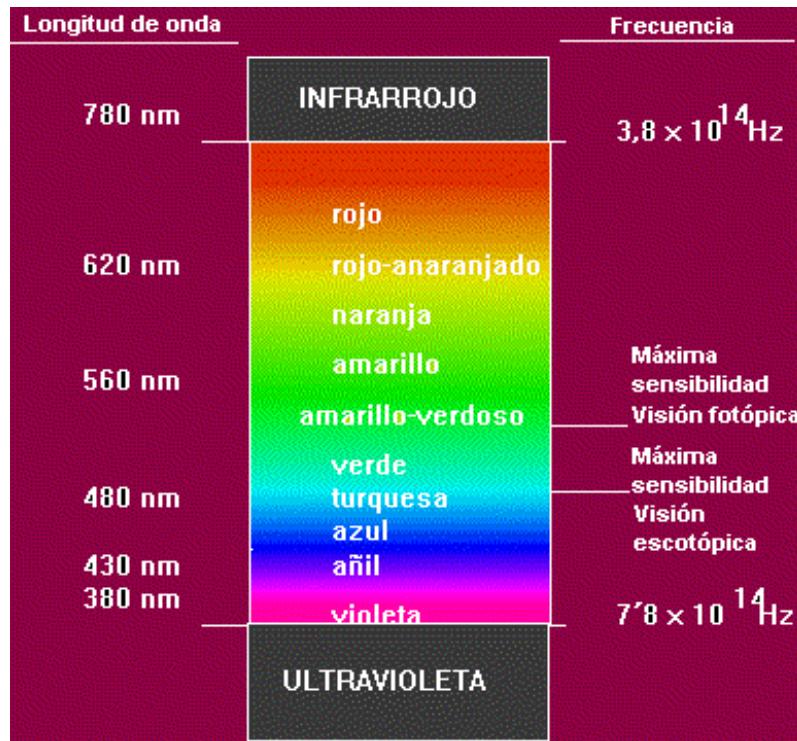


Figura 3.1: Espectro electromagnético [21]. La luz visible se encuentra dentro de la región del espectro electromagnético que el ojo humano es capaz de percibir, y sus longitudes de onda varían desde 380 a 780 nm.

una única sensación de color. Sin embargo, cada sensación de color puede ser reproducida por infinitas combinaciones de distribuciones spectrales. A esta característica se le denomina *metamerismo* [20].

El color es un fenómeno físico-químico [22], asociado a las infinitas combinaciones de la luz, relacionado con las diferentes longitudes de onda en la zona visible del espectro electromagnético que perciben las personas y animales a través de los órganos de la visión [23], como una sensación que permite diferenciar los objetos con mayor precisión. ¿Cómo puede el ojo humano ver estas ondas y distinguirlas unas de otras? La respuesta a esta cuestión se encuentra dentro del ojo humano.

### 3.1. El Ojo Humano

Básicamente es un esferoide de 2 cm de diámetro que recoge la luz y la enfoca en su superficie posterior llamada retina [24], Fig. 3.2. Esta parte del ojo es la encargada de transformar la energía radiante en impulsos nerviosos que son transmitidos al cerebro mediante los nervios ópticos [22]. En la retina existen millones de células especializadas en detectar las longitudes de onda procedentes de nuestro entorno. Estas células son principalmente los *conos* y los *bastones* [20]. Los conos se concentran en una región cercana al centro de la retina llamada fóvea. Su distribución sigue un ángulo de alrededor de 2°, medidos desde la fóvea [25]. La cantidad de conos es de 5 millones y algunos de ellos tienen una terminación nerviosa que se dirige hacia el cerebro [26]. Los conos son sensibles a niveles altos de iluminación y al color y se han encontrado por lo menos tres tipos de conos sensibles a los colores rojo, verde y azul. Sus picos de absorción máxima se sitúan para cada uno de ellos en 440-550 nm para el pigmento azul, 520-540 nm para el verde y 550-560 nm para el rojo [18].

Los bastones se concentran en zonas alejadas de la fóvea y son los responsables de la visión nocturna. Aparentemente no son sensibles al color, aunque se piensa con algún fundamento que participan en el mecanismo de la detección del azul [18]. Los bastones comparten las terminaciones nerviosas que se dirigen al cerebro y, por consiguiente, su aportación a la definición espacial resulta poco importante [19]. La cantidad de bastones se sitúa alrededor de 100 millones [26]. Los bastones son mucho más sensibles que los conos a la intensidad luminosa, por lo que aportan a la visión del color aspectos como el brillo y la tonalidad [6].

Cuando el sistema de conos y bastones de una persona no es el correcto se pueden producir una serie de irregularidades en la apreciación del color, al igual que cuando las partes del cerebro encargadas de procesar estos datos están dañadas [24]. Esta es la explicación de fenómenos como el Daltonismo. Una persona daltónica no aprecia las gamas de colores, confundiéndo los rojos con los verdes [27], o los azules con los amarillos [24].

Debido a que el proceso de identificación de colores depende del cerebro y del sistema

### 3.2. MECANISMO DE LA PERCEPCIÓN DE LOS COLORES DE LOS OBJETOS

---

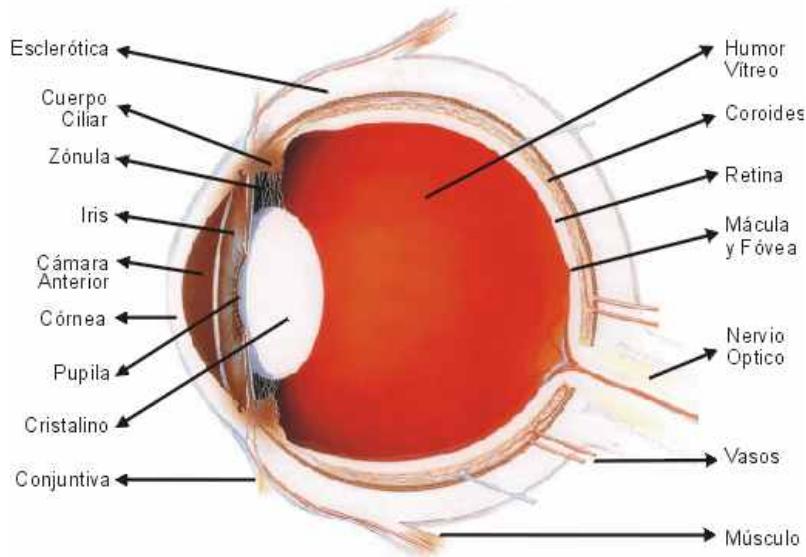


Figura 3.2: El ojo humano [28]. En la retina se encuentran las células receptoras denominadas conos y bastones muy sensibles a la luz.

ocular de cada persona en concreto, se puede medir con exactitud el espectro de un color determinado, pero el concepto del color producido es totalmente subjetivo, dependiendo de la persona en sí [22]. Dos personas diferentes pueden interpretar un color dado de forma diferente, y puede haber tantas interpretaciones de un color como personas hay.

## 3.2. Mecanismo de la Percepción de los Colores de los Objetos

La suma de todas las radiaciones del espectro visible en proporciones casi iguales da lugar a una sensación luminosa cuyo color es nulo (*luz blanca*), se dice que es una luz acromática [20]. No sólo con muchas radiaciones electromagnéticas de distinta lon-

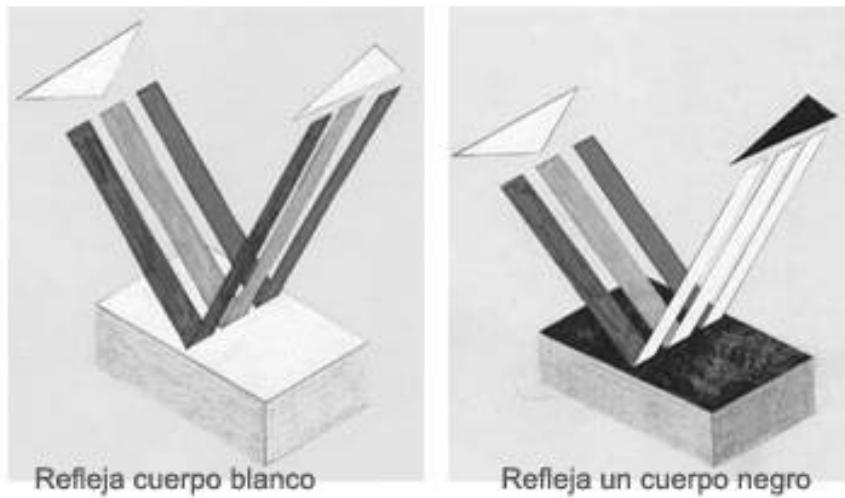


Figura 3.3: Un cuerpo se ve de color blanco por que éste refleja todos los colores del espectro; un cuerpo se ve negro por que absorbe todas las radiaciones electromagnéticas [29].

gitud de onda se puede producir esta luz acromática, sino también con la suma de tres radiaciones convenientemente elegidas [18]. Esta luz blanca es la que permite ver todos los colores que provienen de los objetos, ya que todos los cuerpos están constituidos por sustancias que absorben y reflejan las ondas electromagnéticas [20], es decir, absorben y reflejan colores. Cuando un cuerpo se ve blanco es porque recibe todos los colores del espectro, y los devuelve reflejados, generándose así la mezcla de los colores. Si el objeto se ve negro es porque absorbe todas las radiaciones electromagnéticas (todos los colores) y no refleja ninguno [31], Fig.3.3. Por ejemplo, el jitomate nos parece de color rojo, porque el ojo sólo recibe la luz roja reflejada por la hortaliza, absorbe los demás colores y refleja

solamente el rojo.

El mecanismo de mezcla de colores producidos por la reflexión de la luz sobre un cuerpo no es el mismo al de la obtención de colores por mezcla directa de rayos de luz [23]. De la experiencia propia de cada uno, los colores dependen de los objetos y de la luz que los ilumina.

### 3.3. Teoría Tricromática

Esta teoría tiene su origen en que nuestro sistema visual está basado en los tres sensores de color básicos rojo, verde y azul [24]. Sin importar el número de radiaciones electromagnéticas que lleguen a nuestro ojo, la respuesta de este será evaluada en términos de estos tres colores. Cuando vemos algún color sólo podemos diferenciar su tono, saturación e intensidad [20].

El *tono* es la percepción de un tipo de color que uno normalmente distingue en un arco iris [32]. La *saturación* es un atributo que da la medida de ausencia de blanco, gris, o negro; se refiere a la cantidad del color o a la pureza de éste [32], va de un color claro a un color más intenso (azul cielo a azul oscuro). La *intensidad* es el atributo del color que hace corresponder a cada uno de ellos una equivalencia con una escala de grises [32]. Sin embargo, no podemos resolver la composición espectral del estímulo. Por esta razón en la especificación del color se define al estímulo de acuerdo con la igualdad o diferencia de sensaciones [30]. Es por ello que la colorimetría es una ciencia psicofísica.

Un principio enunciado por Newton y reafirmado por Young y verificado en la práctica afirma que cualquier color puede ser igualado por la suma de tres colores primarios (*mezcla aditiva*) [33]. Sobre este principio se sustenta toda la colorimetría [19]. Los colores primarios convenientes son los más luminosos, e independientes [22]. Ya que existen un inmenso número de triadas que se pueden considerar como colores primarios [34]; es necesario en cada igualación especificar cuáles son, y se les denominará estímulos de referencia.

### 3.4. Leyes de Grassmann

En 1853 el físico alemán Grassmann sistematizó la teoría de la mezcla aditiva del color en una serie de conclusiones que se conocen como las leyes de Grassmann [18].

#### **Primera ley:**

La potencia radiante  $c$  del color [C] es equivalente, no igual, a la suma de las potencias  $\alpha$  del color primario [R],  $\beta$  del primario [G] y  $\gamma$  del primario [B]. Entendiendo por *potencia radiante* una unidad de potencia radiométrica definida como el cociente entre la energía luminosa que se manifiesta bajo la forma de ondas electromagnéticas emitida por una superficie en una unidad de tiempo [35].

$$c[C] \equiv \alpha[R] + \beta[G] + \gamma[B] \quad (3.1)$$

Según esto, Cualquier color se puede representar como la mezcla de tres luces coloreadas, llamadas primarias. Esta ley llevada las matemáticas, se sitúa en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , en donde cada color primario representa un eje coordenado.

#### **Segunda ley:**

Si la intensidad de la radiación que produce una sensación de color dada se multiplica por un factor cualquiera, el valor de la sensación no cambia.

Si se cumple la Ec. 3.1, entonces

$$nc[C] \equiv n\alpha[R] + n\beta[G] + n\gamma[B] \quad (3.2)$$

Esta ley hace posible variar la intensidad manteniendo constante el tono y la saturación, sin que varíe la igualdad cromática entre ambas.

**Tercera ley:** Si se suman dos estímulos de color cualesquiera evaluados en términos de los estímulos de referencia, la suma algebraica de ambos es equivalente a la suma algebraica de las cantidades de los estímulos de referencia necesarios para igualar los colores en cuestión.

$$\begin{aligned} \text{Si } c_1[C_1] &\equiv \alpha_1[R] + \beta_1[G] + \gamma_1[B] \text{ y} \\ c_2[C_2] &\equiv \alpha_2[R] + \beta_2[G] + \gamma_2[B], \end{aligned}$$

la suma de ambos será igual a:

$$c_1[C_1] + c_2[C_2] \equiv (\alpha_1 + \alpha_2)[R] + (\beta_1 + \beta_2)[G] + (\gamma_1 + \gamma_2)[B] \quad (3.3)$$

En otras palabras, al mezclar aditivamente dos radiaciones cualesquiera, se forma un tercer color. Geométricamente, esto es la suma de vectores.

### 3.5. El Diagrama de Cromaticidad CIE

De 1928 a 1930, investigaciones hechas por W. D. Wright y J. Guild de manera separada, obtuvieron resultados de cantidades (positivas y negativas) de tres colores monocromáticos primarios necesitados para igualar los colores del espectro [20]. Las condiciones hechas por la Comisión Internacional para la Iluminación (CIE) eran que debían referirse a un campo visual global, a niveles altos de iluminación (visión fotópica), y que los estímulos de referencia debían ser radiaciones espectrales de 435.8 nm para el azul, 546.1 nm para el verde y 700 nm para el rojo [18]. Wright ocupó diez observadores y Guild siete. Normalizaron sus resultados para establecer funciones comparables entre sí; la normalización consistió en dividir las magnitudes de los colores primarios por la magnitud de la radiación igualada [25]. Matemáticamente:

Si  $\theta[\lambda] \equiv \alpha[R] + \beta[G] + \gamma[B]$ , entonces

$$[\lambda] \equiv \frac{\alpha}{\theta}[R] + \frac{\beta}{\theta}[G] + \frac{\gamma}{\theta}[B]. \quad (3.4)$$

Sean  $\frac{\alpha}{\theta} = \bar{r}_\lambda$ ,  $\frac{\beta}{\theta} = \bar{g}_\lambda$ ,  $\frac{\gamma}{\theta} = \bar{b}_\lambda$ . Entonces la Ec. (3.4) queda:

$$[\lambda] \equiv \bar{r}_\lambda[R] + \bar{g}_\lambda[G] + \bar{b}_\lambda[B]. \quad (3.5)$$

Utilizando los estímulos de referencia dados por la CIE a través de transformaciones matriciales los resultados de Wright y Guild son equivalentes [18]. En la Fig. 3.4 aparecen las curvas obtenidas por Wright.

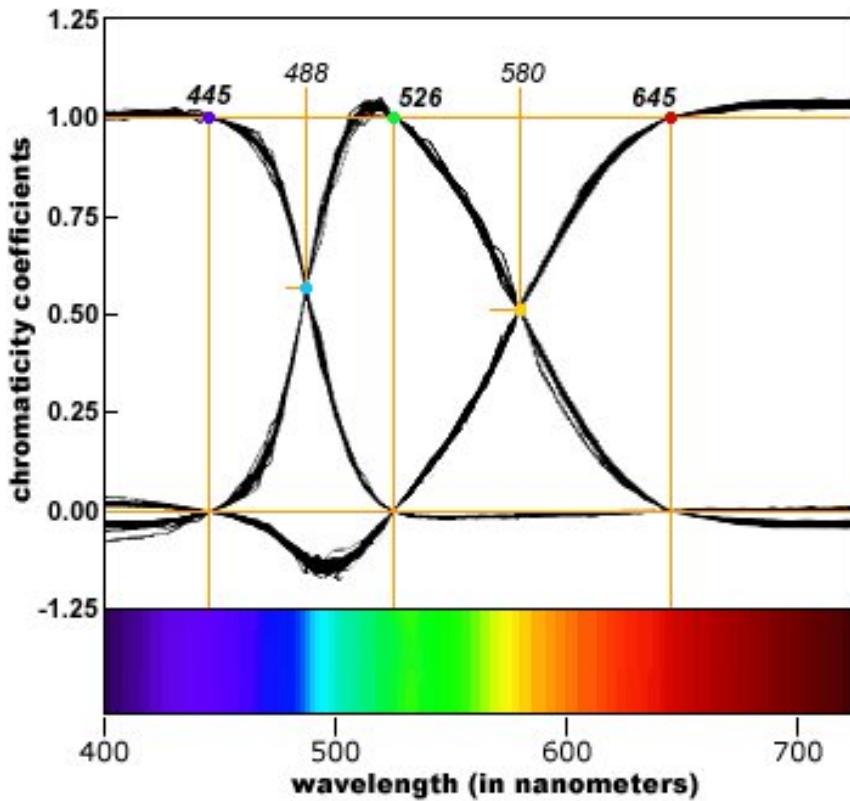


Figura 3.4: Funciones de igualación obtenidas con diez observadores por W. D. Wright [36].

Si se hace

$$r_\lambda = \frac{\bar{r}_\lambda}{\bar{r}_\lambda + \bar{g}_\lambda + \bar{b}_\lambda}; g_\lambda = \frac{\bar{g}_\lambda}{\bar{r}_\lambda + \bar{g}_\lambda + \bar{b}_\lambda}; b_\lambda = \frac{\bar{b}_\lambda}{\bar{r}_\lambda + \bar{g}_\lambda + \bar{b}_\lambda} \quad (3.6)$$

se consigue que:

$$r_\lambda + g_\lambda + b_\lambda = 1. \quad (3.7)$$

De esta forma, las variables  $r_\lambda$  y  $g_\lambda$  pueden ser independientes, y la variable  $b_\lambda$  dependiente si se asigna  $b_\lambda = 1 - r_\lambda - g_\lambda$ . A  $r_\lambda, g_\lambda, b_\lambda$  se les llama *coeficientes tricromáticos*. Geométricamente la expresión (3.7) representa un plano en el espacio Euclíadiano tridimensional que corta a los ejes coordenados en  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  y  $(0,0,1)$  (Fig. 3.5). Aplicando la proyección oblicua del plano  $r_\lambda + g_\lambda + b_\lambda = 1$  [18], sobre el plano  $r_\lambda g_\lambda$  se

obtiene una curva similar a la de la Fig. 3.6; ésta representa los valores obtenidos experimentalmente por Wright [42], además se tiene una representación gráfica bidimensional de los colores.

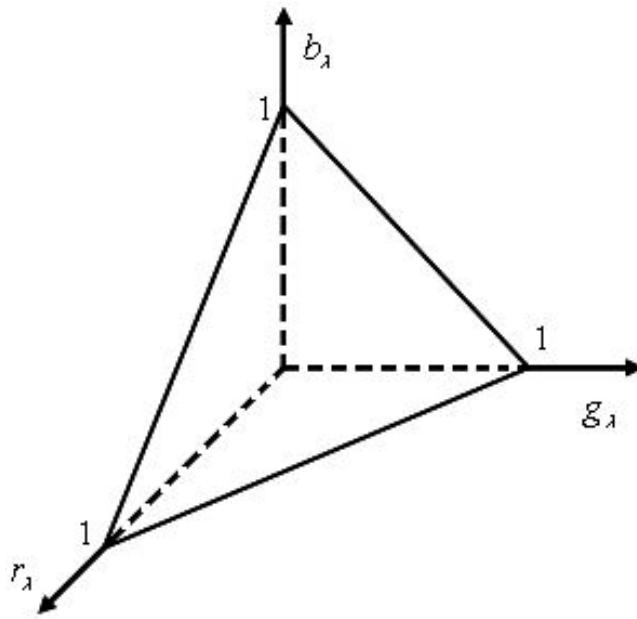


Figura 3.5: Plano generado por la ecuación  $r_\lambda + g_\lambda + b_\lambda = 1$ .

Aunque es posible tratar con números negativos en colorimetría, por varias razones prácticas el CIE decidió producir un sistema que no contenga números negativos [37]. Ya que esto no es posible con primarios reales, fue necesario inventar tres colores primarios X, Y, Z ideales, no reales [20]. Con el mismo desarrollo anterior se obtienen los coeficientes tricromáticos  $x, y, z$ . Para cada valor de  $x$  (rojo) e  $y$  (verde), el correspondiente valor de  $z$  (azul) se obtiene de  $z = 1 - (x + y)$ . La gama de colores producido por la combinación de los primarios imaginarios incluyen colores imaginarios y reales; los primeros son separados e ignorados [25], Fig. 3.7. Un segmento de recta que une dos puntos de color interiores del diagrama define todas las diferentes variaciones cromáticas que pueden obtenerse por la adición de estos puntos [37]. Cualquier color que se encuentre en el interior de un triángulo definido por tres puntos de color cualesquiera puede ser generado

por combinaciones de estos tres puntos [2].

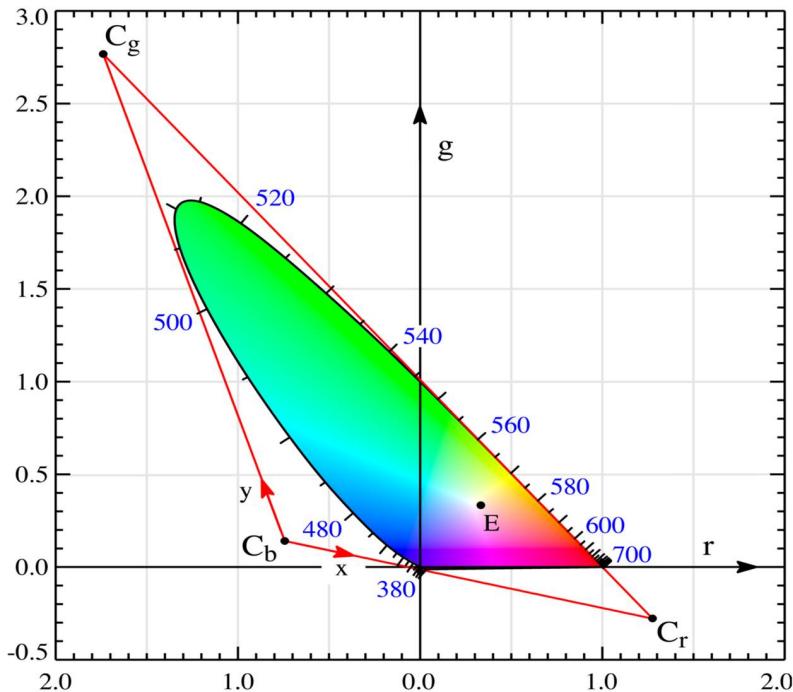


Figura 3.6: Gráfica bidimensional de los colores [40]. En la curva se representan los valores obtenidos experimentalmente por Wright.

El borde del diagrama (puntos de energía espectral) corresponde a los colores puros mostrados en el espectro de la figura (espectro de energía), correspondientes a las longitudes de onda puras entre 380 nm (azul púrpura) y 780 nm (rojo lejano), fuera de estos límites las longitudes del espectro electromagnético no son visibles al ojo humano o lo que es lo mismo, los conos del ojo humano sólo son excitables para las longitudes de onda comprendidas entre estos dos límites [2]. El interior del diagrama representa el color de radiaciones en las que se mezclan en distintas proporciones varias longitudes de onda. El punto de igual energía, representa el punto en el que todas las radiaciones entre el azul, verde y rojo tienen la misma intensidad (blanco teórico) [25]. Puede verse como el blanco de la luz natural (luz diurna), el blanco de una lámpara fría (blanco frío) o el blanco de

una lámpara incandescente (blanco cálido) difieren sensiblemente del blanco teórico.

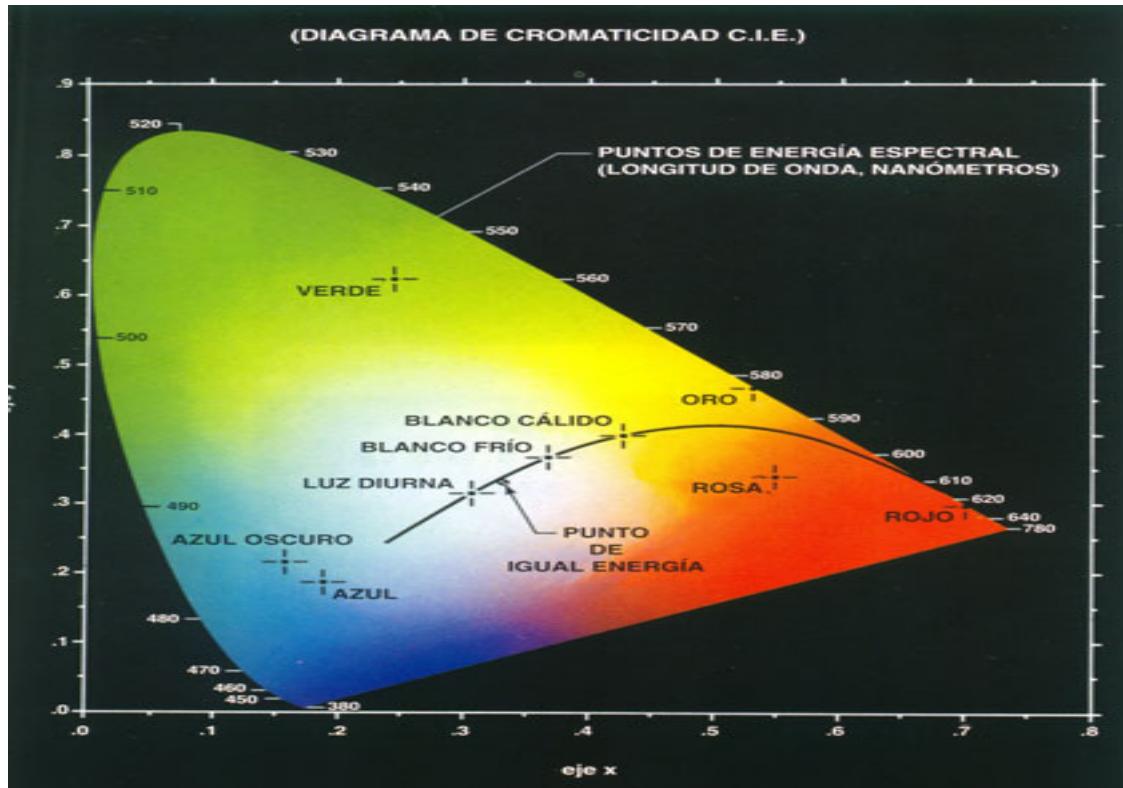


Figura 3.7: Diagrama de cromaticidad [41]. El diagrama es una aproximación para especificar los colores, que muestra la composición del color como función de  $x$  e  $y$ .

# **Capítulo 4**

## **Espacios de color en el Procesamiento de Imágenes**

El término *procesamiento digital de imágenes* equivale a realizar operaciones sobre un conjunto de datos obtenidos de las imágenes, con el fin de mejorar la imagen para alguna aplicación en particular, ó para extraer algún tipo de información útil de ella [35]. En medicina por ejemplo, las técnicas de procesamiento realzan el contraste o codifican los niveles de intensidad en colores para facilitar la interpretación de las imágenes en rayos X [35], y de otras imágenes biomédicas. En arqueología, los métodos de procesamiento han servido para restaurar imágenes borrosas que eran los únicos registros existentes de piezas extrañas, perdidas o dañadas después de haber sido fotografiadas [2]. Para el sentido de la vista de los seres humanos, la extracción de la información de la imagen no tiene relación con los objetos del mundo que nos rodea [38]. Como ejemplo de tipos de información son, los momentos estadísticos y los coeficientes de la transformada de Fourier. Estos tipos de información se utilizan para el reconocimiento automático de caracteres, para la visión industrial mecanizada, entre otros [2].

En los últimos años se han dedicado muchos esfuerzos al estudio del análisis de imágenes en color. Originalmente muchas técnicas fueron empleadas sobre imágenes en niveles de grises. Los trabajos más recientes sobre imágenes en color están relacionados con la segmentación [5], localización de objetos [5], mejora de la imagen [6], restauración de imágenes [6], y morfología matemática [39].

## 4.1. Representación Digital de las Imágenes

**Definición 4.1.1** Una *imagen digital monocromática* es una función bidimensional de la intensidad de la luz que es denotada por  $f(x, y)$ , donde el valor o amplitud de  $f$  en las coordenadas espaciales  $(x, y)$  da la intensidad, iluminación o nivel de gris, de la imagen en aquellas coordenadas.

Esta definición se aplica generalmente a las imágenes en escala de grises. Puesto que la luz es una forma de energía  $f(x, y)$  debe ser positiva y finita [2].

$$0 < f(x, y) < \infty. \quad (4.1)$$

Una imagen monocromática se puede considerar como una matriz de tamaño  $m \times n$  cuyos índices de fila y columna identifican a un punto de la imagen, y el valor correspondiente es proporcional a la intensidad [3].

$$\widehat{F} = \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \cdots & f(0, n-1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \cdots & f(1, n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(m-1, 0) & f(m-1, 1) & \cdots & f(m-1, n-1) \end{bmatrix}.$$

A cada elemento  $f(x, y)$  de la imagen  $\widehat{F}$  se le denomina píxel.

**Definición 4.1.2** Una *imagen de color RGB* es un arreglo de tres imágenes monocromáticas independientes de tamaño  $m \times n$  correspondientes a la escala de rojos (R –red–), verdes (G –green–) y azules (B –blue–).

El método de reproducción del color utilizado en los monitores de color se basa en la primera ley de Grassmann (mezcla aditiva) [7]; en este caso consiste en partir del negro, e ir añadiendo mayor o menor cantidad de luz de los tres colores básicos (rojo, verde y azul). Estos tres colores forman el espacio de color RGB. No obstante, en algunos casos, este espacio de color no es el más conveniente para el procesamiento de imágenes en color pues las operaciones en este espacio pueden producir colores no deseados. Supongamos que se requiere mejorar una imagen de un rostro humano, parte del cual está oculto en una sombra. La igualación del histograma [6] es una técnica ideal para este tipo de problemas.

Debido a la presencia de tres imágenes y a que la igualación del histograma únicamente considera los valores de la intensidad, la técnica más trivial consiste en someter cada plano de la imagen de forma independiente a la igualización del histograma. La parte de la imagen oculta por la sombra será mejorada en los tres casos. Sin embargo, las intensidades de los tres planos de la imagen se alterarán de forma diferente. El resultado neto será que las propiedades cromáticas como los tonos carne, no parecerán naturales cuando se muestren en la pantalla [2]. Por tanto, es útil hacer procesamientos en otros espacios de colores, en los que se puede llegar a través de transformaciones, partiendo del espacio RGB; y después, para visualizar la imagen transformada, aplicar las respectivas transformaciones inversas. Por brevedad, se utilizará la palabra imagen para referirse al término de imagen de color RGB.

## 4.2. Espacios de Color

Un *modelo o espacio de color* indica la manera en que un color está definido y es una herramienta importante ya que permite analizar y aprovechar toda la información presente dentro de la imagen.

Los espacios de color más utilizados para el procesado de imágenes son RGB, HSI, YIQ, CMY, CMYK [2]. El espacio RGB es usado para monitores de color, y para video-cámaras de color [5]; está modelado por un cubo unitario [2]. El modelo de color HSI codifica el color con los atributos perceptuales de tono, saturación, luminancia o intensidad que el ser humano reconoce. Este es un espacio intuitivo, psicológico.

El modelo YIQ [5] es usado en las emisiones comerciales de televisión de color, fue una recodificación del espacio RGB realizada para la televisión americana NTSC (National Television System(s) Committee), que tenía que ser compatible con la televisión en blanco y negro. La componente Y representa la información de luminancia y esta es la única componente utilizada por las televisiones en blanco y negro. Las componentes I y Q denominadas fase y cuadratura contienen la información del color, y están desacopladas

de Y. El modelo YIQ se encuentra en un sistema coordenado cartesiano tridimensional, y es un subespacio con forma de poliedro convexo [7]. Un ejemplo del espacio YIQ en el procesamiento de imágenes es la igualización del histograma del canal Y, con esto sólo se normalizan los niveles de brillo de la imagen.

El espacio CMY (acrónimo de Cián, Magenta, Yellow) es utilizado en impresión [6], los colores primarios son cián, magenta y amarillo. El color negro es creado por mezcla de todos los colores, y el blanco es la ausencia de color. La mezcla de cián, magenta y amarillo resulta en un color negro turbio, por lo que se utiliza tinta negra de verdad. Al agregarse ésta tinta de color, el modelo es denominado espacio CMYK (K, key -negro-). Los modelos CMY y CMYK se basan en la absorción de la luz. El color que presenta un objeto corresponde a la parte de la luz que incide sobre este y que no es absorbida por el objeto.

#### 4.2.1. Espacio de Color RGB

Este modelo es un subespacio del espacio euclíadiano conformado por el cubo unitario [2] mostrado en la Fig. 4.1. Los colores aparecen con sus componentes primarias de rojo, verde y azul. Los valores de R, G, y B se encuentran a lo largo de tres ejes. En otras palabras, en el eje del rojo, en el eje del verde y en el eje del azul se encuentran las intensidades de cada color. El cián está situado en el vértice del cubo en donde el color verde y el azul tienen su máximo valor, y el valor del rojo es cero; las coordenadas son  $(R, G, B) = (0, 1, 1)$ . Análogamente, el magenta que es la combinación del rojo y el azul está situado en las coordenadas  $(R, G, B) = (1, 0, 1)$ ; y el amarillo (mezcla de verde con rojo) se sitúa en  $(R, G, B) = (1, 1, 0)$ . El negro está posicionado en el origen del sistema y el blanco en el vértice opuesto al origen. La escala de grises se encuentra en la diagonal que va del negro al blanco, los colores restantes se encuentran dentro del cubo. Todos los valores de R, G y B están en el intervalo [0,1]. En el caso de imágenes digitales los valores de R, G y B son números enteros y van de 0 a 255, lo cual permite generar 16 777 216 colores.

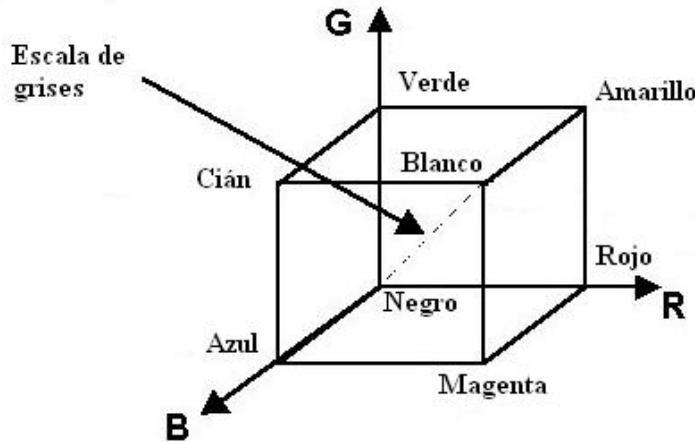


Figura 4.1: El cubo unitario de color es el modelo matemático que representa al espacio de color RGB.

#### 4.2.2. Espacio de Color HSI

En el espacio de color HSI los colores se distinguen unos de otros por su tono, intensidad, y saturación [20].

El *tono* está asociado con la longitud de onda dominante en una mezcla de ondas lumínicas [2]. Así, el tono representa el color dominante tal y como lo percibimos; cuando decimos que un objeto es rojo, verde o café estamos indicando su tono [Fig. 4.2(a)].

La *intensidad* representa la iluminación percibida [2]. La intensidad da la sensación de que algún objeto refleja más o menos luz. Este atributo lo podemos ver claramente en un televisor en blanco y negro [Fig. 4.2(b)].

La *saturación* se refiere a la cantidad de luz blanca mezclada con el color dominante [2]. La saturación es un atributo que nos diferencia un color intenso de uno pálido. Cada uno de los colores primarios tiene su mayor valor de saturación antes de ser mezclados con otros. Así, el azul cielo es muy claro (menos saturado), mientras que el azul marino es más opaco (mas saturado). Otro ejemplo, es el color rosa (rojo y blanco) que está menos saturado; mientras que el color rojo está totalmente saturado. Ver la Fig. 4.2(c).

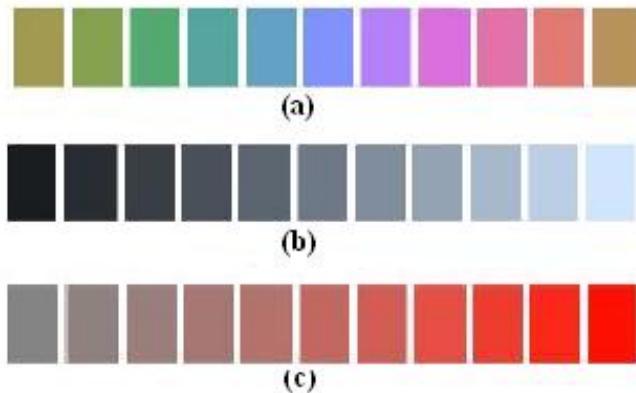


Figura 4.2: Propiedades del color [43]. (a) Presenta diferentes tonalidades (color dominante); en (b) se encuentran distintas intensidades, que son representadas por esta escala de grises; (c) tiene variedades de saturación del color rojo.

Tono y saturación están definidos por el triángulo de color que se muestra en la Fig. 4.3. Se observa que el tono H del punto de color O es una medida angular, medida desde el eje rojo. Así, cuando  $H=0^\circ$ , el color es rojo, cuando  $H$  es  $60^\circ$  el color es amarillo, y así sucesivamente. La saturación S del punto O es proporcional a la distancia desde O hasta el centro del triángulo. Entre mayor sea esta distancia la saturación será mayor.

El valor de intensidad del punto O es proporcional a la distancia (sobre la recta perpendicular al plano del triángulo y que pasa por su centro) medida desde el punto negro hasta donde inicia el vector del punto O. De esta forma para cualquier punto de color en la pirámide triangular, si su respectivo valor de intensidad tiende al punto del blanco, entonces el color será más claro. Pero si tiende al punto negro el color será más oscuro.

Uniendo tono, saturación e intensidad se tiene la estructura de doble pirámide triangular, Fig. 4.3. Los puntos sobre la superficie de la pirámide representan un color totalmente saturado. Los colores de los puntos interiores de la pirámide se hacen menos saturados conforme se acercan al eje vertical.

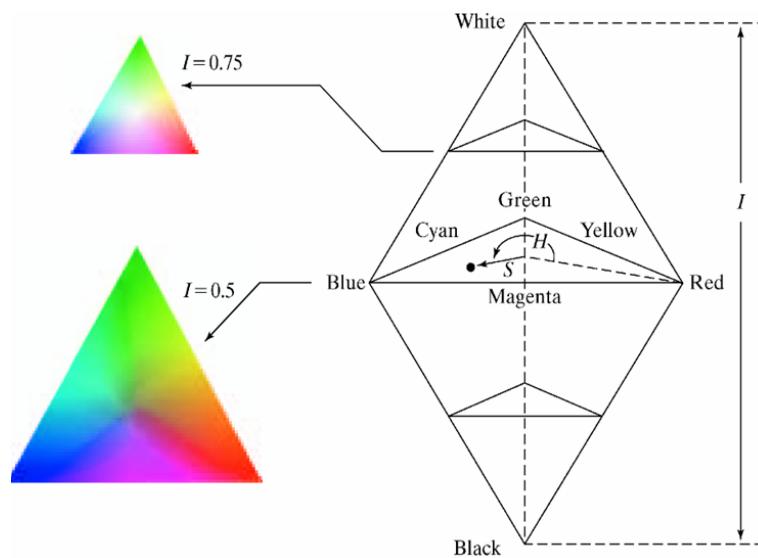


Figura 4.3: Triángulo de color y doble pirámide triangular [44]. El triángulo de color muestra la manera en que se miden el tono y la saturación; el tono es una medida angular y la saturación es una medida longitudinal. La doble pirámide triangular es la representación del espacio HSI, la intensidad va del negro al blanco pasando por la escala de grises.

## 4.3. Conversión entre los espacios RGB y HSI

En esta sección se verá las transformaciones directa e inversa que conducen de RGB a HSI; estas transformaciones se pueden hallar en [2]. Resaltamos que el método expuesto aquí para hallar la componente de saturación es un granito de arena que aportamos, por tanto difiere del método que se encuentra en la literatura. Aunque éste método es simple, es una herramienta importante en esta tesis para los capítulos siguientes, en donde proponemos las ecuaciones alternativas para las transformaciones de HSI a RGB; encontramos la saturación para el modelo HSI generalizado que hemos propuesto y que le hemos denominado  $\text{HSI}_n$ ; y también ocupamos el método para encontrar las transformaciones inversas del sistema  $\text{HSI}_4$  al espacio de 4-bandas de color.

Se muestran los detalles para realizar las conversiones directa e inversa RGB-HSI con el primer objetivo de hacer una comparación con la conversión alternativa que también hemos propuesto de HSI a RGB; como segundo objetivo, esto sirve para comprender los métodos propuestos para hallar las componentes de tono, saturación e intensidad que están contenidas en el espacio  $\text{HSI}_n$ . Pues en el momento de estar buscando estas componentes, también se está operando en un subespacio  $n$ -dimensional y que difícilmente se puede visualizar cuando se trabaja en espacios vectoriales Euclidianos con dimensiones mayores a tres.

### 4.3.1. Conversión de RGB a HSI

El tono (H) y la saturación (S) están dados en términos de los coeficientes tricromáticos [2]:

$$r = \frac{R}{R+G+B}, \quad (4.2)$$

$$g = \frac{G}{R+G+B}, \quad (4.3)$$

$$b = \frac{B}{R+G+B}. \quad (4.4)$$

Que como ya se vió en el capítulo 3 son los valores normalizados de R, G, y B. Sumando las Ecs. (4.2) a (4.4) resulta la ecuación del plano en el espacio euclidiano  $rgb$

que pasa por los puntos  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  y  $(0,0,1)$

$$r + g + b = 1 \quad (4.5)$$

La figura geométrica sobre el plano delimitado por estos puntos es un triángulo equilátero, Fig. 4.4. Se conoce de la sección 3.5 que la gama de colores resultantes por la combinación de tres colores está modelada precisamente por triángulos.

La intensidad  $I$ , está definida como el promedio de  $R$ ,  $G$ , y  $B$ :

$$I = \frac{1}{3} (R + G + B) \quad (4.6)$$

Cuyo valor está también en el intervalo  $[0,1]$ .

Para hallar el tono nos auxiliamos de la Fig. 4.4, en donde el centro del triángulo equilátero  $W$  tiene coordenadas  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ;  $\mathbf{w}$  es el vector que va del origen a  $W$ ; el punto de color  $O$  tiene coordenadas  $(r_0, g_0, b_0)$ ; el vector  $\mathbf{o}$  va del origen al punto  $O$ . Como se mencionó, el tono es el ángulo formado por el eje rojo y el vector que termina en un punto de color  $O$ . Con la figura auxiliar se nota que este ángulo esta formado por los vectores  $\mathbf{e}_r - \mathbf{w}$  y  $\mathbf{o} - \mathbf{w}$ , en donde  $\mathbf{e}_r$  es el vector que termina en el punto  $(1, 0, 0)$ . Utilizando la Ec. (2.2) del producto punto entre dos vectores, se llega a que el tono  $H$  se expresa de la siguiente manera:

$$H = \cos^{-1} \left[ \frac{(\mathbf{o} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{e}_r - \mathbf{w})}{\|\mathbf{o} - \mathbf{w}\| \|\mathbf{e}_r - \mathbf{w}\|} \right]. \quad (4.7)$$

Realizando las operaciones concernientes, finalmente se obtiene

$$H = \cos^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{2} [(R - G) + (R - B)]}{\sqrt{(R - G)^2 + (R - B)(G - B)}} \right]. \quad (4.8)$$

Para  $0^\circ \leq H \leq 180^\circ$ .

De la Fig. 4.4, si  $b > g$ , o equivalentemente si  $B > G$  entonces  $H > 180^\circ$ . Para este caso, primero se ocupa la expresión (4.8) y luego se hace  $H = 360^\circ - H$ .

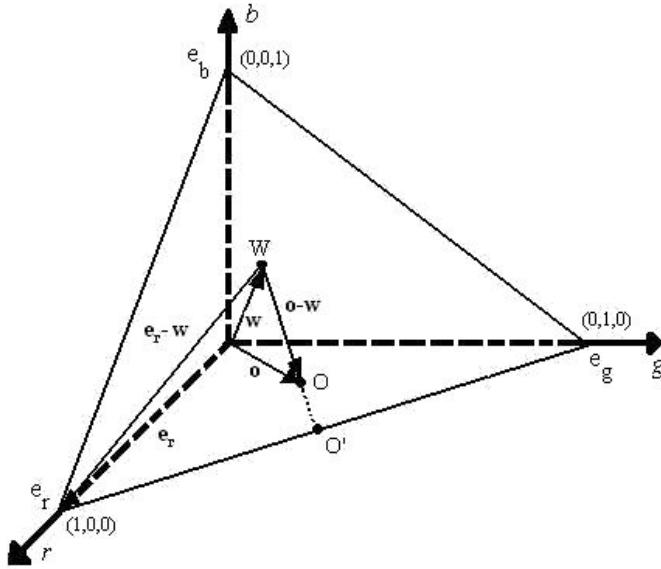


Figura 4.4: Vectores involucrados en el cálculo del tono.  $W$  tiene coordenadas  $(1/3, 1/3, 1/3)$ ; con la resta de vectores se obtienen los vectores que determinan al tono.

Para el cálculo de la saturación se prolonga la recta definida por los puntos  $W$  y  $O$  hasta que corte algún lado del triángulo, el punto donde se corta se denota por  $O'$ , Fig. 4.4. Dado que la saturación está en el intervalo cerrado  $[0,1]$  y es proporcional a longitud del segmento rectilíneo que une a  $W$  y  $O$   $[d(W,O)]$ , esta se define como:

$$S = \frac{d(W, O)}{d(W, O')}. \quad (4.9)$$

Centremos nuestra atención en el área del triángulo delimitada por los puntos  $e_r$ ,  $W$ , y  $e_g$ , llámese  $A_1$  (Fig. 4.5), y supongase que  $O$  se encuentra en esta área. Para obtener  $S$ , se necesita conocer las coordenadas de  $O'$ . Estas coordenadas se pueden obtener resolviendo el sistema de ecuaciones, que es resultado de la intersección de la recta que pasa por  $W$  y  $O'$ . De la Ec. (2.4) del capítulo 2 esto se expresa así:

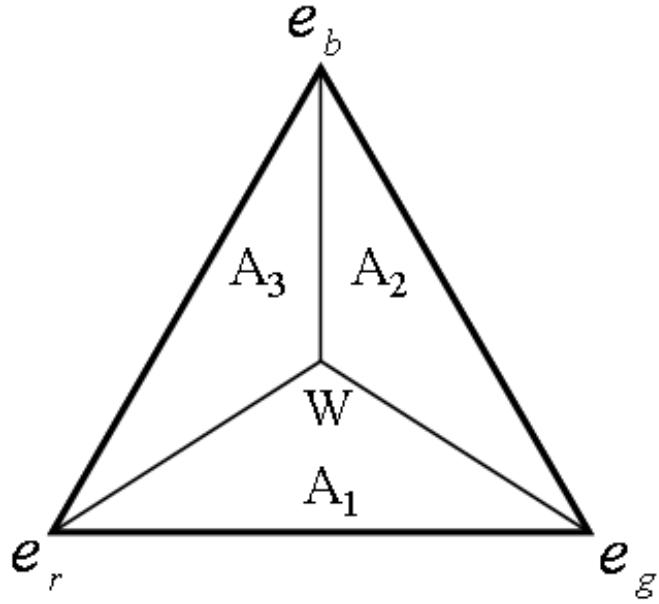


Figura 4.5: Áreas auxiliares de color. Para encontrar la componente S, y los valores RGB se utilizan estas áreas.

$$r = k(r_0 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}, \quad (4.10)$$

$$g = k(g_0 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}, \quad (4.11)$$

$$b = k(b_0 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}, \quad (4.12)$$

con  $k$  dentro del intervalo  $[0, 1]$  y la recta que pasa por  $e_r, e_g$  cuya ecuación paramétrica es:

$$r = 1 - t, \quad (4.13)$$

$$g = t, \quad (4.14)$$

$$b = 0, \quad (4.15)$$

$t$  en  $[0, 1]$ .

Ya resuelto el sistema de ecuaciones se descubre que  $O'$  tiene coordenadas

$$O' = \left[ \frac{1 - g_0 - 2b_0}{1 - 3b_0}, \frac{g_0 - b_0}{1 - 3b_0}, 0 \right]. \quad (4.16)$$

Después, sustituyendo las coordenadas de  $W, O$  y  $O'$  en la Ec. (4.9)

$$S = 1 - 3b_0. \quad (4.17)$$

Donde  $b_0$  es el mínimo de  $r_0, g_0$  y  $b_0$  en el área  $A_1$ , con lo que esta ecuación se transforma en

$$S = 1 - \frac{3\min(R, G, B)}{R + G + B}. \quad (4.18)$$

De manera análoga para las áreas triangulares  $A_2$  y  $A_3$  definidas por los puntos  $e_g, W, e_b$  y  $e_r, W, e_b$  respectivamente (Fig. 4.5), se llega a la Ec. (4.18).

### 4.3.2. Conversión de HSI a RGB

Encontrar los valores de RGB depende de la posición del punto de color  $O$  en alguna de las áreas  $A_1, A_2$  ó  $A_3$ . Para el caso en que el punto de color se encuentre en  $A_1$  ( $0^\circ \leq H \leq 120^\circ$ ), de la Ec. (4.17) se obtiene:

$$b_0 = \frac{1}{3} (1 - S). \quad (4.19)$$

A  $r_0$  se le halla teniendo en cuenta que es proyección de  $O$  [2].

$$r_0 = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{S}{\cos(60 - H)} \right]. \quad (4.20)$$

Ahora, de Ec. (4.5)

$$g_0 = 1 - (r_0 + b_0). \quad (4.21)$$

Finalmente, de las Ecs. (4.2) a (4.4),  $R = 3Ir_0, G = 3Ig_0, B = 3Ib_0$ . Sustituyendo estas en las Ecs. (4.19), (4.20) y (4.21), se tiene:

### 4.3. CONVERSIÓN ENTRE LOS ESPACIOS RGB Y HSI

---

Para  $0^\circ \leq H < 120^\circ$ ,

$$B = I(1 - S), \quad (4.22)$$

$$R = I \left[ 1 + \frac{S \cos H}{\cos(60 - H)} \right], \quad (4.23)$$

$$G = 3I - R - B. \quad (4.24)$$

De la misma forma para las áreas  $A_2$  y  $A_3$  se encuentran los valores RGB. Esto es:

Para  $e_g W e_b$  ( $120^\circ \leq H < 240^\circ$ ),

$$R = I(1 - S), \quad (4.25)$$

$$G = I \left[ 1 + \frac{S \cos(H - 120)}{\cos(180 - H)} \right], \quad (4.26)$$

$$B = 3I - R - G. \quad (4.27)$$

Y para  $240^\circ \leq H < 360^\circ$ ,

$$G = I(1 - S), \quad (4.28)$$

$$B = I \left[ 1 + \frac{S \cos(H - 240)}{\cos(300 - H)} \right], \quad (4.29)$$

$$R = 3I - G - B. \quad (4.30)$$

# Capítulo 5

## Conversión Alternativa de HSI a RGB

En este capítulo se establecerán las ecuaciones alternativas que conducen del espacio de color HSI al RGB; se explicará el proceso para obtenerlas. Estas ecuaciones son nuestras primeras aportaciones matemáticas a la colorimetría, relacionada con el procesamiento de imágenes RGB.

De manera general, para obtener esta nueva conversión se sigue la misma idea que en la conversión de la subsección 4.3.2. Esto es, que a partir de los datos conocidos de H, S, e I se obtengan las coordenadas  $(r_0, g_0, b_0)$  del punto de color  $O$  correspondiente (Fig. 5.1). Logrado esto, se encuentran los valores R, G y B. La diferencia en ambos métodos consiste en que la conversión expuesta se basa principalmente en proyecciones, mientras que nuestro procedimiento se basa en la ecuación paramétrica de la recta.

Nuevamente, sean  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  las áreas definidas por  $(e_r, W, e_g)$ ;  $(e_g, W, e_b)$  y  $(e_r, W, e_b)$  (Fig. 4.5). Nos centraremos en  $A_1$ , pues debido a la simetría en el triángulo de color, cualquier punto de color sobre  $A_2$  y  $A_3$  se puede especificar intercambiando las coordenadas del punto que le corresponde en  $A_1$ . En la Fig. 5.1 el punto de color  $O$  está en una recta que inicia en  $W$  y que puede tener como punto final a  $O'$ . Suponiendo que  $O'$  tiene coordenadas  $(r_1, g_1, 0)$ , y recordando que  $W$  tiene coordenadas  $(1/3, 1/3, 1/3)$ , los coeficientes tricromáticos  $r_0, g_0$  y  $b_0$  se obtienen a través de esta recta. Por tanto de la Ec. (2.4):

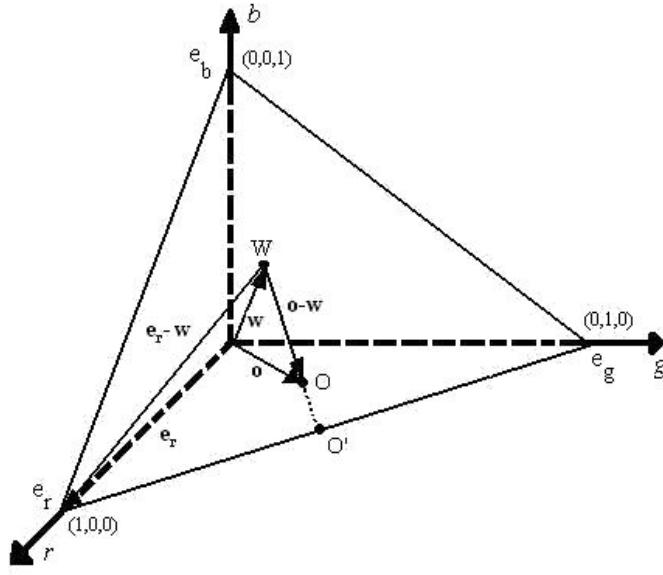


Figura 5.1: Vectores involucrados en el cálculo de H.

$$r_0 = \frac{1}{3} + k \left( r_1 - \frac{1}{3} \right), \quad (5.1)$$

$$g_0 = \frac{1}{3} + k \left( g_1 - \frac{1}{3} \right), \quad (5.2)$$

$$b_0 = \frac{1}{3} - \frac{k}{3}, \quad (5.3)$$

para algún  $k$  en  $[0, 1]$ . Notemos que al variar  $k$  estamos modificando la longitud del vector  $\mathbf{o} - \mathbf{w}$ . En efecto, si  $k = 0$ , entonces  $r_0 = g_0 = b_0 = 1/3$ , lo que implica que  $S = 0$ ; si  $k = 1$ ,  $r_0 = r_1, g_0 = g_1, b_0 = 0$ , entonces  $S = 1$ . Por ende  $k = S$ .

Ahora, de la Fig. 5.1 se observa que similarmente a  $O, O'$  se encuentra en una recta, pero ésta pasa por  $e_r$  y  $e_g$ , con lo cual

---


$$r_1 = 1 - t, \quad (5.4)$$

$$g_1 = t, \quad (5.5)$$

para un  $t$  en  $[0, 1]$ . Por lo tanto, sustituyendo estas ecuaciones en las Ecs. (5.1), (5.2), y (5.3), se tiene

$$r_0 = \frac{1}{3} + S\left(\frac{2}{3} - t\right), \quad (5.6)$$

$$g_0 = \frac{1}{3} + S\left(t - \frac{1}{3}\right), \quad (5.7)$$

$$b_0 = \frac{1}{3} - \frac{S}{3}, \quad (5.8)$$

Hasta aquí se ha logrado encontrar los coeficientes cromáticos como se quería. Por último, para encontrar los valores R, G y B simplemente se ocupa que  $R = 3Ir, G = 3Ig, B = 3Ib$  (ver subsección 4.3.2).

$$R = [S(2 - 3t) + 1]I, \quad (5.9)$$

$$G = [S(3t - 1) + 1]I, \quad (5.10)$$

$$B = [1 - S]I. \quad (5.11)$$

Para algún  $t$  en  $[0, 1]$ .

Estas expresiones están dadas explícitamente por S e I, e implícitamente por H, debido a que  $t$  se relaciona estrechamente con H. Por ejemplo, cuando  $t = 0$ , de las Ecs. (5.4) y (5.5),  $r_1 = 1, g_1 = 0$ , así  $H=0^\circ$ ; si  $t = 0,5$ ,  $r_1 = 0,5, g_1 = 0,5$  con lo cual  $H=60^\circ$ ; para  $t = 1, r_1 = 0, g_1 = 1$  y entonces  $H=120^\circ$ . La pregunta que surge es, ¿cuál es la expresión matemática que relaciona directamente a H y  $t$ ? La respuesta se dará a continuación.

Retomemos la ecuación que encuentra el valor de H de la subsección 4.3.1,

$$H = \cos^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{2}[(R - G) + (R - B)]}{\sqrt{(R - G)^2 + (R - B)(G - B)}} \right]. \quad (5.12)$$

---

Operar con el parámetro  $t$  es operar en la recta  $rg$ , así  $B = 0$ ; por otra parte, relacionando las Ecs. (4.2), (4.3), (4.6), (4.13) y (4.14) se obtiene:

$$R = 3I(1-t), \quad (5.13)$$

$$G = 3It. \quad (5.14)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la Ec. (5.12), ésta última se transforma en

$$\cos H = \frac{\frac{1}{2}[6I(1-t) - 3It]}{\sqrt{[3I(1-2t)]^2 + [3I(1-t)][3It]}}. \quad (5.15)$$

Tras operaciones algebraicas la dependencia de  $I$  termina al llegar a este paso:

$$\cos H = \frac{I\left[3 - \frac{9}{2}t\right]}{3I\sqrt{3t^2 - 3t + 1}}. \quad (5.16)$$

Continuando con el desarrollo algebraico se tiene que para  $t = 0$  la siguiente ecuación no está definida:

$$(\cos^2 H)(27t + \frac{9}{t} - 27) = \frac{81}{4}t + \frac{9}{t} - 27. \quad (5.17)$$

Finalmente se consigue una ecuación cuadrática que da a  $t$  en términos de  $H$

$$\left(\frac{3}{4\sin^2 H} - 3\right)t^2 + 3t - 1 = 0, t \neq 0. \quad (5.18)$$

Dado que  $t$  toma valores reales de cero a uno, en la Ec. (5.18) se tiene que considerar los siguientes casos:

*Caso 1. Raíces con signos opuestos.*

Si la raíz  $t_1 > 0$  y la raíz  $t_2 < 0$ ,  $t_1$  es el valor buscado. Debido a que  $t$  se encuentra en  $[0,1]$ .

*Caso 2. Raíces con signos positivos.*

Si  $t_1 > 0$  y  $t_2 > 0$ , sustituir a  $t_1$  en las Ecs. (5.13) y (5.14), que dan  $R$  y  $G$ , las cuales sustituyéndolas en la Ec. (5.12), se obtiene un valor de  $H$ :

---


$$H = \cos^{-1} \left[ \frac{1 - \frac{3}{2}t}{\sqrt{3t^2 - 3t + 1}} \right]. \quad (5.19)$$

Si este valor coincide con el  $H$  de entrada, entonces  $t_1$  es el valor correcto. En caso contrario  $t_2$  es el indicado.

Si se quisiera modificar la tonalidad, bastaría variar a  $t$  en las Ecs. (5.9), (5.10) y (5.11).

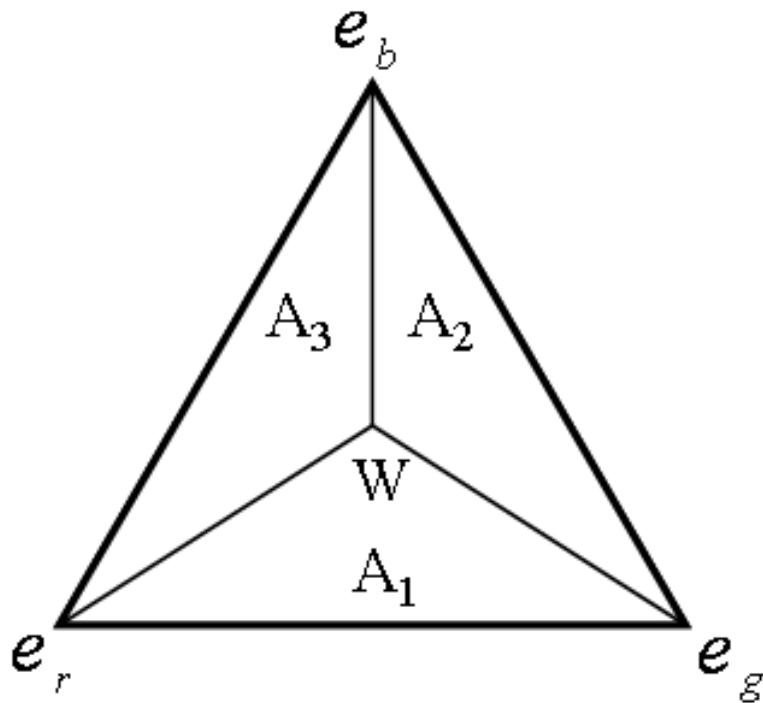


Figura 5.2: Áreas auxiliares de color. Para encontrar la componente S y los valores RGB se utilizan estas tres áreas.

Todo el desarrollo hecho hasta aquí, en este capítulo ha sido para puntos de color en  $A_1$ . Debido a la simetría del triángulo de color, los valores RGB de los puntos de color en  $A_2$  ó  $A_3$  se obtienen mediante una translación a  $A_1$ , ver Fig. 5.2; aplicamos el método descrito con anterioridad, e intercambiamos los valores RGB obtenidos. Este último paso

---

equivale a regresar a  $A_2$  ó  $A_3$ , dependiendo del caso.

***Valores RGB en el área  $A_2$ .***

1. Si  $H$  inicial es tal que  $120^\circ < H \leq 240^\circ$ , entonces

$$H = H - 120. \quad (5.20)$$

Este paso implica que el punto de color se traslada a  $A_1$ . Únicamente cambia  $H$ , se mantiene  $S$  e  $I$ .

2. Calcular los valores  $R$ ,  $G$  y  $B$  con las Ecs. (5.9), (5.10), (5.11) y (5.18). Para evitar confusiones denotemos de manera respectiva a estos valores como  $R1$ ,  $G1$  y  $B1$ .
3. Las coordenadas  $(R, G, B)$  del punto de color en  $A_2$  son:

$$(R, G, B) = (B1, R1, G1). \quad (5.21)$$

En este punto nos regresamos a  $A_2$ .

De forma parecida, se tiene:

***Valores RGB en el área  $A_3$ .***

1. Si  $240^\circ < H < 360^\circ$ , entonces

$$H = H - 240. \quad (5.22)$$

2. Calcular los valores  $R$ ,  $G$  y  $B$  con las Ecs. (5.9), (5.10), (5.11) y (5.18), y denotarlos por  $R1$ ,  $G1$  y  $B1$  respectivamente.
3. Las coordenadas  $(R, G, B)$  del punto de color en  $A_3$  son:

$$(R, G, B) = (G1, B1, R1). \quad (5.23)$$

## 5.1. Ejemplo

Véase el siguiente ejemplo con el fin de comprender mejor el método expuesto para hallar los valores RGB, a partir de los de HSI.

Sean  $H=199,1066$ ,  $S=0,1923$  e  $I=0,8667$ , valores correspondientes de  $R=1$ ,  $G=0,9$  y  $B=0,7$ .

Ya que  $120^\circ < H \leq 240^\circ$ , se hace  $H=H-120^\circ=79,1066^\circ$ .

Enseguida, se sustituye el valor de  $H$  en la Ec. (5.18) para calcular el valor de  $t$ :

$$\left( \frac{3}{4 \sin^2 79,1066} - 3 \right) t^2 + 3t - 1 = 0.$$

En ésta se hallan dos raíces reales,

$$t_1 = 0,6 \text{ y } t_2 = 0,75.$$

Puesto que las raíces son positivas, lo que sigue es sustituir a  $t_1$  en la Ec. (5.19)

$$H = \cos^{-1} \left[ \frac{1 - \frac{3}{2}t_1}{\sqrt{3t_1^2 - 3t_1 + 1}} \right] = 79,1066.$$

El valor coincide con el  $H$  de entrada menos  $120^\circ$ . Por lo tanto,  $t_1$  es el número buscado, el cual se utiliza en las Ecs. (5.9), (5.10) y (5.11) para conseguir a  $R1$ ,  $G1$  y  $B1$ .

$$\begin{aligned} R1 &= [0,1923(2 - 3t_1) + 1]0,8667 = 0,9, \\ G1 &= [0,1923(3t_1 - 1) + 1]0,8667 = 1, \\ B1 &= [1 - 0,1923]0,8667 = 0,7. \end{aligned}$$

Finalmente, de la expresión (5.21),  $(R, G, B)=(1, 0,9, 0,7)$ .

En los resultados del capítulo 6 se muestran los valores  $t_1$  y  $t_2$ , para ciertos tonos  $H$ .

# Capítulo 6

## Asignación de falso color a objetos en las imágenes RGB

En este capítulo se explicará cómo se puede lograr una asignación de falso color a los objetos en las imágenes digitales modificando el tono y/o la saturación [45]. Falso color representa un conjunto de colores que difieren de los originales de una imagen [46].

**Definición 6.0.1** *Falso color* es una función lineal o no, uno a uno, de una imagen a color original, descrita por sus tres colores primarios, o de un conjunto de imágenes multiespectrales (ver la definición 7.4.1) de una escena, a un espacio de color definido por los valores triestímulos [38].

En nuestro caso, la imagen original está en términos de RGB, las funciones están dadas por las Ecs. (4.6), (4.8) y (4.18). Estas funciones conducen al espacio HSI, sobre el cual se realizará el cambio de tonalidad al o los objetos contenido en la imagen. En otras palabras, se cambiará el color de los objetos a cualquier otro. Éstos deben estar coloreados con tonalidades armonizadas, en otras palabras, la diferencia entre cada tono debe ser suave, no muy contrastante para tener un buen resultado. En otro caso la asignación de falso color puede afectar a otros objetos o regiones de la imagen digital.

En el capítulo 4, se mencionó que una imagen digital de color se compone de tres matrices de tamaño  $m \times n$ . Una matriz almacena los valores de R, otra los valores de G y la tercera contiene los valores de B. A cada píxel le corresponde la misma posición en

---

cada una de estas tres matrices, de manera que el color depende de los valores de las matrices en dicha posición. En resumen, operar en el espacio RGB para imágenes digitales, es operar con píxeles que tienen información de R, G y B. Análogamente, una imagen digital en el espacio HSI consta de tres matrices  $m \times n$  las cuales guardan los valores de H, S e I de manera respectiva. Así, cada píxel de la imagen digital en este espacio de color tiene tres datos: tono, saturación e intensidad.

El método se divide en dos etapas; la primera etapa consiste trabajar sobre la imagen del objeto, y en la segunda etapa se trabaja sobre toda la imagen. Es claro que estas imágenes en principio están en el sistema RGB. En forma detallada se tiene lo siguiente:

Etapa 1.- Elegir una subárea del objeto y por medio de la expresión (4.8) hallar el tono mínimo y máximo de esa región. Estos tonos implicitamente caracterizan a nuestro objeto, debido a que un gran número del total de píxeles del objeto tienen un valor de tonalidad que estan entre el mínimo y el máximo. De este hecho, se recomienda tomar sub-áreas que contengan un mayor número de tonalidades.

Etapa 2.- Barriendo la imagen píxel a píxel, hallar los valores H, S e I [Ecs. (4.6), (4.8) y (4.18)], comparar el tono del píxel con el tono máximo y con el tono mínimo. Si el valor del tono del píxel está entre los valores de los tonos máximo y mínimo, asignar la tonalidad deseada, y si se quiere, una saturación distinta a la original; en otro caso, conservar los valores HSI originales. Finalmente, dado que el píxel está en el espacio HSI, se debe que retornar al espacio RGB, ya sea a través de las ecuaciones usuales (4.22) a (4.30) ó por medio de las Ecs. (5.9), (5.10), (5.11) que fueron propuestas en el capítulo 5, para poder visualizar la imagen transformada.

Si únicamente se modifica la componente de saturación, es decir, los valores S e I quedan intactos, entonces se alcanza tener los mismos efectos de sombreado que en la imagen original.

Los pasos en concretos se dan en el siguiente algoritmo:

**Algoritmo 6.0.1**

Etapa 1.- Seleccionar una región del objeto en la imagen, hallar tono mínimo y tono máximo, por medio de la Ec. (4.8). (*Selección del objeto*).

Etapa 2.- Para los siguientes puntos realizar un barrido píxel a píxel en toda la imagen.

1. Usando las Ecs. (4.6), (4.8), y (4.18) hallar los respectivos valores de H, S e I. (*Conversión del sistema RGB al HSI*).
2. Elegir un nuevo tono y/o saturación. Si se encuentra que un píxel tiene un tono que se encuentre entre el tono mínimo y máximo, asignar un nuevo tono y si se desea una nueva saturación. (*Comparación de tonos*).
3. Aplicar las transformaciones inversas (ver subsección 4.3.2 ó capítulo 5). (*Conversión del sistema HSI a RGB*).

## 6.1. Resultados

Se muestran algunas imágenes resultantes de aplicar el Algoritmo 6.0.1. Las explicaciones de los resultados se dan a los pies de figura de cada imagen. En las imágenes originales se muestran las sub-áreas rectangulares elegidas para cambiar el tono del objeto deseado. Se han ocupado las transformaciones inversas del capítulo 5; como ilustración se muestran los valores  $t_1$  y  $t_2$  correspondientes a la Ec. (5.18) del nuevo tono que se aplicará al objeto de la imagen.



Figura 6.1: Ayuntamiento. A la imagen del lado izquierdo se le ha elegido una región rectangular que se distingue en el centro de la imagen, con una zona con más intensidad que otra; los tonos mínimo y máximo respectivamente son  $11^\circ$  y  $25^\circ$ . En la imagen de la derecha, a la misma figura se le ha elegido el cián, que corresponde a  $H=180^\circ$  para asignar una nueva tonalidad al edificio del ayuntamiento.  $t_1 = 1$  y  $t_2=0.5$ , éstos están relacionados con  $H=180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ;  $t_2$  es el número buscado, pues sustituido en la Ec. (5.19) resulta  $H=60^\circ$ . Observese que en el piso hay manchones con esta nueva tonalidad, por la razón de que en la imagen original el piso tiene zonas con tonalidades entre el tono mínimo y el tono máximo.

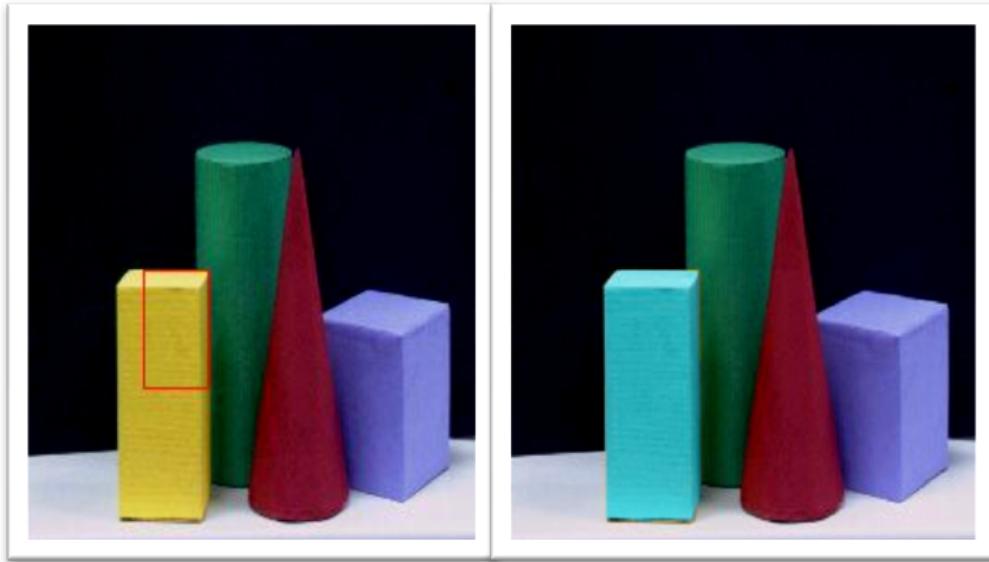


Figura 6.2: Geométricos. El segundo resultado es el realizado sobre la imagen de figuras geométricas (lado izquierdo). En ésta, se ha seleccionado al cilindro rectangular para designarle un falso color; sobre el área remarcada con el color rojo se ha encontrado que los tonos mínimo y máximo de manera respectiva son:  $42^\circ$  y  $56^\circ$ . El valor nuevo del tono que se ha elegido es  $184^\circ$ ;  $t_1 = -0.6578$  y  $t_2 = 0.2212$  (relacionados con  $H = 184^\circ - 120^\circ = 64^\circ$ );  $t_2$  corresponde a  $H = 64^\circ$ . Después de realizar las operaciones indicadas en el algoritmo se tiene la nueva imagen, lado derecho.



Figura 6.3: Tigre. A la izquierda se tiene la imagen de un tigre, los tonos de referencia hallados son: tono mínimo,  $0^\circ$ ; tono máximo,  $36^\circ$ . A la derecha se tiene la imagen resultante con tono nuevo igual a  $320^\circ$ . De  $H=320^\circ - 240^\circ = 80^\circ$ , se tiene  $t_1 = 0,7422$  y  $t_2 = 0,6051$ . De los cuales,  $t_2$  al ser sustituido en la Ec. (5.19) da  $H=80^\circ$ .



Figura 6.4: Edificio de Óptica del INAOE. En la figura se tienen imágenes del edificio del INAOE. En la primera se toma una sub-área de imagen del edificio (planta baja del edificio). El tono mínimo es  $22^\circ$ , y el tono máximo vale  $34^\circ$ . En la segunda imagen, se tiene la imagen resultante del procesado con un tono  $H=318^\circ$ . Para  $H = 318^\circ - 240^\circ = 78^\circ$ , se obtienen  $t_1=0.7599$  y  $t_2=0.5938$ ;  $t_2$  es el valor buscado.

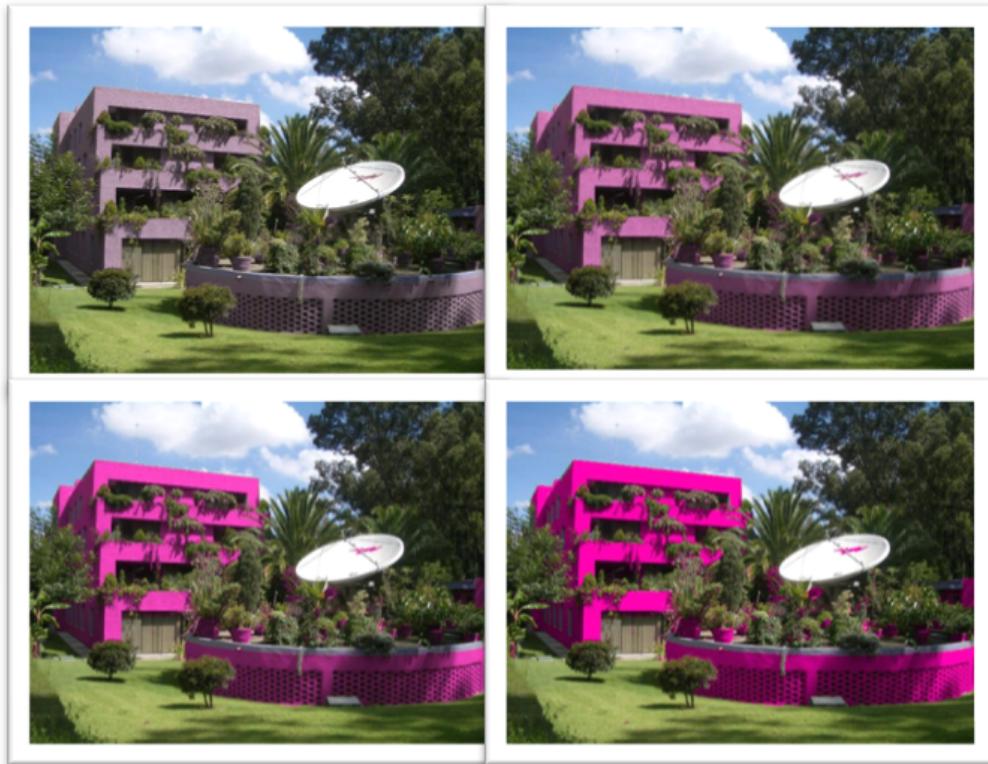


Figura 6.5: Cambios de saturación. Se encuentran cuatro imágenes, en las cuales, el edificio tiene la misma tonalidad que el de la imagen del lado derecho de la Fig. 6.1, es decir  $H=318^\circ$ , con la diferencia de que el edificio tiene diferente saturación para cada una de estas imágenes. Al edificio de la imagen de arriba a la izquierda tiene una nueva saturación de  $S = 0.1$ ; arriba a la derecha, el edificio tiene  $S = 0.3$ ; abajo a la izquierda,  $S = 0.6$ ; y abajo a la derecha,  $S = 1$ . Se puede apreciar cómo funciona la componente de saturación. Entre más cerca esté  $S$  de 0, el color del edificio es más palido; entre más cerca de 1, el color edificio es más vivo.



Figura 6.6: Edificios del INAOE. En la primera imagen, a la izquierda, se observa el área rectangular, en la que se encontraron como tonos mínimos y máximos a  $H = 21^\circ$ , y  $H = 28^\circ$  respectivamente. La imagen de la derecha es el logro conseguido al sustituir el tono de los edificios por el tono  $H = 5^\circ$ . Se consiguieron las raíces  $t_1 = -0.1191$  y  $t_2 = 0.0877$ , relacionados con  $H=5^\circ$ ;  $t_2$  es el dato que se necesita para hallar R, G y B por medio de las Ecs. (5.9), (5.10) y (5.11).



Figura 6.7: Diferentes saturaciones. Los edificios de las cuatro imágenes tienen igual tono ( $H = 5^\circ$ ) que en la imagen del lado derecho de la Fig.6.6. En la parte superior a la izquierda los edificios tienen una nueva saturación, con un valor de  $S = 0.25$ ; a la derecha de esta imagen, a los edificios se les cambió su saturación por  $S = 0.4$ ; asimismo, abajo a la izquierda el nuevo  $S$  es  $0.6$ ; por último, en la parte inferior a la derecha a dichas construcciones se les modificó la saturación con  $S = 0.9$ .

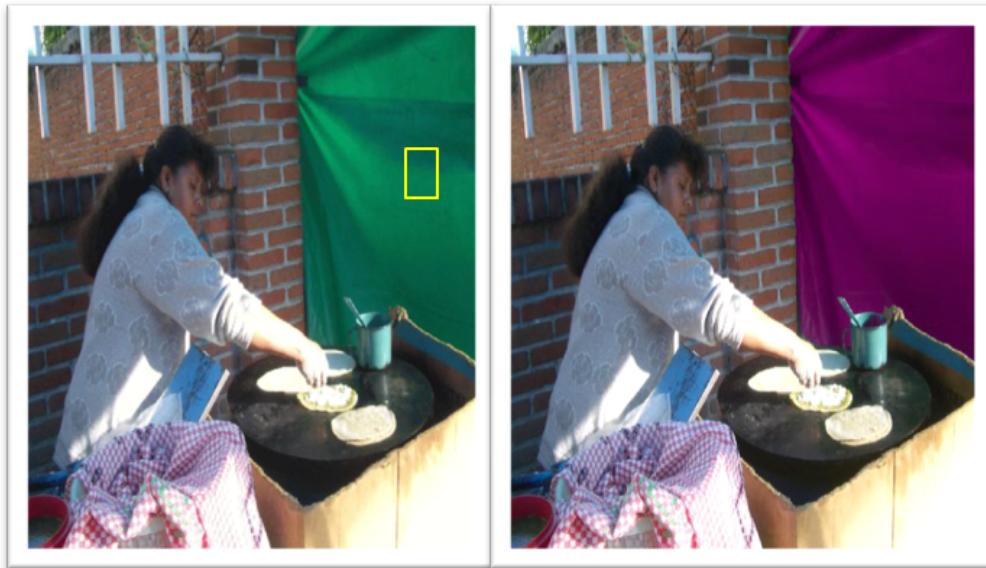


Figura 6.8: Cambio de tonalidad. La figura muestra la imagen original y la imagen procesada en ese mismo orden. De la primera, se ha calculado los tono mínimo y máximo tomados de la lona de color verde; los cuales son  $156^\circ$  y  $170^\circ$ . De la segunda imagen procesada, la lona tiene un nuevo tono,  $H = 310^\circ$ ;  $t_1 = 0.844$  y  $t_2 = 0.5509$ , relacionados con  $H = 310^\circ - 240^\circ = 70^\circ$ . Al ser sustituido  $t_2$  en la Ec. (5.19) se obtiene  $H = 70^\circ$ .



Figura 6.9: Diferentes saturaciones. Se muestran cuatro diferentes imágenes que corresponden a la escena, y tonalidad de la imagen de la derecha de la Fig. 6.8. La lona en las dos imágenes tomadas de izquierda a derecha en la primera fila tienen de manera respectiva  $S = 0.05$  y  $S = 0.2$ ; de la misma manera, las nuevas tonalidades de la lona en las imágenes de la segunda fila son  $S = 0.4$  y  $S = 0.5$ .

# Capítulo 7

## Modelos RGB y HSI Generalizados

En este capítulo se presentan los espacios de color que hemos denominado espacio de color de  $n$ -bandas y espacio  $\text{HSI}_n$ . Estos se han obtenido al realizar una generalización de los modelos de color RGB y HSI. También se muestra el método que proponemos, para obtener las ecuaciones que transforman el espacio de  $n$ -bandas en el espacio  $\text{HSI}_n$  [47].  $n$  indica el número de colores primarios y la forma que debe tener  $\text{HSI}_n$ . Por ejemplo, para  $n = 3$  se tiene la estructura de una pirámide doble triangular, para  $n = 4$ , la de una pirámide doble tetrangular, y así sucesivamente.

El modelo HSI es ampliamente usado para generar gráficos de alta calidad y para manipular las imágenes en base a la percepción humana del color [2]. Con el desarrollo de la tecnología para la captura y visualización de imágenes multiespectrales (en el sentido de estar basadas en más de tres colores primarios), se requiere un espacio que generalice al espacio HSI, y usarlo por ejemplo en la segmentación o restauración de tales imágenes. Para algunas aplicaciones, una imagen monocromática o RGB no es suficiente. Las imágenes multiespectrales pueden constituir una serie de vistas de la misma área o escena, usando diferentes longitudes de onda u otras señales. Por ejemplo, las imágenes en varias longitudes de onda en el visible e infrarrojo producidas por el satélite Landsat Thematic Mapper (LTM) [50]. En el Instituto de Tecnológico de Tokio junto con organizaciones gubernamentales de Japón, han sido desarrollados dispositivos para la captura y desplegado de imágenes multiespectrales en el visible, con 8, 16, y 32 bandas. Los dispositivos han sido diseñados, construidos, y patentados por la agencia Natural Vision Research

Laboratory, con el principal objetivo de reproducir el color real de los objetos [1].

## 7.1. Espacio de Color de $n$ -Bandas

Generalmente, un espacio de color está determinado por una base de  $n$  vectores, cuyas combinaciones lineales generan todos los elementos del espacio [48]. Entre mayor sea el número de vectores, el espacio comprenderá una mayor cantidad de colores. Por mencionar algunos ejemplos: espacio de una dimensión, la escala de grises; espacios de dos dimensiones, los planos RG, GB y BR que son variedades del amarillo, cián y magenta respectivamente; espacios tridimensionales, el espacio RGB, HSI (Hue, Saturation, Intensity) y YIQ. Por ende, podemos deducir que nuestro espacio considerado reproducirá más colores conforme  $n$  crezca.

El espacio de color de  $n$ -bandas es una generalización del sistema aditivo RGB, e indica que un punto de color perteneciente a este espacio generalizado es el resultado de la combinación de  $n$  colores primarios. Recordar que en el capítulo 3 las leyes de Grassmann están definidas para tres luces o colores primarios. Nótese que las dos primeras leyes caracterizan al espacio RGB. Ahora, la generalización de las leyes de Grassmann a  $n$  luces coloreadas primarias puede ser realizada, y se fundamenta en la siguiente afirmación tomada de [42] sobre la mezcla aditiva.

**Definición 7.1.1** *Mezcla aditiva* significa que un estímulo de color para el cual la potencia radiante en cualquier intervalo de longitud de onda, pequeño o grande, en cualquier parte del espectro es igual a la suma de las potencias en el mismo intervalo de los constituyentes de la mezcla.

Esta definición hace entender que un color puede ser igualado por diferentes números de colores primarios. Por consiguiente, es posible definir el espacio de color de  $n$ -bandas.

El *modelo de color de  $n$ -bandas* es un subespacio vectorial contenido en el espacio vectorial Euclíadiano de dimensión  $n$ ; el subespacio es generado por la base formada por el conjunto de  $n$  vectores unitarios canónicos (ver capítulo 2). Los colores están determinados por los  $n$  colores primarios, los cuales hemos denotado por  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Los

valores de estos son números reales que van desde cero hasta uno, y cada C<sub>i</sub> se encuentran sobre un eje coordenado; por lo que en el eje C<sub>i</sub> ( $i = 1, \dots, n$ ) se encuentra la escala del color correspondiente. El negro es localizado en el origen (0, ..., 0) y el blanco esta en (1, ..., 1). Los niveles de gris se extienden desde el negro hasta el blanco sobre una hiper-recta (recta definida en el espacio vectorial Euclíadiano de dimensión  $n$ ); cualquier intensidad de gris es obtenido agregando cantidades iguales de cada color primario. De este modo un color es un punto en el subespacio. Para  $n = 3$ , el espacio de color es el cubo unitario mostrado en la Fig. 4.1 del capítulo 4.

## 7.2. Espacio de color HSI<sub>n</sub>

El modelo de color HSI<sub>n</sub> es el resultado que obtuvimos al generalizar el modelo HSI; asimismo, en HSI<sub>n</sub> los colores se distinguen por su tono (H -Hue-), saturación (S -Saturation-) e intensidad (I -Intensity-) (ver la sección 4.2.2 del capítulo 4).

El tono y la saturación están definidos por el polígono regular de  $n$  lados (Fig. 7.1). El tono H del punto de color P es el ángulo del vector considerando el eje C<sub>1</sub>. La saturación S del punto P es proporcional a la distancia medida desde P hasta el centro del polígono W. Conforme la distancia aumente, la saturación será mayor.

Los valores de la intensidad del punto P es proporcional a la distancia (sobre la línea perpendicular que pasa por el centro del plano del polígono) medida desde el punto negro hasta el punto inicial del vector. Uniendo tono, saturación e intensidad se tiene la estructura doble de una pirámide  $n$ -angular (Fig. 7.2). Así, para cualquier punto de color en esta estructura, si su intensidad tiende al punto blanco, entonces el color será más claro. Pero, si tiende al punto negro, el color será más oscuro.

## 7.3. Conversión del Espacio de $n$ -Bandas de Color al Espacio HSI<sub>n</sub>

En esta sección se expondrán las ecuaciones y el método que proponemos, los cuales transportan el espacio de  $n$ -bandas al espacio HSI<sub>n</sub>. Los pasos intermedios entre las ecua-

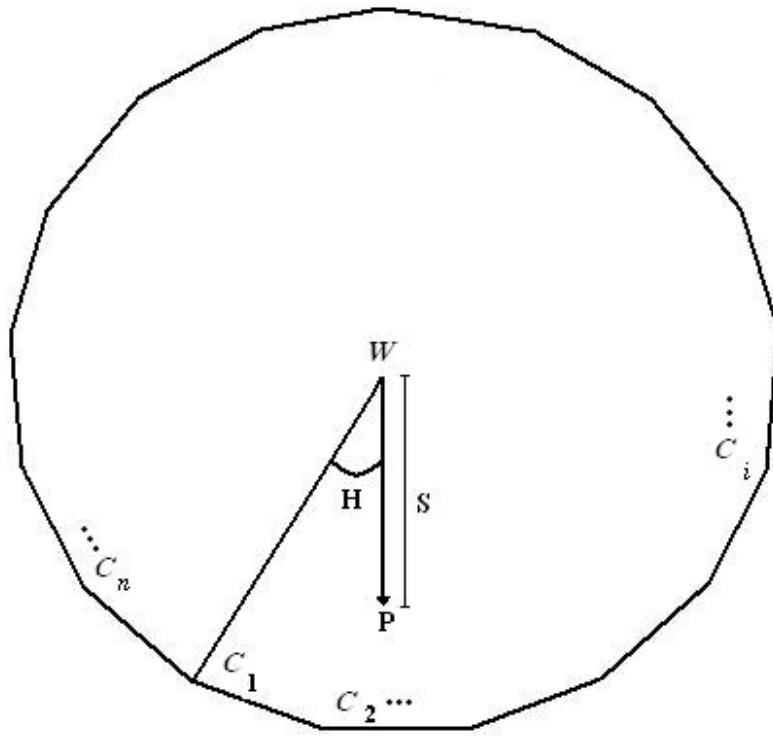


Figura 7.1: El tono y la saturación están definidos dentro del polígono regular de  $n$  lados. El tono es una medida angular y la saturación es una medida longitudinal.

ciones de las subsecciones 7.3.1 y 7.3.2 se muestran en el Apéndice A.

**Definición 7.3.1** Sean  $C_1, C_2, \dots, C_n$  los valores reales de los  $n$  colores primarios de manera respectiva, los cuales varían de cero a uno.

H y S están dados en términos de los coeficientes cromáticos que se definen como

$$c_i = \frac{C_i}{\sum_{j=1}^n C_j}; \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.1)$$

Estos son valores normalizados de cada  $C_i$ . sumando las  $c_i$ 's, se halla la ecuación de un plano en el espacio vectorial euclíadiano  $n$ -dimensional [14] (también llamado hiperplano para  $n > 3$ ), con ejes coordenados  $c_1, c_2, \dots, c_n$  y que pasa a través de los puntos finales de los vectores unitarios  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ :

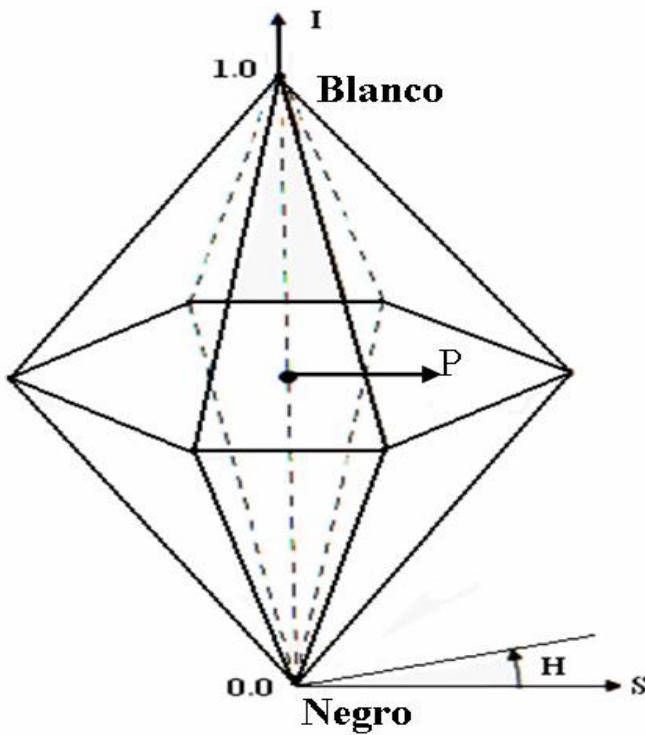


Figura 7.2: Espacio de color HSIn. Tono (H), saturación (S), e intensidad (I) forman la estructura doble de una pirámide  $n$ -ángular.

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1. \quad (7.2)$$

En el caso de dos dimensiones, la Ec. (7.2) es la representación de una línea que pasa por los puntos finales de  $e_1$  y  $e_2$ , con punto medio en las coordenadas  $(1/2, 1/2)$ . En el caso de tres dimensiones, se ha visto en el capítulo 5 que esto representa un plano limitado por los puntos finales de  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  dando la forma de un triángulo equilátero con centro en  $(1/3, 1/3, 1/3)$ . De aquí suponemos que para  $n$  dimensiones, el hiperplano definido por  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots, \mathbf{e}_n$  es un polígono regular de  $n$  lados con centro en  $(1/n, \dots, 1/n)$ . Puede verificarse fácilmente que este hiperplano delimitado cumple con la definición de polígono regular tomando como medida de distancia a la norma Euclíadiana [Ec. (2.7)], y las coordenadas  $(1/n, \dots, 1/n)$  como el centro de este polígono; y para medir los ángulos entre dos lados consecutivos usar el producto punto para vectores espaciales reales,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$

### 7.3. CONVERSIÓN DEL ESPACIO DE $N$ -BANDAS DE COLOR AL ESPACIO HSI <sub>$N$</sub>

$\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ , para  $0 \leq \theta \leq 180$ .

**Definición 7.3.2** Un polígono es considerado regular cuando todos sus lados y ángulos son iguales [49].

**Definición 7.3.3** El centro del polígono regular es el punto equidistante de los vértices y lados [49].

#### 7.3.1. Intensidad y Tono

La intensidad  $I$  está definida como el promedio de las  $C_i$ 's.

$$I = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n C_i \right). \quad (7.3)$$

En la Fig. 7.1, se ve que  $H$  es el ángulo formado por la recta definida por el centro del polígono  $W$  y  $C_1$ , y la recta definida por  $W$  y el punto de color  $P$ . Estos puntos sobre el hiperplano acotado, tienen coordenadas  $\mathbf{w} = (1/n, \dots, 1/n)$ ,  $\mathbf{p} = (c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0n})$  y  $C_1$  se transforma en  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Como ilustración vease la Fig. 7.3 para  $n = 3$ . Por tanto, utilizando la ecuación del producto punto entre dos vectores,  $H$  es la ecuación:

$$H = \cos^{-1} \left[ \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{w})}{\|\mathbf{p} - \mathbf{w}\| \|\mathbf{e}_1 - \mathbf{w}\|} \right], \text{ para } 0 \leq H \leq 180. \quad (7.4)$$

$\|\mathbf{p} - \mathbf{w}\|$  puede ser expresado como,

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{w}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_{0i}^2 - \frac{1}{n}}. \quad (7.5)$$

Ahora, sustituyendo los valores  $c_{0i}$  en la Ec. (7.5)

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{w}\| = \sqrt{\frac{n \left( \sum_{i=1}^n C_{0i}^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n C_{0i} \right)^2}{n \left( \sum_{i=1}^n C_{0i} \right)^2}}. \quad (7.6)$$

Por otro lado,

$$\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{w}\| = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}, \quad (7.7)$$

### 7.3. CONVERSIÓN DEL ESPACIO DE $N$ -BANDAS DE COLOR AL ESPACIO HSI <sub>$N$</sub>

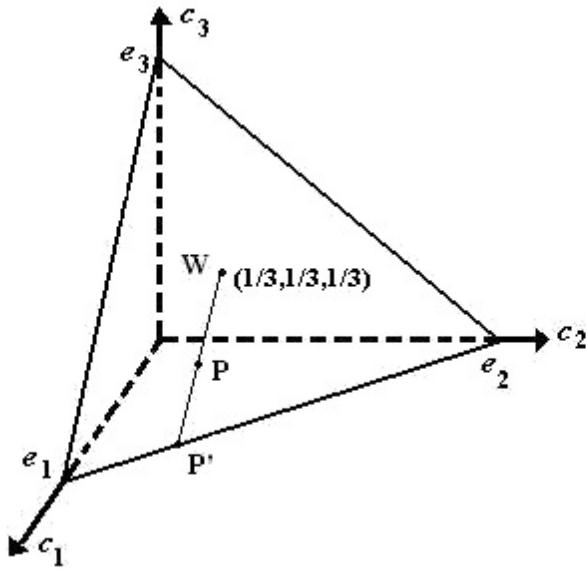


Figura 7.3: Triángulo de color. La ecuación  $\sum_{i=1}^3 c_i = 1$ ,  $c_i$  dentro del intervalo  $[0, 1]$ , representa un plano delimitado por  $e_1, e_2, e_3$ , dando la forma de un triángulo equilátero centrado en  $(1/3, 1/3, 1/3)$ .

y

$$(\mathbf{p} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{w}) = \frac{(n-1)\mathbf{C}_{01} - \sum_{i=2}^n \mathbf{C}_{0i}}{n(\sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{0i})}. \quad (7.8)$$

Finalmente

$$H = \cos^{-1} \left[ \frac{(n-1)\mathbf{C}_{01} - \sum_{i=2}^n \mathbf{C}_{0i}}{\sqrt{n-1} \sqrt{n(\sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{0i}^2) - (\sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{0i})^2}} \right]. \quad (7.9)$$

Nótese que en la Fig. 7.1 el ángulo formado por cada  $C_i W C_{i+1}$  debe ser  $360^\circ/n$  pues sumando  $n$ - veces esta cantidad el resultado es  $360^\circ$ . Utilizando la Ec. (7.9), dicho ángulo

### 7.3. CONVERSIÓN DEL ESPACIO DE $N$ -BANDAS DE COLOR AL ESPACIO HSI <sub>$N$</sub>

tiene un valor de  $\cos^{-1}[-1/(n - 1)]$ . Para  $n = 3$  este valor es igualado con  $360^\circ/n$ ; sin embargo para  $n > 3$ , el valor no es igual a  $360^\circ/n$ , y sumando  $n$ -veces el resultado es mayor que  $360^\circ$ . Para evitar este inconveniente se realiza un escalamiento con la ecuación:

$$H = \left[ \frac{360}{n \cos^{-1}\left(\frac{-1}{n-1}\right)} \right] h. \quad (7.10)$$

Con esto, la suma será  $360^\circ$ .

**Definición 7.3.4** Sea  $A_i$  el área delimitada por  $C_i \rightarrow C_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $C_{n+1} = C_1$ .

Al aplicar esta nueva formulación sobre experimentos numéricos para  $n > 3$ , nos dimos cuenta que los resultados para puntos pertenecientes al área 1 fueron correctos. Sin embargo para puntos de color fuera del área 1 que tienen un ángulo mayor que  $100^\circ$ , el  $H$  calculado fue incorrecto. Por lo tanto, la solución para hallar el verdadero ángulo  $H$  en cualquier área  $i$ -ésima  $i = 2, \dots, n$  en cualquier plano poligonal de  $n$ -lados consiste en trasladar esta área a  $A_1$ ; hallar  $H$ , y regresar a  $A_i$  sumando a  $H$  los grados necesitados para la traslación (Fig. 7.4).

De lo anterior, se debe conocer cómo caracterizar el área en donde se encuentre el punto de color para cualquier polígono regular. Para este propósito analicemos los pentágonos de color de la Fig. 7.5. Los resultados pueden ser extendidos para cualquier polígono regular.

Supongase que el punto de color esté en el área 1 del pentágono; de la Fig. 7.5, se observa que esta área puede ser obtenida como la intersección de la zona 1 sombreada de la Fig. 7.5(a) y la zona 2 sombreada de la Fig. 7.5(b). De manera respectiva, las zonas 1 y 2 son logradas si  $C_1 > C_3$ , y  $C_2 > C_5$ . La explicación es esta: si se toma un punto de color  $P$  en la zona 1 sombreada, la distancia medida desde  $P$  hasta  $C_1$  es menor que la distancia medida desde  $P$  hasta  $C_3$  [Fig. 7.5(a)], lo cual significa que el punto de color  $P$  tiene mayor cantidad de color  $C_1$  que del color  $C_3$ . Argumentos similares se emplean para las áreas restantes.

Los mismos razonamientos sirven para la demostración del siguiente teorema.

### 7.3. CONVERSIÓN DEL ESPACIO DE $N$ -BANDAS DE COLOR AL ESPACIO HSI <sub>$N$</sub>

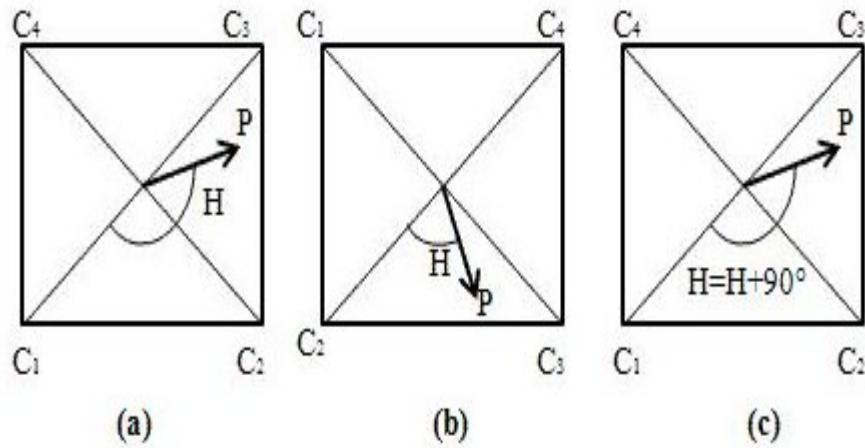


Figura 7.4: Cuadros de color. La figura muestra el método para hallar el tono en cualquier polígono regular de color. (a) Posición original del punto de color; (b) traslación del punto hacia el área 1. En esta área se calcula el tono; (c) El punto de color se regresa a el área original, y su tono es calculado sumando el tono previamente calculado con los noventa grados que fueron necesitados para esta última traslación.

**Teorema 7.3.1** Sea  $P = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ , situado en cualquier polígono de color regular,

$P$  se encuentra en  $A_1$  si y solo si  $C_1 > C_3$  y  $C_2 > C_n$ .

$P$  pertenece a  $A_i$  si y solo si  $C_i > C_{i+2}$  y  $C_{i+1} > C_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, n - 2$ .

$P$  está en  $A_{n-1}$  si y solo si  $C_{n-1} > C_1$  y  $C_n > C_{n-2}$ .

$P$  es un punto de  $A_n$  si y solo si  $C_n > C_2$  y  $C_1 > C_{n-1}$ .

Un inconveniente que como se verá en la sección 7.4, de experimentos numéricos, es que puede suceder que ocurran varias de estas condiciones, en otras palabras, que para algún punto de color se tengan más áreas de manera virtual. Por ejemplo, puede suceder que  $C_1 > C_3$  y  $C_2 > C_n$ ;  $C_3 > C_5$  y  $C_4 > C_2$ , donde cada  $C_i$  es una componente de  $P$ . Así, pareciera que  $P$  se encuentra en dos áreas,  $A_1$  y  $A_3$ .

Supóngase además que, el área verdadera del punto de color  $P$  es la tercera. De la Fig. 7.6, que es porción del polígono de la Fig. 7.1, se nota que si  $P$  está en el área 3, entonces  $P$  se encuentra más cerca a los vértices  $C_3, C_4$  que a los vértices  $C_1, C_2$ . Se concluye, que

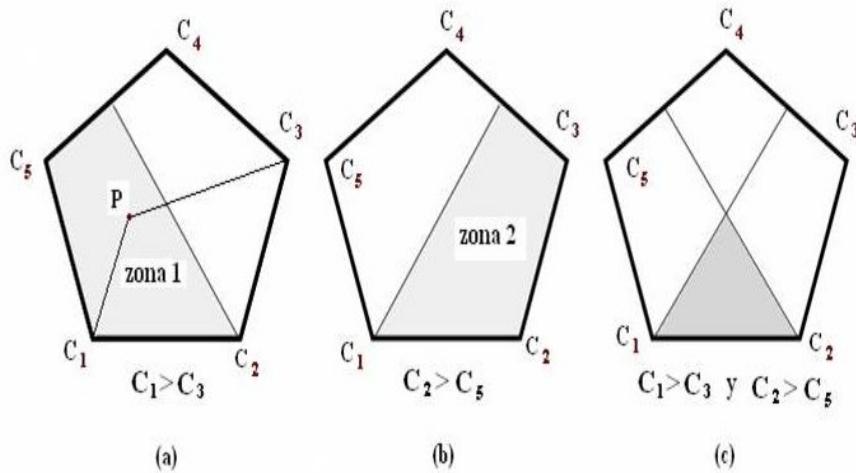


Figura 7.5: Descripción del área de un punto de color. Cualquier área  $i$ -ésima, la zona definida por  $C_i \wedge C_{i+1}$  (c), puede ser descrita por la intersección de dos regiones que contienen a la zona, y dividen al polígono en dos partes iguales (a, b). Matemáticamente, cada área  $i$ -ésima puede ser expresada en términos de  $C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, C_{i+2}$  (c).

si la suma de los valores  $C_3$  y  $C_4$  es mayor que la suma de  $C_1$  y  $C_2$ , entonces  $P$  pertenece a  $A_3$ .

Por esto último, se deduce que en un polígono de color, el área de un punto de color  $P$ , puede ser localizada como sigue:

### Algoritmo 7.3.1

1. El área 1 es obtenido si:  $C_1 > C_3$  y  $C_2 > C_n$ ; y  $C_1 + C_2 > C_j + C_{j+1}$  donde  $C_j > C_{j+2}$  y  $C_{j+1} > C_{j-1}$ , para  $j \neq 1$ .
2. El área  $i$ -ésima es obtenido cuando  $C_i > C_{i+2}$  y  $C_{i+1} > C_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, n-2$ ; y  $C_i + C_{i+1} > C_j + C_{j+1}$  donde  $C_j > C_{j+2}$  y  $C_{j+1} > C_{j-1}$ , para  $j \neq i$ .
3. El área  $n-1$  se obtiene cuando  $C_{n-1} > C_1$  y  $C_n > C_{n-2}$ ; y  $C_{n-1} + C_n > C_j + C_{j+1}$  donde  $C_j > C_{j+2}$  y  $C_{j+1} > C_{j-1}$ , para  $j \neq n-1$ .

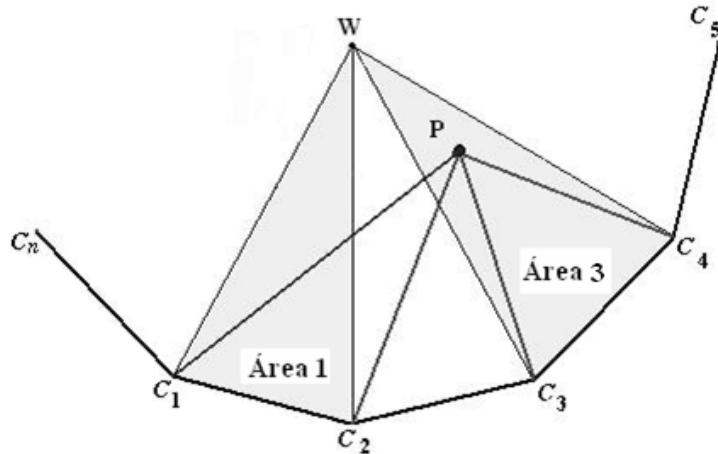


Figura 7.6: Áreas virtuales. El método para distinguir el área de color del punto P entre otras, que también cumplen con las restricciones  $C_i > C_{i+2}$ ,  $C_{i+1} > C_{i-1}$ , es sumar  $C_i + C_{i+1}$ ; el subíndice del resultado mayor corresponde al área de color de P. Esto equivale a que las distancias desde P hasta los vértices del área de P son menores o iguales a las distancias desde P a los vértices de cualquier otra área.

4. El área  $n$ -ésima es hallado si  $C_n > C_2$  y  $C_1 > C_{n-1}$ ; y  $C_n + C_1 > C_j + C_{j+1}$  donde  $C_j > C_{j+2}$  y  $C_{j+1} > C_{j-1}$ , para  $j \neq n$ .

Finalmente, para obtener el tono del punto de color P, el procedimiento a seguir es trasladar a el área en donde esté P, hacia el área 1; calcular H con la Ec. (7.9); realizar un escalamiento al intervalo de  $0^\circ$  a  $360^\circ/n$  [Ec. (7.10)]; y para terminar calcular el tono en el área original sumando a H los grados necesitados para la translación.

### Algoritmo 7.3.2

1. Hallar  $A_i$ , en donde P pertenece, a través del algoritmo 7.3.1.
2. Trasladarse a  $A_1$ :  $C_1 = C_i$ ,  $C_2 = C_{i+1}, \dots, C_{n-1} = C_{i-2}$ ,  $C_n = C_{i-1}$ .

### 7.3. CONVERSIÓN DEL ESPACIO DE $N$ -BANDAS DE COLOR AL ESPACIO HSI <sub>$N$</sub>

3. Hallar H

$$H = \cos^{-1} \left[ \frac{(n-1)C_1 - \sum_{i=2}^n C_i}{\sqrt{n-1} \sqrt{n (\sum_{i=1}^n C_i^2) - (\sum_{i=1}^n C_i)^2}} \right].$$

4. Realizar un escalamiento al intervalo de  $0^\circ$  to  $360^\circ/n$ :

$$H = \left[ \frac{360}{n \cos^{-1} \left( \frac{-1}{n-1} \right)} \right] H.$$

5. Regresar a A <sub>$i$</sub> :  $H = H + (i-1)(360/n)$ .

Para los puntos de color que se encuentran en las diagonales , H se halla de la siguiente manera:

Si  $C_i \neq 0$  y  $C_j = \text{constante}$ , para cualquier  $j \neq i$ ,  $H = (i-1)(360/n)$ .

#### 7.3.2. Saturación

Para calcular S, se usa la Fig. 7.1. Extender el segmento de recta definida por los puntos W y P hasta que intersecte un lado del polígono; el punto de corte se denominará por P'. Ya que la saturación está en el intervalo cerrado [0,1] y es proporcional a la distancia desde W hasta P' [ $d(W, P')$ ], ésta es definida como:

$$S = \frac{d(W, P')}{d(W, P)}. \quad (7.11)$$

Si recordamos que se está trabajando en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ , entonces sobre nuestro polígono contenido en este espacio, la saturación se define así:

$$S = \frac{\|w-p\|}{\|w-p'\|}. \quad (7.12)$$

Se conoce w y p, pero no p'. Hágase el siguiente análisis para conocer p'. Imaginemos que se está operando en el espacio Euclíadiano tridimensional, asimismo, sin pérdida de generalidad que P' está en el plano definido por los vectores e<sub>1</sub> y e<sub>2</sub> (Fig. 7.3). En esta figura nos damos cuenta que P' es la intersección de la recta definida por W y P con el plano. Por consiguiente, para  $n > 3$ , se deriva que P' es el resultado de la intersección de la

### 7.3. CONVERSIÓN DEL ESPACIO DE $N$ -BANDAS DE COLOR AL ESPACIO HSI <sub>$N$</sub>

hiper-recta definida por W y P con el hiperplano definido por los vectores  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ .

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones (véase el Apéndice A), el cual es el resultado de la intersección de la hiper-recta [generalización de la Ec. (2.4)] que pasa a través de W y P, que matemáticamente se expresa

$$c_i = k(c_{0i} - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}; \quad i = 1, \dots, n; \quad k \text{ dentro del intervalo } [0, 1], \quad (7.13)$$

y el hiperplano [extensión de la Ec. (2.6)] que pasa por  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ , cuya ecuación paramétrica es

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 - t_2 - t_3 - \cdots - t_{n-1}, \\ c_2 &= t_2, \\ &\vdots \\ c_{n-1} &= t_{n-1}, \\ c_n &= 0; \end{aligned} \quad (7.14)$$

cada  $t_i$  dentro de  $[0, 1]$ ; se halla que

$$\mathbf{p}' = (1 - nc_{0n})^{-1} \left( 1 - \sum_{i=2}^{n-1} c_{0i} - 2c_{0n}, c_{02} - c_{0n}, \dots, c_{0n-1} - c_{0n}, 0 \right). \quad (7.15)$$

Reemplazando las Ecs. (7.5) y (7.15) en la Ec. (7.12),

$$S = \frac{\sqrt{(\sum_{i=1}^n c_{0i}^2) - \frac{1}{n}}}{(1 - nc_{0n})^{-1} \sqrt{(\sum_{i=1}^n c_{0i}^2) - \frac{1}{n}}}, \quad (7.16)$$

que llega a ser

$$S = 1 - nc_{0n}, \quad (7.17)$$

donde  $c_{0n}$  es el mínimo de todos los  $c_{0i}$ 's, pues  $c_{0n}$  está en  $[0, 1/n]$  y los  $c_{0i}$ 's pertenecen a  $[1/n, 1]$ . Por lo tanto

$$S = 1 - \frac{n \min \{C_{01}, C_{02}, \dots, C_{0n}\}}{\sum_{i=1}^n C_{0i}}. \quad (7.18)$$

Ejecutando el mismo proceso para  $P'$ , cuando esté en cualquiera de los restantes hiperplanos pasando por  $(n - 1)$   $\mathbf{e}_i$ 's, se obtiene la Ec. (7.18).

## 7.4. Experimentos Numéricos

En esta sección se muestran resultados que se obtuvieron al aplicar las fórmulas para hallar tono, saturación, e intensidad sobre una imagen digital basada en 16-bandas de color, Fig. 7.7. Esta figura es el resultado de un programa computacional que nos permite visualizar aquella imagen multiespectral sobre un monitor que depende del espacio RGB.

**Definición 7.4.1** Una *imagen multiespectral* consiste de  $n$  imágenes monocomáticas independientes de tamaño  $p \times q$  correspondientes a la escala de  $n$  colores primarios.

La imagen que se muestra es un códice, obtenido de la Biblioteca Nacional de Antropología e Historia (BNAH) [51]. Natural Vision Research Laboratory (NVRL), el Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (INAOE), y BNAH firmaron un convenio de colaboración para la digitalización de los códices y el análisis de los datos obtenidos, a través de los dispositivos que capturan las imágenes multiespectrales.

Las imágenes multiespectrales están compuestas por dieciséis matrices de tamaño  $2048 \times 2048$ . Cada matriz tiene la escala de una banda de color. El valor máximo de la escala de las dieciséis matrices es 38160, de manera análoga a las imágenes RGB que tienen valor máximo de 255 por canal.

Las imágenes capturadas no muestran una gran variedad de colores, sólo se encuentran tonalidades de rojos, amarillos y verdes. Sin embargo, son suficientes para mostrar la funcionalidad de las fórmulas. De la Fig. 7.7, se han seleccionado dichas tonalidades que han sido encerrados dentro de cuadros rojos (Fig. 7.8). Los resultados son mostrados



Figura 7.7: Imagen de prueba correspondiente a una imagen digital basada en 16 bandas de color, se puede observar debido a un programa computacional que convierte a la imagen multiespectral en una imagen RGB.

en tablas. Debido a que cada píxel le corresponden dieciséis valores, sólo ocupamos dos tablas para mostrar los valores correspondientes a un píxel, las áreas de color y los valores HSI, para que el lector pueda verificar los resultados. Las demás tablas contienen las coordenadas de los píxeles, los valores de las áreas de los puntos de color, H, S, e I.

Las áreas de color fueron halladas por medio del Algoritmo 7.3.1; el valor de H fue encontrado a través del Algoritmo 7.3.2; el de S con la Ec. (7.18) y el valor de I con la Ec. (7.3). En la Fig. 7.9 se muestran los dieciséis colores primarios, que van desde el color azul hasta el rojo, pasando por tonos verdosos. Por lo tanto, el polígono de color del



Figura 7.8: Zonas seleccionadas. Se han tomado píxeles dentro de los recuadros rojos con el fin de calcular su tono, saturación e intensidad.

espacio  $HSI_{16}$  tiene dieciséis lados. El color etiquetado con el número 1 tiene  $H=0^\circ$ ; el color etiquetado con el número 2 tiene  $H=22,5^\circ$ ; el tercer color tiene  $H=45^\circ$ ; y así sucesivamente. El área 1 es determinada por los colores 1 y 2, el área 2 por los colores 2 y 3, etc.

Las tablas 7.1 y 7.2 muestran los datos de las dieciséis bandas de color de un píxel, el área de color, H, S e I; el píxel de la primera tabla tiene un tono verdoso. En esta tabla se encuentran dos posibles áreas para el punto de color, estas son, las áreas 7 y 12; por medio del Algoritmo 7.3.1 se descubrió que el área 7 es la verdadera. La Tabla 7.2 corresponde a un color con tonalidad rojiza.

Tabla 7.1: Valores de las dieciséis bandas de color  $C_i$ 's correspondientes a un píxel, del área del punto de color, y de HSI.

Punto de color verde	
$(i, j)$	(641,536)
$C_1$	8 832
$C_2$	14 784
$C_3$	19 872
$C_4$	19 008
$C_5$	21 456
$C_6$	20 464
$C_7$	24 688
$C_8$	25 648
$C_9$	24 368
$C_{10}$	25 456
$C_{11}$	24 192
$C_{12}$	25 488
$C_{13}$	24 256
$C_{14}$	20 736
$C_{15}$	20 752
$C_{16}$	15 552
Áreas de color halladas	7, 12
Área del punto de color	7
H	153.656431
S	0.578867
I	0.549581

Tabla 7.2: Valores  $C_i$ 's correspondientes a un píxel, del área del punto de color, y de HSI.

Punto de color rojizo	
$(i, j)$	(707, 308)
$C_1$	7 232
$C_2$	12 976
$C_3$	17 184
$C_4$	16 688
$C_5$	19 744
$C_6$	18 880
$C_7$	22 128
$C_8$	23 872
$C_9$	23 248
$C_{10}$	24 224
$C_{11}$	23 680
$C_{12}$	24 272
$C_{13}$	22 720
$C_{14}$	19 920
$C_{15}$	20 784
$C_{16}$	15 760
Área del punto de color	11
H	243.379306
S	0.630681
I	0.513155

Band	Signal level	Wave length
1:	3632( 14/256)	418-35
2:	6816( 27/256)	446-21
3:	8992( 35/256)	465-17
4:	8912( 35/256)	481-16
5:	10880( 43/256)	497-16
6:	11040( 43/256)	513-16
7:	12800( 50/256)	530-17
8:	14048( 55/256)	548-18
9:	13120( 51/256)	566-17
10:	14928( 58/256)	584-18
11:	13808( 54/256)	602-18
12:	14624( 57/256)	621-19
13:	13920( 54/256)	640-20
14:	11488( 45/256)	662-22
15:	12144( 47/256)	686-26
16:	9392( 37/256)	717-36

Figura 7.9: Colores primarios. Estos colores representan los dieciséis vértices del polígono de color del espacio HSI<sub>16</sub>.

Los píxeles de la Tabla 7.3 son tomados de la región rectangular que se encuentra en el escudo de la parte de arriba, y es una zona amarilla (Fig. 7.8). De los resultados, notamos que sólo dos píxeles están en el área 11, el resto se encuentra en el área 10, lo cual significa que es una región de amarillos. El grado de saturación en esta zona es elevado, pues todos los píxeles menos uno pasan del 60 %. Observando los valores de las intensidades, nos damos cuenta que los colores son claros, por la razón de que estos valores estan cercanos a 0.5.

Para la Tabla 7.4, los píxeles fueron seleccionados de la región rectangular mostrada en la parte media (Fig. 7.8). En esta región tonos verdes pueden ser observados, y la Tabla 7.4 lo confirma. Los píxeles tienen un menor grado de saturación que los de la tabla anterior, y todos los píxeles excepto uno tienen una intensidad mayor a 0.5, por lo que se

Tabla 7.3: Áreas de color y valores HSI obtenidos de una zona de amarillos.

Zona de amarillos					
$i$	$j$	H	S	I	Área del punto de color
707	308	243.379306	0.630681	0.513155	11
707	309	220.139392	0.614458	0.511137	10
707	310	220.073920	0.607105	0.489832	10
708	308	220.241134	0.606340	0.505922	10
708	309	220.243404	0.608718	0.502568	10
708	310	220.395196	0.604362	0.485377	10
709	308	220.283877	0.595089	0.486688	10
709	309	220.129163	0.629488	0.493396	10
709	310	220.065432	0.614468	0.475262	10
710	310	243.449996	0.637769	0.474581	11

observa colores más claros que los correspondientes a la tabla anterior.

La Tabla 7.5 muestra las coordenadas de los píxeles que fueron tomados en la parte inferior, a la derecha la Fig. 7.8. Los resultados muestran que en efecto, se tiene una zona rojiza, en cuyo caso se encontraron siete píxeles en el área 14 y tres píxeles en el área 12. Estas dos áreas son rojizas. En comparación con las Tablas 7.3 y 7.4, aquí los colores son más intensos, debido a que tienen un porcentaje de saturación mayor a 63 %; pero son más oscuros por que los valores de intensidad no pasan de 0.23.

De la Tabla 7.6, los píxeles han sido obtenidos de la parte inferior, a la mitad la Fig. 7.8. Se mira una área oscura con un poco de color. Se obtienen cinco diferentes áreas de color; los datos de la saturación pasan de 0.5, y como era de esperar la intensidad es casi cero.

Tabla 7.4: Áreas de color y valores HSI obtenidos de una zona de verdes.

Zona de verdes					
$i$	$j$	H	S	I	Área del punto de color
715	1 184	153.455342	0.575961	0.576468	7
715	1 185	153.314113	0.540525	0.595886	7
715	1 186	153.780677	0.519001	0.570964	7
715	1 187	153.672541	0.519327	0.529481	7
716	1 184	153.485546	0.553294	0.612919	7
716	1 185	153.405055	0.543994	0.600419	7
716	1 186	153.467824	0.524172	0.543684	7
716	1 187	154.199422	0.510264	0.431499	7
717	1 184	153.598188	0.529351	0.612028	7
717	1 185	153.890828	0.535421	0.584827	7

Tabla 7.5: Áreas de color y valores HSI obtenidos de una zona rojiza.

Zona de rojos					
$i$	$j$	H	S	I	Área del punto de color
1 633	1 821	264.102981	0.648223	0.214544	12
1 633	1 822	309.913318	0.660882	0.211426	14
1 633	1 823	309.681077	0.652574	0.205162	14
1 633	1 824	309.861883	0.645189	0.212710	14
1 633	1 825	309.654701	0.669210	0.212945	14
1 634	1 821	264.112735	0.660568	0.233464	12
1 634	1 822	309.309396	0.669990	0.228695	14
1 634	1 823	309.674746	0.652009	0.220493	14
1 634	1 824	264.172696	0.660561	0.226048	12
1 634	1 825	309.338001	0.665192	0.219156	14

Tabla 7.6: Áreas de color y valores HSI obtenidos de una zona oscura.

Zona de colores oscuros					
$i$	$j$	H	S	I	Área del punto de color
1 855	1 159	243.853919	0.574578	0.080818	11
1 855	1 160	199.655685	0.524866	0.073244	9
1 856	1 159	220.745742	0.605936	0.082993	10
1 856	1 160	265.575177	0.563778	0.080739	12
1 857	1 159	265.975854	0.566438	0.080267	12
1 857	1 160	220.183457	0.599634	0.085875	10
1 858	1 159	332.605434	0.543882	0.081813	15
1 858	1 160	265.313338	0.519098	0.083700	12
1 859	1 159	220.381685	0.598438	0.093973	10
1 859	1 160	333.637229	0.614731	0.092505	15

# Capítulo 8

## Conversión de $\text{HSI}_4$ al espacio de color de 4-Bandas

En este capítulo se verá el método que proponemos para obtener las ecuaciones que transforman el espacio de color  $\text{HSI}_4$  en el modelo de color de 4-bandas. El método es similar al descrito en el capítulo 5, en donde se obtuvo la conversión alternativa de HSI a RGB.

De las secciones 7.1 y 7.2 del capítulo 7 se pueden deducir las propiedades de ambos espacios de color en consideración. En concreto, los colores en el espacio  $\text{HSI}_4$  se encuentran en una estructura de doble pirámide cuadrangular (Fig. 8.1); mientras que en el espacio de color de 4-bandas, los colores se encuentran en un subespacio vectorial 4-dimensional contenido en el espacio vectorial Euclíadiano  $\mathbb{R}^4$ ; el subespacio es generado por la base formada por el conjunto de los cuatro vectores unitarios canónicos (estos conceptos se muestran en el capítulo 2). Los cuatro colores primarios  $C_1, C_2, C_3, C_4$  toman valores reales desde cero hasta uno.

De la sección 7.3 se sabe que  $H$  y  $S$  tienen la información de la cromaticidad, se encuentran en un cuadrado (Fig. 8.2); que en realidad, dicho cuadrado bidimensional se deriva de un "hiper-cuadrado" 4-dimensional. Esto último debido a la suma de los coeficientes cromáticos (Ec. 7.2).

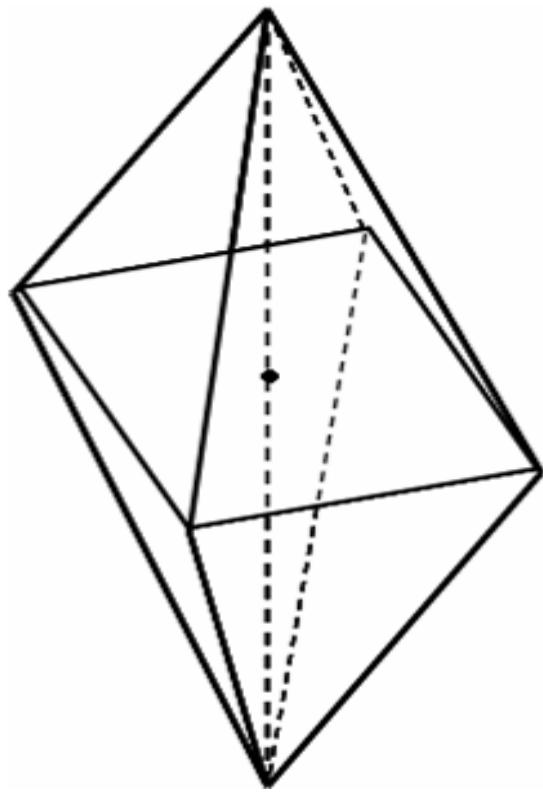


Figura 8.1: Espacio de color  $\text{HSI}_4$ . La forma de este espacio es una doble pirámide cuadrangular.

Así como se trabajó con áreas de color en los capítulos 5 y 7, en el cuadro de color se tienen cuatro:  $A_i$ , delimitadas por  $C_i, W, C_{i+1}; i = 1, \dots, 4$  (Fig. 8.3). Las operaciones matemáticas se realizarán en  $A_1$ . Si un punto de color está en alguna área  $A_j$  distinta de  $A_1$ , entonces se traslada a  $A_1$  mediante  $H = H - 90(j - 1)$ , manteniéndose constante  $S$  e  $I$ . Después de realizar operaciones, se tiene que regresar al área inicial, obteniéndose así los valores de las cuatro bandas de color.

En términos de los coeficientes cromáticos las áreas  $A_i$ 's sobre el hiper-cuadrado están delimitadas por  $e_i, W, e_{i+1}; i = 1, \dots, 4$ . Para darse una idea vease la Fig. 7.3. A través de un punto de color  $O = (c_1, c_2, c_3, c_4)$  en  $A_1$  pasa un segmento de hiper-recta con punto inicial en  $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$  y punto final en  $O' = (c'_1, c'_2, 0, 0)$ , el cual está en  $A_1$ , y además es un punto del plano  $c_1c_2$ .

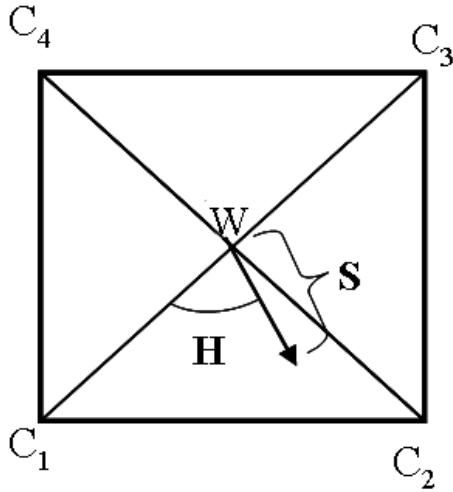


Figura 8.2: Cuadro de color. Tono y saturación se definen en un cuadrado; el tono (H) es un ángulo medido respecto al eje  $WC_1$ , la saturación (S) es proporcional a la distancia medida desde el centro del cuadrado hasta el punto de color.

$$c_1 = \frac{1}{4} + k \left( c'_1 - \frac{1}{4} \right), \quad (8.1)$$

$$c_2 = \frac{1}{4} + k \left( c'_2 - \frac{1}{4} \right), \quad (8.2)$$

$$c_3 = \frac{1}{4} - \frac{k}{4}, \quad (8.3)$$

$$c_4 = \frac{1}{4} - \frac{k}{4}, \quad (8.4)$$

para un  $k$  dentro de  $[0, 1]$ . Nótese que si  $k = 0$ , entonces  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1/4$ , lo que implica que  $S = 0$ ; si  $k = 1$ ,  $c_1 = c'_1, c_2 = c'_2, c_3 = c_4 = 0$ , entonces  $S = 1$ . En general,  $k = S$ .

Por otro lado,  $O' = (c'_1, c'_2, 0, 0)$  se encuentra en el segmento de hiper-recta, en la que se toma como punto de partida, el punto final del vector  $\mathbf{e}_1$ , y como punto terminal al punto final de  $\mathbf{e}_2$ . Por tanto,

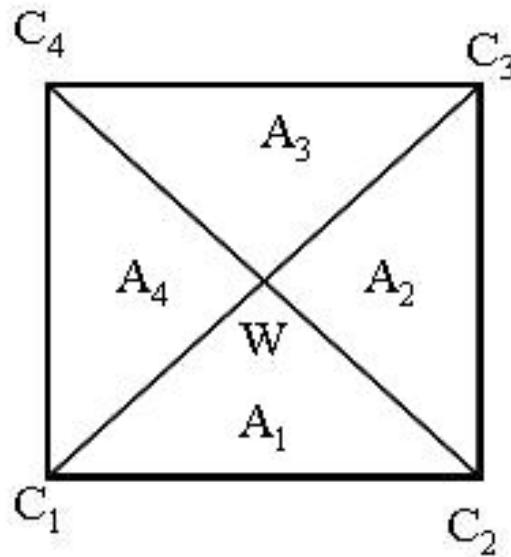


Figura 8.3: Cuadro de color. Tono y saturación se definen en un cuadrado; el tono (H) es un ángulo medido respecto al eje  $WC_1$ , la saturación (S) es proporcional a la distancia medida desde el centro del cuadrado hasta el punto de color.

$$O' = (1 - t, t, 0, 0) \text{ para un } t \text{ en } [0, 1]. \quad (8.5)$$

De las conclusiones de los últimos dos párrafos, se llega a:

$$c_1 = \frac{1}{4} + S\left(\frac{3}{4} - t\right), \quad (8.6)$$

$$c_2 = \frac{1}{4} + S\left(t - \frac{1}{4}\right), \quad (8.7)$$

$$c_3 = \frac{1}{4} - \frac{S}{4}, \quad (8.8)$$

$$c_4 = \frac{1}{4} - \frac{S}{4}, \quad (8.9)$$

Luego, ya que  $C_i = 4Ic_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,

---


$$C_1 = [S(3 - 4t) + 1]I, \quad (8.10)$$

$$C_2 = [S(4t - 1) + 1]I, \quad (8.11)$$

$$C_3 = [1 - S]I, \quad (8.12)$$

$$C_4 = [1 - S]I. \quad (8.13)$$

$t$  en  $[0, 1]$ .

Hasta aquí, se han obtenido los valores  $C_1, C_2, C_3, C_4$  en términos de  $S$  e  $I$ . La dependencia de  $H$  se desarrollará de manera similar al método del capítulo 5, que como ya se explicó,  $t$  está relacionada directamente con  $H$ . Además, ya que se está operando en  $A_1$ , se puede tomar la Ec. (7.10):

$$H = \left[ \frac{360}{n \cos^{-1} \left( \frac{-1}{n-1} \right)} \right] \cos^{-1} \left[ \frac{(n-1)C_1 - \sum_{i=2}^n C_i}{\sqrt{n-1} \sqrt{n \left( \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n C_i \right)^2}} \right]. \quad (8.14)$$

En nuestro caso,  $n = 4$ , es equivalente a:

$$H = 0,82213 \cos^{-1} \left[ \frac{3C_1 - (C_2 + C_3 + C_4)}{\sqrt{3} \sqrt{4 \left( C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 \right) - \left( C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \right)^2}} \right]. \quad (8.15)$$

Relacionando las Ecs. (7.1), (7.3) y (8.5),

$$C_1 = 4I(1-t), \quad (8.16)$$

$$C_2 = 4It. \quad (8.17)$$

Sustituyendo en la Ec. (8.15),

$$\cos(1,21634H) = \frac{12I(1-t) - 4It}{\sqrt{12 \left\{ [4I(1-t)]^2 + [4It]^2 \right\} - 48I^2}}. \quad (8.18)$$

Tras operaciones matemáticas se consigue que

---


$$\frac{24 \cos^2(1,21634H) - 16}{\sin^2(1,21634H)} t^2 + 24t - 9 = 0, t \neq 0. \quad (8.19)$$

Esta ecuación tiene sólo raíces reales, ya que su discriminante es positivo:

$$24^2 - 4 \left( \frac{\cos^2(1,21634H) - 16}{\sin^2(1,21634H)} \right) (-9) > 0 \quad (8.20)$$

pues esta desigualdad equivale a que  $-576 + 864 > 0$ . Ahora, debido a que  $t > 0$ , se consideran los siguientes casos:

Sean  $t_1$  y  $t_2$  raíces reales de la Ec. (8.19).

*Caso 1. Raíces con signos opuestos.*

Si  $t_1 > 0$  y  $t_2 < 0$ , entonces elegir a  $t_1$  como solución.

*Caso 2. Raíces con signos positivos.*

Si  $t_1 > 0$  y  $t_2 > 0$ , se sustituye a  $t_1$  en las Ecs. (8.16) y (8.17), que a su vez se sustituyen en la Ec. (8.15) para obtener un valor  $H$ . Si este valor coincide con el  $H$  de entrada, entonces  $t_1$  es solución. En caso contrario  $t_2$  es solución.

Ya se tiene todo lo necesario para encontrar los valores (aproximados, como se verá en los ejemplos), de las cuatro bandas de color  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$ .

**Valores  $C_1C_2C_3C_4$  en el área  $A_1$ .**

Usar las Ecs. (8.10) a (8.13) y (8.19).

**Valores  $C_1C_2C_3C_4$  en el área  $A_2$ .**

1. Si  $H$  inicial es tal que  $90^\circ < H \leq 180^\circ$ , entonces

$$H = H - 90. \quad (8.21)$$

- 
2. Calcular los valores  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  con las Ecs. (8.10) a (8.13) y (8.19). Denotarlos de manera respectiva a estos valores como  $C'_1, C'_2, C'_3$  y  $C'_4$ .
3. Las coordenadas  $(C_1, C_2, C_3, C_4)$  son:

$$(C_1, C_2, C_3, C_4) = (C'_4, C'_1, C'_2, C'_3). \quad (8.22)$$

En este paso se regresa a  $A_2$ .

**Valores  $C_1C_2C_3C_4$  en el área  $A_3$ .**

1. Si  $180^\circ < H \leq 270^\circ$ , entonces

$$H = H - 180. \quad (8.23)$$

2. Calcular los valores  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  con las Ecs. (8.10) a (8.13) y (8.19), y denominarlos por  $C'_1, C'_2, C'_3$  y  $C'_4$  respectivamente.
- 3.

$$(C_1, C_2, C_3, C_4) = (C'_3, C'_4, C'_1, C'_2). \quad (8.24)$$

**Valores  $C_1C_2C_3C_4$  en el área  $A_4$ .**

1. Si  $270^\circ < H < 360^\circ$ , entonces

$$H = H - 270 \quad (8.25)$$

2. Calcular  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  a través de las Ecs. (8.10) a (8.13) y (8.19). Denotarlos por  $C'_1, C'_2, C'_3$  y  $C'_4$ .
3. Las coordenadas  $(C_1, C_2, C_3, C_4)$  son:

$$(C_1, C_2, C_3, C_4) = (C'_2, C'_3, C'_4, C'_1). \quad (8.26)$$

## 8.1. Ejemplos

Se muestran algunos ejemplos del método anterior para obtener los valores de las cuatro bandas  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$ , a partir de los valores HSI.

### Ejemplo 1.

sean  $H=32.2536$ ,  $S=0.2308$  e  $I=0.65$  [datos obtenidos del Algoritmo 7.3.2 aplicado a  $(C_1, C_2, C_3, C_4) = (0.8, 0.6, 0.7, 0.5)$ ]. Para este valor de  $H$ , se tiene que el punto de color se encuentra en  $A_1$ .

El valor de  $t$  calculado con la Ec. (8.19) es,  $t = 0.40192395$ .

A través de las Ecs. (8.10) a (8.13), se obtiene:

$$C_1 = 0.858873,$$

$$C_2 = 0.741166,$$

$$C_3 = 0.49998,$$

$$C_4 = 0.49998.$$

Con estos cuatro valores aplicados al Algoritmo 7.3.2, Ec. (7.18) y Ec. (7.3), los cuales dan HSI en ese mismo orden, se tiene,

$$H=32.2536,$$

$$S=0.2308,$$

$$I=0.65,$$

que coinciden con los datos de entrada.

Análogamente, se tiene:

### Ejemplo 2.

Datos de entrada:  $H=107.3292$ ,  $S=0.1195$ ,  $I=0.2112$ .

Coordenadas respectivas:  $(C_1, C_2, C_3, C_4) = (0.186, 0.254, 0.193, 0.212)$ .

Área de color:  $A_2$ .

Valor de  $t$ : 0.26458976.

Valores calculados de las cuatro bandas:

$$\begin{aligned}C_1 &= 0,185961, \\C_2 &= 0,260203, \\C_3 &= 0,212672, \\C_4 &= 0,1859616.\end{aligned}$$

Nuevamente, con estos datos se obtiene los valores HSI iniciales.

### Ejemplo 3.

Datos de entrada:  $H=226.2296$ ,  $S=0.559$ ,  $I=0.7143$ .

Coordenadas respectivas:  $(C_1, C_2, C_3, C_4) = (0,315, 0,542, 1, 1)$ .

Área de color:  $A_3$ .

Valor de  $t$ : 0.56567791.

Valores calculados de las cuatro bandas:

$$\begin{aligned}C_1 &= 0,315006, \\C_2 &= 0,315006, \\C_3 &= 1,008694, \\C_4 &= 1,218492.\end{aligned}$$

En este ejemplo, en el punto 2 del método dado anteriormente para obtener los valores de las cuatro bandas en el área  $A_3$ , se tiene:

$$\begin{aligned}C'_1 &= 1,008694, \\C'_2 &= 1,218492, \\C'_3 &= 0,315006, \\C'_4 &= 0,315006.\end{aligned}$$

En donde se observa que  $C'_1$  y  $C'_2$  son mayores que 1, lo cual conocemos que esto no debe suceder. Sin embargo, si se hace  $C'_1 = 1$ ,  $C'_2 = 1$  y se calcula a  $C'_4$  usando que  $c'_1 + c'_2 + c'_3 + c'_4 = 1$ , y que  $C'_i = 4Ic'_i$ , es decir,  $C'_4 = 4I - (C'_1 + C'_2 + C'_3)$ . Entonces se consigue finalmente que las coordenadas del punto de color en  $A_3$  sean las siguientes:

$$\begin{aligned}C_1 &= 0,315006, \\C_2 &= 0,542194, \\C_3 &= 1,\end{aligned}$$

$C_4 = 1$ .

En este caso, se obtienen aproximaciones más exactas a los valores de las cuatro bandas de color.

Con estos ejemplos nos damos cuenta que las fórmulas expuestas aquí, para la conversión inversa de  $HSI_4$  al espacio de color de 4-bandas, dan valores aproximados a los datos originales  $C_1, C_2, C_3, C_4$ ; sin embargo, estos nuevos valores al ser utilizados en la conversión directa vista en el capítulo 7 se obtienen los valores originales de H, S, e I. Con lo que se obtiene dos colores metámeros, pues con dos diferentes intensidades de los colores primarios se consigue un color con igual tonalidad, saturación e intensidad, características por la que el ser humano distingue un color.

# Capítulo 9

## Conclusiones

Esta tesis ha sido enfocada a los espacios de color RGB y HSI, ampliamente utilizados en el procesamiento digital de imágenes. El modelo RGB es usado en la mayoría de las cámaras de color empleadas para la adquisición de imágenes, y en monitores de color. El modelo de color HSI tiene como elementos al tono, saturación, e intensidad; elementos que se relacionan en la manera en que el ser humano percibe el color.

Las aportaciones más importantes son las generalizaciones de los espacios de color en consideración, que les hemos denominado espacio  $HSI_n$  y espacio de  $n$  bandas de color, y la conversión que transforma al espacio de  $n$  bandas en el espacio  $HSI_n$  (capítulo 7). Además, de manera particular, para cuatro bandas se desarrollaron las ecuaciones que transforman al espacio  $HSI_4$  al espacio de color de 4-bandas (capítulo 8).

En los capítulos 5 y 6 se dan otras contribuciones significativas, estas son, la conversión alternativa de HSI a RGB, que como su nombre lo indica, proporcionamos nuevas ecuaciones que nos guían del primer modelo de color al segundo. Y la asignación de falso color a objetos dentro de una imagen digital RGB, en la cual mostramos una aplicación del sistema HSI. De manera más detallada, se tiene que:

Se ha descrito un método alternativo (capítulo 5) para encontrar una transformación nueva que va del espacio RGB al espacio HSI [Ecs. (5.9), (5.10), y (5.11)]. Esta transformación introduce una variable  $t$  que está relacionada con H de manera directa a través de

---

una ecuación cuadrática. Si se quisiera modificar únicamente la tonalidad, bastaría variar a  $t$  que toma valores reales desde cero hasta uno. En la literatura, la conversión se basa principalmente en proyecciones; mientras que nosotros nos apoyamos en la representación paramétrica de la recta que va del centro del polígono de color a un punto de éste, que se encuentra en el plano  $rg$ .

Se ha asignado falso color a objetos que están dentro de una imagen digital RGB (capítulo 6), por medio del uso de los espacios de color RGB y HSI. Esto se ha logrado transformando la tonalidad y la saturación de los objetos en consideración. De manera general, el procedimiento consiste en seleccionar una subimagen del objeto deseado, a la cual se le calculan los valores del tono y se mantienen fijos los valores de saturación e intensidad. Posteriormente, se elige un nuevo tono y/o saturación que sustituye a los valores anteriores. Por último, se realiza la transformación inversa sobre toda la imagen para obtener los valores de RGB y poder visualizarla. Este resultado se puede aplicar en aquellas áreas de trabajo en donde se requiera ver coloreado un objeto en diferentes tonalidades sin necesidad de colorear directamente al objeto, pues esto podría ser costoso en tiempo y dinero. Por ejemplo en tiendas de pinturas residenciales y comerciales; fabricantes de autos; en el cine; televisión; etc.

Se ha explicado el método para obtener las ecuaciones que nos guían desde el espacio de  $n$  bandas de color al espacio  $HSI_n$  (capítulo 7). El espacio de  $n$  bandas de color es la generalización del sistema aditivo RGB. En esta forma, el espacio de  $n$  bandas es un subespacio vectorial de dimensión  $n$ , y cada elemento de color es definido por un vector. El espacio  $HSI_n$  es el espacio de  $n$  bandas dado en un sistema coordenado diferente. La intensidad I dentro del espacio de  $n$  bandas es definida a lo largo del segmento de recta definida en el espacio Euclíadiano  $n$  dimensional, que inicia en el color negro (0, ..., 0) hasta el blanco (1, ..., 1). Además, I toma valores en el intervalo [0,1]; 0 significa que el color es negro, y 1 significa que es blanco. HS son las coordenadas polares de un plano definido en  $n$  dimensiones, y éste es normal a I. La componente de saturación muestra como el color es diluido con el color blanco. S varía de 0 a 1, y es medida con la distancia Euclíadiana. H es el ángulo que se forma por el vector de la primera banda de color y por el vector definido por el punto de color. La componente H describe el color en sí mismo

en la forma de un ángulo de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .

La conversión del espacio de  $n$  bandas de color al  $\text{HSI}_n$  se da en términos de los  $n$  colores primarios; se puede hallar la representación HSI utilizando el hiper-plano definido por los coeficientes cromáticos y usando geometría  $n$  dimensional. Para mostrar la funcionalidad de las fórmulas halladas, se aplican éstas a una imagen multiespectral de dieciséis bandas de color. La imagen fue obtenida por un acuerdo entre Natural Vision Research Laboratory (NVRL), Biblioteca Nacional de Antropología e Historia (BNAH), y el Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (INAOE). Los resultados de tonalidad, saturación e intensidad son mostradas en 6 tablas.

Se obtuvieron las ecuaciones que conducen del espacio  $\text{HSI}_4$  al espacio de 4 bandas de color (capítulo 8). Ambos espacios se derivan del capítulo 7. El método expuesto es una generalización del desarrollo realizado en el capítulo 5 y utiliza elementos del capítulo 7. Las ecuaciones obtenidas se aplican en algunos ejemplos numéricos; se observa en éstos que los resultados son aproximaciones a los valores originales de los cuatro colores primarios. Sin embargo, se demuestra que con estos datos aproximados al ser sustituidos en las fórmulas del capítulo 7 que calculan  $H$ ,  $S$  e  $I$ , dan ciertamente los valores de entrada HSI. Por lo que se concluye que los colores correspondientes a los datos originales y aproximados de las cuatro bandas de color son metámeros.

### 9.1. Asistencia de Congresos y Publicaciones

- Asistencia y participación en el XLIX Congreso Nacional de Física, llevado a cabo en San Luis Potosí, SLP, del 16 al 20 de octubre de 2006, en sesión mural, con el trabajo denominado: "Uso del sistema HSI para Asignar Falso Color a Objetos en Imágenes Digitales".
- Asistencia y participación en el L Congreso Nacional de Física, realizado en Boca del Río, Veracruz, del 29 de octubre al 2 de noviembre de 2007, en sesión mural, con el tema: "Conversión del Sistema de Color de  $n$  Bandas al Sistema  $\text{HSI}_n$ ".
- Asistencia y participación en el LI Congreso Nacional de Física, celebrado en Za-

## **9.1. ASISTENCIA DE CONGRESOS Y PUBLICACIONES**

---

catecas, Zacatecas del 20 al 24 de octubre del 2008 en sesión simultánea, con el trabajo cuyo título es: "Aplicación de la Conversión del Sistema de color de  $n$ -Bandas al Sistema HSI en imágenes multiespectrales".

- Publicación del artículo "Uso del sistema HSI para Asignar Falso Color a Objetos en Imágenes Digitales" en la Revista Mexicana de Física, en la sección de Enseñanza, publicada en el volumen 54, número 2 de diciembre de 2008.
- Publicación del artículo "Conversion from  $n$  Bands Color Space to HSI <sub>$n$</sub>  Color Space" en la revista Optical Review, volumen 16, número 2, páginas 91-98, en el mes de abril del 2009.

# Apéndice A

## Desarrollos Algebraicos para Hallar H y S en $n$ Dimensiones

En esta sección están realizadas las operaciones algebraicas, con las cuales se deducen las ecuaciones (7.9) y (7.18), correspondientes a H y S, elementos del espacio de color HSI <sub>$n$</sub> , visto en el capítulo 7.

### Deducción de H

En el capítulo 7 se vió que H se puede calcular por medio de la ecuación que da el ángulo entre dos vectores,

$$H = \cos^{-1} \left[ \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{w})}{\|\mathbf{p} - \mathbf{w}\| \|\mathbf{e}_1 - \mathbf{w}\|} \right], \text{ para } 0 \leq H \leq 180. \quad (\text{A.1})$$

Siendo  $\mathbf{w} = (1/n, \dots, 1/n)$ ,  $\mathbf{p} = (c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0n})$  y  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Utilizando la Ec. (2.8) que da la distancia de los extremos de dos vectores,

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{w}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( c_{0i} - \frac{1}{n} \right)^2}.$$

Resolviendo los términos cuadráticos y agrupando,

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{w}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_{0i}^2 - \frac{2}{n} \left( \sum_{i=1}^n c_{0i} \right) + \frac{n}{n^2}}.$$

---

Puesto que

$$\sum_{i=1}^n c_{0i} = 1, \quad (\text{A.2})$$

se llega a

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{w}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_{0i}^2 - \frac{1}{n}}. \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo  $c_{0i} = \frac{C_{0i}}{\sum_{j=1}^n C_{0j}}$  en la expresión anterior y realizando las operaciones indicadas,

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{w}\| = \sqrt{\frac{n(\sum_{i=1}^n C_{0i}^2) - (\sum_{i=1}^n C_{0i})^2}{n(\sum_{i=1}^n C_{0i})^2}}.$$

Por otra parte, de la Ec. (2.8),

$$\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{w}\| = \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + (n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^2},$$

que equivale a

$$\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{w}\| = \sqrt{\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} + \frac{n-1}{n^2}},$$

y así,

$$\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{w}\| = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}.$$

Ahora,

$$(\mathbf{p} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{w}) = \left(c_{01} - \frac{1}{n}, \dots, c_{0n} - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}\right),$$

que de la definición de producto punto

$$(\mathbf{p} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{w}) = \left(\frac{nc_{01} - 1}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right) - \left(\frac{nc_{02} - 1}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) - \dots - \left(\frac{nc_{0n} - 1}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right),$$

multiplicando las fracciones y restando,

$$(\mathbf{p} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{w}) = \frac{n}{n^2} [(n-1)c_{01} - c_{02} - \dots - c_{0n}],$$

lo cual equivale a

$$(\mathbf{p} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{w}) = \frac{(n-1)C_{01} - \sum_{i=2}^n C_{0i}}{n(\sum_{i=1}^n C_{0i})}.$$

---

Por tanto, dentro de los paréntesis cuadrados de la Ec. (A.1) se tiene

$$\frac{[(n-1)\mathbf{C}_{01} - \sum_{i=2}^n \mathbf{C}_{0i}] \sqrt{n^2 (\sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{0i})^2}}{\sqrt{n(n-1) (\sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{0i}^2) - (n-1) (\sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{0i})^2} [n (\sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{0i})]}.$$

Eliminando la raíz cuadrada en el numerador,

$$\frac{n [(n-1)\mathbf{C}_{01} - \sum_{i=2}^n \mathbf{C}_{0i}]}{\sqrt{n^3(n-1) (\sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{0i}^2) - n^2(n-1) (\sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{0i})^2}},$$

factorizando  $n^2(n-1)$  en el denominador, se consigue finalmente,

$$H = \cos^{-1} \left[ \frac{(n-1)\mathbf{C}_{01} - \sum_{i=2}^n \mathbf{C}_{0i}}{\sqrt{n-1} \sqrt{n (\sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{0i}^2) - (\sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{0i})^2}} \right].$$

## Deducción de S

En la sección 7.3.2 se definió a S como

$$S = \frac{\|\mathbf{w}-\mathbf{p}\|}{\|\mathbf{w}-\mathbf{p}'\|}.$$

En esta ecuación se conoce a  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{p}$ , pero no a  $\mathbf{p}'$ . En la mencionada sección se comentó que el vector  $\mathbf{p}'$  se le halla por medio de la hiper-recta [generalización de la Ec. (2.4)] que pasa por los puntos finales W y P de los vectores  $\mathbf{w} = (1/n, \dots, 1/n)$  y  $\mathbf{p} = (c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0n})$ , cuya ecuación paramétrica es

$$c_i = k(c_{0i} - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}; \quad i = 1, \dots, n; \quad k \text{ dentro del intervalo } [0, 1], \quad (\text{A.4})$$

y por el hiperplano [extensión de la Ec. (2.6)] que pasa por los puntos finales de  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ . Esto es,

---


$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 + t_2(0 - 1) + t_3(0 - 1) + \cdots + t_{n-1}(0 - 1) + t_n(0 - 0), \\
c_2 &= 0 + t_2(1 - 0) + t_3(0 - 0) + \cdots + t_{n-1}(0 - 0) + t_n(0 - 0), \\
&\vdots \\
c_{n-1} &= 0 + t_2(0 - 0) + t_3(0 - 0) + \cdots + t_{n-1}(1 - 0) + t_n(0 - 0), \\
c_n &= 0 + t_2(0 - 0) + t_3(0 - 0) + \cdots + t_{n-1}(0 - 0) + t_n(0 - 0);
\end{aligned}$$

cada  $t_i$  dentro de  $[0,1]$ . Es decir,

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 - t_2 - t_3 - \cdots - t_{n-1}, \\
c_2 &= t_2, \\
&\vdots \\
c_{n-1} &= t_{n-1}, \\
c_n &= 0.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Igualando las primeras  $n - 1$  expresiones del sistema (A.4) y (A.5),

$$\begin{aligned}
k(c_{01} - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} &= 1 - t_2 - t_3 - \cdots - t_{n-1}, \\
k(c_{02} - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} &= t_2, \\
&\vdots \\
k(c_{0n-1} - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} &= t_{n-1}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Sumando ambos lados de las igualdades,

$$k \left( \sum_{i=1}^{n-1} c_{0i} - \frac{n-1}{n} \right) + \frac{n-1}{n} = 1.$$

Despejando  $k$ ,

$$k = \frac{1}{n \left( \sum_{i=1}^{n-1} c_{0i} - \frac{n-1}{n} \right)}.$$

---

sustituyendo en (A.6),

$$t_2 = \frac{c_{02} - \frac{1}{n}}{n \left( \sum_{i=1}^{n-1} c_{0i} - \frac{n-1}{n} \right)} + \frac{1}{n}.$$

Por (A.2) se deduce,

$$t_2 = \frac{c_{02} - \frac{1}{n}}{n \left( 1 - c_{0n} - \frac{n-1}{n} \right)} + \frac{1}{n},$$

y esto es,

$$t_2 = \frac{c_{02} - c_{0n}}{1 - nc_{0n}}.$$

De manera similar, se logra que

$$t_i = \frac{c_{0i} - c_{0n}}{1 - nc_{0n}} \quad i = 3, \dots, n-1.$$

Con estos resultados se pueden encontrar las expresiones en cada una de las entradas del vector  $\mathbf{p}'$ , que tiene la forma de

$$\mathbf{p}' = (1 - t_2 - t_3 - \dots - t_{n-1}, t_2, \dots, t_{n-1}, 0).$$

La primera entrada del vector es

$$1 - t_2 - t_3 - \dots - t_{n-1} = 1 + \frac{-\sum_{i=2}^{n-1} c_{0i} + (n-2)c_{0n}}{1 - nc_{0n}}.$$

Realizando la suma de fracciones en el lado derecho de la igualdad,

$$1 - t_2 - t_3 - \dots - t_{n-1} = \frac{1 - \sum_{i=2}^{n-1} c_{0i} - 2c_{0n}}{1 - nc_{0n}}.$$

En consecuencia,

$$\mathbf{p}' = [1 - nc_{0n}]^{-1} (1 - \sum_{i=2}^{n-1} c_{0i} - 2c_{0n}, c_{02} - c_{0n}, \dots, c_{0n-1} - c_{0n}, 0).$$

Sustituyendo  $\mathbf{p}'$  en la Ec. (A.3),

$$\|\mathbf{p}' - \mathbf{w}\| = \sqrt{\frac{(1 - \sum_{i=2}^{n-1} c_{0i} - 2c_{0n})^2 + (c_{02} - c_{0n})^2 + \dots + (c_{0n-1} - c_{0n})^2}{(1 - nc_{0n})^2} - \frac{1}{n}}, \quad (\text{A.7})$$

---

en donde el primer miembro del numerador es igual a

$$\left(1 - \sum_{i=2}^{n-1} c_{0i} - 2c_{0n}\right)^2 = 1 - 2\left(\sum_{i=2}^{n-1} c_{0i} + 2c_{0n}\right) + \sum_{i=2}^{n-1} (c_{0i} + 2c_{0i}c_{0i+1} + \dots + 2c_{0i}c_{0n-1} + 4c_{0i}c_{0n}) + 4c_{0n}^2.$$

Luego, sumando los miembros del numerador de la Ec. (A.7) se consigue que

$$1 - 2\left(\sum_{i=2}^{n-1} c_{0i} + 2c_{0n}\right) + \sum_{i=2}^{n-1} (2c_{0i}^2 + 2c_{0i}c_{0i+1} + \dots + 2c_{0i}c_{0n-1} + 2c_{0i}c_{0n}) + [4 + (n-2)]c_{0n}^2.$$

Denotemos por  $M$  a esta última ecuación. Enseguida, sumando las fracciones dentro de la raíz cuadrada de la Ec. (A.7), se obtiene

$$\frac{nM - 1 + 2nc_{0n} - n^2c_{0n}^2}{n(1 - nc_{0n})^2},$$

que es equivalente a

$$\frac{\frac{n-1}{n} - 2\sum_{i=2}^n c_{0i} + 2\left[\sum_{i=2}^{n-2} (c_{0i}c_{0i+1} + \dots + c_{0i}c_{0n}) + c_{0n-1}c_{0n}\right] + 2\sum_{i=2}^n c_{0i}^2}{(1 - nc_{0n})^2}.$$

La suma de las dos últimas sumatorias del numerador es igual a la suma de las últimas dos del siguiente numerador:

$$\frac{\frac{n-1}{n} - 2\sum_{i=2}^n c_{0i} + \sum_{i=2}^n c_{0i}^2 + (\sum_{i=2}^n c_{0i})^2}{(1 - nc_{0n})^2}.$$

Con base en (A.2), esta fracción es equivalente a esta otra:

$$\frac{\frac{n-1}{n} - 2(1 - c_{01}) + \sum_{i=2}^n c_{0i}^2 + (1 - c_{01})^2}{(1 - nc_{0n})^2}.$$

Continuando con las operaciones algebraicas, esto es igual a

$$\frac{\sum_{i=1}^n c_{0i}^2 + \frac{n-1}{n} - 1}{(1 - nc_{0n})^2}.$$

Por lo tanto,

$$\|\mathbf{p}' - \mathbf{w}\| = (1 - nc_{0n})^{-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n c_{0i}^2 - \frac{1}{n}}.$$

---

Con esta ecuación y junto con la Ec. (A.3),

$$S = \frac{\|\mathbf{w} - \mathbf{p}\|}{\|\mathbf{w} - \mathbf{p}'\|} = \frac{\sqrt{(\sum_{i=1}^n c_{0i}^2) - \frac{1}{n}}}{(1 - nc_{0n})^{-1} \sqrt{(\sum_{i=1}^n c_{0i}^2) - \frac{1}{n}}},$$

que se convierte en la expresión

$$S = 1 - nc_{0n}, \quad (\text{A.8})$$

donde  $c_{0n}$  es el mínimo de todos los  $c_{0i}$ 's, pues  $c_{0n}$  está en  $[0, 1/n]$  y los  $c_{0i}$ 's pertenecen a  $[1/n, 1]$ . Por lo tanto

$$S = 1 - \frac{n \min \{C_{01}, C_{02}, \dots, C_{0n}\}}{\sum_{i=1}^n C_{0i}}. \quad (\text{A.9})$$

# Índice de figuras

2.1.	Representación gráfica de los vectores. Un vector se representa como un segmento con dirección y sentido, dibujado como una flecha. Su largo representa la magnitud y la punta de flecha indica su sentido. . . . .	13
2.2.	Suma de vectores. En (a), la suma se puede considerar como suma de desplazamientos; En (b), para realizar la suma gráfica de dos vectores, se utiliza el método del paralelogramo. . . . .	15
2.3.	Representación gráfica de la recta. Cualquier punto de la recta $l$ que pase por el extremo de $\mathbf{a}$ , y en la misma dirección de $\mathbf{b}$ es de la forma $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ . . . . .	17
2.4.	El plano. La ecuación paramétrica del plano que pasa por un punto $\mathbf{P}_0$ y es paralelo a otro plano puede escribirse como $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ . . . . .	18
3.1.	Espectro electromagnético [21]. La luz visible se encuentra dentro de la región del espectro electromagnético que el ojo humano es capaz de percibir, y sus longitudes de onda varían desde 380 a 780 nm. . . . .	22
3.2.	El ojo humano [28]. En la retina se encuentran las células receptoras denominadas conos y bastones muy sensibles a la luz. . . . .	24
3.3.	Un cuerpo se ve de color blanco porque éste refleja todos los colores del espectro; un cuerpo se ve negro porque absorbe todas las radiaciones electromagnéticas [29]. . . . .	25
3.4.	Funciones de igualación obtenidas con diez observadores por W. D. Wright [36]. . . . .	29
3.5.	Plano generado por la ecuación $r_\lambda + g_\lambda + b_\lambda = 1$ . . . . .	30
3.6.	Gráfica bidimensional de los colores [40]. En la curva se representan los valores obtenidos experimentalmente por Wright. . . . .	31

3.7. Diagrama de cromaticidad [41]. El diagrama es una aproximación para especificar los colores, que muestra la composición del color como función de $x$ e $y$ . . . . .	32
4.1. El cubo unitario de color es el modelo matemático que representa al espacio de color RGB. . . . .	37
4.2. Propiedades del color [43]. (a) Presenta diferentes tonalidades (color dominante); en (b) se encuentran distintas intensidades, que son representadas por esta escala de grises; (c) tiene variedades de saturación del color rojo. . . . .	38
4.3. Triángulo de color y doble pirámide triangular [44]. El triángulo de color muestra la manera en que se miden el tono y la saturación; el tono es una medida angular y la saturación es una medida longitudinal. La doble pirámide triangular es la representación del espacio HSI, la intensidad va del negro al blanco pasando por la escala de grises. . . . .	39
4.4. Vectores involucrados en el cálculo del tono. W tiene coordenadas $(1/3, 1/3, 1/3)$ ; con la resta de vectores se obtienen los vectores que determinan al tono. .	42
4.5. Áreas auxiliares de color. Para encontrar la componente S, y los valores RGB se utilizan estas áreas. . . . .	43
5.1. Vectores involucrados en el cálculo de H. . . . .	47
5.2. Áreas auxiliares de color. Para encontrar la componente S y los valores RGB se utilizan estas tres áreas. . . . .	50

- 6.1. Ayuntamiento. A la imagen del lado izquierdo se le ha elegido una región rectangular que se distingue en el centro de la imagen, con una zona con más intensidad que otra; los tonos mínimo y máximo respectivamente son  $11^\circ$  y  $25^\circ$ . En la imagen de la derecha, a la misma figura se le ha elegido el cián, que corresponde a  $H=180^\circ$  para asignar una nueva tonalidad al edificio del ayuntamiento.  $t_1 = 1$  y  $t_2=0.5$ , éstos están relacionados con  $H=180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ;  $t_2$  es el número buscado, pues sustituido en la Ec. (5.19) resulta  $H=60^\circ$ . Observese que en el piso hay manchones con esta nueva tonalidad, por la razón de que en la imagen original el piso tiene zonas con tonalidades entre el tono mínimo y el tono máximo. . . . . 56
- 6.2. Geométricos. El segundo resultado es el realizado sobre la imagen de figuras geométricas (lado izquierdo). En ésta, se ha seleccionado al cilindro rectangular para designarle un falso color; sobre el área remarcada con el color rojo se ha encontrado que los tonos mínimo y máximo de manera respectiva son:  $42^\circ$  y  $56^\circ$ . El valor nuevo del tono que se ha elegido es  $184^\circ$ ;  $t_1 = -0.6578$  y  $t_2=0.2212$  (relacionados con  $H=184^\circ - 120^\circ = 64^\circ$ );  $t_2$  corresponde a  $H= 64^\circ$ . Después de realizar las operaciones indicadas en el algoritmo se tiene la nueva imagen, lado derecho. . . . . 57
- 6.3. Tigre. A la izquierda se tiene la imagen de un tigre, los tonos de referencia hallados son: tono mínimo,  $0^\circ$ ; tono máximo,  $36^\circ$ . A la derecha se tiene la imagen resultante con tono nuevo igual a  $320^\circ$ . De  $H=320^\circ - 240^\circ = 80^\circ$ , se tiene  $t_1 = 0,7422$  y  $t_2 = 0,6051$ . De los cuales,  $t_2$  al ser sustituido en la Ec. (5.19) da  $H=80^\circ$ . . . . . 58
- 6.4. Edificio de Óptica del INAOE. En la figura se tienen imágenes del edificio del INAOE. En la primera se toma una sub-área de imagen del edificio (planta baja del edificio). El tono mínimo es  $22^\circ$ , y el tono máximo vale  $34^\circ$ . En la segunda imagen, se tiene la imagen resultante del procesado con un tono  $H=318^\circ$ . Para  $H = 318^\circ - 240^\circ = 78^\circ$ , se obtienen  $t_1=0.7599$  y  $t_2=0.5938$ ;  $t_2$  es el valor buscado. . . . . 59



6.9. Diferentes saturaciones. Se muestran cuatro diferentes imágenes que corresponden a la escena, y tonalidad de la imagen de la derecha de la Fig. 6.8. La lona en las dos imágenes tomadas de izquierda a derecha en la primera fila tienen de manera respectiva $S = 0.05$ y $S = 0.2$ ; de la misma manera, las nuevas tonalidades de la lona en las imágenes de la segunda fila son $S = 0.4$ y $S = 0.5$ . . . . .	64
7.1. El tono y la saturación están definidos dentro del polígono regular de $n$ lados. El tono es una medida angular y la saturación es una medida longitudinal. . . . .	68
7.2. Espacio de color HSIn. Tono (H), saturación (S), e intensidad (I) forman la estructura doble de una pirámide $n$ -ángular. . . . .	69
7.3. Triángulo de color. La ecuación $\sum_{i=1}^3 c_i = 1$ , $c_i$ dentro del intervalo $[0, 1]$ , representa un plano delimitado por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , dando la forma de un triángulo equilátero centrado en $(1/3, 1/3, 1/3)$ . . . . .	71
7.4. Cuadros de color. La figura muestra el método para hallar el tono en cualquier polígono regular de color. (a) Posición original del punto de color; (b) traslación del punto hacia el área 1. En esta área se calcula el tono; (c) El punto de color se regresa a el área original, y su tono es calculado sumando el tono previamente calculado con los noventa grados que fueron necesitados para esta última traslación. . . . .	73
7.5. Descripción del área de un punto de color. Cualquier área $i$ -ésima, la zona definida por $C_i \leq C_{i+1}$ (c), puede ser descrita por la intersección de dos regiones que contienen a la zona, y dividen al polígono en dos partes iguales (a, b). Matemáticamente, cada área $i$ -ésima puede ser expresada en términos de $C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, C_{i+2}$ (c). . . . .	74
7.6. Áreas virtuales. El método para distinguir el área de color del punto P entre otras, que también cumplen con las restricciones $C_i > C_{i+2}, C_{i+1} > C_{i-1}$ , es sumar $C_i + C_{i+1}$ ; el subíndice del resultado mayor corresponde al área de color de P. Esto equivale a que las distancias desde P hasta los vértices del área de P son menores o iguales a las distancias desde P a los vértices de cualquier otra área. . . . .	75

7.7. Imagen de prueba correspondiente a una imagen digital basada en 16 bandas de color, se puede observar debido a un programa computacional que convierte a la imagen multiespectral en una imagen RGB. . . . .	79
7.8. Zonas seleccionadas. Se han tomado píxeles dentro de los recuadros rojos con el fin de calcular su tono, saturación e intensidad. . . . .	80
7.9. Colores primarios. Estos colores representan los dieciséis vértices del polígono de color del espacio HSI <sub>16</sub> . . . . .	83
8.1. Espacio de color HSI <sub>4</sub> . La forma de este espacio es una doble pirámide cuadrangular. . . . .	88
8.2. Cuadro de color. Tono y saturación se definen en un cuadrado; el tono (H) es un ángulo medido respecto al eje WC <sub>1</sub> , la saturación (S) es proporcional a la distancia medida desde el centro del cuadrado hasta el punto de color. . . . .	89
8.3. Cuadro de color. Tono y saturación se definen en un cuadrado; el tono (H) es un ángulo medido respecto al eje WC <sub>1</sub> , la saturación (S) es proporcional a la distancia medida desde el centro del cuadrado hasta el punto de color. . . . .	90

# Índice de tablas

7.1.	Valores de las dieciséis bandas de color $C_i$ 's correspondientes a un píxel, del área del punto de color, y de HSI. . . . .	81
7.2.	Valores $C_i$ 's correspondientes a un píxel, del área del punto de color, y de HSI. . . . .	82
7.3.	Áreas de color y valores HSI obtenidos de una zona de amarillos. . . . .	84
7.4.	Áreas de color y valores HSI obtenidos de una zona de verdes. . . . .	85
7.5.	Áreas de color y valores HSI obtenidos de una zona rojiza. . . . .	85
7.6.	Áreas de color y valores HSI obtenidos de una zona oscura. . . . .	86

# Bibliografía

- [1] M. Yamaguchi, T. Teraji, K. Ohsawa, T. Uchiyama, H. Motomura, Y. Murakami, and N. Ohyama: Proc. SPIE **4663** (2002) 15.
- [2] R. C. Gonzalez and R. E. Woods: *Digital Image Processing* (Prentice-Hall, New Jersey, 2002) Cap. 1, p. 6; Cap. 2, p.50; Cap. 6, pp. 284-299.
- [3] R. Chellappa: *Digital Image Processing* (IEEE Computer Society Press, California, 1992) Cap. 1, p. 1.
- [4] L. W. Macdonald and M. R. Luo: *Colour Image Science: Exploiting Digital Media* (John Wiley & Sons, LTD, Chichester, 2002) Cap. 4, p. 77.
- [5] L. G. Shapiro and G. C. Stockman: *Computer Vision* (Prentice-Hall, New Jersey, 2001) Cap. 2, p. 30; Cap. 6, pp. 192-199.
- [6] K. R. Castleman: *Digital Image Processing* (Prentice-Hall, New Jersey, 1996) Cap. 2, p. 549; Cap. 3, p. 51; Cap. 21, pp. 554-556.
- [7] J. D. Foley y A. Van Dam: *Fundamentals of Interactive Computer Graphics* (Addison-Wesley, Canada, 1982) Cap. 17, pp. 604, 611.
- [8] G. H. Hadley: *Álgebra Lineal/Liear Algebra* (Fondo Educativo Interamericano, S. A., México, 1969) Cap. 2, p. 17.
- [9] R. Resnick, D. Halliday, y K. Krane: *Física* (CECSA, México, 1994) Cap. 3, p. 42.
- [10] S. I. Grossman: *Álgebra Lineal* (McGraw-Hill, México, 1993) Cap. 3, p. 166 y Cap. 4, pp. 222, 223.
- [11] C. Wexler: *Geometría Analítica* (Montaner y Simon, S. A., Barcelona, 1968) Cap. 2, p. 5.

- [12] W. Kaplan: *Cálculo Avanzado* (CECSA, México, 1973) Cap. 0, p. 35.
- [13] E. W. Swokowski: *Cálculo con Geometría Analítica* (Wadsworth International Iberoamericana, California, 1982) Cap. 14, p. 633.
- [14] W. Fulks: *Cálculo Avanzado* (LIMUSA, México, 1991) Cap. 8, pp. 174, 193.
- [15] W. Kaplan y D. J. Lewis: *Cálculo y Álgebra Lineal* (LIMUSA, México, 1978) Vol 1, Cap. 1, p. 72.
- [16] J. E. Marsden, y A. J. Tromba: *Cálculo Vectorial* (Addison-Wesley, Delaware, 1991) Cap. 1, pp. 11, 57.
- [17] W. Kaplan y D. J. Lewis: *Cálculo y Álgebra Lineal* (LIMUSA, México, 1978) Vol 2, Cap. 9, pp. 14, 19.
- [18] R. D. Lozano: *El color y su medición* (Editorial AméricaLee, Buenos Aires, 1978) Cap. 2, p. 38; Cap. 4, pp. 188-199; Cap. 5, p. 217.
- [19] D. Malacara: *Color Vision and Colorimetry, Theory and Applications* (SPIE Press, Washington, 2002) Cap. 1, pp. 11, 31; Cap. 8, p. 133.
- [20] G. A. Agoston: *Color Theory and Its Application in Art and Design* (Springer, Heidelberg, 1979) Vol. 19, Cap. 2 p. 6; Cap. 3 pp. 10-11; Cap. 4, pp. 197-198; Cap. 5, pp. 28, 36 y Cap. 6, p. 49.
- [21] Fisicanet, Física-Óptica, *Espectro de Ondas Electromagnéticas*, 2008, <http://www.fisicanet.com.ar/física/ondas> [consulta: lunes, 18 de mayo de 2009].
- [22] G. H. Begbie: *Seeing and the Eye* (Anchor Books, New York, 1973) Cap. 1, p. 3.
- [23] W. Sargent: *The Enjoyment and Use of Color* (Courier Dover Publications, New York, 1964) Cap. 0, pp. 1, 4; Cap. 1, p. 29.
- [24] D. Malacara: *Óptica Básica* (Fondo de Cultura Económica, México, 1989) Cap. 7, p. 198; Cap. 23, pp. 742, 744.
- [25] W. D. Wright: *The Measurement of Colour* (Adam Hilger, London, 1969) Cap. 2, p. 40; Cap. 4, pp. 107, 117, 120.

- [26] D. A. Atchison and G. Smith: *Optics of the Human Eye* (Butterworth Heinmann, Edinburgh, 2002) Cap. 1, pp. 5, 6.
- [27] Wikipedia, *Daltonismo*, 2009, <http://es.wikipedia.org/wiki/Daltonismo> [consulta: lunes, 18 de mayo de 2009].
- [28] Creaciones Contemporaneas, *¿Cómo Funciona el Ojo Humano?*, 2008, <http://locontemporaneo.blogspot.com/2008/10/cmo-funciona-el-ojo-humano.html> [consulta: lunes, 18 de mayo de 2009].
- [29] ClarínBlogs, *¿De qué Color Ves lo que Verde Ve Otro?*, 2008, <http://blogs.clarin.com/magos/tags/monicaiforte> [consulta: lunes, 18 de mayo de 2009].
- [30] K. Nassau: *Color for Science, Art and Technology* (Elsevier, Amsterdam, 1998) Vol. 1, Sección I, p. 9.
- [31] J. J. Sheppard jr.: *Human Color Perception* (American Elsevier Publishing Company, New York, 1968) Cap. 7, p. 104.
- [32] B. Jähne: *Image Processing for Scientific Applications* (CRC Press, New York, 1997) Cap. 3, pp. 104, 105.
- [33] M. L. Rubin and G. L. Walls: *Fundamentals of Visual Science* (Charles C. Thomas, Florida, 1969) Cap. 2, p. 270.
- [34] J. Y. Hardeberg: *Acquisition and Reproduction of Color Images* (PWS Publishing Company, Boston, 2001) Cap. 2, p. 15.
- [35] E. L. Hall: *Computer Image Processing and Recognition* (Academic Press, New York, 1979) Cap. 2, p. 8.
- [36] Handprint, *Do Primary Color Exist?*, 2005, <http://www.handprint.com/HP/WCL/color6.html> [consulta: lunes, 18 de mayo de 2009].
- [37] L. M. Hurvich: *Color Vision* (Sinauer Associates Inc., Massachusetts, 1981) Cap. 20, p. 283.
- [38] W. K. Pratt: *Digital Image Processing* (Jhon Wiley & Sons, Inc., New York, 1991) Cap. 2, p. 93; Cap. 10, p. 310.

- [39] Torres William y Bello Roger, *Procesamiento de Imágenes a Color Utilizando Morfología Matemática*, Caracas Venezuela: Centro de Procesamiento Digital de Imágenes , Fundación Instituto de Ingeniería, s. f. e., <http://www.iiisci.org/journal/riSCI/pdfs/C382LR.pdf> [consulta: lunes, 18 de mayo de 2009].
- [40] Wikipedia, *CIE 1931 Color Space*, 2009, [http://en.wikipedia.org/wiki/CIE\\_1931\\_color\\_space](http://en.wikipedia.org/wiki/CIE_1931_color_space) [consulta: lunes, 18 de mayo de 2009].
- [41] Tratamiento Digital de la Imagen, *Fundamentos de Colorimetría, Diagrama de Cromaticidad*, s. f. e., [http://www.ieev.uma.es/tdi/www\\_netscape/TEMAS/Tdi\\_23/index8.php](http://www.ieev.uma.es/tdi/www_netscape/TEMAS/Tdi_23/index8.php) [consulta: lunes, 18 de mayo de 2009].
- [42] G. Wyszecki y W. S. Stiles: *Color Science* (Wiley, New York, 1982) 2nd ed., Cap. 3, p. 118, 39.
- [43] Dibujo Ayumary, *Taller de Campo Visual, Propiedades del Color*, 2007, <http://dibujoayumari.blogspot.com> [consulta: lunes, 18 de mayo de 2009].
- [44] Philippe C. Cattin, *Digital Image Fundamentals*, 2006, <http://www.vision.ee.ethz.ch> [consulta: lunes, 18 de mayo de 2009].
- [45] J. J. Báez, y M. A. Alonso: Rev. Mex. Fís. E **54** (2008) 186.
- [46] Wikipedia, *False-Color*, 2009, <http://en.wikipedia.org/wiki/False-color> [consulta: lunes, 18 de mayo de 2009].
- [47] M. A. Alonso, y J. J. Báez: Opt. Rev. **16** (2009) 91.
- [48] Wikipedia, *Espacios de Color*, 2009, [http://es.wikipedia.org/wiki/Teoria\\_del\\_color](http://es.wikipedia.org/wiki/Teoria_del_color) [consulta: lunes, 18 de mayo de 2009].
- [49] J. A. Baldor: *Geometría Plana y del Espacio: Con una Introducción a la Trigonometría* (Publicaciones Cultural, México, 1983) Cap. 7, p. 74.
- [50] J. C. Russ: *The Image Processing: Handbook* (CRC Press, Florida, 1992) Cap 1, p. 39.
- [51] J. Conde, H. Haneishi, M. Yamaguchi, N. Ohyama, and J. Baez: Rev. Mex. Fís. **50** (2004) 484