Resumen IN3702 - Investigación de Operaciones

Basado en apuntes de clases y en el libro: *Stochastic Processes*

Por: Cristian Aguayo Quintana
cristian.aguayo@ug.uchile.cl

1. Probabilidades

1.1. Propiedades fundamentales

Probabilidad condicional: Dados 2 eventos A, B

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Ley de probabilidad total: Dada una partición disjunta ($B_i \cup B_j = \varnothing$ si $i \neq j$) $\{B_i\}_{i \in I}$ de un espacio muestral S tal que $\mathbb{P}(B_i) > 0\ \forall i$, se tiene que para cualquier evento A

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Regla de Bayes:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

1.2. Distribuciones discretas relevantes

Distribución binomial: Dada una probabilidad de éxito $p \in (0,1)$ y una cantidad de ensayos $N \in \mathbb{N}$, la probabilidad de que exactamente k de N (con $0 \leq k \leq N$) ensayos sean exitosos es

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Si $X \sim \text{Binom}(N, p) \Longrightarrow \mathbb{E}(X) = Np$ y $\mathbb{V}(X) = Np(1-p)$

Distribución geométrica: Una variable aleatoria $X \sim \text{Geom}(p)$ representa el número de ensayo en el cuál se obtiene el primer éxito. Al igual que en la distribución binomial, $p \in (0,1)$ es la probabilidad de éxito

$$\mathbb{P}(X = k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\text{fallar } k-1 \text{ veces}} p$$

Para este caso, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ y $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$. Otra posible representación se tiene para una variable aleatoria $Z = X - 1$ con $X \sim \text{Geom}(p)$. Z representa el número de fallos antes del primer éxito.

$$\mathbb{P}(Z = k) = (1-p)^k p$$

$\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1-p}{p}$ y $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(X)$

Distribución binomial negativa: Representa el número de intento en el que ocurre el r-ésimo éxito

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \qquad k = r, r+1, r+2, ...$$

Para este caso, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{r}{p}$ y $\mathbb{V}(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$

Distribución de Poisson: Una variable aleatoria X distribuye Poisson de tasa $\lambda > 0$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Para una variable aleatoria X que distribuye Poisson, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$

1.3. Distribuciones continuas relevantes

Dada una variable aleatoria Y con función de distribución acumulada F y función de densidad de probabilidad $f = \dfrac{dF(y)}{dy}$ se define:

$$F(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

Distribución uniforme: $Y \sim U[a, b]$ con $a < b$ si y solo si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Para Y distribuida $U[a, b]$, $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{a+b}{2}$ y $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Distribución exponencial: $Y \sim \exp(\lambda)$ con $\lambda > 0$ si y solo si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Para Y distribuida $\exp(\lambda)$, $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$ y $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Distribución Gamma: $Y \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ con $r, \lambda > 0$ si y solo si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{r-1}}{\Gamma(r)} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

donde Γ es la *función Gamma*[1]. Para Y distribuida $\text{Gamma}(r, \lambda)$, $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{r}{\lambda}$ y $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{r}{\lambda^2}$.
Si $r \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(r) = (r-1)!$ y en este caso, la distribución recibe el nombre de **distribución Erlang**. La distribución Erlang, representa la suma de r variables aleatorias i.i.d. que distribuyen exponencial de parámetro λ.

[1] $\Gamma(r) = \int_0^\infty z^{r-1} e^{-r} dz$. La función Gamma es una "generalización" del factorial en los número complejos con parte real positiva.

2. Cadenas de Markov en tiempo discreto

2.1. Definiciones preliminares

Cadena de Markov (caso discreto): Una *cadena de Markov* es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_0^+\}$ tal que:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = k, ..., X_0 = m) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$$

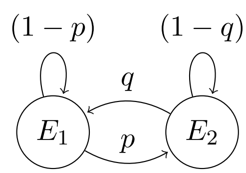
Es decir, toda la "historia" se resume en el estado presente (en este caso, i), y es la única información relevante para determinar el estado de evolución a futuro.

Matriz de probabilidades de transición: Dado un conjunto de posibles estados E, para estados $i, j \in E$ se define la *probabilidad de transición* de i a j como $p_{ij} \geq 0$. Considerando todos los estados posibles, se puede definir la *matriz de probabilidades de transición* como:

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1|E|} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2|E|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{|E|1} & p_{|E|2} & \cdots & p_{|E||E|} \end{Vmatrix}$$

donde $\displaystyle\sum_{j=1}^{|E|} p_{ij} = 1 \ \forall i \in E$.

Las cadenas de Markov se pueden representar en forma de grafo, donde los nodos corresponden a los estados, y los arcos corresponden a pares de estados.



2.2. Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Probabilidad de transición después de n periodos: Sea p_{ij} la probabilidad de transición de i a j. Se define p_{ij}^n como la probabilidad de que un proceso en estado i esté en el estado j después de n transiciones. Esto es:

$$p_{ij}^n = \mathbb{P}(X_{n+k} = j | X_k = i) \qquad n, k \geq 0, i, j \in E$$

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov: Las *ecuaciones de Chapman-Kolmogorov* proveen un método para calcular estas probabilidades después de n periodos:

$$p_{ij}^{n+m} = \sum_{k=1}^{|E|} p_{ik}^n p_{kj}^m \qquad \forall n, m \geq 0, i, j \in E$$

Luego, la matriz de transición después de n periodos se obtiene fácilmente multiplicando n veces la matriz de transición $\mathbf{P}$.

2.3. Clasificación de estados

Accesibilidad de estados: Se dice que el estado j es *accesible* desde i (lo que se escribe como $i \to j$) si:

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) > 0 \qquad n \geq 0$$

Comunicación entre estados: Los estados i, j están *comunicados* si $i \to j$ y $j \to i$. La comunicación entre estados se escribe como $i \leftrightarrow j$. Notar que la comunicación entre estados es una *relación de equivalencia*[2], y por lo tanto, define clases de equivalencia, donde los estados que estén comunicados entre sí, pertenecerán a la misma clase.

Irreductibilidad: Una cadena de Markov se dice *irreductible* si sólo hay una clase. Es decir, todos sus estados están comunicados entre sí.

Estados recurrentes y transientes: Un estado i es

- *recurrente*, si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n = \infty$. Además, un estado recurrente puede ser *recurrente positivo* si, comenzando en i, el número esperado de transiciones hasta que el proceso retorne a i es finito. En caso contrario, se dice que es *recurrente nulo*;
- *transiente*, si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n < \infty$.

Si un estado es recurrente (o transiente), la clase a la que pertenece también se denota como recurrente (o transiente).

2.4. Probabilidades estacionarias

Periodo de un estado: El *periodo de un estado* i, $\delta(i)$, se define como el máximo común divisor de los valores n tal que:

$$\mathbb{P}(X_n = i | X_0 = i) = p_{ii}^n > 0$$

con la convención de que $\delta(i) = \infty$ si $p_{ii}^n = 0 \ \forall n \geq 0$. Si $\delta(i) = 1$, se dice que el estado es *aperiódico*. Además, se tiene que la periodicidad es una propiedad de clase.

Cadena ergódica: Una cadena de Markov se dice *ergódica*[3] si sus estados son recurrentes positivos[4] y aperiódicos.

Probabilidades estacionarias: Para una cadena de Markov ergódica e irreductible, existe $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n$ y es independiente de i. Más aún, definiendo:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n, \qquad j \in E$$

como la j-ésima *probabilidad estacionaria*, se tiene que el vector de probabilidades estacionarias π es la única solución no negativa de[5]:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{|E|} \pi_i p_{ij} \qquad j \in E$$

[2] Sí, las de Introducción al Álgebra de primer semestre.
[3] Algunas definiciones de ergodicidad incluyen la condición de que la cadena sea irreductible.
[4] En el caso particular de una cadena finita, todos los estados recurrentes son recurrentes positivos.
[5] Notar que una de estas ecuaciones es redundante.

$$\sum_{j=1}^{|E|} \pi_j = 1$$

Cadenas de Markov reversibles: Considere una cadena de Markov ergódica y en estado estacionario (es decir, que lleva mucho tiempo "funcionando"), con sus respectivas probabilidades de transición p_{ij} y sus respectivas probabilidades estacionarias π_i, y suponga que a partir de cierto tiempo, se comienza a observar el proceso en sentido temporal contrario. Es decir, comenzando en el periodo n, se considera la secuencia $X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, ...$ Esta secuencia de estados corresponde a una cadena de Markov con probabilidades de transición definidas por:

$$q_{ij} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$$

3. Procesos de Poisson

3.1. Definiciones preliminares

Proceso de conteo: El proceso estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ corresponde a un *proceso de conteo* si:

i) $N(t) \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0$

ii) Si $s < t$, entonces $N(s) \leq N(t)$

iii) Para $s \leq t$, $[N(s) - N(t)]$ representa el número de eventos ocurridos entre s y t.

Incrementos independientes: Se dice que $N(t)$ tiene *incrementos independientes* si el número de eventos ocurridos en intervalos disjuntos son probabilísticamente independientes.

Incrementos estacionarios: Se dice que $N(t)$ tiene *incrementos estacionarios* si la distribución del número de eventos ocurridos en el intervalo sólo depende de la duración del mismo, y no del instante en que empieza.

3.2. Proceso de Poisson

Proceso de Poisson (primera definición): Un proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ es un *proceso de Poisson* de tasa $\lambda >= 0$ si:

i) $N(0) = 0$,

ii) $N(t)$ tiene incrementos independientes,

iii) El número de eventos en un intervalo de duración t distribuye Poisson de tasa λt

$$\mathbb{P}\left([N(s+t) - N(s)] = n\right) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

con $\mathbb{E}(N(t)) = \mathbb{V}(N(t)) = \lambda t$. Notar que (iii) implica que el proceso de Poisson tiene incrementos estacionarios.

Proceso de Poisson (segunda definición): Un proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ es un *proceso de Poisson* de tasa $\lambda >= 0$ si:

i) $N(0) = 0$,

ii) $N(t)$ tiene incrementos independientes y estacionarios.

iii) $\mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$

iv) $\mathbb{P}(N(h) \geq 2) = o(h)$

Se tiene que ambas definiciones son equivalentes.

3.3. Tiempos asociados a procesos de Poisson

Tiempos entre eventos: Sea x_n el tiempo entre que ocurre el $(n-1)$-ésimo evento y el n-ésimo evento de un proceso de Poisson. Se tiene que los tiempos entre eventos son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.), y su distribución es $\exp(\lambda)$, con $\mathbb{E}(x_n) = \frac{1}{\lambda}$ y $\mathbb{V}(x_n) = \frac{1}{\lambda^2}$. Dado esto, se dice que el proceso de Poisson tiene pérdida de memoria.

Tiempo del n-ésimo evento: Sea $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ el tiempo en el que ocurre el n-ésimo evento de un proceso de Poisson. Se tiene la siguiente equivalencia (válida para cualquier proceso de conteo):

$$F_{s_n}(t) = \mathbb{P}(s \leq t) = \mathbb{P}(N(t) \geq n)$$

donde $F_{s_n}(t)$ es la función de distribución acumulada de s_n. Reemplazando $\mathbb{P}(N(t) \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}$ y derivando con respecto a t, se obtiene que la función de densidad de probabilidad de s_n es:

$$f_{s_n}(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Por lo tanto, s_n distribuye Gamma(n, λ), con $\mathbb{E}(s_n) = \frac{n}{\lambda}$ y $\mathbb{V}(s_n) = \frac{n}{\lambda^2}$.

Tiempo condicional de ocurrencia de eventos: Dado que en un intervalo $[0, t]$ se sabe que ocurrieron exactamente n eventos, el tiempo de ocurrencia de cada uno de estos eventos $s_1, ..., s_n$ distribuye $U[0, t]$.

3.4. Composición y división de procesos de Poisson

Composición de procesos de Poisson: Sean $N_1(t), N_2(t)$ procesos de Poisson de tasas λ_1, λ_2 respectivamente. El proceso $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ también es un proceso de Poisson, cuya tasa es $(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Divisón de un proceso de Poisson: Sea $N(t)$ un proceso de Poisson de tasa λ tal que los eventos pueden clasificarse en dos: categoría A que, corresponde una fracción p del total de eventos, y categoría B, que corresponde a una fracción $(1-p)$ del total de eventos. Entonces, si se definen los procesos de conteo $N_A(t)$ y $N_B(t)$, se tiene que ambos son procesos de Poisson, de tasas λp y $(1-p)\lambda$ respectivamente.

Notar que, tanto la descomposición como la división de procesos de Poisson, pueden generalizarse para cualquier número de procesos de Poisson distintos (en el caso de la composición), y para cualquier número de categorías de evento (en el caso de la división).

4. Cadenas de Markov en tiempo continuo

4.1. Definiciones preliminares

Cadena de Markov (caso continuo): Una *cadena de Markov* es un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t), t \geq 0\}$ tal que para todo $s, t \geq 0$ y para todo $i, j, x(u)$ enteros no negativos con $0 \leq u < s$:

$$\mathbb{P}(X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s) = \mathbb{P}(X(t+s) = j | X(s) = i)$$

Al igual que antes, la distribución condicional del futuro $X(t+s)$ depende sólo del estado presente $X(s)$.

Probabilidades de transición homogéneas: Si además de lo anterior, se tiene que:

$$\mathbb{P}(X(t+s) = j | X(s) = i)$$

es independiente de s, se dice que la cadena de Markov a tiempo continuo tiene *probabilidades de transición homogéneas*.

Supongamos que la cadena de Markov en tiempo continuo entra en el estado i en un tiempo cualquiera (por simplicidad, asumámoslo 0), y supongamos que el proceso no deja el estado i durante s unidades de tiempo. Definiendo la variable aleatoria T_i como la cantidad de tiempo que el proceso pasa en el estado i, la probabilidad de que el proceso deje el estado i en t unidades de tiempo más es:

$$\mathbb{P}(T_i > s + t | T_i > s) = \mathbb{P}(T_i > t)$$

para todo $s, t \geq 0$. Luego, la cantidad de tiempo que el proceso pasa en el estado i, T_i, tiene pérdida de memoria, y por lo tanto sigue una distribución exponencial. Esto nos permite definir una cadena de Markov a tiempo continuo como un proceso estocástico tal que:

1. La cantidad de tiempo que el proceso pasa en el estado i antes de pasar a un estado diferente sigue una distribución exponencial de media que denotaremos $1/v_i$
2. Cuando el proceso deja el estado i, va al estado j con alguna probabilidad P_{ij} tal que:
    - $P_{ii} = 0$ para todo i
    - $\sum_j P_{ij} = 1$ para todo i

4.2. Procesos de nacimiento y muerte

Procesos de nacimiento y muerte: Consideremos un sistema cuyos estados representan la cantidad de personas en dicho sistema en un determinado tiempo. Supongamos que cuando hay n personas en el sistema, ocurren nuevas llegadas con tasa exponencial λ_n, y la gente que actualmente está en el sistema, lo deja a una tasa exponencial μ_n. Este tipo de sistema se conoce como *proceso de nacimiento y muerte*. Los parámetros $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ son conocidos como tasas de llegada (o nacimiento) y tasas de salida (o muerte) respectivamente.

Interpretación como una cadena de Markov en tiempo continuo: Los procesos de nacimiento y muerte pueden representarse como una cadena de Markov en tiempo continuo con estados $\{0, 1, 2...\}$ donde las transiciones desde el estado n sólo pueden ser hacia el estado $(n+1)$ o hacia el estado

$(n-1)$. Las relaciones entre las tasas de nacimiento y muerte y las tasas de transición entre los estados y probabilidades de transición entre estados son:

$$v_0 = \lambda_0$$

$$v_i = \lambda_i + \mu_i \qquad i > 0$$

$$P_{0,1} = 1$$

$$P_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \qquad i > 0$$

$$P_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \qquad i > 0$$

4.3. Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Probabilidades de transición: Sea

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t+s) = j | X(s) = i)$$

la probabilidad de que, estando en el estado i, el proceso esté en el estado j en t unidades de tiempo después. Estas probabilidades se conocen como *probabilidades de transición* de la cadena de Markov a tiempo continuo.

Tasas de transición instantáneas: Para cualquier par de estados, sea:

$$q_{ij} = v_i P_{ij}$$

Dado que v_i es la tasa a la que el proceso hace una transición desde el estado i hacia algún otro estado, y P_{ij} representa la probabilidad de que una transición sea a un estado j partiendo de un estado i, entonces, q_{ij} es la *tasa de transición instantánea*. Dado que:

$$v_i = \sum_j v_i P_{ij} = \sum_j q_{ij}$$

y

$$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{v_i} = \frac{q_{ij}}{v_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$$

se tiene que, especificando las tasas de transición instantánea, determina los parámetros de la cadena de Markov a tiempo continuo.

Probabilidad de ir de un estado a otro en $t+s$ unidades de tiempo:

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$

Esta expresión nos permitirá obtener dos conjuntos de ecuaciones diferenciales, que nos permitirán obtener ecuaciones para las probabilidades estacionarias[6] (en caso de existir).

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

[6]Sólo serán relevantes para eso.

- Ecuaciones Backward:
$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

- Ecuaciones Forward:
$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik} - v_j P_{ij}(t)$$

4.4. Probabilidades estacionarias

Probabilidades estacionarias: De forma análoga a las cadenas de Markov en tiempo discreto, nos interesa calcular:
$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$$
donde nuevamente esperamos que esta probabilidad sea independiente de i. El set de ecuaciones que satisfacen estas probabilidades estacionarias corresponde a:
$$v_j \pi_j = \sum_{k\neq j} q_{kj} \pi_k$$
$$\sum_j \pi_j = 1$$
Recordando las definiciones dadas antes, se puede interpretar $v_j \pi_j$ como la tasa a la que el proceso deja el estado j, y $\sum_{k\neq j} q_{kj}\pi_k$ como la tasa a la que el proceso entra al estado j.

Para que existan las probabilidades estacionarias, son condiciones suficientes:

1. Todos los estados de la cadena de Markov están comunicados entre sí. Es decir, la cadena de Markov es irreductible
2. La cadena de Markov es recurrente positiva

4.5. Reversibilidad en el tiempo

Reversibilidad en el tiempo: Si para algún conjunto $\{\pi_i\}_i$ se tiene que:
$$\sum_i \pi_i = 1 \qquad \pi_i \geq 0$$
y además:
$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji} \qquad \forall i \neq j$$
entonces, la cadena de Markov a tiempo continuo es *reversible en el tiempo*, y π_i representa la probabilidad estacionaria de estar en el estado i.

Cadena reversible en el tiempo truncada: Sea una cadena de Markov reversible en el tiempo con probabilidades estacionarias π_j, $j \in S$. Si la cadena es truncada al conjunto $A \subset S$ y dado esto, sigue siendo irreductible, entonces también sigue siendo reversible en el tiempo, y tiene probabilidades estacionarias:
$$\pi_j^A = \frac{\pi_j}{\sum_{i\in A} \pi_i}$$

Cadenas de Markov independientes y reversibles en el tiempo: Si $\{X_i(t), t \geq 0\}$ son cadenas de Markov a tiempo continuo independientes y reversibles en el tiempo para cada $i = 1, ..., n$, entonces el proceso $\{(X_i(t), X_{i+1}(t), ..., X_k(t)), t \geq 0\}$ con $1 \leq i \leq k \leq n$ también es una cadena de Markov a tiempo continuo reversible en el tiempo.

5. Teoría de colas

5.1. Algunas series importantes

Una de las series más recurrentes en los problemas de teoría de colas es la **serie geométrica**. Para $|\rho| < 1$, se tiene que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = \frac{1}{1-\rho}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j = \frac{\rho}{1-\rho}, \qquad \sum_{j=n}^{\infty} \rho^j = \frac{\rho^n}{1-\rho}$$

La siguiente serie es muy parecida a la esperanza de una v.a. geométrica que comienza desde 0:

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} i\rho^i \qquad |\rho| < 1$$

A continuación veremos cómo calcular esta serie:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} i\rho^i = \sum_{i=1}^{\infty} i\rho^i = \rho \sum_{i=1}^{\infty} i\rho^{i-1}$$

Si prestamos atención al término $i\rho^{i-1}$, podemos imaginar que estamos derivando la expresión ρ^i con respecto a ρ. Entonces:

$$S = \rho \sum_{i=1}^{\infty} i\rho^{i-1} = \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^i$$

Si intercambiamos la derivada con la suma:

$$S = \rho \frac{d}{d\rho} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \right)}_{\text{Suma geométrica}} = \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) = \rho \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

Finalmente, la última serie a recordar es la serie de la exponencial:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} = e^{\rho} \qquad \forall \rho \in \mathbb{R}$$

5.2. Sistemas de atención recurrentes

Se puede modelar la cantidad de personas en un siste un sistema en algún instante t como una cadena de Markov en tiempo continuo. Consideraremos estados de la forma $i = 0, 1, 2, 3, ...$

5.2.1. Modelo M/M/1

En este modelo se considera un solo servidor de atención. Describiremos la cadena en función de sus tasas de transición:

$$q_{i,i+1} = \lambda \quad \forall i \geq 0 \qquad q_{i+1,i} = \mu \quad \forall i \geq 0$$

Las demás tasas de transición son 0. Este sistema será estable si $\lambda < \mu$, o equivalentemente $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Las ecuaciones de probabilidades estacionarias son:

$$\begin{aligned}
\lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \\
(\lambda + \mu)\pi_i &= \lambda\pi_{i-1} + \mu\pi_{i+1} \qquad \forall i \geq 1 \\
\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

Se tiene que para $i \geq 1$

$$\pi_i = \frac{\lambda}{\mu}\pi_{i-1}$$

Reemplazando recursivamente tenemos que

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 = \rho^i \pi_0$$

Luego, usando la ecuación de que la suma de las probabilidades es igual a 1:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \pi_0 = 1$$

$$\pi_0 \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i}_{=\frac{1}{1-\rho}} = 1$$

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

$$\pi_i = \rho^i(1-\rho) \qquad \forall i \geq 0$$

La cantidad promedio de entidades en el largo plazo está dada por:

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = \sum_{i=1}^{\infty} i\rho^i(1-\rho) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Una forma rápida de ver este resultado, es notar que $\pi_i = \rho^i(1-\rho)$ corresponde a la función de densidad asociada a una variable aleatoria X que sigue una distribución geométrica de parámetro $p = 1 - \rho$:

$$\mathbb{P}(X = i) = (1-p)^i p \qquad i = 0, 1, 2, 3, ...$$

con $\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p} = \frac{\rho}{1-\rho}$.

Para calcular el tiempo promedio que pasa una entidad en el sistema, usamos la Ley de Little:

$$L = \lambda W$$

donde λ es la tasa a la que ingresan entidades al sistema. Luego:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\lambda}$$

5.2.2. Modelo M/M/2

En este modelo se consideran 2 servidores. Describiremos la cadena en función de sus tasas de transición:

$$q_{i,i+1} = \lambda \quad \forall i \geq 0 \qquad q_{1,0} = \mu \qquad q_{i+1,i} = 2\mu \quad \forall i \geq 1$$

Este sistema será estable si $\lambda < 2\mu$, o equivalentemente $\rho = \frac{\lambda}{2\mu} < 1$.

Las ecuaciones de probabilidades estacionarias son:

$$\begin{aligned} \lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \\ (\lambda+\mu)\pi_1 &= \lambda\pi_0 + 2\mu\pi_2 \\ (\lambda+2\mu)\pi_i &= \lambda\pi_{i-1} + 2\mu\pi_{i+1} \qquad \forall i \geq 2 \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

Se tiene que para $i \geq 2$

$$\pi_i = \frac{\lambda}{2\mu}\pi_{i-1}$$

Reemplazando recursivamente tenemos que

$$\pi_i = \frac{1}{2^{i-1}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 = 2\rho^i\pi_0 \qquad \forall i \geq 1$$

Luego, usando la ecuación de que la suma de las probabilidades es igual a 1:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} 2\rho^i\pi_0 = 1$$

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

Se tiene que:

$$\pi_i = 2\rho^i\frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad \forall i \geq 1$$

Para calcular la cantidad promedio de entidades en el sistema en el largo plazo, usamos:

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = \frac{2\rho}{1-\rho^2}$$

Para calcular el tiempo promedio que pasa una entidad en el sistema, usamos la Ley de Little:

$$L = \lambda W$$

donde λ es la tasa a la que ingresan entidades al sistema. Luego:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2\rho}{1-\rho^2}\frac{1}{\lambda}$$

5.2.3. Modelo M/M/∞

En este modelo se consideran infinitos servidores. Describiremos la cadena en función de sus tasas de transición:

$$q_{i,i+1} = \lambda \quad \forall i \geq 0 \qquad q_{i+1,i} = (i+1)\mu \quad \forall i \geq 0$$

Las demás tasas de transición son 0. Este sistema siempre es estable. De todas formas, igual definiremos $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ por conveniencia.

Las ecuaciones de probabilidades estacionarias son:

$$\begin{aligned} \lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \\ (\lambda + i\mu)\pi_i &= \lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1} \qquad \forall i \geq 1 \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

Nos damos cuenta de que para $i \geq 1$

$$\pi_i = \frac{\lambda}{i!\mu}\pi_{i-1}$$

Reemplazando recursivamente tenemos que

$$\pi_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 = \frac{\rho^i}{i!}\pi_0$$

Luego, usando la ecuación de que la suma de las probabilidades es igual a 1:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!}\pi_0 = 1$$

$$\pi_0 \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!}}_{=e^\rho} = 1$$

$$\pi_0 = e^{-\rho}$$

Se tiene que:

$$\pi_i = \frac{\rho^i e^{-\rho}}{i!} \geq 0$$

es decir, la cantidad de personas en un sistema M/M/∞ en el largo plazo sigue una distribución de Poisson de tasa ρ.

Para calcular la cantidad promedio de entidades en el sistema en el largo plazo, usamos:

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = \rho$$

Para calcular el tiempo promedio que pasa una entidad en el sistema, usamos la Ley de Little:

$$L = \lambda W$$

donde λ es la tasa a la que ingresan entidades al sistema. Luego:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Anexos

Estadísticos de orden

Consideremos $X_1, ..., X_n$ una muestra de v.a.i.i.d de distribución genérica F. Podemos *re-etiquetar* estas variables de tal forma que queden ordenadas de menor a mayor:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n-1)} \leq X_{(n)}$$

donde en el caso que sean v.a's continuas, las desigualdades son estrictas. Es directo que:

$$X_{(1)} = \text{mín}\{X_1, ..., X_n\}$$

Calcularemos la función de densidad del k-ésimo estadístico de orden. Para ello, consideraremos que $F'(x) = f(x) = \mathbb{P}(x \leq X \leq x + \varepsilon)$ con ε un valor muy cercano a cero. Usaremos este abuso de notación para calcular $f_{X_{(k)}}(x)$

$$\begin{aligned}
f_{X_{(k)}}(x) = &\ \mathbb{P}(\text{algún } X \in [x, x+\varepsilon],\ \text{y exactamente } k-1 \text{ de los otros } < x) \\
= &\ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in [x, x+\varepsilon]) \underbrace{\mathbb{P}(\text{exactamente } k-1 \text{ de los otros } < x)}_{\text{eventos independientes}} \\
= &\ \underbrace{n\mathbb{P}(X_1 \in [x, x+\varepsilon])}_{\text{idénticamente distribuidos}} \underbrace{\mathbb{P}(\text{exactamente } k-1 \text{ de los otros } < x)}_{k-1 \text{ éxitos de un total de } n-1 \text{ ensayos}} \\
= &\ n f(x) \binom{n-1}{k-1} \mathbb{P}(X < x)^{k-1} \mathbb{P}(X > x)^{n-(k-1)} \\
= &\ n f(x) \binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1} (1 - F(x))^{n-(k-1)}
\end{aligned}$$

Para el caso en que $X_i \sim U[0,1]$, se puede verificar que $X_{(k)} \sim Beta(k, n-k+1)$, con $\mathbb{E}(X_{(k)}) = \dfrac{k}{n+1}$ Ahora, si $Y_i = T \cdot X_i$, con $T > 0$ entonces $Y_i \sim U[0,T]$, y el k-ésimo estadístico de orden de Y es T veces $X_{(k)}$. Luego

$$\mathbb{E}(Y_{(k)}) = T\mathbb{E}(X_{(k)}) = \frac{Tk}{n+1}$$