

# Algoritmi di Ottimizzazione

---

Analisi comparativa di risolutori Esatti e Metaeuristici per il  
Knapsack Problem with Conflicts

**Autore:**  
Cristian Piero Alioto

**Anno Accademico:**  
2025/2026

Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

*Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche "FIM"*

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Definizione del Problema</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Metodologie Implementate</b>	<b>2</b>
3.1	Soltori Esatti . . . . .	2
3.2	Metaeuristica GRASP . . . . .	2
3.3	Strategia Ibrida: Warm Start . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Implementazione</b>	<b>3</b>
4.1	Struttura del Progetto . . . . .	3
4.2	Specifiche Hardware e Parallelismo . . . . .	3
<b>5</b>	<b>Analisi Sperimentale</b>	<b>4</b>
5.1	Descrizione dei Dataset . . . . .	4
5.2	Performance Complessiva: Tempi, Ottimi e Gap % . . . . .	4
5.2.1	Analisi per Tipo di Istanza . . . . .	5
5.2.2	Analisi per Densità dei Conflitti . . . . .	7
5.3	Impatto della Strategia Warm Start . . . . .	9
5.3.1	Miglioramento Medio Globale . . . . .	9
5.3.2	Dettaglio per Dataset . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>12</b>

## Elenco delle figure

1	Risultati con Cold Start (aggregati per Dataset e Tipo) . . . . .	5
2	Risultati con Warm Start (aggregati per Dataset e Tipo) . . . . .	6
3	Risultati con Cold Start (aggregati per Dataset e Densità) . . . . .	7
4	Risultati con Warm Start (aggregati per Dataset e Densità) . . . . .	8
5	Impatto medio del Warm Start per Tipo di Istanza (Globale). . . . .	9
6	Impatto medio del Warm Start per Densità (Globale). . . . .	9
7	Dettaglio dell'impatto del Warm Start (aggregati per Dataset e Tipo). . . . .	10
8	Dettaglio dell'impatto del Warm Start (aggregati per Dataset e Densità). . . . .	11

# 1 Introduzione

Questo progetto affronta il *Knapsack Problem with Conflicts* (KPC), una variante NP-Hard del classico problema dello zaino [2]. L'obiettivo è confrontare metodi esatti e metaeuristici, analizzando in particolare l'efficacia di tecniche di ottimizzazione ibride, come il Warm Start, per migliorare le performance dei risolutori.

## 2 Definizione del Problema

Il KPC estende il problema dello zaino classico tramite un grafo di incompatibilità  $G = (V, E)$ , come definito formalmente in [3]. Il modello matematico adottato è il seguente:

$$\max \quad \sum_{j=1}^n p_j x_j \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq C \quad (2)$$

$$x_i + x_j \leq 1 \quad \forall (i, j) \in E \quad (3)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in N \quad (4)$$

## 3 Metodologie Implementate

In questa sezione vengono descritti gli approcci risolutivi sviluppati.

### 3.1 Soltori Esatti

Per garantire l'ottimalità della soluzione, ho utilizzato la suite Google OR-Tools, mettendo a confronto due paradigmi differenti:

- **MIP (Mixed Integer Programming):** Un approccio basato sulla traduzione dei conflitti in diseguaglianze lineari ( $x_i + x_j \leq 1$ ). È particolarmente efficace quando la struttura è dominata da un vincolo di capacità denso, poiché il rilassamento lineare fornisce *bound* molto accurati che accelerano la potatura dell'albero di ricerca.
- **CP (Constraint Programming - CP-SAT):** Un approccio basato su tecniche SAT avanzate (*Lazy Clause Generation* [4]). Invece di linearizzare, modella i conflitti come clausole booleane ( $\neg x_i \vee \neg x_j$ ), sfruttando meccanismi efficaci di propagazione logica. Come evidenziato in [1], questo paradigma risulta superiore al MIP nelle istanze ad alta densità di conflitti, dove la difficoltà combinatoria prevale sui vincoli numerici di capacità.

### 3.2 Metaeuristica GRASP

L'algoritmo segue lo schema classico *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* [5], eseguendo iterativamente le seguenti due fasi:

1. **Constructive Phase (Greedy Randomized):** La costruzione della soluzione avviene passo dopo passo in modo probabilistico. Ad ogni iterazione, viene calcolato uno score dinamico per tutti gli oggetti ammissibili (non ancora inseriti e non in conflitto):

$$Score_i = \frac{p_i}{w_i} \cdot \frac{1}{1 + k \cdot deg(i)}$$

Gli elementi con score più alto vengono inseriti nella **RCL** (*Restricted Candidate List*). La scelta dell'oggetto da aggiungere allo zaino avviene *casualmente* all'interno di questa

lista ristretta (e non necessariamente scegliendo il migliore in assoluto). Questo meccanismo introduce la diversificazione necessaria per esplorare regioni differenti dello spazio di ricerca ad ogni iterazione del GRASP.

2. **Local Search (First Improvement):** Ogni soluzione costruita viene subito migliorata per raggiungere un ottimo locale. La strategia adottata prevede che l'algoritmo scansioni il vicinato e applichi la prima modifica che incrementa il profitto totale, senza attendere di valutare tutte le mosse possibili. Le operazioni consentite sono:

- **ADD:** Inserimento di un oggetto esterno compatibile con la capacità residua e i vincoli di conflitto.
- **SWAP:** Sostituzione di un oggetto presente nello zaino con uno esterno, accettata solo se aumenta il profitto complessivo e rispetta l'ammissibilità.

### 3.3 Strategia Ibrida: Warm Start

L'integrazione tra la metaeuristica e i solver esatti avviene tramite una duplice iniezione di informazioni, mirata a guidare la ricerca fin dal nodo radice:

1. **Lower Bound Cut:** Viene imposto un vincolo esplicito sul valore della funzione obiettivo ( $\sum p_j x_j \geq Z_{GRASP}$ ). Questo parametro agisce come filtro globale, permettendo all'algoritmo di potare a priori (*pruning*) qualsiasi ramo dell'albero di ricerca che non possa matematicamente superare la qualità della soluzione euristica già nota.
2. **Solution Hinting:** L'intera configurazione delle variabili trovata dal GRASP ( $\mathbf{x}^{GRASP}$ ) viene fornita al solver come suggerimento parziale o completo. Questo permette al solver (specialmente al MIP) di costruire immediatamente una soluzione ammissibile valida.

## 4 Implementazione

Il progetto è stato sviluppato interamente in **Python**, integrando la suite Google OR-Tools per la parte di risoluzione esatta e utilizzando librerie per il calcolo scientifico e la visualizzazione dati (come NumPy e Matplotlib).

### 4.1 Struttura del Progetto

Il codice sorgente è organizzato in directory modulari per garantire chiarezza, manutenibilità e riutilizzabilità delle componenti:

- **src/solvers:** Contiene l'implementazione delle classi per i tre approcci risolutivi (MIP, CP, GRASP).
- **src/utilities:** Include moduli di supporto per il parsing dei file delle istanze (input\_loader), la generazione delle statistiche (stats) e di grafici comparativi (plot).
- **data:** Raccolta delle istanze di benchmark (dataset strutturati C e random R).
- **outputs:** Raccolta dei risultati (file JSON), delle statistiche e dei grafici.

### 4.2 Specifiche Hardware e Parallelismo

I test sono stati eseguiti su una macchina con una CPU **Intel Core i5-13420H**, dotata di 12 processori logici. L'architettura software sfrutta il modulo `multiprocessing` nativo di Python per distribuire il carico di lavoro su processi distinti, utilizzando un pool dinamico di worker per evitare il sovraccarico del sistema. Inoltre, è stato imposto un **Time Limit** di 60 secondi per l'esecuzione dei solver esatti.

## 5 Analisi Sperimentale

### 5.1 Descrizione dei Dataset

L'analisi sperimentale è stata condotta utilizzando il set di benchmark standard proposto in letteratura, derivato dalle istanze originariamente introdotte per il *Bin Packing Problem* da Hifi e Michrafy [6]. Il banco di prova completo è costituito da un totale di **4320 istanze**, suddivise in otto classi in base al numero di oggetti ( $n$  variabile da 60 a 1000) e alla distribuzione dei pesi.

Le istanze sono classificate in due macro-categorie in base alla generazione dei profitti:

**Dataset R (Random):** Include i gruppi **R1, R3, R10**. In queste istanze, i profitti  $p_j$  sono generati in modo indipendente dai pesi, seguendo una distribuzione uniforme nell'intervallo  $[1, 100]$ . L'assenza di correlazione rende queste istanze generalmente più semplici per le euristiche, dato che il rapporto profitto/peso presenta un'alta varianza.

**Dataset C (Correlated):** Include i gruppi **C1, C3, C10**. In queste istanze, esiste una correlazione stretta e deterministica definita dalla relazione  $p_j = w_j + 10$ . Questa struttura rende il problema combinatorio significativamente più arduo ("hard instances"), poiché tutti gli oggetti hanno una densità di valore simile, rendendo difficile per i solver discriminare gli elementi migliori basandosi sul rapporto greedy.

Per entrambe le categorie, la capacità dello zaino  $C$  varia moltiplicando la capacità originale per un fattore 1 (gruppi R1/C1), 3 (R3/C3) o 10 (R10/C10). Infine, il grafo dei conflitti è generato casualmente con una densità di archi variabile nell'insieme  $\{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ .

### 5.2 Performance Complessiva: Tempi, Ottimi e Gap %

In questa sezione vengono presentate le statistiche descrittive aggregate, confrontando l'approccio Cold Start con il Warm Start. Dall'analisi del **GRASP Gap %**, calcolato come la differenza relativa tra la *miglior soluzione trovata* dal solver esatto e quella dell'euristica, osserviamo due scenari distinti:

- **Scenario Cold Start (Gap Negativo):** Un gap negativo (Fig. 1 o 3) implica che, allo scadere del time limit di 60 secondi, i solver esatti non erano ancora riusciti a eguagliare la qualità della soluzione che GRASP aveva trovato in pochi millisecondi. In questi frangenti, l'euristica si dimostra superiore al solver esatto troncato.
- **Scenario Warm Start (Gap Positivo Ridotto):** Il gap diventa costantemente positivo (Fig. 2 o 4), pur mantenendo una media molto bassa. Ciò conferma che l'iniezione della soluzione iniziale impedisce al solver di performare peggio dell'euristica, garantendo sempre un miglioramento.

Questo fenomeno conferma l'alta qualità delle soluzioni generate da GRASP, che si collocano molto vicine all'ottimo già in fase di costruzione.

Le tabelle e i grafici successivi mostrano il confronto dettagliato in base al Tipo di istanza e alla Densità dei conflitti.

### 5.2.1 Analisi per Tipo di Istanza

La Figura 1 riporta le performance ottenute in modalità Cold Start. È interessante notare come le classi ad alta correlazione (in particolare i **Type 2,3,4,7,8**) risultino significativamente più complesse per il risolutore MIP, che impiega più tempo a convergere.

Dataset	Type	MIP T	CP T	GRASP T	MIP Opt	CP Opt	GRASP Opt	GRASP Gap %
C1	1	1.90s	0.17s	0.020s	90/90	90/90	54/90	1.69%
	2	11.23s	0.88s	0.049s	89/90	90/90	48/90	1.67%
	3	32.33s	4.36s	0.107s	57/90	90/90	26/90	2.84%
	4	48.36s	15.67s	0.257s	29/90	84/90	22/90	3.17%
	5	0.36s	0.04s	0.011s	90/90	90/90	84/90	0.01%
	6	1.08s	0.13s	0.026s	90/90	90/90	76/90	0.11%
	7	4.64s	0.40s	0.058s	90/90	90/90	50/90	0.40%
	8	22.72s	1.69s	0.152s	68/90	90/90	43/90	0.50%
C10	1	16.32s	9.39s	0.043s	89/90	87/90	45/90	1.53%
	2	59.82s	49.81s	0.111s	0/90	21/90	12/90	-3.83%
	3	60.24s	59.85s	0.309s	0/90	1/90	1/90	-20.73%
	4	62.68s	60.05s	0.896s	0/90	0/90	0/90	-22.73%
	5	0.61s	0.19s	0.012s	90/90	90/90	76/90	0.34%
	6	20.77s	15.18s	0.030s	89/90	83/90	50/90	1.02%
	7	59.83s	51.23s	0.080s	0/90	20/90	13/90	-6.25%
	8	60.18s	59.79s	0.229s	0/90	1/90	0/90	-20.70%
C3	1	11.94s	2.21s	0.027s	90/90	90/90	36/90	1.94%
	2	47.53s	25.80s	0.060s	23/90	68/90	18/90	1.98%
	3	53.41s	50.62s	0.163s	13/90	20/90	0/90	-2.23%
	4	59.40s	54.34s	0.444s	9/90	11/90	0/90	-5.03%
	5	0.93s	0.20s	0.013s	90/90	90/90	55/90	0.14%
	6	16.27s	2.91s	0.028s	89/90	90/90	36/90	0.29%
	7	39.84s	22.31s	0.068s	34/90	71/90	13/90	1.25%
	8	45.30s	34.68s	0.198s	31/90	42/90	7/90	-5.61%
R1	1	0.91s	0.10s	0.013s	90/90	90/90	61/90	1.84%
	2	5.38s	0.46s	0.029s	90/90	90/90	64/90	1.14%
	3	22.31s	2.17s	0.094s	71/90	90/90	62/90	1.13%
	4	39.49s	7.05s	0.280s	47/90	90/90	60/90	0.77%
	5	0.08s	0.02s	0.009s	90/90	90/90	67/90	1.01%
	6	0.29s	0.05s	0.021s	90/90	90/90	80/90	0.40%
	7	1.43s	0.24s	0.052s	90/90	90/90	75/90	0.79%
	8	7.19s	1.01s	0.143s	90/90	90/90	72/90	1.40%
R10	1	5.40s	1.94s	0.025s	90/90	90/90	20/90	6.34%
	2	54.20s	40.41s	0.060s	10/90	40/90	3/90	3.13%
	3	60.23s	58.05s	0.174s	0/90	8/90	1/90	-13.47%
	4	62.65s	60.04s	0.742s	0/90	0/90	0/90	-24.14%
	5	0.38s	0.08s	0.011s	90/90	90/90	60/90	2.01%
	6	6.17s	2.54s	0.025s	90/90	90/90	50/90	2.82%
	7	54.92s	41.70s	0.072s	10/90	40/90	18/90	-0.18%
	8	59.24s	55.64s	0.222s	3/90	15/90	1/90	-16.61%
R3	1	2.64s	0.37s	0.018s	90/90	90/90	26/90	4.42%
	2	31.78s	4.88s	0.044s	58/90	90/90	17/90	3.85%
	3	48.85s	33.85s	0.121s	22/90	56/90	16/90	2.51%
	4	57.57s	45.47s	0.377s	10/90	29/90	10/90	-3.64%
	5	0.38s	0.06s	0.009s	90/90	90/90	63/90	1.84%
	6	3.61s	0.56s	0.019s	90/90	90/90	60/90	1.76%
	7	34.44s	6.50s	0.047s	50/90	90/90	44/90	1.83%
	8	43.90s	28.78s	0.140s	32/90	62/90	20/90	1.08%
<b>TOTALE</b>	<b>MEDIA</b>	<b>27.94s</b>	<b>19.04s</b>	<b>0.128s</b>	<b>2643/4320</b>	<b>3189/4320</b>	<b>1715/4320</b>	<b>-1.79%</b>

Figura 1: Risultati con Cold Start (aggregati per Dataset e Tipo)

La Figura 2, invece, mostra i risultati ottenuti attivando il Warm Start. L'iniezione del Lower Bound permette al MIP di trovare soluzioni di qualità superiore e, nelle classi a media complessità, di incrementare il numero di ottimi certificati.

<b>Dataset</b>	<b>Type</b>	<b>MIP T</b>	<b>CP T</b>	<b>GRASP T</b>	<b>MIP Opt</b>	<b>CP Opt</b>	<b>GRASP Opt</b>	<b>GRASP Gap %</b>
C1	1	1.28s	0.13s	0.020s	90/90	90/90	54/90	1.69%
	2	9.00s	0.71s	0.049s	88/90	90/90	48/90	1.67%
	3	21.86s	3.61s	0.107s	66/90	90/90	26/90	2.84%
	4	39.89s	15.66s	0.257s	50/90	85/90	23/90	3.17%
	5	0.23s	0.02s	0.011s	90/90	90/90	84/90	0.01%
	6	0.75s	0.08s	0.026s	90/90	90/90	76/90	0.11%
	7	3.81s	0.38s	0.058s	90/90	90/90	50/90	0.40%
	8	21.11s	1.87s	0.152s	77/90	90/90	43/90	0.50%
C10	1	16.11s	6.89s	0.043s	90/90	87/90	45/90	1.53%
	2	59.81s	45.96s	0.111s	0/90	30/90	16/90	1.79%
	3	60.28s	58.93s	0.309s	0/90	5/90	2/90	0.77%
	4	62.76s	60.04s	0.896s	0/90	0/90	0/90	0.39%
	5	0.64s	0.12s	0.012s	90/90	90/90	76/90	0.34%
	6	19.66s	13.61s	0.030s	90/90	81/90	50/90	1.02%
	7	59.78s	48.14s	0.080s	0/90	25/90	18/90	1.16%
	8	60.27s	59.67s	0.229s	0/90	3/90	0/90	0.52%
C3	1	12.52s	1.76s	0.027s	90/90	90/90	36/90	1.94%
	2	47.91s	22.83s	0.060s	23/90	72/90	21/90	2.00%
	3	53.72s	49.78s	0.163s	13/90	28/90	1/90	2.31%
	4	59.23s	54.15s	0.444s	10/90	12/90	0/90	1.66%
	5	0.83s	0.14s	0.013s	90/90	90/90	55/90	0.14%
	6	14.97s	2.05s	0.028s	90/90	90/90	36/90	0.29%
	7	40.97s	17.83s	0.068s	30/90	70/90	13/90	1.25%
	8	44.53s	34.13s	0.198s	32/90	42/90	7/90	0.41%
R1	1	0.46s	0.07s	0.013s	90/90	90/90	61/90	1.84%
	2	3.35s	0.36s	0.029s	90/90	90/90	64/90	1.14%
	3	15.87s	2.06s	0.094s	76/90	90/90	62/90	1.13%
	4	32.29s	8.05s	0.280s	64/90	90/90	60/90	0.77%
	5	0.12s	0.03s	0.009s	90/90	90/90	67/90	1.01%
	6	0.34s	0.08s	0.021s	90/90	90/90	80/90	0.40%
	7	1.95s	0.36s	0.052s	90/90	90/90	75/90	0.79%
	8	9.54s	1.60s	0.143s	90/90	90/90	72/90	1.40%
R10	1	5.65s	1.56s	0.025s	90/90	90/90	20/90	6.34%
	2	53.94s	35.84s	0.060s	10/90	46/90	5/90	5.22%
	3	59.79s	56.02s	0.174s	1/90	12/90	2/90	2.46%
	4	62.69s	60.05s	0.742s	0/90	0/90	0/90	0.88%
	5	0.33s	0.06s	0.011s	90/90	90/90	60/90	2.01%
	6	6.13s	1.66s	0.025s	90/90	90/90	50/90	2.82%
	7	55.22s	36.33s	0.072s	10/90	46/90	23/90	2.47%
	8	59.76s	53.35s	0.222s	2/90	17/90	4/90	1.18%
R3	1	3.02s	0.32s	0.018s	90/90	90/90	26/90	4.42%
	2	31.05s	2.98s	0.044s	61/90	90/90	17/90	3.85%
	3	47.17s	29.42s	0.121s	24/90	67/90	18/90	4.06%
	4	52.96s	44.43s	0.377s	19/90	29/90	10/90	1.71%
	5	0.38s	0.04s	0.009s	90/90	90/90	63/90	1.84%
	6	3.73s	0.37s	0.019s	90/90	90/90	60/90	1.76%
	7	33.31s	3.74s	0.047s	50/90	90/90	44/90	1.83%
	8	39.93s	25.94s	0.140s	34/90	68/90	21/90	1.85%
<b>TOTALE</b>	<b>MEDIA</b>	<b>26.89s</b>	<b>17.98s</b>	<b>0.128s</b>	<b>2720/4320</b>	<b>3255/4320</b>	<b>1744/4320</b>	<b>1.69%</b>

Figura 2: Risultati con Warm Start (aggregati per Dataset e Tipo)

### 5.2.2 Analisi per Densità dei Conflitti

Le Figure 3 e 4 evidenziano l'impatto della densità dei conflitti sulle performance. Anche in questo contesto, si osserva come l'approccio Warm Start (Fig. 4) offra una maggiore stabilità rispetto al Cold Start (Fig. 3), specialmente per le istanze più dense.

<b>Dataset</b>	<b>Density</b>	<b>MIP T</b>	<b>CP T</b>	<b>GRASP T</b>	<b>MIP Opt</b>	<b>CP Opt</b>	<b>GRASP Opt</b>	<b>GRASP Gap %</b>
C1	0.1	0.72s	0.44s	0.069s	80/80	80/80	20/80	2.82%
	0.2	1.93s	0.77s	0.079s	80/80	80/80	34/80	1.68%
	0.3	6.75s	0.93s	0.085s	78/80	80/80	33/80	1.61%
	0.4	11.35s	1.29s	0.088s	71/80	80/80	39/80	1.66%
	0.5	15.79s	1.73s	0.090s	68/80	80/80	48/80	1.22%
	0.6	20.48s	2.91s	0.092s	63/80	80/80	60/80	0.96%
	0.7	23.27s	3.29s	0.089s	58/80	80/80	58/80	0.75%
	0.8	26.78s	5.72s	0.088s	54/80	80/80	58/80	0.64%
	0.9	30.88s	9.20s	0.084s	51/80	74/80	53/80	0.36%
	<b>TOTALE</b>	<b>27.94s</b>	<b>19.04s</b>	<b>0.128s</b>	<b>2643/4320</b>	<b>3189/4320</b>	<b>1715/4320</b>	<b>-1.79%</b>
C10	0.1	42.10s	48.37s	0.140s	29/80	21/80	4/80	1.12%
	0.2	45.10s	44.43s	0.332s	29/80	30/80	12/80	-2.97%
	0.3	42.41s	41.09s	0.364s	30/80	30/80	11/80	-7.59%
	0.4	41.73s	40.05s	0.268s	30/80	30/80	17/80	-9.29%
	0.5	41.18s	39.30s	0.223s	30/80	30/80	20/80	-12.09%
	0.6	41.66s	38.63s	0.190s	30/80	30/80	26/80	-18.60%
	0.7	42.28s	38.21s	0.162s	30/80	30/80	25/80	-15.23%
	0.8	44.88s	30.04s	0.136s	30/80	50/80	36/80	-6.67%
	0.9	41.65s	23.58s	0.110s	30/80	52/80	46/80	-8.95%
	<b>TOTALE</b>	<b>45.7s</b>	<b>4.49s</b>	<b>0.088s</b>	<b>79/80</b>	<b>78/80</b>	<b>6/80</b>	<b>3.14%</b>
C3	0.1	19.00s	9.97s	0.101s	62/80	71/80	3/80	1.87%
	0.2	27.88s	16.52s	0.114s	54/80	61/80	3/80	1.28%
	0.3	41.46s	24.57s	0.123s	35/80	57/80	6/80	0.73%
	0.4	45.40s	38.86s	0.136s	30/80	32/80	19/80	0.54%
	0.5	42.60s	38.47s	0.150s	30/80	30/80	23/80	0.10%
	0.6	41.79s	32.67s	0.152s	30/80	50/80	27/80	-2.10%
	0.7	44.33s	27.67s	0.145s	30/80	50/80	36/80	-4.77%
	0.8	41.93s	23.99s	0.118s	29/80	53/80	42/80	-8.97%
	<b>TOTALE</b>	<b>0.79s</b>	<b>0.43s</b>	<b>0.074s</b>	<b>80/80</b>	<b>80/80</b>	<b>35/80</b>	<b>2.22%</b>
	<b>MEDIA</b>	<b>1.54s</b>	<b>0.67s</b>	<b>0.084s</b>	<b>80/80</b>	<b>80/80</b>	<b>52/80</b>	<b>1.24%</b>
R1	0.1	1.54s	0.94s	0.094s	80/80	80/80	63/80	0.90%
	0.2	3.43s	1.10s	0.087s	80/80	80/80	67/80	0.54%
	0.3	8.48s	1.47s	0.084s	77/80	80/80	74/80	0.27%
	0.4	12.09s	1.57s	0.083s	70/80	80/80	68/80	0.43%
	0.5	15.77s	1.78s	0.078s	68/80	80/80	66/80	0.82%
	0.6	18.54s	2.12s	0.071s	62/80	80/80	63/80	1.12%
	0.7	21.44s	2.40s	0.065s	61/80	80/80	53/80	2.02%
	<b>TOTALE</b>	<b>24.71s</b>	<b>22.67s</b>	<b>0.176s</b>	<b>53/80</b>	<b>60/80</b>	<b>5/80</b>	<b>2.79%</b>
	<b>MEDIA</b>	<b>39.18s</b>	<b>38.53s</b>	<b>0.312s</b>	<b>30/80</b>	<b>30/80</b>	<b>9/80</b>	<b>1.60%</b>
	<b>TOTALE</b>	<b>39.50s</b>	<b>38.51s</b>	<b>0.236s</b>	<b>30/80</b>	<b>30/80</b>	<b>12/80</b>	<b>-0.72%</b>
R10	0.1	39.48s	38.33s	0.177s	30/80	30/80	13/80	-5.48%
	0.2	39.56s	38.14s	0.149s	30/80	30/80	16/80	-7.51%
	0.3	39.77s	37.97s	0.135s	30/80	31/80	19/80	-11.18%
	0.4	39.78s	32.96s	0.122s	30/80	49/80	28/80	-11.57%
	0.5	40.25s	25.61s	0.102s	30/80	50/80	28/80	-12.06%
	0.6	38.85s	20.24s	0.090s	30/80	63/80	23/80	-0.97%
	<b>TOTALE</b>	<b>0.20s</b>	<b>0.34s</b>	<b>0.109s</b>	<b>80/80</b>	<b>80/80</b>	<b>18/80</b>	<b>1.24%</b>
	<b>MEDIA</b>	<b>11.73s</b>	<b>0.93s</b>	<b>0.103s</b>	<b>70/80</b>	<b>80/80</b>	<b>34/80</b>	<b>0.81%</b>
	<b>TOTALE</b>	<b>21.49s</b>	<b>6.72s</b>	<b>0.103s</b>	<b>61/80</b>	<b>78/80</b>	<b>37/80</b>	<b>1.34%</b>
	<b>MEDIA</b>	<b>27.57s</b>	<b>11.98s</b>	<b>0.100s</b>	<b>53/80</b>	<b>70/80</b>	<b>26/80</b>	<b>2.17%</b>
R3	0.1	33.51s	19.65s	0.107s	47/80	66/80	28/80	3.47%
	0.2	36.00s	26.00s	0.105s	41/80	53/80	27/80	3.31%
	0.3	39.60s	26.18s	0.095s	30/80	50/80	26/80	2.17%
	0.4	40.26s	24.51s	0.079s	30/80	51/80	29/80	0.35%
	0.5	38.92s	19.21s	0.073s	30/80	69/80	31/80	0.50%
	<b>TOTALE</b>	<b>2.00s</b>	<b>0.34s</b>	<b>0.109s</b>	<b>80/80</b>	<b>80/80</b>	<b>18/80</b>	<b>1.24%</b>
	<b>MEDIA</b>	<b>11.73s</b>	<b>0.93s</b>	<b>0.103s</b>	<b>70/80</b>	<b>80/80</b>	<b>34/80</b>	<b>0.81%</b>
	<b>TOTALE</b>	<b>21.49s</b>	<b>6.72s</b>	<b>0.103s</b>	<b>61/80</b>	<b>78/80</b>	<b>37/80</b>	<b>1.34%</b>
	<b>MEDIA</b>	<b>27.57s</b>	<b>11.98s</b>	<b>0.100s</b>	<b>53/80</b>	<b>70/80</b>	<b>26/80</b>	<b>2.17%</b>
	<b>TOTALE</b>	<b>33.51s</b>	<b>19.65s</b>	<b>0.107s</b>	<b>47/80</b>	<b>66/80</b>	<b>28/80</b>	<b>3.47%</b>
<b>TOTALE</b>	<b>MEDIA</b>	<b>27.94s</b>	<b>19.04s</b>	<b>0.128s</b>	<b>2643/4320</b>	<b>3189/4320</b>	<b>1715/4320</b>	<b>-1.79%</b>

Figura 3: Risultati con Cold Start (aggregati per Dataset e Densità)

<b>Dataset</b>	<b>Density</b>	<b>MIP T</b>	<b>CP T</b>	<b>GRASP T</b>	<b>MIP Opt</b>	<b>CP Opt</b>	<b>GRASP Opt</b>	<b>GRASP Gap %</b>
C1	0.1	0.78s	0.48s	0.069s	80/80	80/80	20/80	2.82%
	0.2	1.69s	0.73s	0.079s	80/80	80/80	34/80	1.68%
	0.3	2.91s	0.95s	0.085s	80/80	80/80	33/80	1.61%
	0.4	5.31s	1.23s	0.088s	80/80	80/80	39/80	1.66%
	0.5	8.23s	2.07s	0.090s	80/80	80/80	48/80	1.22%
	0.6	14.95s	3.12s	0.092s	69/80	80/80	60/80	0.96%
	0.7	20.00s	3.17s	0.089s	64/80	80/80	58/80	0.75%
	0.8	25.40s	5.33s	0.088s	56/80	80/80	58/80	0.64%
	0.9	30.91s	8.19s	0.084s	52/80	75/80	54/80	0.36%
	C10	0.1	41.12s	48.96s	0.140s	30/80	18/80	4/80
C10	0.2	44.94s	43.38s	0.332s	30/80	30/80	12/80	0.63%
	0.3	42.02s	40.63s	0.364s	30/80	30/80	11/80	1.16%
	0.4	41.58s	38.69s	0.268s	30/80	30/80	17/80	0.84%
	0.5	41.12s	38.16s	0.223s	30/80	30/80	20/80	0.81%
	0.6	41.59s	37.41s	0.190s	30/80	32/80	27/80	0.57%
	0.7	42.30s	34.88s	0.162s	30/80	43/80	33/80	1.30%
	0.8	45.59s	26.51s	0.136s	30/80	50/80	36/80	1.09%
	0.9	41.47s	21.41s	0.110s	30/80	58/80	47/80	0.95%
	C3	0.1	4.67s	4.77s	0.088s	80/80	77/80	6/80
	0.2	18.77s	9.87s	0.101s	62/80	72/80	3/80	1.85%
C3	0.3	27.79s	16.42s	0.114s	54/80	62/80	3/80	1.28%
	0.4	41.62s	22.69s	0.123s	32/80	58/80	6/80	0.79%
	0.5	44.83s	38.96s	0.136s	30/80	32/80	20/80	0.57%
	0.6	42.05s	37.76s	0.150s	30/80	32/80	25/80	0.38%
	0.7	41.82s	28.41s	0.152s	30/80	50/80	27/80	0.78%
	0.8	45.98s	24.99s	0.145s	30/80	50/80	36/80	1.16%
	0.9	41.47s	21.62s	0.118s	30/80	61/80	43/80	1.29%
	R1	0.1	0.81s	0.49s	0.074s	80/80	80/80	35/80
	0.2	1.70s	0.74s	0.084s	80/80	80/80	52/80	1.24%
R1	0.3	2.53s	1.08s	0.094s	80/80	80/80	63/80	0.90%
	0.4	3.73s	1.22s	0.087s	80/80	80/80	67/80	0.54%
	0.5	5.14s	1.53s	0.084s	80/80	80/80	74/80	0.27%
	0.6	7.65s	1.93s	0.083s	80/80	80/80	68/80	0.43%
	0.7	12.60s	1.96s	0.078s	73/80	80/80	66/80	0.82%
	0.8	17.04s	2.32s	0.071s	66/80	80/80	63/80	1.12%
	0.9	20.70s	2.91s	0.065s	61/80	80/80	53/80	2.02%
	R10	0.1	24.93s	22.11s	0.176s	53/80	59/80	5/80
	0.2	39.27s	38.34s	0.312s	30/80	30/80	9/80	3.60%
R10	0.3	39.51s	38.28s	0.236s	30/80	30/80	12/80	2.83%
	0.4	39.51s	38.08s	0.177s	30/80	30/80	13/80	2.51%
	0.5	39.65s	37.65s	0.149s	30/80	32/80	17/80	3.06%
	0.6	39.69s	34.81s	0.135s	30/80	40/80	24/80	2.48%
	0.7	39.88s	27.48s	0.122s	30/80	50/80	29/80	2.26%
	0.8	40.22s	24.07s	0.102s	30/80	50/80	28/80	2.08%
	0.9	38.78s	14.63s	0.090s	30/80	70/80	27/80	4.50%
	R3	0.1	0.76s	0.34s	0.109s	80/80	80/80	18/80
	0.2	5.26s	0.84s	0.103s	79/80	80/80	34/80	0.81%
R3	0.3	17.75s	5.46s	0.103s	64/80	78/80	37/80	1.34%
	0.4	26.06s	11.18s	0.100s	54/80	70/80	26/80	2.14%
	0.5	33.12s	18.50s	0.107s	47/80	65/80	29/80	3.59%
	0.6	36.11s	23.95s	0.105s	42/80	57/80	27/80	3.62%
	0.7	39.66s	24.28s	0.095s	32/80	51/80	26/80	3.07%
	0.8	40.42s	21.97s	0.079s	30/80	63/80	31/80	3.86%
	0.9	38.87s	14.15s	0.073s	30/80	70/80	31/80	4.31%
<b>TOTALE</b>	<b>MEDIA</b>	<b>26.89s</b>	<b>17.98s</b>	<b>0.128s</b>	<b>2720/4320</b>	<b>3255/4320</b>	<b>1744/4320</b>	<b>1.69%</b>

Figura 4: Risultati con Warm Start (aggregati per Dataset e Densità)

### 5.3 Impatto della Strategia Warm Start

I grafici seguenti riassumono il miglioramento percentuale in termini di tempo (Time Impr.) e qualità della soluzione (Obj Impr.). La Figura 5 mostra l'impatto medio raggruppato per tipo di istanza, mentre la Figura 6 illustra l'andamento in relazione alla densità globale dei conflitti.

#### 5.3.1 Miglioramento Medio Globale

Type	MIP Time %	CP Time %	MIP Obj %	CP Obj %
1	9.9%	21.7%	0.0%	0.0%
2	9.9%	18.0%	36.1%	20.2%
3	10.8%	7.0%	57.6%	41.1%
4	7.3%	-1.9%	81.9%	47.4%
5	2.5%	16.3%	0.0%	0.0%
6	4.4%	18.5%	0.4%	0.2%
7	-3.1%	6.8%	39.4%	20.6%
8	-2.6%	-8.8%	51.9%	36.9%
<b>TOTALE</b>	<b>4.9%</b>	<b>9.7%</b>	<b>33.4%</b>	<b>20.8%</b>

Figura 5: Impatto medio del Warm Start per Tipo di Istanza (Globale).

Density	MIP Time %	CP Time %	MIP Obj %	CP Obj %
0.1	8.3%	-4.6%	10.0%	5.2%
0.2	9.8%	1.5%	24.2%	17.9%
0.3	16.9%	0.6%	24.2%	20.6%
0.4	13.1%	1.9%	31.7%	22.1%
0.5	14.9%	-2.3%	35.4%	25.8%
0.6	10.8%	-1.4%	40.0%	28.3%
0.7	5.6%	6.5%	41.9%	25.8%
0.8	1.3%	5.9%	45.8%	24.4%
0.9	0.9%	10.5%	47.5%	16.9%
<b>TOTALE</b>	<b>9.1%</b>	<b>2.1%</b>	<b>33.4%</b>	<b>20.8%</b>

Figura 6: Impatto medio del Warm Start per Densità (Globale).

### 5.3.2 Dettaglio per Dataset

Per comprendere meglio il comportamento dei risolutori, è utile scendere nel dettaglio dei singoli gruppi di test.

La Figura 7 evidenzia i tempi e gli ottimi trovati da ogni solver, aggregati per dataset e tipo di istanza. Questo permette di isolare i casi in cui la correlazione tra pesi e profitti (tipica dei dataset C) influisce maggiormente sull'efficacia del Warm Start.

<b>Dataset</b>	<b>Type</b>	<b>MIP Time %</b>	<b>CP Time %</b>	<b>MIP Obj %</b>	<b>CP Obj %</b>
C1	1	32.8%	20.9%	0.0%	0.0%
	2	19.8%	18.6%	0.0%	0.0%
	3	32.4%	17.3%	25.6%	0.0%
	4	17.5%	0.1%	67.8%	0.0%
	5	36.8%	43.6%	0.0%	0.0%
	6	30.6%	43.1%	0.0%	0.0%
	7	17.9%	5.2%	0.0%	0.0%
	8	7.1%	-10.5%	12.2%	0.0%
C10	1	1.2%	26.7%	0.0%	0.0%
	2	0.0%	7.7%	87.8%	68.9%
	3	-0.1%	1.5%	96.7%	90.0%
	4	-0.1%	0.0%	98.9%	93.3%
	5	-4.3%	38.0%	0.0%	0.0%
	6	5.4%	10.3%	1.1%	1.1%
	7	0.1%	6.0%	91.1%	67.8%
	8	-0.2%	0.2%	92.2%	88.9%
C3	1	-4.9%	20.2%	0.0%	0.0%
	2	-0.8%	11.5%	38.9%	7.8%
	3	-0.6%	1.7%	68.9%	53.3%
	4	0.3%	0.4%	90.0%	44.4%
	5	11.2%	32.5%	0.0%	0.0%
	6	8.0%	29.6%	1.1%	0.0%
	7	-2.8%	20.1%	41.1%	10.0%
	8	1.7%	1.6%	60.0%	40.0%
R1	1	49.4%	29.7%	0.0%	0.0%
	2	37.6%	20.0%	0.0%	0.0%
	3	28.9%	5.2%	8.9%	0.0%
	4	18.2%	-14.2%	47.8%	0.0%
	5	-39.7%	-68.8%	0.0%	0.0%
	6	-14.6%	-41.0%	0.0%	0.0%
	7	-36.3%	-45.8%	0.0%	0.0%
	8	-32.6%	-58.3%	0.0%	0.0%
R10	1	-4.6%	19.7%	0.0%	0.0%
	2	0.5%	11.3%	67.8%	44.4%
	3	0.7%	3.5%	91.1%	82.2%
	4	-0.1%	-0.0%	97.8%	97.8%
	5	11.0%	23.2%	0.0%	0.0%
	6	0.7%	34.9%	0.0%	0.0%
	7	-0.5%	12.9%	77.8%	45.6%
	8	-0.9%	4.1%	90.0%	80.0%
R3	1	-14.3%	13.1%	0.0%	0.0%
	2	2.3%	38.8%	22.2%	0.0%
	3	3.4%	13.1%	54.4%	21.1%
	4	8.0%	2.3%	88.9%	48.9%
	5	-0.3%	29.6%	0.0%	0.0%
	6	-3.5%	34.1%	0.0%	0.0%
	7	3.3%	42.4%	26.7%	0.0%
	8	9.0%	9.9%	56.7%	12.2%
<b>MEDIA</b>	<b>TOTALE</b>	<b>4.9%</b>	<b>9.7%</b>	<b>33.4%</b>	<b>20.8%</b>

Figura 7: Dettaglio dell'impatto del Warm Start (aggregati per Dataset e Tipo).

Analogamente, la Figura 8 riporta i dati aggregati per dataset e densità. Qui emerge chiaramente come la struttura del grafo dei conflitti influenzi le prestazioni: nei dataset random (R), l'aumento della densità tende a favorire il CP, mentre il Warm Start si dimostra utile per ridurre i tempi globali e decisivo per rendere il MIP competitivo sulle istanze strutturate (C).

Dataset	Density	MIP Time %	CP Time %	MIP Obj %	CP Obj %
C1	0.1	-8.5%	-7.8%	0.0%	0.0%
	0.2	12.5%	5.0%	0.0%	0.0%
	0.3	56.9%	-3.1%	2.5%	0.0%
	0.4	53.2%	4.3%	11.2%	0.0%
	0.5	47.9%	-19.6%	12.5%	0.0%
	0.6	27.0%	-7.2%	16.2%	0.0%
	0.7	14.1%	3.5%	16.2%	0.0%
	0.8	5.2%	6.8%	27.5%	0.0%
	0.9	-0.1%	10.9%	32.5%	0.0%
	MEDIA	10.1%	1.1%	16.2%	0.0%
C10	0.1	2.3%	-1.2%	38.8%	17.5%
	0.2	0.3%	2.4%	61.3%	61.3%
	0.3	0.9%	1.1%	58.8%	62.5%
	0.4	0.4%	3.4%	58.8%	62.5%
	0.5	0.1%	2.9%	62.5%	62.5%
	0.6	0.2%	3.2%	62.5%	62.5%
	0.7	-0.1%	8.7%	62.5%	60.0%
	0.8	-1.6%	11.7%	61.3%	37.5%
	0.9	0.4%	9.2%	60.0%	35.0%
	MEDIA	1.1%	1.1%	58.8%	56.2%
C3	0.1	-2.1%	-6.2%	1.2%	0.0%
	0.2	1.2%	1.0%	15.0%	0.0%
	0.3	0.3%	0.6%	16.2%	3.8%
	0.4	-0.4%	7.6%	38.8%	5.0%
	0.5	1.3%	-0.3%	47.5%	22.5%
	0.6	1.3%	1.8%	55.0%	37.5%
	0.7	-0.1%	13.1%	52.5%	36.2%
	0.8	-3.7%	9.7%	53.8%	37.5%
	0.9	1.1%	9.9%	57.5%	32.5%
	MEDIA	1.1%	1.1%	53.8%	29.2%
R1	0.1	-3.3%	-15.0%	0.0%	0.0%
	0.2	-10.4%	-9.6%	0.0%	0.0%
	0.3	26.0%	-14.1%	0.0%	0.0%
	0.4	19.9%	-11.1%	0.0%	0.0%
	0.5	39.4%	-4.1%	3.8%	0.0%
	0.6	36.7%	-22.7%	12.5%	0.0%
	0.7	20.1%	-10.4%	13.8%	0.0%
	0.8	8.1%	-9.3%	15.0%	0.0%
	0.9	3.4%	-21.2%	18.8%	0.0%
	MEDIA	11.1%	-11.1%	13.8%	0.0%
R10	0.1	-0.9%	2.4%	20.0%	13.8%
	0.2	-0.2%	0.5%	56.2%	46.2%
	0.3	-0.0%	0.6%	50.0%	57.5%
	0.4	-0.1%	0.7%	55.0%	61.3%
	0.5	-0.2%	1.3%	58.8%	62.5%
	0.6	0.2%	8.3%	60.0%	55.0%
	0.7	-0.3%	16.6%	61.3%	38.8%
	0.8	0.1%	6.0%	60.0%	37.5%
	0.9	0.2%	27.7%	56.2%	21.2%
	MEDIA	1.1%	1.1%	53.8%	29.2%
R3	0.1	62.2%	0.4%	0.0%	0.0%
	0.2	55.2%	9.7%	12.5%	0.0%
	0.3	17.4%	18.7%	17.5%	0.0%
	0.4	5.5%	6.7%	26.2%	3.8%
	0.5	1.2%	5.8%	27.5%	7.5%
	0.6	-0.3%	7.9%	33.8%	15.0%
	0.7	-0.1%	7.3%	45.0%	20.0%
	0.8	-0.4%	10.4%	57.5%	33.8%
	0.9	0.1%	26.3%	60.0%	12.5%
	MEDIA	1.1%	1.1%	53.8%	29.2%
<b>MEDIA</b>		<b>9.1%</b>	<b>2.1%</b>	<b>33.4%</b>	<b>20.8%</b>

Figura 8: Dettaglio dell'impatto del Warm Start (aggregati per Dataset e Densità).

## 6 Conclusioni

In conclusione, i test effettuati confermano che:

- **CP-SAT** rappresenta lo stato dell'arte per le istanze dense e poco strutturate.
- **MIP** da solo risulta spesso inefficiente sulle istanze più difficili (come *C10*), dove fatica a trovare soluzioni valide in tempi ragionevoli.
- **GRASP** è estremamente veloce: pur non garantendo l'ottimo matematico, restituisce quasi instantaneamente delle soluzioni sub-ottime molto valide, spesso migliori di quelle dei solver esatti eseguiti in Cold Start e troncati al `time limit`.

L'idea di unire l'approccio metaeuristico a quello esatto tramite il **Warm Start** ha permesso di ottenere il meglio da entrambi, con risultati diversi a seconda del problema:

- **Istanze semplici (*R1* e *C1*):** In questi casi il Warm Start è quasi superfluo. Il solver esatto è così rapido che il tempo speso per iniettare la soluzione generata da GRASP rallenta leggermente il processo invece di migliorarlo.
- **GAP:** Viene eliminato il Gap Negativo, garantendo che le soluzioni dei solver esatti siano sempre superiori o uguali a quella di GRASP.
- **MIP:** Per il MIP questa tecnica è invece decisiva. Nelle istanze "hard", dove il solver standard fallirebbe, avere una buona soluzione di partenza permette di tagliare i rami inutili della ricerca e trovare risultati che altrimenti non verrebbero raggiunti entro il time limit.
- **CP-SAT:** Anche se il CP-SAT si conferma il miglior risolutore per le istanze dense, il Warm Start lo aiuta molto nei casi più grandi (Type 3, 4 e 8), guidandolo verso soluzioni finali di qualità superiore in minor tempo rispetto a una ricerca avviata da zero.

## Riferimenti bibliografici

- [1] R. Montemanni, D. H. Smith, *On Solving the Knapsack Problem with Conflicts*, arXiv preprint, 2025.
- [2] H. Kellerer, U. Pferschy, D. Pisinger, *Knapsack Problems*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [3] U. Pferschy, J. Schauer, *The Knapsack Problem with Conflict Graphs*, Journal of Graph Algorithms and Applications, 13(2), 233-249, 2009.
- [4] O. Ohrimenko, P. J. Stuckey, M. Codish, *Propagation via Lazy Clause Generation*, Constraints, 14(3), 357-391, 2009.
- [5] T. A. Feo, M. G. C. Resende, *Greedy Randomized Adaptive Search Procedures*, Journal of Global Optimization, 6, 109-133, 1995.
- [6] M. Hifi, M. Michrafy, *Reduction strategies and exact algorithms for the disjunctively constrained knapsack problem*, Computers & Operations Research, 33(9), 2352-2368, 2006.