

Algoritmi di Ottimizzazione

Analisi comparativa di risolutori Esatti e Metaeuristici per il
Knapsack Problem with Conflicts

Autore:
Cristian Piero Alioto

Anno Accademico:
2025/2026

Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche "FIM"

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduzione | 2 |
| 2 | Definizione del Problema | 2 |
| 3 | Metodologie Implementate | 2 |
| 3.1 | Soltori Esatti | 2 |
| 3.2 | Metaeuristica GRASP | 2 |
| 3.3 | Strategia Ibrida: Warm Start | 3 |
| 4 | Implementazione | 3 |
| 4.1 | Struttura del Progetto | 3 |
| 4.2 | Specifiche Hardware e Parallelismo | 3 |
| 5 | Analisi Sperimentale | 4 |
| 5.1 | Descrizione dei Dataset | 4 |
| 5.2 | Performance Complessiva: Tempi, Ottimi e Gap % | 4 |
| 5.2.1 | Analisi per Tipo di Istanza | 5 |
| 5.2.2 | Analisi per Densità dei Conflitti | 7 |
| 5.3 | Impatto della Strategia Warm Start | 9 |
| 5.3.1 | Miglioramento Medio Globale | 9 |
| 5.3.2 | Dettaglio per Dataset | 10 |
| 6 | Conclusioni | 12 |

Elenco delle figure

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Risultati con Cold Start (aggregati per Dataset e Tipo) | 5 |
| 2 | Risultati con Warm Start (aggregati per Dataset e Tipo) | 6 |
| 3 | Risultati con Cold Start (aggregati per Dataset e Densità) | 7 |
| 4 | Risultati con Warm Start (aggregati per Dataset e Densità) | 8 |
| 5 | Impatto medio del Warm Start per Tipo di Istanza (Globale). | 9 |
| 6 | Impatto medio del Warm Start per Densità (Globale). | 9 |
| 7 | Dettaglio dell'impatto del Warm Start (aggregati per Dataset e Tipo). | 10 |
| 8 | Dettaglio dell'impatto del Warm Start (aggregati per Dataset e Densità). | 11 |

1 Introduzione

Questo progetto affronta il *Knapsack Problem with Conflicts* (KPC), una variante NP-Hard del classico problema dello zaino [2]. L'obiettivo è confrontare metodi esatti e metaeuristici, analizzando in particolare l'efficacia di tecniche di ottimizzazione ibride, come il Warm Start, per migliorare le performance dei risolutori.

2 Definizione del Problema

Il KPC estende il problema dello zaino classico tramite un grafo di incompatibilità $G = (V, E)$, come definito formalmente in [3]. Il modello matematico adottato è il seguente:

$$\max \quad \sum_{j=1}^n p_j x_j \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq C \tag{2}$$

$$x_i + x_j \leq 1 \quad \forall (i, j) \in E \tag{3}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in N \tag{4}$$

3 Metodologie Implementate

In questa sezione vengono descritti gli approcci risolutivi sviluppati.

3.1 Soltori Esatti

Per garantire l'ottimalità della soluzione, ho utilizzato la suite Google OR-Tools, mettendo a confronto due paradigmi differenti:

- **MIP (Mixed Integer Programming):** Un approccio basato sulla traduzione dei conflitti in diseguaglianze lineari ($x_i + x_j \leq 1$). È particolarmente efficace quando la struttura è dominata da un vincolo di capacità stretto, poiché il rilassamento lineare fornisce *bound* molto accurati che accelerano la potatura dell'albero di ricerca.
- **CP (Constraint Programming - CP-SAT):** Un approccio basato su tecniche SAT avanzate (*Lazy Clause Generation* [4]). Invece di linearizzare, modella i conflitti come clausole booleane ($\neg x_i \vee \neg x_j$), sfruttando meccanismi efficaci di propagazione logica. Come evidenziato in [1], questo paradigma risulta superiore al MIP nelle istanze ad alta densità di conflitti, dove la difficoltà combinatoria prevale sui vincoli numerici di capacità.

3.2 Metaeuristica GRASP

L'algoritmo segue lo schema classico *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* [5], eseguendo iterativamente le seguenti due fasi:

1. **Constructive Phase (Greedy Randomized):** La costruzione della soluzione avviene passo dopo passo in modo probabilistico. Ad ogni iterazione, viene calcolato uno score dinamico per tutti gli oggetti ammissibili (non ancora inseriti e non in conflitto):

$$Score_i = \frac{p_i}{w_i} \cdot \frac{1}{1 + k \cdot deg(i)}$$

Gli elementi con score più alto vengono inseriti nella **RCL** (*Restricted Candidate List*). La scelta dell'oggetto da aggiungere allo zaino avviene *casualmente* all'interno di questa

lista ristretta (e non necessariamente scegliendo il migliore in assoluto). Questo meccanismo introduce la diversificazione necessaria per esplorare regioni differenti dello spazio di ricerca ad ogni iterazione di GRASP.

2. **Local Search (First Improvement):** Ogni soluzione costruita viene subito migliorata per raggiungere un ottimo locale. La strategia adottata prevede che l'algoritmo scansioni il vicinato e applichi la prima modifica che incrementa il profitto totale, senza attendere di valutare tutte le mosse possibili. Le operazioni consentite sono:

- **ADD:** Inserimento di un oggetto esterno compatibile con la capacità residua e i vincoli di conflitto.
- **SWAP:** Sostituzione di un oggetto presente nello zaino con uno esterno, accettata solo se aumenta il profitto complessivo e rispetta l'ammissibilità.

3.3 Strategia Ibrida: Warm Start

L'integrazione tra la metaeuristica e i solver esatti avviene tramite una duplice iniezione di informazioni, mirata a guidare la ricerca fin dal nodo radice:

1. **Lower Bound Cut:** Viene imposto un vincolo esplicito sul valore della funzione obiettivo ($\sum p_j x_j \geq Z_{GRASP}$). Questo parametro agisce come filtro globale, permettendo all'algoritmo di potare a priori (*pruning*) qualsiasi ramo dell'albero di ricerca che non possa matematicamente superare la qualità della soluzione euristica già nota.
2. **Solution Hinting:** L'intera configurazione delle variabili trovata dal GRASP (\mathbf{x}^{GRASP}) viene fornita al solver come suggerimento parziale o completo. Questo permette al solver (specialmente al MIP) di costruire immediatamente una soluzione ammissibile valida.

4 Implementazione

Il progetto è stato sviluppato interamente in **Python**, integrando la suite Google OR-Tools per la parte di risoluzione esatta e utilizzando librerie per il calcolo scientifico e la visualizzazione dati (come NumPy e Matplotlib).

4.1 Struttura del Progetto

Il codice sorgente è organizzato in directory modulari per garantire chiarezza, manutenibilità e riutilizzabilità delle componenti:

- **src/solvers:** Contiene l'implementazione delle classi per i tre approcci risolutivi (MIP, CP, GRASP).
- **src/utilities:** Include moduli di supporto per il parsing dei file delle istanze (input_loader), la generazione delle statistiche (stats) e di grafici comparativi (plot).
- **data:** Raccolta delle istanze di benchmark (dataset strutturati C e random R).
- **outputs:** Raccolta dei risultati (file JSON), delle statistiche e dei grafici.

4.2 Specifiche Hardware e Parallelismo

I test sono stati eseguiti su una macchina con una CPU **Intel Core i5-13420H**, dotata di 12 processori logici. L'architettura software sfrutta il modulo `multiprocessing` nativo di Python per distribuire il carico di lavoro su processi distinti, utilizzando un pool dinamico di worker per evitare il sovraccarico del sistema. Inoltre, è stato imposto un **Time Limit** di 60 secondi per l'esecuzione dei solver esatti.

5 Analisi Sperimentale

5.1 Descrizione dei Dataset

L'analisi sperimentale è stata condotta utilizzando il set di benchmark standard proposto in letteratura, derivato dalle istanze originariamente introdotte per il *Bin Packing Problem* da Hifi e Michrafy [6]. Il banco di prova completo è costituito da un totale di **4320 istanze**, basate su otto classi fondamentali che si distinguono per la numerosità degli oggetti (n) e la generazione dei pesi:

- Le **prime quattro classi** presentano pesi distribuiti uniformemente nell'intervallo [20, 100] con una capacità base $c = 150$. Il numero di oggetti n assume rispettivamente i valori 120, 250, 500 e 1000.
- Le **ultime quattro classi** presentano pesi campionati uniformemente nell'intervallo [250, 500] con una capacità base $c = 1000$. In questo gruppo, il numero di oggetti n è pari a 60, 120, 349 e 501.

Per ciascuna di queste configurazioni, viene generato un grafo dei conflitti casuale con densità variabile da 0.1 a 0.9 (per un totale di 90 istanze per classe). Le istanze sono poi ulteriormente classificate in due macro-categorie in base alla generazione dei profitti:

Dataset R (Random): Include i gruppi **R1, R3, R10**. In queste istanze, i profitti p_j sono generati in modo indipendente dai pesi, seguendo una distribuzione uniforme nell'intervallo [1, 100]. L'assenza di correlazione rende queste istanze generalmente più semplici per le euristiche, dato che il rapporto profitto/peso presenta un'alta varianza.

Dataset C (Correlated): Include i gruppi **C1, C3, C10**. In queste istanze, esiste una correlazione stretta e deterministica definita dalla relazione $p_j = w_j + 10$. Questa struttura rende il problema combinatorio più arduo, poiché tutti gli oggetti hanno una densità di valore simile, rendendo difficile per i solver discriminare gli elementi migliori.

Per entrambe le categorie, la capacità dello zaino C varia moltiplicando la capacità originale per un fattore 1 (gruppi R1/C1), 3 (R3/C3) o 10 (R10/C10).

5.2 Performance Complessiva: Tempi, Ottimi e Gap %

In questa sezione vengono presentate le statistiche descrittive aggregate, confrontando l'approccio Cold Start con il Warm Start.

Dall'analisi del **GRASP Gap %**, calcolato come la differenza relativa tra la *miglior soluzione trovata* dal solver esatto e quella dell'euristica, osserviamo due scenari distinti:

- **Scenario Cold Start (Gap Negativo):** Un gap negativo (Fig. 1 o 3) implica che, allo scadere del time limit di 60 secondi, i solver esatti non erano ancora riusciti a eguagliare la qualità della soluzione che GRASP aveva trovato in pochi millisecondi. In questi frangenti, l'euristica si dimostra superiore al solver esatto troncato.
- **Scenario Warm Start (Gap Positivo Ridotto):** Il gap diventa costantemente positivo (Fig. 2 o 4), pur mantenendo una media molto bassa. Ciò conferma che l'iniezione della soluzione iniziale impedisce al solver di performare peggio dell'euristica, garantendo sempre un miglioramento.

Questo fenomeno conferma l'alta qualità delle soluzioni generate da GRASP, che si collocano molto vicine all'ottimo già in fase di costruzione.

Le tabelle e i grafici successivi mostrano il confronto dettagliato in base al Tipo di istanza e alla Densità dei conflitti.

5.2.1 Analisi per Tipo di Istanza

La Figura 1 riporta le performance ottenute in modalità Cold Start. È interessante notare come le classi con un alto numero di oggetti (in particolare i **Type 2,3,4,7,8**), in dataset con un'elevata capacità dello zaino, risultino significativamente più complesse per il risolutore MIP, che impiega più tempo a convergere.

| Dataset | Type | MIP T | CP T | GRASP T | MIP Opt | CP Opt | GRASP Opt | GRASP Gap % |
|----------------|--------------|---------------|---------------|----------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|
| C1 | 1 | 1.90s | 0.17s | 0.020s | 90/90 | 90/90 | 54/90 | 1.69% |
| | 2 | 11.23s | 0.88s | 0.049s | 89/90 | 90/90 | 48/90 | 1.67% |
| | 3 | 32.33s | 4.36s | 0.107s | 57/90 | 90/90 | 26/90 | 2.84% |
| | 4 | 48.36s | 15.67s | 0.257s | 29/90 | 84/90 | 22/90 | 3.17% |
| | 5 | 0.36s | 0.04s | 0.011s | 90/90 | 90/90 | 84/90 | 0.01% |
| | 6 | 1.08s | 0.13s | 0.026s | 90/90 | 90/90 | 76/90 | 0.11% |
| | 7 | 4.64s | 0.40s | 0.058s | 90/90 | 90/90 | 50/90 | 0.40% |
| | 8 | 22.72s | 1.69s | 0.152s | 68/90 | 90/90 | 43/90 | 0.50% |
| C3 | 1 | 11.94s | 2.21s | 0.027s | 90/90 | 90/90 | 36/90 | 1.94% |
| | 2 | 47.53s | 25.80s | 0.060s | 23/90 | 68/90 | 18/90 | 1.98% |
| | 3 | 53.41s | 50.62s | 0.163s | 13/90 | 20/90 | 0/90 | -2.23% |
| | 4 | 59.40s | 54.34s | 0.444s | 9/90 | 11/90 | 0/90 | -5.03% |
| | 5 | 0.93s | 0.20s | 0.013s | 90/90 | 90/90 | 55/90 | 0.14% |
| | 6 | 16.27s | 2.91s | 0.028s | 89/90 | 90/90 | 36/90 | 0.29% |
| | 7 | 39.84s | 22.31s | 0.068s | 34/90 | 71/90 | 13/90 | 1.25% |
| | 8 | 45.30s | 34.68s | 0.198s | 31/90 | 42/90 | 7/90 | -5.61% |
| C10 | 1 | 16.32s | 9.39s | 0.043s | 89/90 | 87/90 | 45/90 | 1.53% |
| | 2 | 59.82s | 49.81s | 0.111s | 0/90 | 21/90 | 12/90 | -3.83% |
| | 3 | 60.24s | 59.85s | 0.309s | 0/90 | 1/90 | 1/90 | -20.73% |
| | 4 | 62.68s | 60.05s | 0.896s | 0/90 | 0/90 | 0/90 | -22.73% |
| | 5 | 0.61s | 0.19s | 0.012s | 90/90 | 90/90 | 76/90 | 0.34% |
| | 6 | 20.77s | 15.18s | 0.030s | 89/90 | 83/90 | 50/90 | 1.02% |
| | 7 | 59.83s | 51.23s | 0.080s | 0/90 | 20/90 | 13/90 | -6.25% |
| | 8 | 60.18s | 59.79s | 0.229s | 0/90 | 1/90 | 0/90 | -20.70% |
| R1 | 1 | 0.91s | 0.10s | 0.013s | 90/90 | 90/90 | 61/90 | 1.84% |
| | 2 | 5.38s | 0.46s | 0.029s | 90/90 | 90/90 | 64/90 | 1.14% |
| | 3 | 22.31s | 2.17s | 0.094s | 71/90 | 90/90 | 62/90 | 1.13% |
| | 4 | 39.49s | 7.05s | 0.280s | 47/90 | 90/90 | 60/90 | 0.77% |
| | 5 | 0.08s | 0.02s | 0.009s | 90/90 | 90/90 | 67/90 | 1.01% |
| | 6 | 0.29s | 0.05s | 0.021s | 90/90 | 90/90 | 80/90 | 0.40% |
| | 7 | 1.43s | 0.24s | 0.052s | 90/90 | 90/90 | 75/90 | 0.79% |
| | 8 | 7.19s | 1.01s | 0.143s | 90/90 | 90/90 | 72/90 | 1.40% |
| R3 | 1 | 2.64s | 0.37s | 0.018s | 90/90 | 90/90 | 26/90 | 4.42% |
| | 2 | 31.78s | 4.88s | 0.044s | 58/90 | 90/90 | 17/90 | 3.85% |
| | 3 | 48.85s | 33.85s | 0.121s | 22/90 | 56/90 | 16/90 | 2.51% |
| | 4 | 57.57s | 45.47s | 0.377s | 10/90 | 29/90 | 10/90 | -3.64% |
| | 5 | 0.38s | 0.06s | 0.009s | 90/90 | 90/90 | 63/90 | 1.84% |
| | 6 | 3.61s | 0.56s | 0.019s | 90/90 | 90/90 | 60/90 | 1.76% |
| | 7 | 34.44s | 6.50s | 0.047s | 50/90 | 90/90 | 44/90 | 1.83% |
| | 8 | 43.90s | 28.78s | 0.140s | 32/90 | 62/90 | 20/90 | 1.08% |
| R10 | 1 | 5.40s | 1.94s | 0.025s | 90/90 | 90/90 | 20/90 | 6.34% |
| | 2 | 54.20s | 40.41s | 0.060s | 10/90 | 40/90 | 3/90 | 3.13% |
| | 3 | 60.23s | 58.05s | 0.174s | 0/90 | 8/90 | 1/90 | -13.47% |
| | 4 | 62.65s | 60.04s | 0.742s | 0/90 | 0/90 | 0/90 | -24.14% |
| | 5 | 0.38s | 0.08s | 0.011s | 90/90 | 90/90 | 60/90 | 2.01% |
| | 6 | 6.17s | 2.54s | 0.025s | 90/90 | 90/90 | 50/90 | 2.82% |
| | 7 | 54.92s | 41.70s | 0.072s | 10/90 | 40/90 | 18/90 | -0.18% |
| | 8 | 59.24s | 55.64s | 0.222s | 3/90 | 15/90 | 1/90 | -16.61% |
| TOTALE | MEDIA | 27.94s | 19.04s | 0.128s | 2643/4320 | 3189/4320 | 1715/4320 | -1.79% |

Figura 1: Risultati con Cold Start (aggregati per Dataset e Tipo)

La Figura 2, invece, mostra i risultati ottenuti attivando il Warm Start, che permette al MIP di trovare soluzioni di qualità superiore e, nelle classi a media complessità, di incrementare il numero di ottimi certificati.

| Dataset | Type | MIP T | CP T | GRASP T | MIP Opt | CP Opt | GRASP Opt | GRASP Gap % |
|----------------|--------------|---------------|---------------|----------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|
| C1 | 1 | 1.28s | 0.13s | 0.020s | 90/90 | 90/90 | 54/90 | 1.69% |
| | 2 | 9.00s | 0.71s | 0.049s | 88/90 | 90/90 | 48/90 | 1.67% |
| | 3 | 21.86s | 3.61s | 0.107s | 66/90 | 90/90 | 26/90 | 2.84% |
| | 4 | 39.89s | 15.66s | 0.257s | 50/90 | 85/90 | 23/90 | 3.17% |
| | 5 | 0.23s | 0.02s | 0.011s | 90/90 | 90/90 | 84/90 | 0.01% |
| | 6 | 0.75s | 0.08s | 0.026s | 90/90 | 90/90 | 76/90 | 0.11% |
| | 7 | 3.81s | 0.38s | 0.058s | 90/90 | 90/90 | 50/90 | 0.40% |
| | 8 | 21.11s | 1.87s | 0.152s | 77/90 | 90/90 | 43/90 | 0.50% |
| C3 | 1 | 12.52s | 1.76s | 0.027s | 90/90 | 90/90 | 36/90 | 1.94% |
| | 2 | 47.91s | 22.83s | 0.060s | 23/90 | 72/90 | 21/90 | 2.00% |
| | 3 | 53.72s | 49.78s | 0.163s | 13/90 | 28/90 | 1/90 | 2.31% |
| | 4 | 59.23s | 54.15s | 0.444s | 10/90 | 12/90 | 0/90 | 1.66% |
| | 5 | 0.83s | 0.14s | 0.013s | 90/90 | 90/90 | 55/90 | 0.14% |
| | 6 | 14.97s | 2.05s | 0.028s | 90/90 | 90/90 | 36/90 | 0.29% |
| | 7 | 40.97s | 17.83s | 0.068s | 30/90 | 70/90 | 13/90 | 1.25% |
| | 8 | 44.53s | 34.13s | 0.198s | 32/90 | 42/90 | 7/90 | 0.41% |
| C10 | 1 | 16.11s | 6.89s | 0.043s | 90/90 | 87/90 | 45/90 | 1.53% |
| | 2 | 59.81s | 45.96s | 0.111s | 0/90 | 30/90 | 16/90 | 1.79% |
| | 3 | 60.28s | 58.93s | 0.309s | 0/90 | 5/90 | 2/90 | 0.77% |
| | 4 | 62.76s | 60.04s | 0.896s | 0/90 | 0/90 | 0/90 | 0.39% |
| | 5 | 0.64s | 0.12s | 0.012s | 90/90 | 90/90 | 76/90 | 0.34% |
| | 6 | 19.66s | 13.61s | 0.030s | 90/90 | 81/90 | 50/90 | 1.02% |
| | 7 | 59.78s | 48.14s | 0.080s | 0/90 | 25/90 | 18/90 | 1.16% |
| | 8 | 60.27s | 59.67s | 0.229s | 0/90 | 3/90 | 0/90 | 0.52% |
| R1 | 1 | 0.46s | 0.07s | 0.013s | 90/90 | 90/90 | 61/90 | 1.84% |
| | 2 | 3.35s | 0.36s | 0.029s | 90/90 | 90/90 | 64/90 | 1.14% |
| | 3 | 15.87s | 2.06s | 0.094s | 76/90 | 90/90 | 62/90 | 1.13% |
| | 4 | 32.29s | 8.05s | 0.280s | 64/90 | 90/90 | 60/90 | 0.77% |
| | 5 | 0.12s | 0.03s | 0.009s | 90/90 | 90/90 | 67/90 | 1.01% |
| | 6 | 0.34s | 0.08s | 0.021s | 90/90 | 90/90 | 80/90 | 0.40% |
| | 7 | 1.95s | 0.36s | 0.052s | 90/90 | 90/90 | 75/90 | 0.79% |
| | 8 | 9.54s | 1.60s | 0.143s | 90/90 | 90/90 | 72/90 | 1.40% |
| R3 | 1 | 3.02s | 0.32s | 0.018s | 90/90 | 90/90 | 26/90 | 4.42% |
| | 2 | 31.05s | 2.98s | 0.044s | 61/90 | 90/90 | 17/90 | 3.85% |
| | 3 | 47.17s | 29.42s | 0.121s | 24/90 | 67/90 | 18/90 | 4.06% |
| | 4 | 52.96s | 44.43s | 0.377s | 19/90 | 29/90 | 10/90 | 1.71% |
| | 5 | 0.38s | 0.04s | 0.009s | 90/90 | 90/90 | 63/90 | 1.84% |
| | 6 | 3.73s | 0.37s | 0.019s | 90/90 | 90/90 | 60/90 | 1.76% |
| | 7 | 33.31s | 3.74s | 0.047s | 50/90 | 90/90 | 44/90 | 1.83% |
| | 8 | 39.93s | 25.94s | 0.140s | 34/90 | 68/90 | 21/90 | 1.85% |
| R10 | 1 | 5.65s | 1.56s | 0.025s | 90/90 | 90/90 | 20/90 | 6.34% |
| | 2 | 53.94s | 35.84s | 0.060s | 10/90 | 46/90 | 5/90 | 5.22% |
| | 3 | 59.79s | 56.02s | 0.174s | 1/90 | 12/90 | 2/90 | 2.46% |
| | 4 | 62.69s | 60.05s | 0.742s | 0/90 | 0/90 | 0/90 | 0.88% |
| | 5 | 0.33s | 0.06s | 0.011s | 90/90 | 90/90 | 60/90 | 2.01% |
| | 6 | 6.13s | 1.66s | 0.025s | 90/90 | 90/90 | 50/90 | 2.82% |
| | 7 | 55.22s | 36.33s | 0.072s | 10/90 | 46/90 | 23/90 | 2.47% |
| | 8 | 59.76s | 53.35s | 0.222s | 2/90 | 17/90 | 4/90 | 1.18% |
| TOTALE | MEDIA | 26.89s | 17.98s | 0.128s | 2720/4320 | 3255/4320 | 1744/4320 | 1.69% |

Figura 2: Risultati con Warm Start (aggregati per Dataset e Tipo)

5.2.2 Analisi per Densità dei Conflitti

Le Figure 3 e 4 evidenziano l'impatto della densità dei conflitti sulle performance. Anche in questo contesto, si osserva come l'approccio Warm Start (Fig. 4) offra una maggiore stabilità rispetto al Cold Start (Fig. 3), specialmente per le istanze più dense.

| Dataset | Density | MIP T | CP T | GRASP T | MIP Opt | CP Opt | GRASP Opt | GRASP Gap % |
|----------------|----------------|--------------|---------------|----------------|----------------|------------------|------------------|--------------------|
| C1 | 0.1 | 0.72s | 0.44s | 0.069s | 80/80 | 80/80 | 20/80 | 2.82% |
| | 0.2 | 1.93s | 0.77s | 0.079s | 80/80 | 80/80 | 34/80 | 1.68% |
| | 0.3 | 6.75s | 0.93s | 0.085s | 78/80 | 80/80 | 33/80 | 1.61% |
| | 0.4 | 11.35s | 1.29s | 0.088s | 71/80 | 80/80 | 39/80 | 1.66% |
| | 0.5 | 15.79s | 1.73s | 0.090s | 68/80 | 80/80 | 48/80 | 1.22% |
| | 0.6 | 20.48s | 2.91s | 0.092s | 63/80 | 80/80 | 60/80 | 0.96% |
| | 0.7 | 23.27s | 3.29s | 0.089s | 58/80 | 80/80 | 58/80 | 0.75% |
| | 0.8 | 26.78s | 5.72s | 0.088s | 54/80 | 80/80 | 58/80 | 0.64% |
| | 0.9 | 30.88s | 9.20s | 0.084s | 51/80 | 74/80 | 53/80 | 0.36% |
| | C3 | 4.57s | 4.49s | 0.088s | 79/80 | 78/80 | 6/80 | 3.14% |
| C3 | 0.2 | 19.00s | 9.97s | 0.101s | 62/80 | 71/80 | 3/80 | 1.87% |
| | 0.3 | 27.88s | 16.52s | 0.114s | 54/80 | 61/80 | 3/80 | 1.28% |
| | 0.4 | 41.46s | 24.57s | 0.123s | 35/80 | 57/80 | 6/80 | 0.73% |
| | 0.5 | 45.40s | 38.86s | 0.136s | 30/80 | 32/80 | 19/80 | 0.54% |
| | 0.6 | 42.60s | 38.47s | 0.150s | 30/80 | 30/80 | 23/80 | 0.10% |
| | 0.7 | 41.79s | 32.67s | 0.152s | 30/80 | 50/80 | 27/80 | -2.10% |
| | 0.8 | 44.33s | 27.67s | 0.145s | 30/80 | 50/80 | 36/80 | -4.77% |
| | 0.9 | 41.93s | 23.99s | 0.118s | 29/80 | 53/80 | 42/80 | -8.97% |
| | C10 | 42.10s | 48.37s | 0.140s | 29/80 | 21/80 | 4/80 | 1.12% |
| | 0.2 | 45.10s | 44.43s | 0.332s | 29/80 | 30/80 | 12/80 | -2.97% |
| C10 | 0.3 | 42.41s | 41.09s | 0.364s | 30/80 | 30/80 | 11/80 | -7.59% |
| | 0.4 | 41.73s | 40.05s | 0.268s | 30/80 | 30/80 | 17/80 | -9.29% |
| | 0.5 | 41.18s | 39.30s | 0.223s | 30/80 | 30/80 | 20/80 | -12.09% |
| | 0.6 | 41.66s | 38.63s | 0.190s | 30/80 | 30/80 | 26/80 | -18.60% |
| | 0.7 | 42.28s | 38.21s | 0.162s | 30/80 | 30/80 | 25/80 | -15.23% |
| | 0.8 | 44.88s | 30.04s | 0.136s | 30/80 | 50/80 | 36/80 | -6.67% |
| | 0.9 | 41.65s | 23.58s | 0.110s | 30/80 | 52/80 | 46/80 | -8.95% |
| | R1 | 0.79s | 0.43s | 0.074s | 80/80 | 80/80 | 35/80 | 2.22% |
| | 0.2 | 1.54s | 0.67s | 0.084s | 80/80 | 80/80 | 52/80 | 1.24% |
| | 0.3 | 3.43s | 0.94s | 0.094s | 80/80 | 80/80 | 63/80 | 0.90% |
| R1 | 0.4 | 4.66s | 1.10s | 0.087s | 80/80 | 80/80 | 67/80 | 0.54% |
| | 0.5 | 8.48s | 1.47s | 0.084s | 77/80 | 80/80 | 74/80 | 0.27% |
| | 0.6 | 12.09s | 1.57s | 0.083s | 70/80 | 80/80 | 68/80 | 0.43% |
| | 0.7 | 15.77s | 1.78s | 0.078s | 68/80 | 80/80 | 66/80 | 0.82% |
| | 0.8 | 18.54s | 2.12s | 0.071s | 62/80 | 80/80 | 63/80 | 1.12% |
| | 0.9 | 21.44s | 2.40s | 0.065s | 61/80 | 80/80 | 53/80 | 2.02% |
| | R3 | 2.00s | 0.34s | 0.109s | 80/80 | 80/80 | 18/80 | 1.24% |
| | 0.2 | 11.73s | 0.93s | 0.103s | 70/80 | 80/80 | 34/80 | 0.81% |
| | 0.3 | 21.49s | 6.72s | 0.103s | 61/80 | 78/80 | 37/80 | 1.34% |
| | 0.4 | 27.57s | 11.98s | 0.100s | 53/80 | 70/80 | 26/80 | 2.17% |
| R3 | 0.5 | 33.51s | 19.65s | 0.107s | 47/80 | 66/80 | 28/80 | 3.47% |
| | 0.6 | 36.00s | 26.00s | 0.105s | 41/80 | 53/80 | 27/80 | 3.31% |
| | 0.7 | 39.60s | 26.18s | 0.095s | 30/80 | 50/80 | 26/80 | 2.17% |
| | 0.8 | 40.26s | 24.51s | 0.079s | 30/80 | 51/80 | 29/80 | 0.35% |
| | 0.9 | 38.92s | 19.21s | 0.073s | 30/80 | 69/80 | 31/80 | 0.50% |
| | R10 | 24.71s | 22.67s | 0.176s | 53/80 | 60/80 | 5/80 | 2.79% |
| | 0.2 | 39.18s | 38.53s | 0.312s | 30/80 | 30/80 | 9/80 | 1.60% |
| | 0.3 | 39.50s | 38.51s | 0.236s | 30/80 | 30/80 | 12/80 | -0.72% |
| | 0.4 | 39.48s | 38.33s | 0.177s | 30/80 | 30/80 | 13/80 | -5.48% |
| | 0.5 | 39.56s | 38.14s | 0.149s | 30/80 | 30/80 | 16/80 | -7.51% |
| R10 | 0.6 | 39.77s | 37.97s | 0.135s | 30/80 | 31/80 | 19/80 | -11.18% |
| | 0.7 | 39.78s | 32.96s | 0.122s | 30/80 | 49/80 | 28/80 | -11.57% |
| | 0.8 | 40.25s | 25.61s | 0.102s | 30/80 | 50/80 | 28/80 | -12.06% |
| | 0.9 | 38.85s | 20.24s | 0.090s | 30/80 | 63/80 | 23/80 | -0.97% |
| TOTALE | | MEDIA | 27.94s | 19.04s | 0.128s | 2643/4320 | 3189/4320 | 1715/4320 |
| | | | | | | | | -1.79% |

Figura 3: Risultati con Cold Start (aggregati per Dataset e Densità)

| Dataset | Density | MIP T | CP T | GRASP T | MIP Opt | CP Opt | GRASP Opt | GRASP Gap % |
|----------------|----------------|---------------|---------------|----------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|
| C1 | 0.1 | 0.78s | 0.48s | 0.069s | 80/80 | 80/80 | 20/80 | 2.82% |
| | 0.2 | 1.69s | 0.73s | 0.079s | 80/80 | 80/80 | 34/80 | 1.68% |
| | 0.3 | 2.91s | 0.95s | 0.085s | 80/80 | 80/80 | 33/80 | 1.61% |
| | 0.4 | 5.31s | 1.23s | 0.088s | 80/80 | 80/80 | 39/80 | 1.66% |
| | 0.5 | 8.23s | 2.07s | 0.090s | 80/80 | 80/80 | 48/80 | 1.22% |
| | 0.6 | 14.95s | 3.12s | 0.092s | 69/80 | 80/80 | 60/80 | 0.96% |
| | 0.7 | 20.00s | 3.17s | 0.089s | 64/80 | 80/80 | 58/80 | 0.75% |
| | 0.8 | 25.40s | 5.33s | 0.088s | 56/80 | 80/80 | 58/80 | 0.64% |
| | 0.9 | 30.91s | 8.19s | 0.084s | 52/80 | 75/80 | 54/80 | 0.36% |
| | C3 | 0.1 | 4.67s | 4.77s | 0.088s | 80/80 | 77/80 | 6/80 |
| | 0.2 | 18.77s | 9.87s | 0.101s | 62/80 | 72/80 | 3/80 | 1.85% |
| | 0.3 | 27.79s | 16.42s | 0.114s | 54/80 | 62/80 | 3/80 | 1.28% |
| | 0.4 | 41.62s | 22.69s | 0.123s | 32/80 | 58/80 | 6/80 | 0.79% |
| | 0.5 | 44.83s | 38.96s | 0.136s | 30/80 | 32/80 | 20/80 | 0.57% |
| | 0.6 | 42.05s | 37.76s | 0.150s | 30/80 | 32/80 | 25/80 | 0.38% |
| | 0.7 | 41.82s | 28.41s | 0.152s | 30/80 | 50/80 | 27/80 | 0.78% |
| | 0.8 | 45.98s | 24.99s | 0.145s | 30/80 | 50/80 | 36/80 | 1.16% |
| | 0.9 | 41.47s | 21.62s | 0.118s | 30/80 | 61/80 | 43/80 | 1.29% |
| | C10 | 0.1 | 41.12s | 48.96s | 0.140s | 30/80 | 18/80 | 4/80 |
| | 0.2 | 44.94s | 43.38s | 0.332s | 30/80 | 30/80 | 12/80 | 0.63% |
| | 0.3 | 42.02s | 40.63s | 0.364s | 30/80 | 30/80 | 11/80 | 1.16% |
| | 0.4 | 41.58s | 38.69s | 0.268s | 30/80 | 30/80 | 17/80 | 0.84% |
| | 0.5 | 41.12s | 38.16s | 0.223s | 30/80 | 30/80 | 20/80 | 0.81% |
| | 0.6 | 41.59s | 37.41s | 0.190s | 30/80 | 32/80 | 27/80 | 0.57% |
| | 0.7 | 42.30s | 34.88s | 0.162s | 30/80 | 43/80 | 33/80 | 1.30% |
| | 0.8 | 45.59s | 26.51s | 0.136s | 30/80 | 50/80 | 36/80 | 1.09% |
| | 0.9 | 41.47s | 21.41s | 0.110s | 30/80 | 58/80 | 47/80 | 0.95% |
| | R1 | 0.1 | 0.81s | 0.49s | 0.074s | 80/80 | 80/80 | 35/80 |
| | 0.2 | 1.70s | 0.74s | 0.084s | 80/80 | 80/80 | 52/80 | 1.24% |
| | 0.3 | 2.53s | 1.08s | 0.094s | 80/80 | 80/80 | 63/80 | 0.90% |
| | 0.4 | 3.73s | 1.22s | 0.087s | 80/80 | 80/80 | 67/80 | 0.54% |
| | 0.5 | 5.14s | 1.53s | 0.084s | 80/80 | 80/80 | 74/80 | 0.27% |
| | 0.6 | 7.65s | 1.93s | 0.083s | 80/80 | 80/80 | 68/80 | 0.43% |
| | 0.7 | 12.60s | 1.96s | 0.078s | 73/80 | 80/80 | 66/80 | 0.82% |
| | 0.8 | 17.04s | 2.32s | 0.071s | 66/80 | 80/80 | 63/80 | 1.12% |
| | 0.9 | 20.70s | 2.91s | 0.065s | 61/80 | 80/80 | 53/80 | 2.02% |
| | R3 | 0.1 | 0.76s | 0.34s | 0.109s | 80/80 | 80/80 | 18/80 |
| | 0.2 | 5.26s | 0.84s | 0.103s | 79/80 | 80/80 | 34/80 | 0.81% |
| | 0.3 | 17.75s | 5.46s | 0.103s | 64/80 | 78/80 | 37/80 | 1.34% |
| | 0.4 | 26.06s | 11.18s | 0.100s | 54/80 | 70/80 | 26/80 | 2.14% |
| | 0.5 | 33.12s | 18.50s | 0.107s | 47/80 | 65/80 | 29/80 | 3.59% |
| | 0.6 | 36.11s | 23.95s | 0.105s | 42/80 | 57/80 | 27/80 | 3.62% |
| | 0.7 | 39.66s | 24.28s | 0.095s | 32/80 | 51/80 | 26/80 | 3.07% |
| | 0.8 | 40.42s | 21.97s | 0.079s | 30/80 | 63/80 | 31/80 | 3.86% |
| | 0.9 | 38.87s | 14.15s | 0.073s | 30/80 | 70/80 | 31/80 | 4.31% |
| | R10 | 0.1 | 24.93s | 22.11s | 0.176s | 53/80 | 59/80 | 5/80 |
| | 0.2 | 39.27s | 38.34s | 0.312s | 30/80 | 30/80 | 9/80 | 3.60% |
| | 0.3 | 39.51s | 38.28s | 0.236s | 30/80 | 30/80 | 12/80 | 2.83% |
| | 0.4 | 39.51s | 38.08s | 0.177s | 30/80 | 30/80 | 13/80 | 2.51% |
| | 0.5 | 39.65s | 37.65s | 0.149s | 30/80 | 32/80 | 17/80 | 3.06% |
| | 0.6 | 39.69s | 34.81s | 0.135s | 30/80 | 40/80 | 24/80 | 2.48% |
| | 0.7 | 39.88s | 27.48s | 0.122s | 30/80 | 50/80 | 29/80 | 2.26% |
| | 0.8 | 40.22s | 24.07s | 0.102s | 30/80 | 50/80 | 28/80 | 2.08% |
| | 0.9 | 38.78s | 14.63s | 0.090s | 30/80 | 70/80 | 27/80 | 4.50% |
| TOTALE | MEDIA | 26.89s | 17.98s | 0.128s | 2720/4320 | 3255/4320 | 1744/4320 | 1.69% |

Figura 4: Risultati con Warm Start (aggregati per Dataset e Densità)

5.3 Impatto della Strategia Warm Start

I grafici seguenti riassumono il miglioramento percentuale in termini di tempo (Time Impr.) e qualità della soluzione (Obj Impr.). La Figura 5 mostra l'impatto medio del Warm Start raggruppato per tipo di istanza, mentre la Figura 6 illustra l'andamento in relazione alla densità globale dei conflitti.

5.3.1 Miglioramento Medio Globale

| Type | MIP Time % | CP Time % | MIP Obj % | CP Obj % |
|---------------|-------------|-------------|--------------|--------------|
| 1 | 9.9% | 21.7% | 0.0% | 0.0% |
| 2 | 9.9% | 18.0% | 36.1% | 20.2% |
| 3 | 10.8% | 7.0% | 57.6% | 41.1% |
| 4 | 7.3% | -1.9% | 81.9% | 47.4% |
| 5 | 2.5% | 16.3% | 0.0% | 0.0% |
| 6 | 4.4% | 18.5% | 0.4% | 0.2% |
| 7 | -3.1% | 6.8% | 39.4% | 20.6% |
| 8 | -2.6% | -8.8% | 51.9% | 36.9% |
| TOTALE | 4.9% | 9.7% | 33.4% | 20.8% |

Figura 5: Impatto medio del Warm Start per Tipo di Istanza (Globale).

| Density | MIP Time % | CP Time % | MIP Obj % | CP Obj % |
|---------------|-------------|-------------|--------------|--------------|
| 0.1 | 8.3% | -4.6% | 10.0% | 5.2% |
| 0.2 | 9.8% | 1.5% | 24.2% | 17.9% |
| 0.3 | 16.9% | 0.6% | 24.2% | 20.6% |
| 0.4 | 13.1% | 1.9% | 31.7% | 22.1% |
| 0.5 | 14.9% | -2.3% | 35.4% | 25.8% |
| 0.6 | 10.8% | -1.4% | 40.0% | 28.3% |
| 0.7 | 5.6% | 6.5% | 41.9% | 25.8% |
| 0.8 | 1.3% | 5.9% | 45.8% | 24.4% |
| 0.9 | 0.9% | 10.5% | 47.5% | 16.9% |
| TOTALE | 9.1% | 2.1% | 33.4% | 20.8% |

Figura 6: Impatto medio del Warm Start per Densità (Globale).

5.3.2 Dettaglio per Dataset

Per comprendere meglio il comportamento dei risolutori, è utile scendere nel dettaglio dei singoli gruppi di test.

La Figura 7 evidenzia i tempi e gli ottimi trovati da ogni solver, aggregati per dataset e tipo di istanza. Questo permette di isolare i casi in cui la correlazione tra pesi e profitti (tipica dei dataset C) influisce maggiormente sull'efficacia del Warm Start.

| Dataset | Type | MIP Time % | CP Time % | MIP Obj % | CP Obj % |
|----------------|---------------|-------------------|------------------|------------------|-----------------|
| C1 | 1 | 32.8% | 20.9% | 0.0% | 0.0% |
| | 2 | 19.8% | 18.6% | 0.0% | 0.0% |
| | 3 | 32.4% | 17.3% | 25.6% | 0.0% |
| | 4 | 17.5% | 0.1% | 67.8% | 0.0% |
| | 5 | 36.8% | 43.6% | 0.0% | 0.0% |
| | 6 | 30.6% | 43.1% | 0.0% | 0.0% |
| | 7 | 17.9% | 5.2% | 0.0% | 0.0% |
| | 8 | 7.1% | -10.5% | 12.2% | 0.0% |
| C3 | 1 | -4.9% | 20.2% | 0.0% | 0.0% |
| | 2 | -0.8% | 11.5% | 38.9% | 7.8% |
| | 3 | -0.6% | 1.7% | 68.9% | 53.3% |
| | 4 | 0.3% | 0.4% | 90.0% | 44.4% |
| | 5 | 11.2% | 32.5% | 0.0% | 0.0% |
| | 6 | 8.0% | 29.6% | 1.1% | 0.0% |
| | 7 | -2.8% | 20.1% | 41.1% | 10.0% |
| | 8 | 1.7% | 1.6% | 60.0% | 40.0% |
| C10 | 1 | 1.2% | 26.7% | 0.0% | 0.0% |
| | 2 | 0.0% | 7.7% | 87.8% | 68.9% |
| | 3 | -0.1% | 1.5% | 96.7% | 90.0% |
| | 4 | -0.1% | 0.0% | 98.9% | 93.3% |
| | 5 | -4.3% | 38.0% | 0.0% | 0.0% |
| | 6 | 5.4% | 10.3% | 1.1% | 1.1% |
| | 7 | 0.1% | 6.0% | 91.1% | 67.8% |
| | 8 | -0.2% | 0.2% | 92.2% | 88.9% |
| R1 | 1 | 49.4% | 29.7% | 0.0% | 0.0% |
| | 2 | 37.6% | 20.0% | 0.0% | 0.0% |
| | 3 | 28.9% | 5.2% | 8.9% | 0.0% |
| | 4 | 18.2% | -14.2% | 47.8% | 0.0% |
| | 5 | -39.7% | -68.8% | 0.0% | 0.0% |
| | 6 | -14.6% | -41.0% | 0.0% | 0.0% |
| | 7 | -36.3% | -45.8% | 0.0% | 0.0% |
| | 8 | -32.6% | -58.3% | 0.0% | 0.0% |
| R3 | 1 | -14.3% | 13.1% | 0.0% | 0.0% |
| | 2 | 2.3% | 38.8% | 22.2% | 0.0% |
| | 3 | 3.4% | 13.1% | 54.4% | 21.1% |
| | 4 | 8.0% | 2.3% | 88.9% | 48.9% |
| | 5 | -0.3% | 29.6% | 0.0% | 0.0% |
| | 6 | -3.5% | 34.1% | 0.0% | 0.0% |
| | 7 | 3.3% | 42.4% | 26.7% | 0.0% |
| | 8 | 9.0% | 9.9% | 56.7% | 12.2% |
| R10 | 1 | -4.6% | 19.7% | 0.0% | 0.0% |
| | 2 | 0.5% | 11.3% | 67.8% | 44.4% |
| | 3 | 0.7% | 3.5% | 91.1% | 82.2% |
| | 4 | -0.1% | -0.0% | 97.8% | 97.8% |
| | 5 | 11.0% | 23.2% | 0.0% | 0.0% |
| | 6 | 0.7% | 34.9% | 0.0% | 0.0% |
| | 7 | -0.5% | 12.9% | 77.8% | 45.6% |
| | 8 | -0.9% | 4.1% | 90.0% | 80.0% |
| MEDIA | TOTALE | 4.9% | 9.7% | 33.4% | 20.8% |

Figura 7: Dettaglio dell'impatto del Warm Start (aggregati per Dataset e Tipo).

Analogamente, la Figura 8 riporta i dati aggregati per dataset e densità. Qui emerge chiaramente come la struttura del grafo dei conflitti influenzi le prestazioni: nei dataset random (R), l'aumento della densità tende a favorire il CP, mentre il Warm Start si dimostra utile per ridurre i tempi globali e decisivo per rendere il MIP competitivo.

| Dataset | Density | MIP Time % | CP Time % | MIP Obj % | CP Obj % |
|----------------|----------------|-------------------|------------------|------------------|-----------------|
| C1 | 0.1 | -8.5% | -7.8% | 0.0% | 0.0% |
| | 0.2 | 12.5% | 5.0% | 0.0% | 0.0% |
| | 0.3 | 56.9% | -3.1% | 2.5% | 0.0% |
| | 0.4 | 53.2% | 4.3% | 11.2% | 0.0% |
| | 0.5 | 47.9% | -19.6% | 12.5% | 0.0% |
| | 0.6 | 27.0% | -7.2% | 16.2% | 0.0% |
| | 0.7 | 14.1% | 3.5% | 16.2% | 0.0% |
| | 0.8 | 5.2% | 6.8% | 27.5% | 0.0% |
| | 0.9 | -0.1% | 10.9% | 32.5% | 0.0% |
| | | | | | |
| C3 | 0.1 | -2.1% | -6.2% | 1.2% | 0.0% |
| | 0.2 | 1.2% | 1.0% | 15.0% | 0.0% |
| | 0.3 | 0.3% | 0.6% | 16.2% | 3.8% |
| | 0.4 | -0.4% | 7.6% | 38.8% | 5.0% |
| | 0.5 | 1.3% | -0.3% | 47.5% | 22.5% |
| | 0.6 | 1.3% | 1.8% | 55.0% | 37.5% |
| | 0.7 | -0.1% | 13.1% | 52.5% | 36.2% |
| | 0.8 | -3.7% | 9.7% | 53.8% | 37.5% |
| | 0.9 | 1.1% | 9.9% | 57.5% | 32.5% |
| | | | | | |
| C10 | 0.1 | 2.3% | -1.2% | 38.8% | 17.5% |
| | 0.2 | 0.3% | 2.4% | 61.3% | 61.3% |
| | 0.3 | 0.9% | 1.1% | 58.8% | 62.5% |
| | 0.4 | 0.4% | 3.4% | 58.8% | 62.5% |
| | 0.5 | 0.1% | 2.9% | 62.5% | 62.5% |
| | 0.6 | 0.2% | 3.2% | 62.5% | 62.5% |
| | 0.7 | -0.1% | 8.7% | 62.5% | 60.0% |
| | 0.8 | -1.6% | 11.7% | 61.3% | 37.5% |
| | 0.9 | 0.4% | 9.2% | 60.0% | 35.0% |
| | | | | | |
| R1 | 0.1 | -3.3% | -15.0% | 0.0% | 0.0% |
| | 0.2 | -10.4% | -9.6% | 0.0% | 0.0% |
| | 0.3 | 26.0% | -14.1% | 0.0% | 0.0% |
| | 0.4 | 19.9% | -11.1% | 0.0% | 0.0% |
| | 0.5 | 39.4% | -4.1% | 3.8% | 0.0% |
| | 0.6 | 36.7% | -22.7% | 12.5% | 0.0% |
| | 0.7 | 20.1% | -10.4% | 13.8% | 0.0% |
| | 0.8 | 8.1% | -9.3% | 15.0% | 0.0% |
| | 0.9 | 3.4% | -21.2% | 18.8% | 0.0% |
| | | | | | |
| R3 | 0.1 | 62.2% | 0.4% | 0.0% | 0.0% |
| | 0.2 | 55.2% | 9.7% | 12.5% | 0.0% |
| | 0.3 | 17.4% | 18.7% | 17.5% | 0.0% |
| | 0.4 | 5.5% | 6.7% | 26.2% | 3.8% |
| | 0.5 | 1.2% | 5.8% | 27.5% | 7.5% |
| | 0.6 | -0.3% | 7.9% | 33.8% | 15.0% |
| | 0.7 | -0.1% | 7.3% | 45.0% | 20.0% |
| | 0.8 | -0.4% | 10.4% | 57.5% | 33.8% |
| | 0.9 | 0.1% | 26.3% | 60.0% | 12.5% |
| | | | | | |
| R10 | 0.1 | -0.9% | 2.4% | 20.0% | 13.8% |
| | 0.2 | -0.2% | 0.5% | 56.2% | 46.2% |
| | 0.3 | -0.0% | 0.6% | 50.0% | 57.5% |
| | 0.4 | -0.1% | 0.7% | 55.0% | 61.3% |
| | 0.5 | -0.2% | 1.3% | 58.8% | 62.5% |
| | 0.6 | 0.2% | 8.3% | 60.0% | 55.0% |
| | 0.7 | -0.3% | 16.6% | 61.3% | 38.8% |
| | 0.8 | 0.1% | 6.0% | 60.0% | 37.5% |
| | 0.9 | 0.2% | 27.7% | 56.2% | 21.2% |
| | | | | | |
| MEDIA | TOTALE | 9.1% | 2.1% | 33.4% | 20.8% |

Figura 8: Dettaglio dell'impatto del Warm Start (aggregati per Dataset e Densità).

6 Conclusioni

In conclusione, i test effettuati confermano che:

- **CP-SAT** rappresenta lo stato dell'arte per le istanze dense e per quelle fortemente correlate.
- **MIP** da solo risulta spesso inefficiente sulle istanze più difficili (come *C10*), dove fatica a trovare soluzioni valide in tempi ragionevoli.
- **GRASP** è estremamente veloce: pur non garantendo l'ottimo matematico, restituisce quasi instantaneamente delle soluzioni sub-ottime molto valide, spesso migliori di quelle dei solver esatti eseguiti in Cold Start e troncati al **time limit**.

L'idea di unire l'approccio metaeuristico a quello esatto tramite il **Warm Start** ha permesso di ottenere il meglio da entrambi, con risultati diversi a seconda del problema:

- **GAP**: Viene eliminato il Gap Negativo, garantendo che le soluzioni dei solver esatti siano sempre superiori o uguali a quella di GRASP.
- **MIP**: In particolare nelle istanze "hard" (**Type 2,3,4,7,8**) dei dataset con un'elevata capacità dello zaino, dove il solver standard fallirebbe, inizializzare il MIP con una buona soluzione di partenza permette di tagliare i rami inutili della ricerca e trovare risultati che altrimenti non verrebbero raggiunti entro il time limit. Inoltre, si nota una consistente riduzione del tempo di esecuzione sulle istanze dei dataset C1 e R1, quest'ultimo solo nel primo gruppo (**Type 1-4**), mentre per le altre l'impatto è trascurabile o lievemente peggiorativo a causa dell'overhead di inizializzazione.
- **CP-SAT**: Anche se il CP-SAT si conferma da solo il miglior risolutore esatto per le istanze dense, il Warm Start lo aiuta molto:
 - Nelle istanze "hard" (**Type 2,3,4,7,8**), guidandolo verso soluzioni di qualità migliore.
 - Nelle istanze "easy" (**Type 1,5,6**), riducendo drasticamente il tempo di esecuzione (tranne dove l'overhead predomina, come succede in R1).

Riferimenti bibliografici

- [1] R. Montemanni, D. H. Smith, *On Solving the Knapsack Problem with Conflicts*, arXiv preprint, 2025.
- [2] H. Kellerer, U. Pferschy, D. Pisinger, *Knapsack Problems*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [3] U. Pferschy, J. Schauer, *The Knapsack Problem with Conflict Graphs*, Journal of Graph Algorithms and Applications, 13(2), 233-249, 2009.
- [4] O. Ohrimenko, P. J. Stuckey, M. Codish, *Propagation via Lazy Clause Generation*, Constraints, 14(3), 357-391, 2009.
- [5] T. A. Feo, M. G. C. Resende, *Greedy Randomized Adaptive Search Procedures*, Journal of Global Optimization, 6, 109-133, 1995.
- [6] M. Hifi, M. Michrafy, *Reduction strategies and exact algorithms for the disjunctively constrained knapsack problem*, Computers & Operations Research, 33(9), 2352-2368, 2006.