Structuri de date și algoritmi
Grafuri - Drumuri Minime

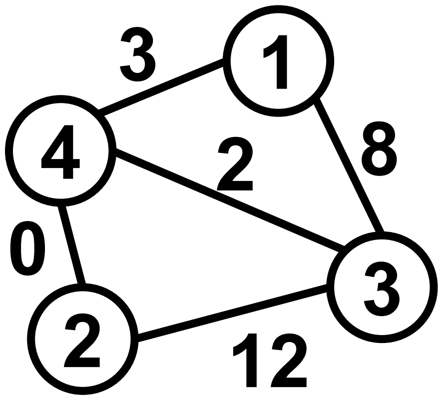
Ș.L. Dr. Ing. Cristian Chilipirea
cristian.chilipirea@mta.ro

PER ASPERA AD ASTRA

Grafuri ponderate – Weighted Graphs - Reminder

Pentru un graf $G = (V, E)$ se adaugă funcția W ce asociază un cost fiecărei muchii.

$$w(1,4) = 3$$
$$w(2,3) = 12$$
$$w(2,4) = 0$$

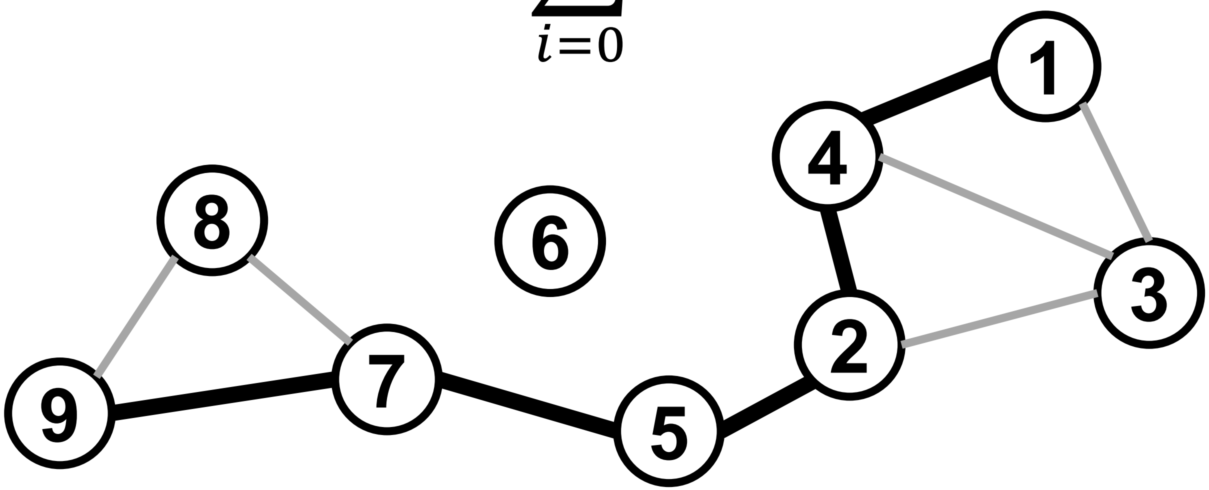


Drumuri – Paths - Reminder

Pentru un graf $G = (V, E)$ un drum este un set de noduri $P = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_N)$ cu $(v_i, v_{i+1}) \in E, \forall i$

Lungimea unui drum este:

$$w(P) = \sum_{i=0}^{N-1} w(v_i, v_{i+1})$$



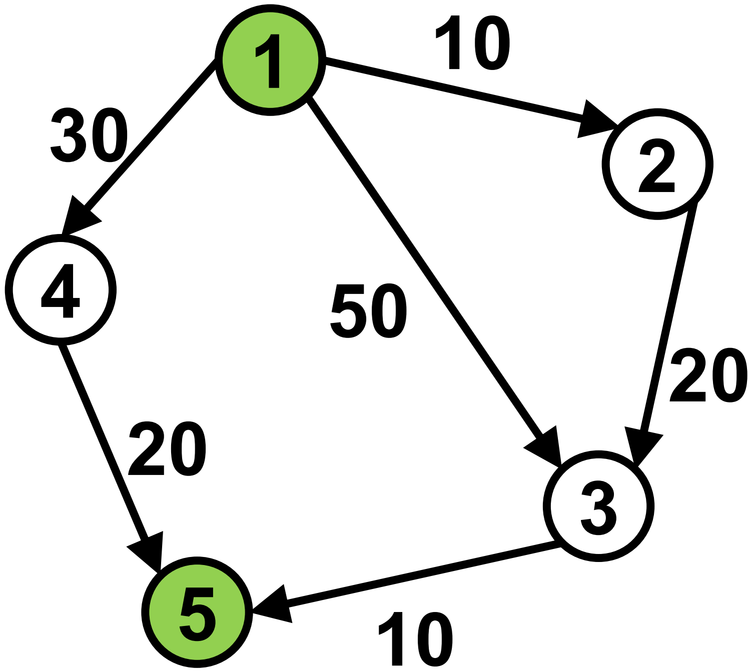
Aplicații

- Trafic rutier, hărți GPS, hărți în jocuri.
- Drum minim în rețea în funcție nu de lungimea fizică dar în funcție de latență sau număr de hop-uri.
- Proiectare hardware, căi circuite electrice; VLSI.

Drumuri Cost Minim - Exemplu

Obiectiv: Fie v și v' se caută $P = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_N)$ cu $v = v_1$ și $v' = v_N$ cu $w(P)$ minim.

$P = (1, \dots, 5)$?

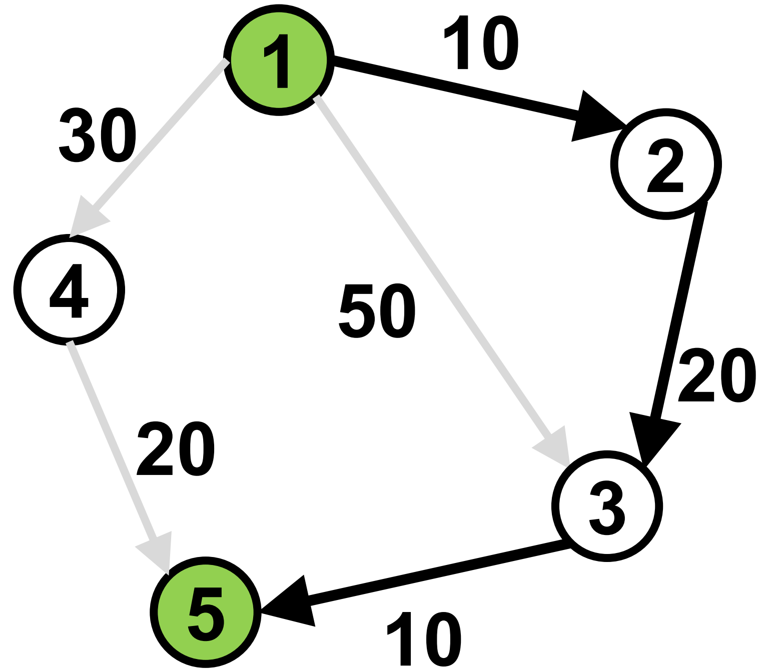


Drumuri Cost Minim - Exemplu

Obiectiv: Fie v și v' se caută $P = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_N)$ cu $v = v_1$ și $v' = v_N$ cu $w(P)$ minim.

$P = (1, \ldots, 5)$?

$w(1,2,3,5) = 10 + 20 + 10 = 40$

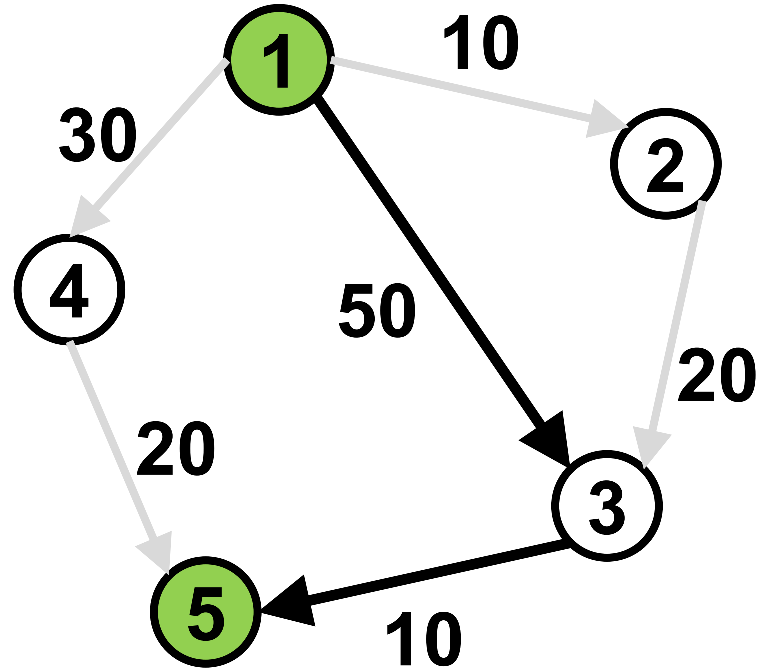


Drumuri Cost Minim - Exemplu

Obiectiv: Fie v și v' se caută $P = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_N)$ cu $v = v_1$ și $v' = v_N$ cu $w(P)$ minim.

$P = (1, \ldots, 5)$?

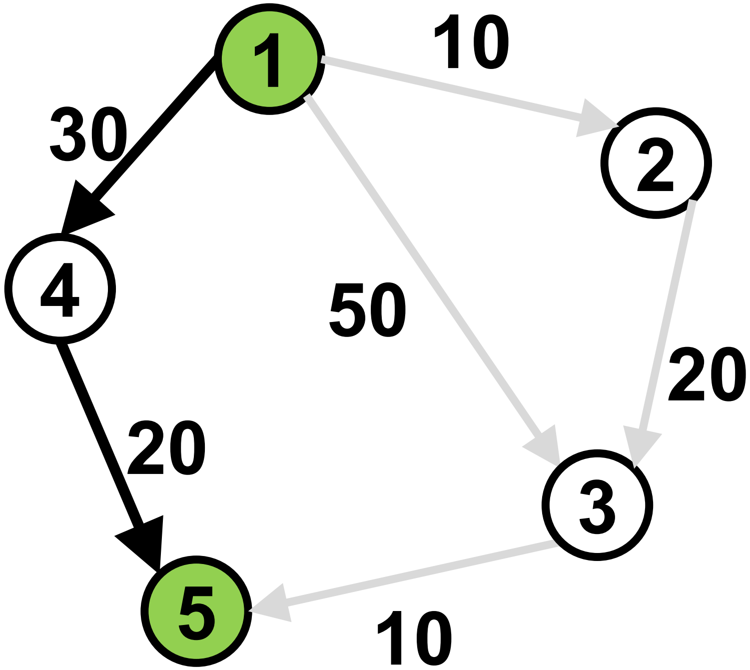
$w(1,3,5) = 50 + 10 = 60$



Drumuri Cost Minim - Exemplu

Obiectiv: Fie v și v' se caută $P = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_N)$ cu $v = v_1$ și $v' = v_N$ cu $w(P)$ minim.

$P = (1, \ldots, 5)\,?$

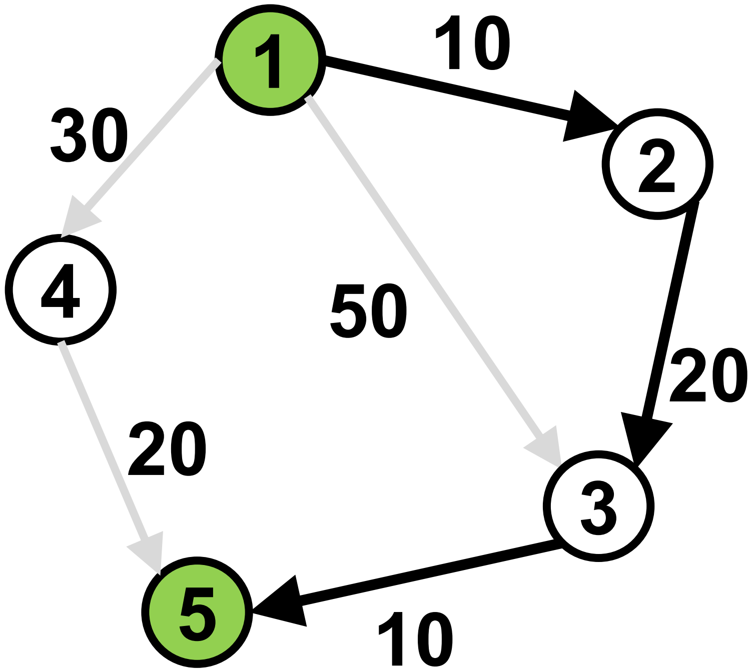


$w(1,4,5) = 30 + 20 = 50$

Drumuri Cost Minim - Exemplu

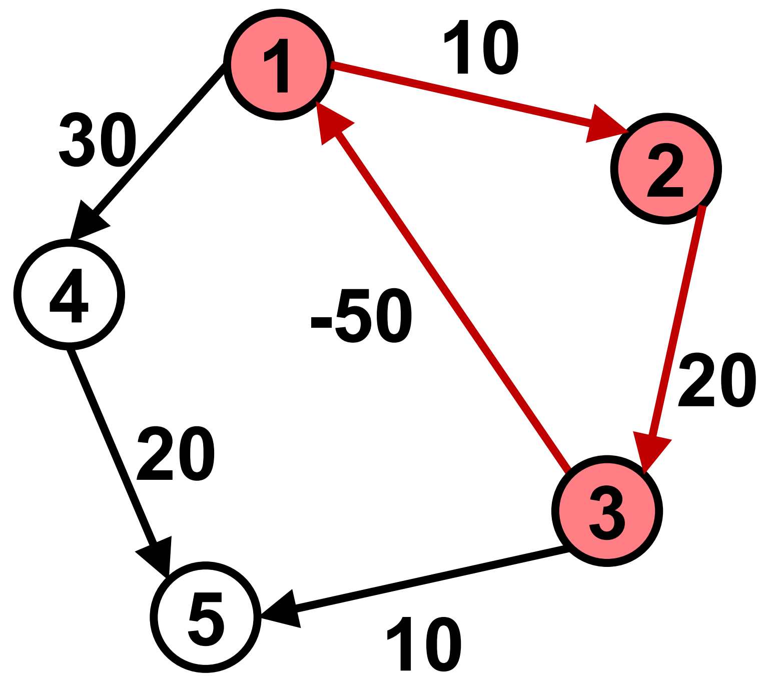
Obiectiv: Fie v și v' se caută $P = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_N)$ cu $v = v_1$ și $v' = v_N$ cu $w(P)$ minim.

$$\min($$
$$w(1,4,5) = 30 + 20 = 50$$
$$w(1,3,5) = 50 + 10 = 60$$
$$w(1,2,3,5) = 10 + 20 + 10 = 40$$
$$) = w(1,2,3,5)$$



Cicluri negative

Dacă avem un ciclu cu cost negativ $(10 + 20 - 50 = -20)$ am putea merge pe ciclu până ajungem la $-\infty$.



Notații

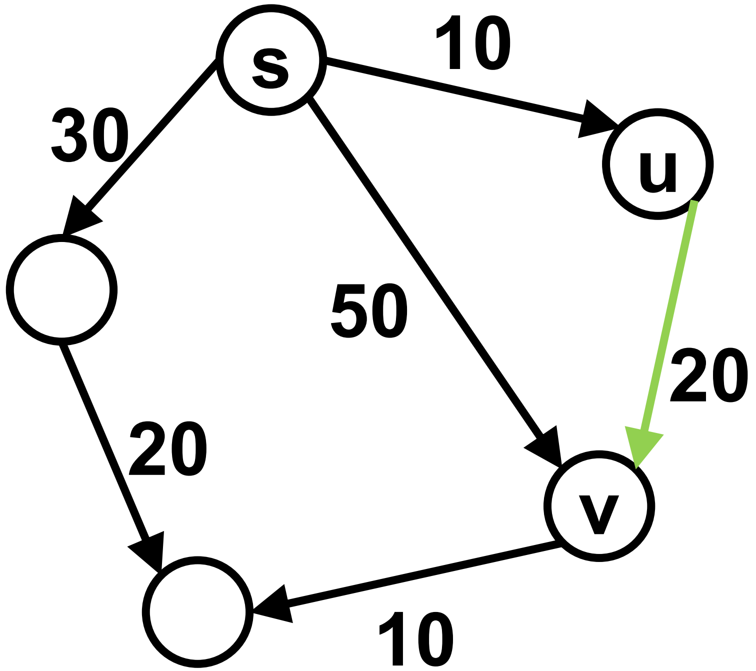
- Fie $\delta(u, v)$ distanța minimă dintre nodurile u și v.
- Fie $v.d$ este distanța minimă **estimată** de la un nod sursă (s) la v.
  - Toate estimările la început sunt de distanță ∞.
  - Estimarea $s.d$ este 0.
- Fie $v.\pi$ predecesorul lui v către nodul sursă (s).

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for each vertex v ∈ G.V
    v.d = ∞
    v.π = NIL
s.d = 0
```

Relaxarea unei muchii

$\text{RELAX}(u, v, w)$

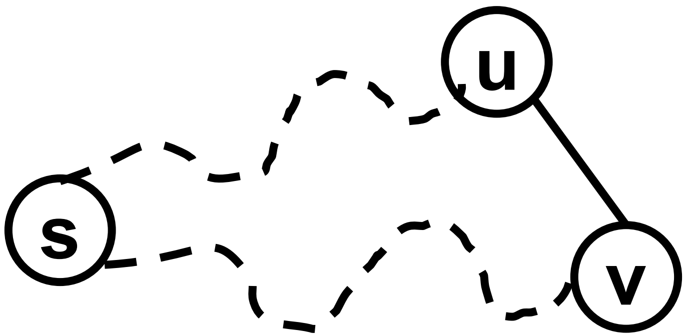
1 **if** $v.d > u.d + w(u, v)$
2 $\quad v.d = u.d + w(u, v)$
3 $\quad v.\pi = u$



Proprietăți drumuri optime și relaxare

- **Inegalitatea triunghiurilor**

$$\forall (u, v) \in E;\ \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$$



- **Limita superioară**

$$v.d \geq \delta(s, v);\ \forall v \in V;$$

  – **Când** $v.d = \delta(s, v)$ **nu se mai schimbă**

Proprietăți drumuri optime și relaxare

- **Nu este cale**

$$v.d = \delta(s, v) = \infty$$

- **Convergență**

  Dacă muchia (u, v) face parte din calea minimă spre v și $u.d = \delta(s, u)$ atunci după relaxare $v.d = \delta(s, v)$

- **Proprietatea relaxării unei căi**

  Dacă $P = (s, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k)$ este o cale minimă de la s la v_k și relaxăm muchiile în ordine $(s, v_1), (v_1, v_2) \dots (v_{k-1}, v_k)$, atunci $v_k.d = \delta(s, v_k)$

Proprietăți drumuri optime și relaxare

- Dacă $P = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_N)$ este optim atunci $\forall P' = (v_i, \dots, v_j)$ este optim.

Demonstrație: dacă $\exists P'' = \left(v_i, \dots, v_j\right)$ $a\hat{\imath}$ $\delta(P'') < \delta(P')$ atunci calea P'' ar putea fi folosită pentru a scurta P.

- Un drum optim nu poate avea cicluri pozitive sau negative!
- Un drum optim poate conține maxim $|V|$ noduri.

Algoritmul Bellman Ford

Bellman & Ford

ON A ROUTING PROBLEM

By

Richard Bellman

§1. Introduction.

The problem we wish t lvin
the determination of an op er.
These problems are usually m,
and when we admit only a d o
below, they are notoriousl
The purpose of this p
equation technique of dyna
with the concept of approx etho
of successive approximatio ithe
hand or machine computatio de.
The method is distinguishe f
exhaustion, i.e. it conver ions
bounded in advance.

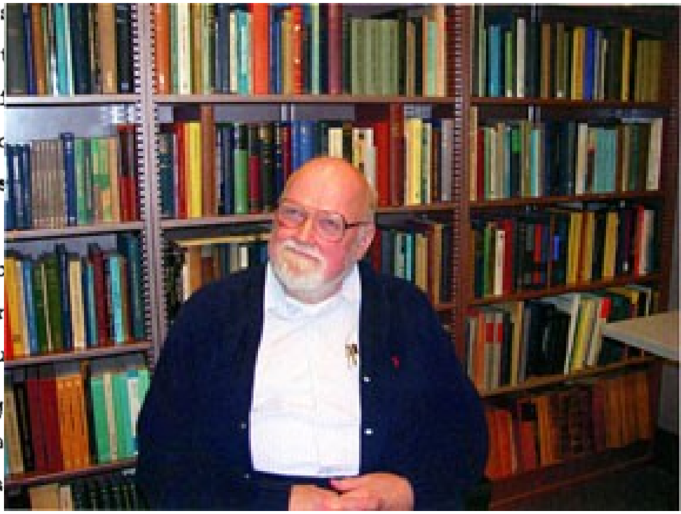
P-923
8-14-56
-1-

NETWORK FLOW THEORY

L. R. Ford, Jr.

1. INTRODUCTION

A network (or linear graph) is a collection of points or nodes, some of which may be joined together by arcs. We shall denote the points by P_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, and denote the arc joining P_i to P_j in that order by A_{ij}. (Note that there may also be an arc A_{ji} joining P_j to P_i.) We may also have associated with the arc A_{ij} a capacity c_{ij} and a length (or cost) ℓ_{ij}. We shall assume these to be positive integers.
We shall also di
origin, and P_N,
a rail network,
warehouse at whic
represents a cons
the system. The
ping capacity fro
the distance from
P_i to P_j or the u
agree that if c_{ij}
Evidently man
framework. We sh



Algoritmul Bellman Ford

- Se poate aplica și pe grafuri ce au muchii cu valori negative.
- Poate fi folosit pentru detecția ciclurilor negative

- Un drum minim poate conține maxim $|V|$ noduri =>

=> orice cale poate fi relaxată de maxm $|V| - 1$ ori

```
bellmanFordAlgorithm(G, source) {
    int d[|G.V|] = { INFINITY };
    int prev[|G.V|] = { UNDEFINED };
    dist[source] = 0;
    for (i = 0; i < |G.V| - 1; i++)
        for each (edge(u,v) in G.E)
            if (d[u] + w(u, v) < d[v]) {
                d[v] = d[u] + w(u, v);
                prev[v] = u;
            }

    for each (edge(u, v) in G.E)
        if (d[u] + w(u, v) < d[v])
            print “Negative-weight cycle"
    return dist, prev;
}
```

Complexitate?

```
bellmanFordAlgorithm(G, source) {
    int d[|G.V|] = { INFINITY };
    int prev[|G.V|] = { UNDEFINED };
    dist[source] = 0;
    for (i = 0; i < |G.V| - 1; i++)
        for each (edge(u,v) in G.E)
            if (d[u] + w(u, v) < d[v]) {
                d[v] = d[u] + w(u, v);
                prev[v] = u;
            }
}
```

Complexitate?

$$O(|V| * |E|)$$

Bellman-Ford Demonstrație corectitudine

- Lemma: După $|V| - 1$ iterații avem $v.d = \delta(s, v)\ \forall v \in V$

- Demonstrație:
  - Dacă $P = (v_o, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k); s = v_o; v = v_k$ și P cale minimă
  - P are maxim $|V| - 1$ muchii și $k \leq |V| - 1$.
  - La iterația i este relaxată și muchia (v_{i-1}, v_i)
  - Din proprietatea relaxării unei căi rezultă

$$v.d = \delta(s, v)\ \forall v \in V$$

Algoritmul Bellman Ford – caz particular DAG

- Inițializare. $O(|V|)$
- Sortăm topologic graful. $O(|V| + |E|)$
- Aplicăm relaxarea muchiilor o singură dată. $O(|E|)$

- Nodurile din stânga source rămân cu distanță infinită.

- Complexitate totală $O(|V| + |E|)$

Algoritmul lui Dijsktra

Algoritmul lui Dijsktra

Numerische Mathematik 1, 269—271 (1959)

A Note on Two Problems in Connexion with Graphs

By

E. W. Dijkstra

We consider n points (nodes), some or all pairs of which are connected by a branch; the length of each branch is given. We restrict ourselves to the case where at least one path exists between any two nodes. We now consider two problems.

Problem 1. Construct the tree of minimum total length between the n nodes. (A tree is a graph with one and only one path between every two nodes.)

In the course of the construction that we present here, the branches are subdivided into three sets:

I. the branches definitely assigned to the tree under construction (they will form a subtree);

II. the branches from which the next branch to be added to set I, will be selected;

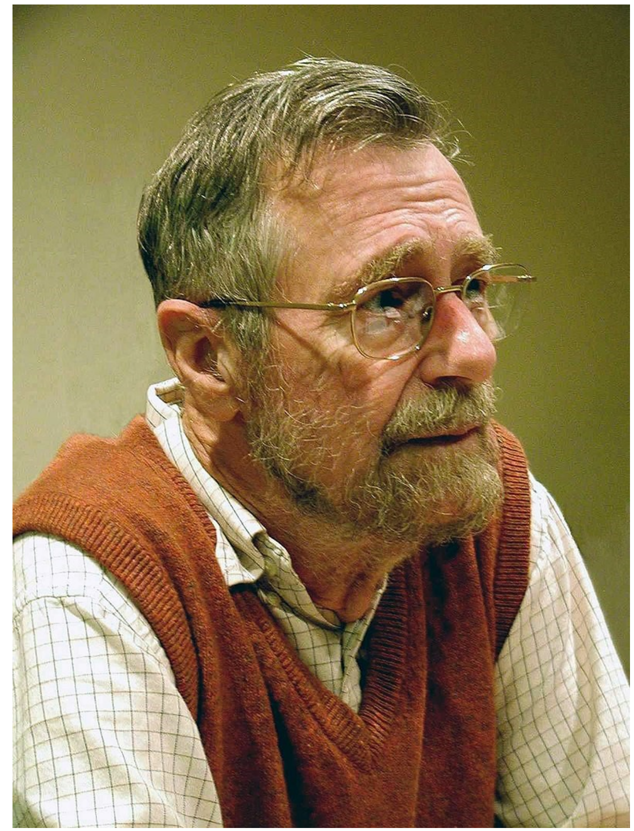
III. the remaining branches (rejected or not yet considered).

The nodes are subdivided into two sets:

A. the nodes connected by the branches of set I,

B. the remaining nodes (one and only one branch of set II will lead to each of these nodes).

We start the construction by choosing an arbitrary node as the only member of set A, and by placing all branches that end in this node in set II. To start with, set I is empty. From then onwards we perform the following two steps repeatedly.



Algoritmul lui Dijsktra

- Funcționează doar pentru muchii de cost pozitiv

Considerăm un drum minim : $s,\ v_1,\ v_2 \dots\ v_k$

Atunci toate subdrumurile $s, \dots\ v_i, i < k$ vor fi de asemenea drumuri minime: $\delta(s,s) \leq \delta(s,v_1) \leq \cdots \leq \delta(s,v_k)$

Idee: Ordonarea nodurilor din graf în funcţie de distanţa lor optimală $\delta(u)$ faţă de nodul sursă s.

Algoritmul lui Dijsktra

```
dijsktrasAlgorithm(G, source) {
    int d[|G.V|] = { INFINITY };
    d[source] = 0;
    for each(node in G.V)
        push(LIST, node);

    while (!isEmpty(LIST)) {
        node = pop_MIN(LIST, d);
        for each (neighbor of node) {
            if (d[node] + w(node, neighbor) < d[neighbor]) {
                d[neighbor] = d[node] + w(node, neighbor);
                prev[neighbor] = node;
                update(LIST, d);
            }
        }
    }
    return dist, prev;
}
```

Intuiţia Algoritmului Dijkstra

Care este cel mai apropiat nod de sursa s ?

Intuiţia Algoritmului Dijkstra

Care este cel mai apropiat nod de sursa s ? Chiar s.

La prima relaxare (muchii care provin din sursa s):

$$d(u) = \infty < d(s) + w(s, u); \boldsymbol{d(u) = w(s, u)}$$

Care este cel mai apropiat nod de sursă, diferit de s ?

Intuiţia Algoritmului Dijkstra

Care este cel mai apropiat nod de sursa s ? Chiar s.

La prima relaxare (muchii care provin din sursa s):

$$d(u) = \infty < d(s) + w(s,u); \boldsymbol{d(u) = w(s,u)}$$

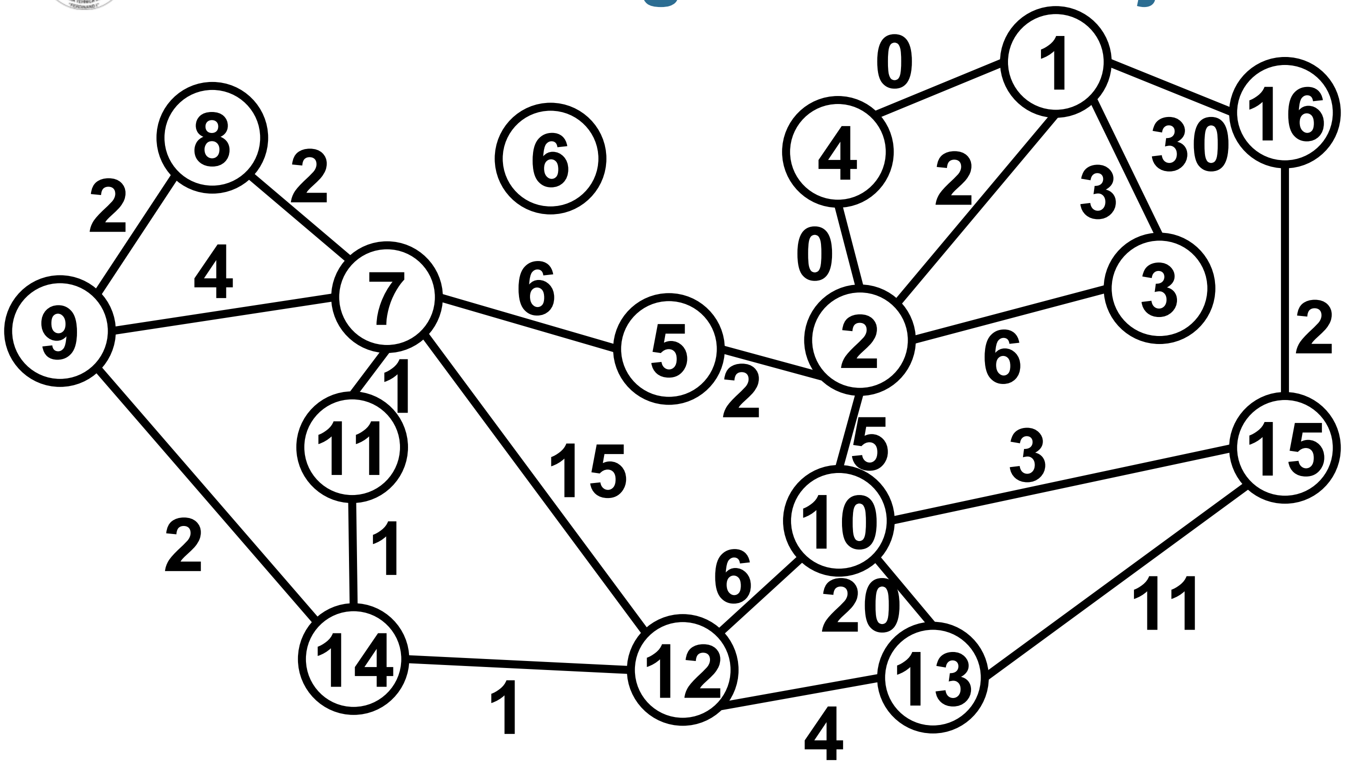
Care este cel mai apropiat nod de sursă, diferit de s ?

- Nodul care este legat de sursă prin muchia minimă.

Deci nodul extras u din mulţimea Q în următoarea

iteraţie este chiar nodul corect : $\boldsymbol{d(u) = w(s,u) = \delta(u)}$

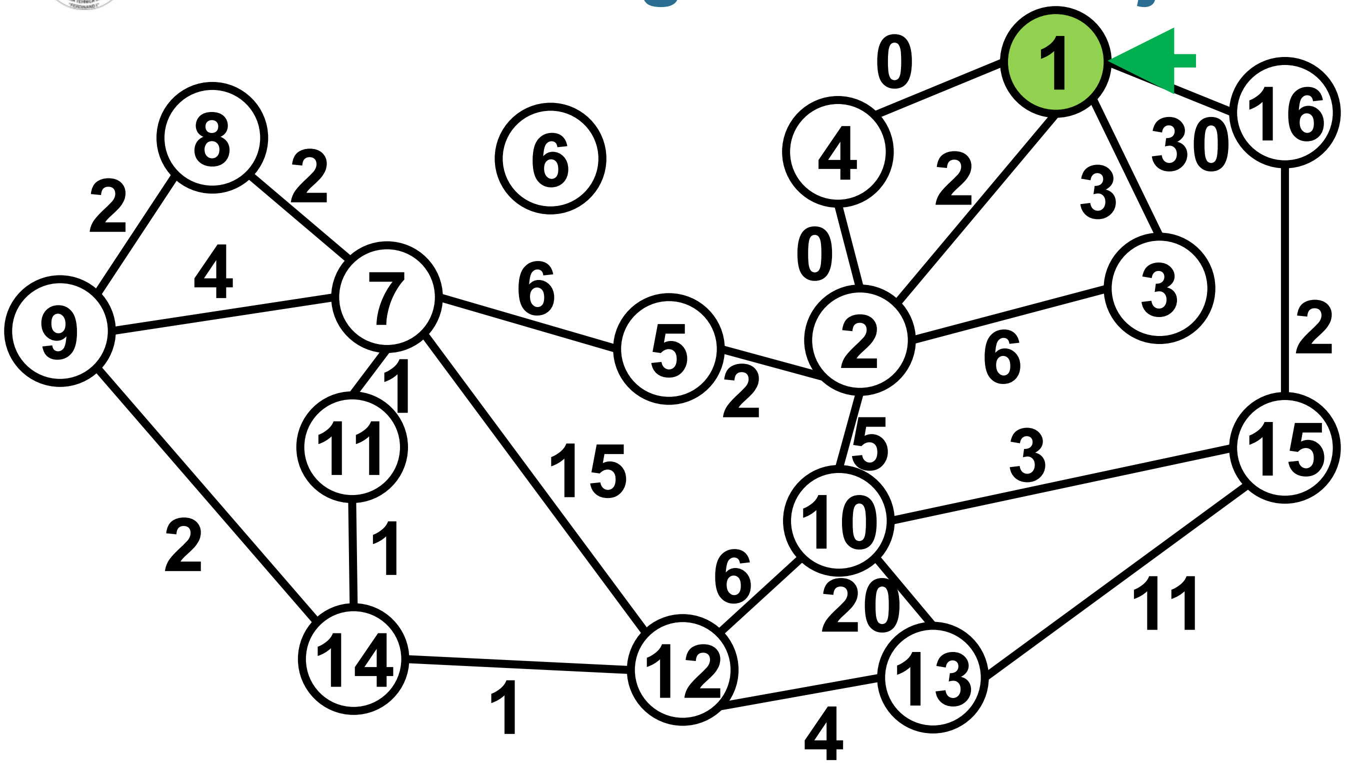
Algoritmul lui Dijsktra



#	D	π
1	0	-
2	∞	-
3	∞	-
4	∞	-
5	∞	-
6	∞	-
7	∞	-
8	∞	-
9	∞	-
10	∞	-
11	∞	-
12	∞	-
13	∞	-
14	∞	-
15	∞	-
16	∞	-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

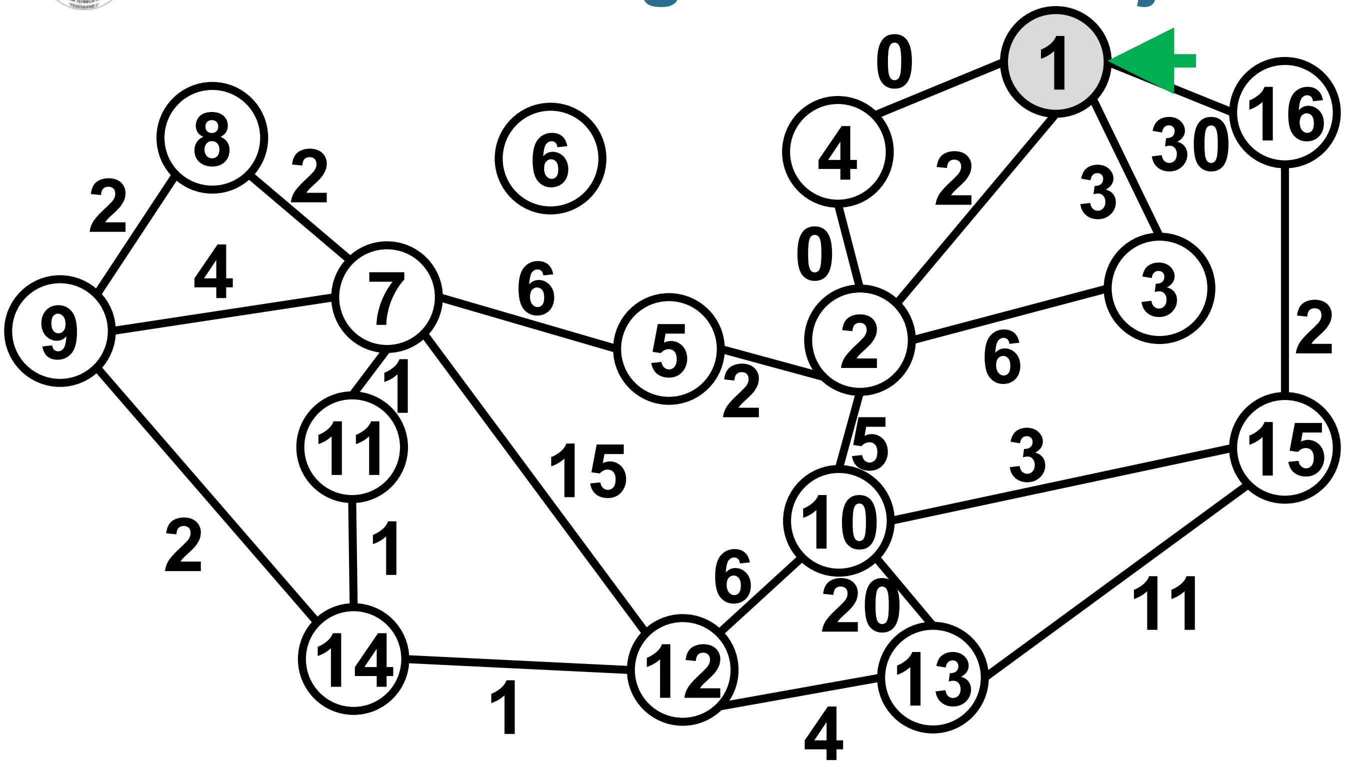
Algoritmul lui Dijsktra



2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	3	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	30

#	D	π
1	0	-
2	2	1
3	3	1
4	0	1
5	∞	-
6	∞	-
7	∞	-
8	∞	-
9	∞	-
10	∞	-
11	∞	-
12	∞	-
13	∞	-
14	∞	-
15	∞	-
16	30	1

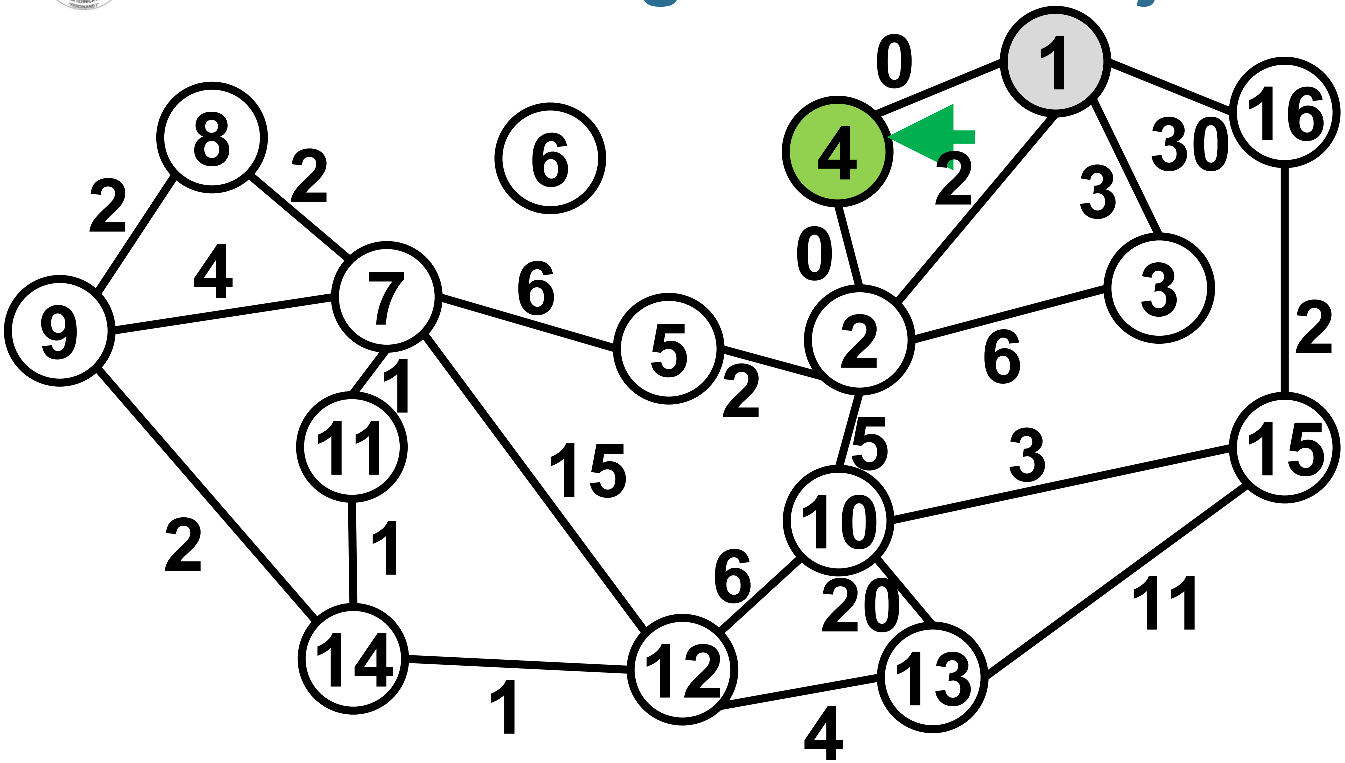
Algoritmul lui Dijsktra



4	2	3	16	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2	3	30	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

#	D	π
1	0	-
2	2	1
3	3	1
4	0	1
5	∞	-
6	∞	-
7	∞	-
8	∞	-
9	∞	-
10	∞	-
11	∞	-
12	∞	-
13	∞	-
14	∞	-
15	∞	-
16	30	1

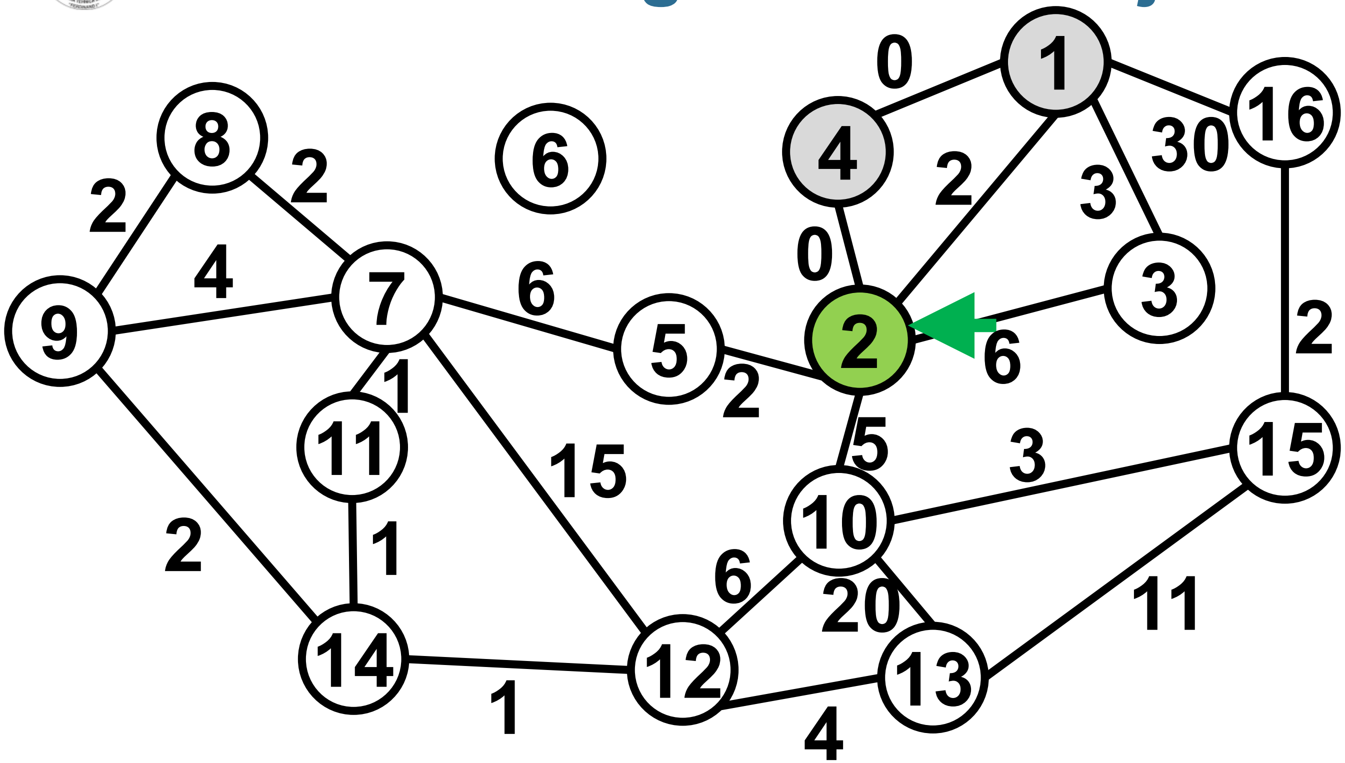
Algoritmul lui Dijsktra



#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	∞	-
6	∞	-
7	∞	-
8	∞	-
9	∞	-
10	∞	-
11	∞	-
12	∞	-
13	∞	-
14	∞	-
15	∞	-
16	30	1

2	3	16	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	3	30	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

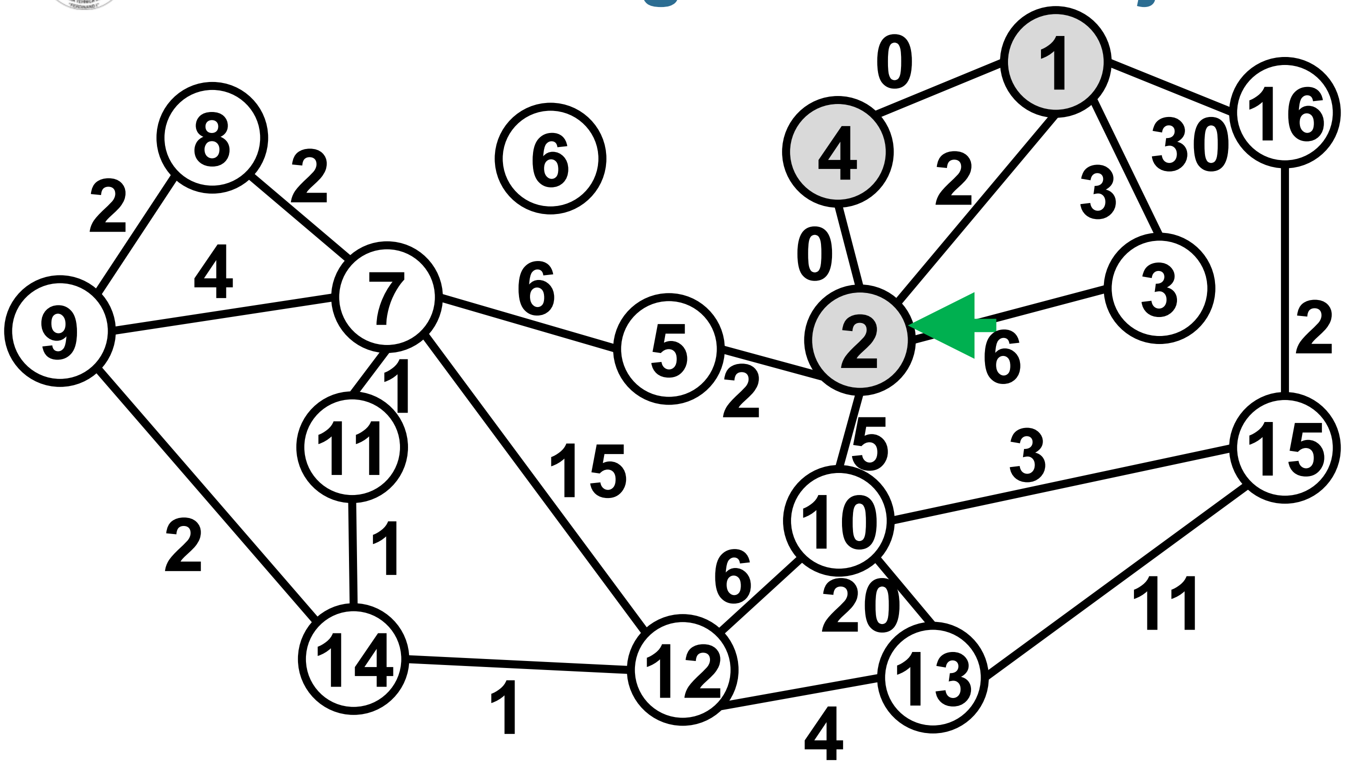
Algoritmul lui Dijsktra



3	16	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	30	2	∞	∞	∞	∞	5	∞	∞	∞	∞	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	∞	-
8	∞	-
9	∞	-
10	5	2
11	∞	-
12	∞	-
13	∞	-
14	∞	-
15	∞	-
16	30	1

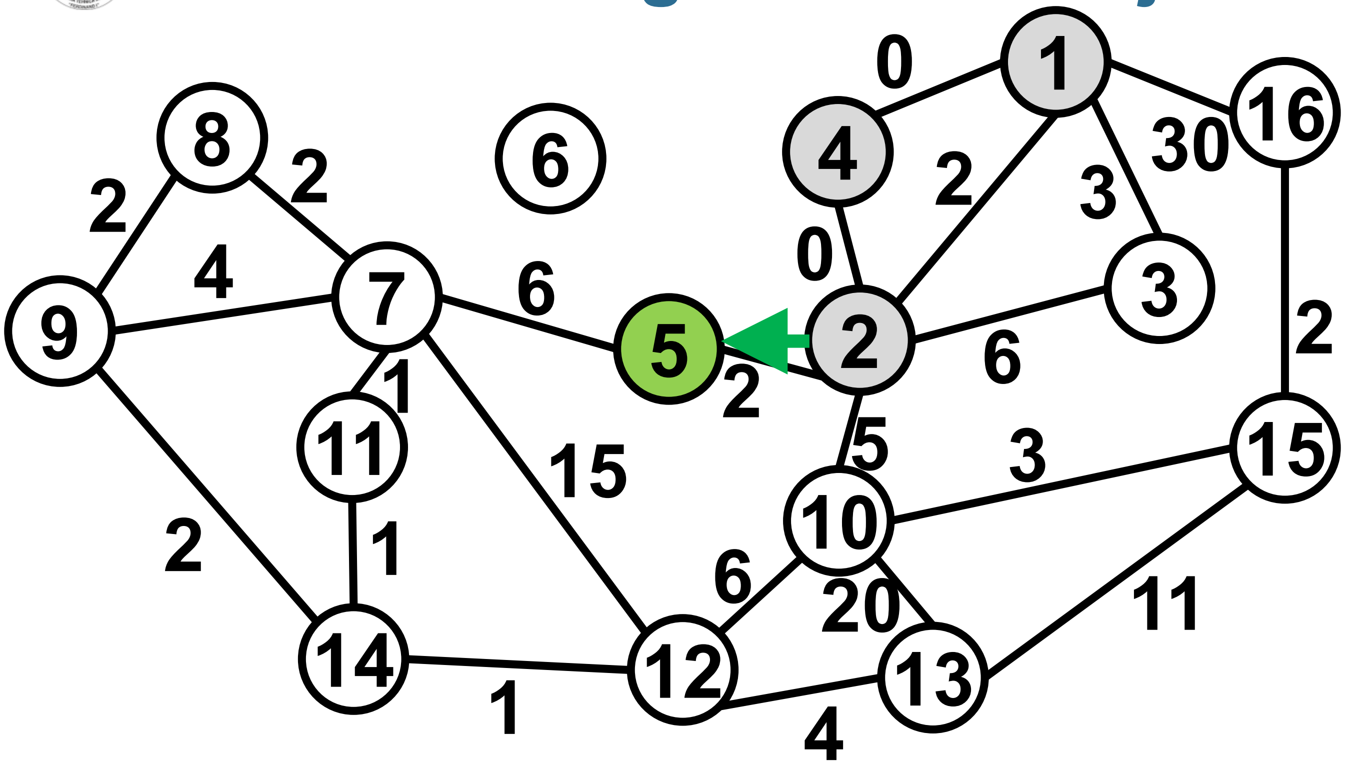
Algoritmul lui Dijsktra



5	3	10	16	6	7	8	9	11	12	13	14	15
2	3	5	30	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	∞	-
8	∞	-
9	∞	-
10	5	2
11	∞	-
12	∞	-
13	∞	-
14	∞	-
15	∞	-
16	30	1

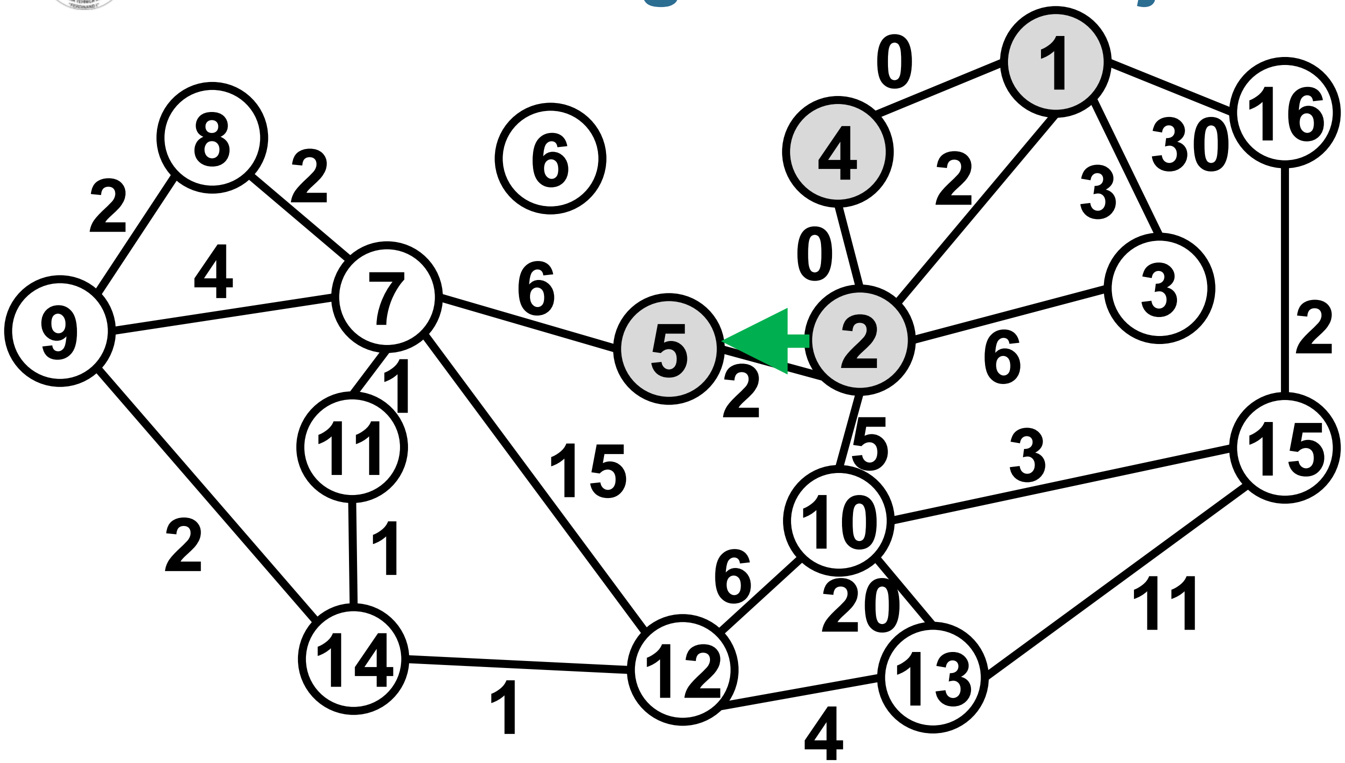
Algoritmul lui Dijsktra



3	10	16	6	7	8	9	11	12	13	14	15
3	5	30	∞	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	∞	-
9	∞	-
10	5	2
11	∞	-
12	∞	-
13	∞	-
14	∞	-
15	∞	-
16	30	1

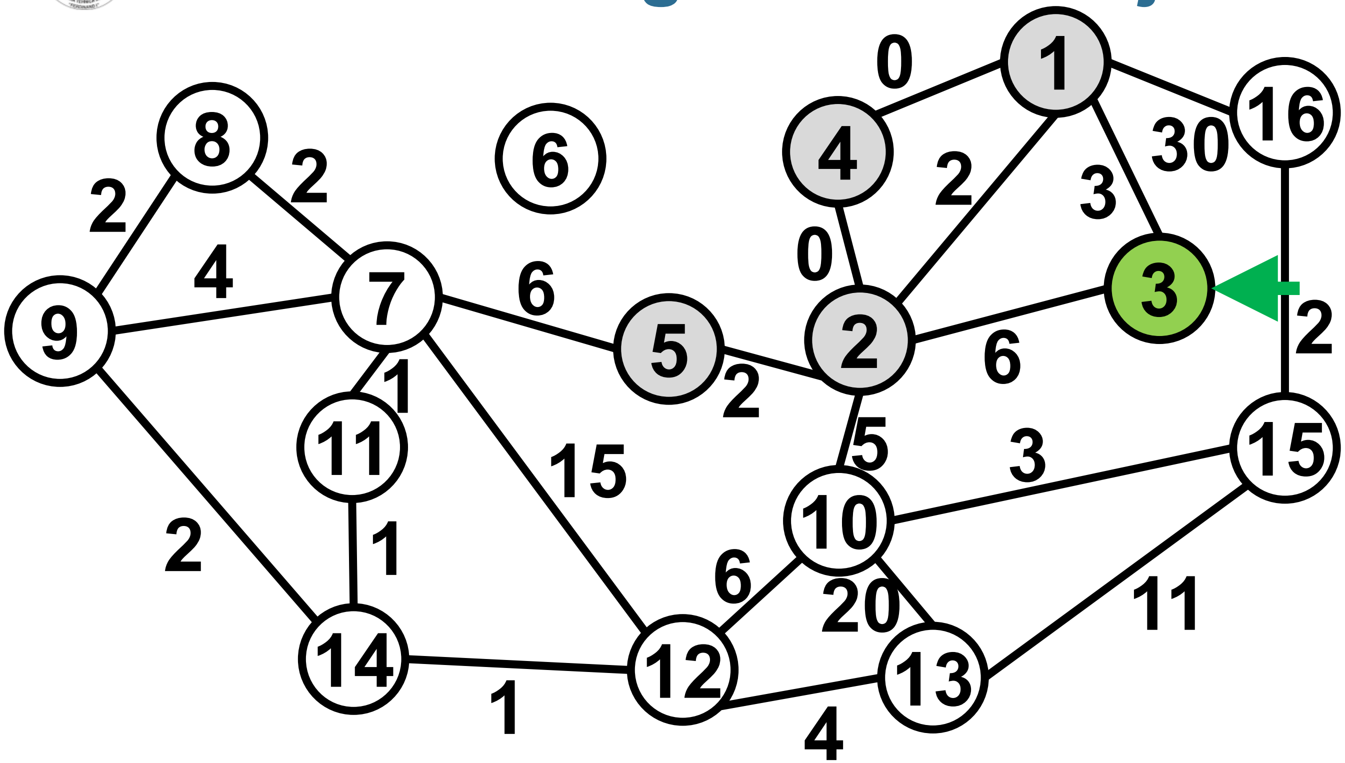
Algoritmul lui Dijsktra



3	10	7	16	6	8	9	11	12	13	14	15
3	5	8	30	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	∞	-
9	∞	-
10	5	2
11	∞	-
12	∞	-
13	∞	-
14	∞	-
15	∞	-
16	30	1

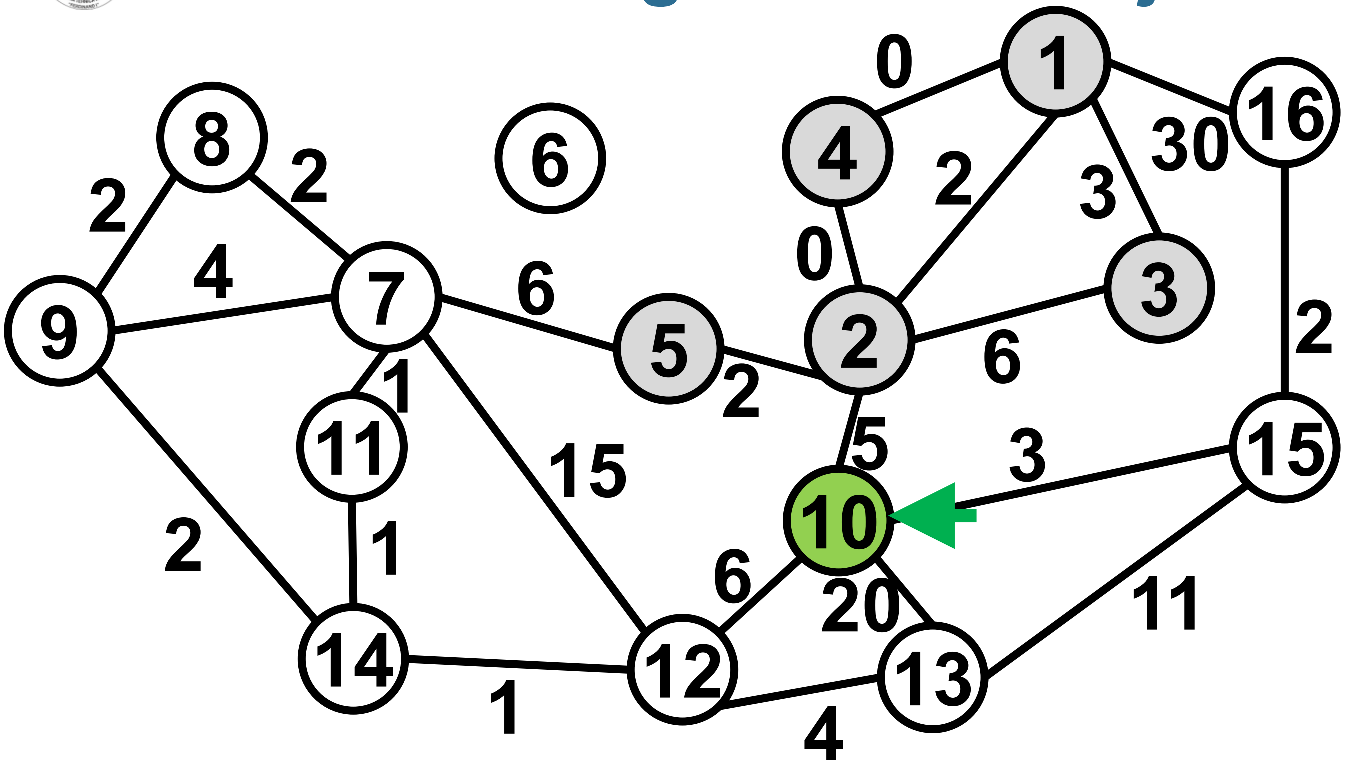
Algoritmul lui Dijsktra



10	7	16	6	8	9	11	12	13	14	15
5	8	30	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	∞	-
9	∞	-
10	5	2
11	∞	-
12	∞	-
13	∞	-
14	∞	-
15	∞	-
16	30	1

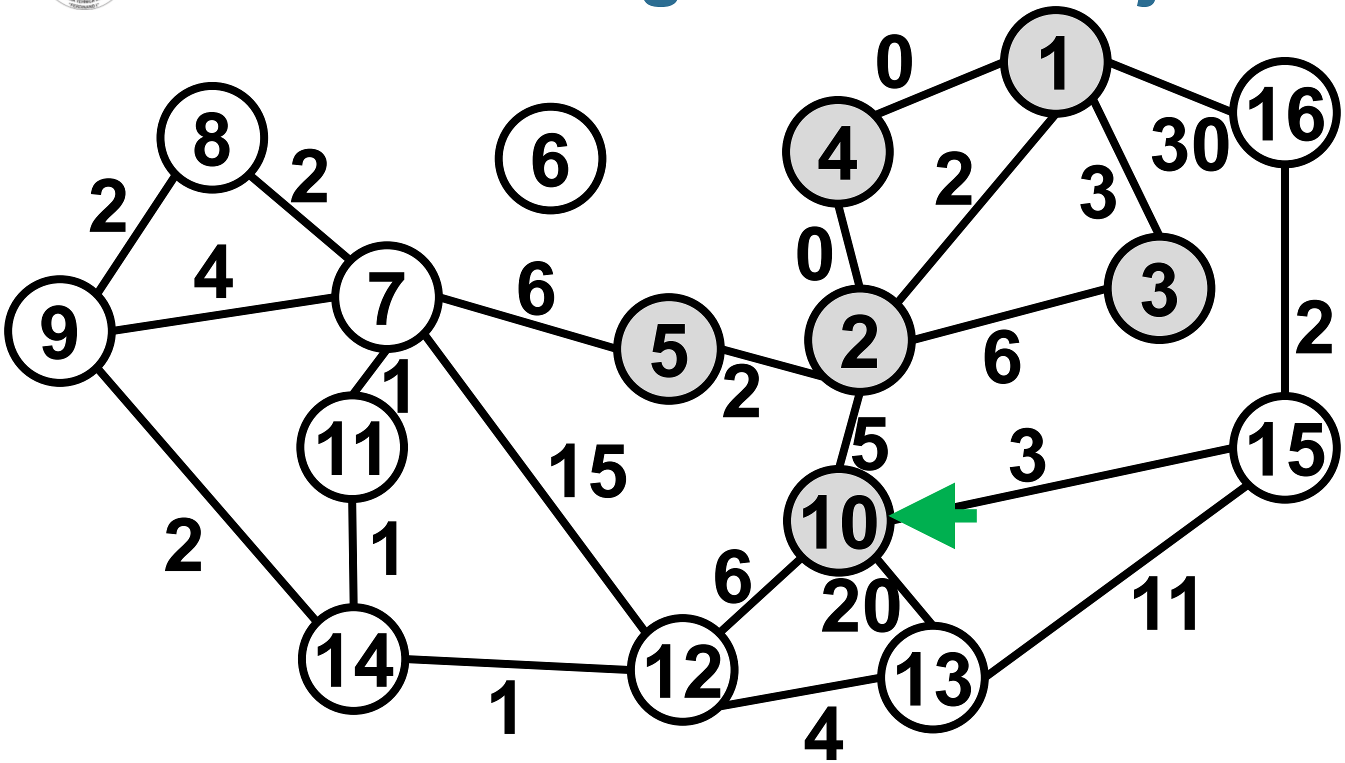
Algoritmul lui Dijsktra



7	16	6	8	9	11	12	13	14	15
8	30	∞	∞	∞	∞	11	25	∞	8

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	∞	-
9	∞	-
10	5	2
11	∞	-
12	11	10
13	25	10
14	∞	-
15	8	10
16	30	1

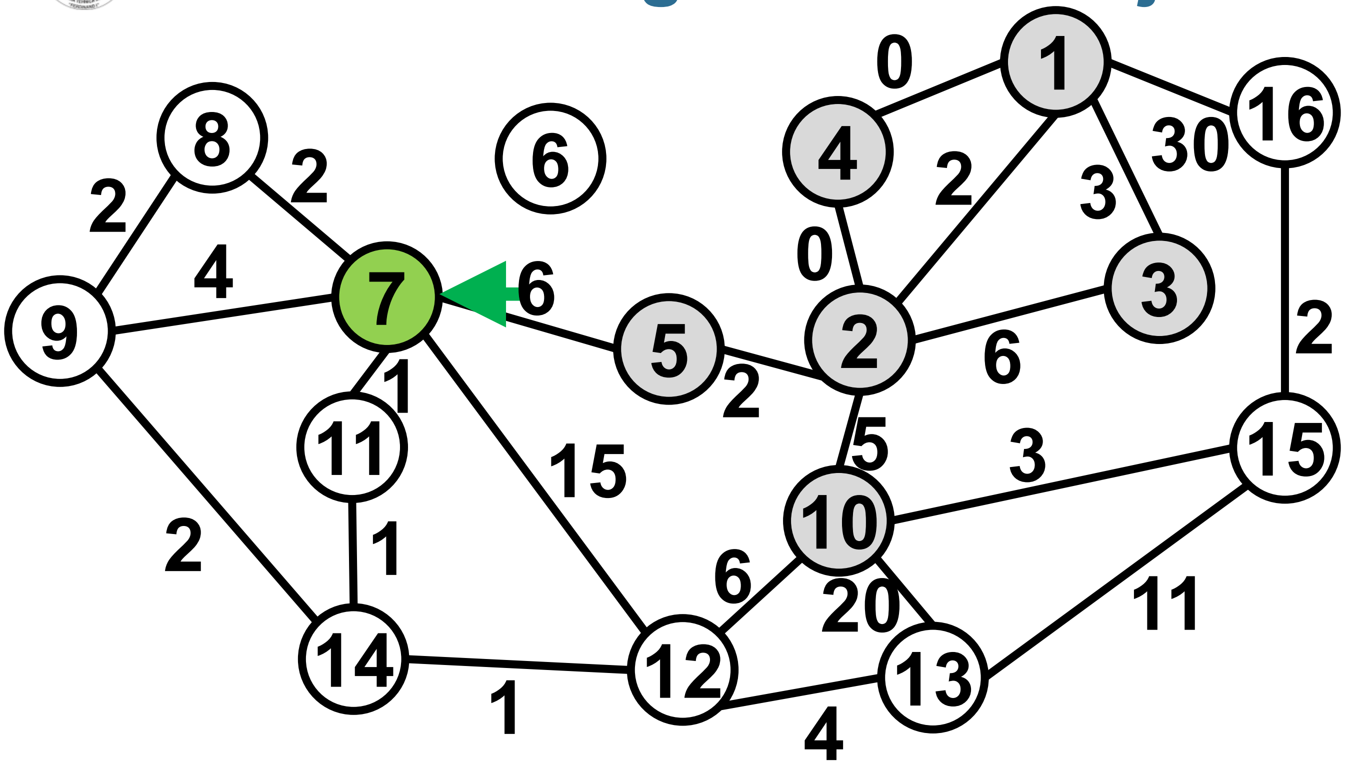
Algoritmul lui Dijsktra



7	15	12	13	16	6	8	9	11	14
8	8	11	25	30	∞	∞	∞	∞	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	∞	-
9	∞	-
10	5	2
11	∞	-
12	11	10
13	25	10
14	∞	-
15	8	10
16	30	1

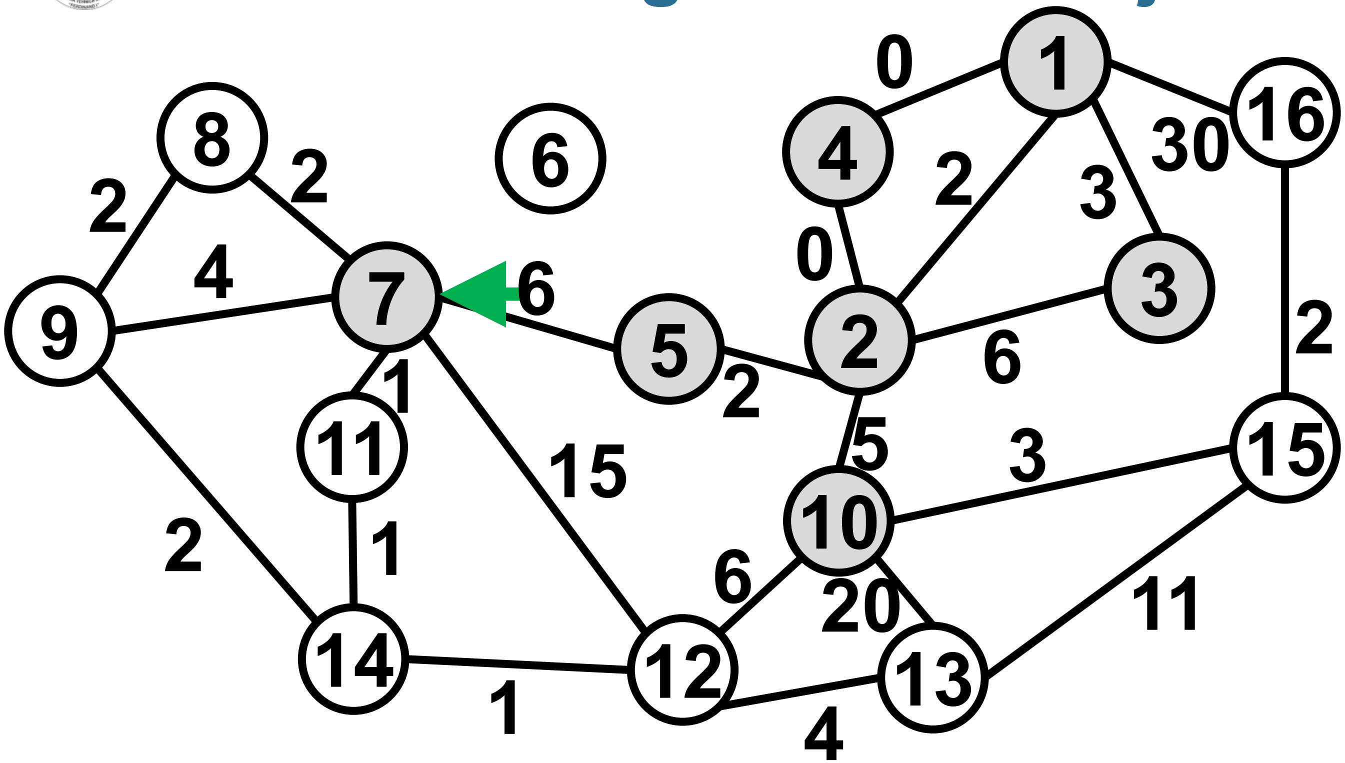
Algoritmul lui Dijsktra



15	12	13	16	6	8	9	11	14
8	11	25	30	∞	10	12	9	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	10	7
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	11	10
13	25	10
14	∞	-
15	8	10
16	30	1

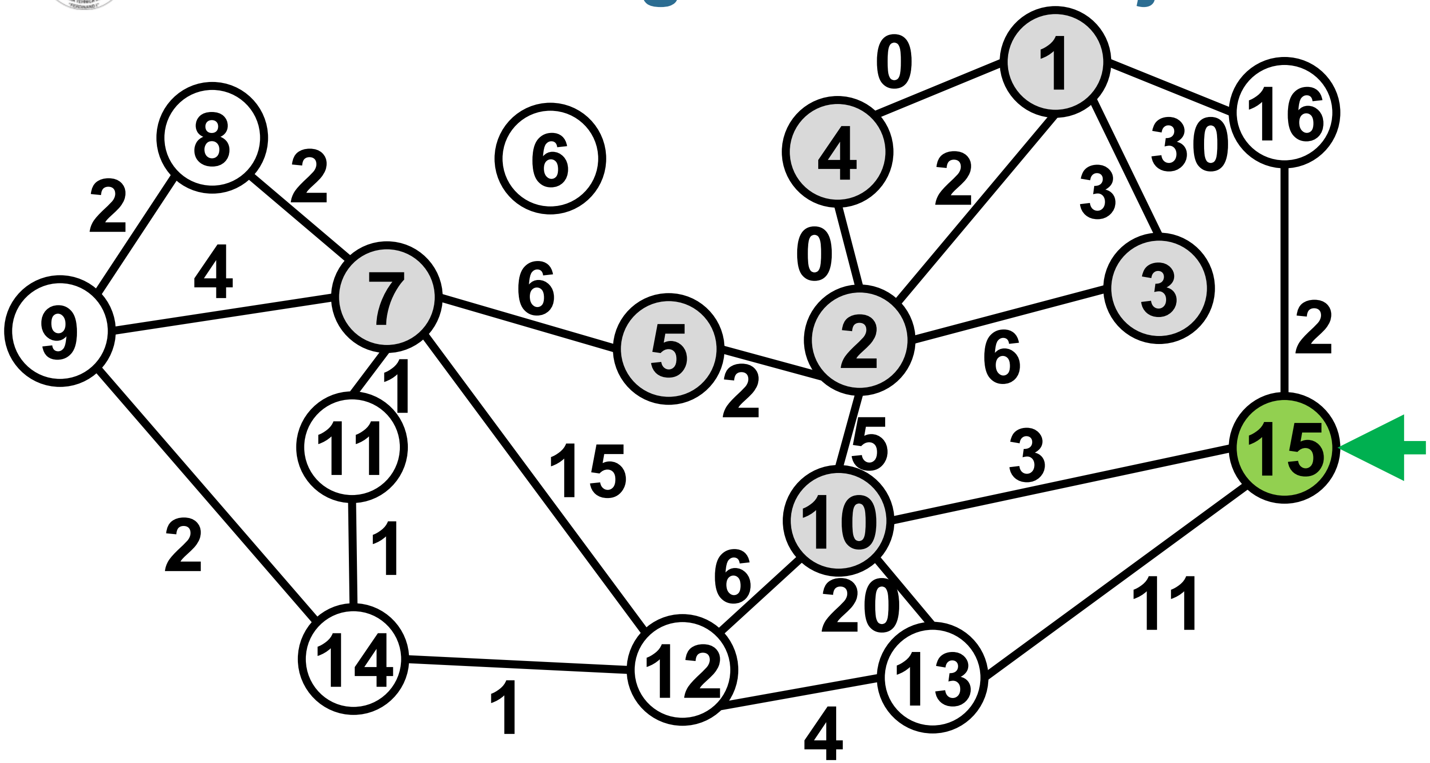
Algoritmul lui Dijsktra



15	11	8	12	9	13	16	6	14
8	9	10	11	12	25	30	∞	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	10	7
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	11	10
13	25	10
14	∞	-
15	8	10
16	30	1

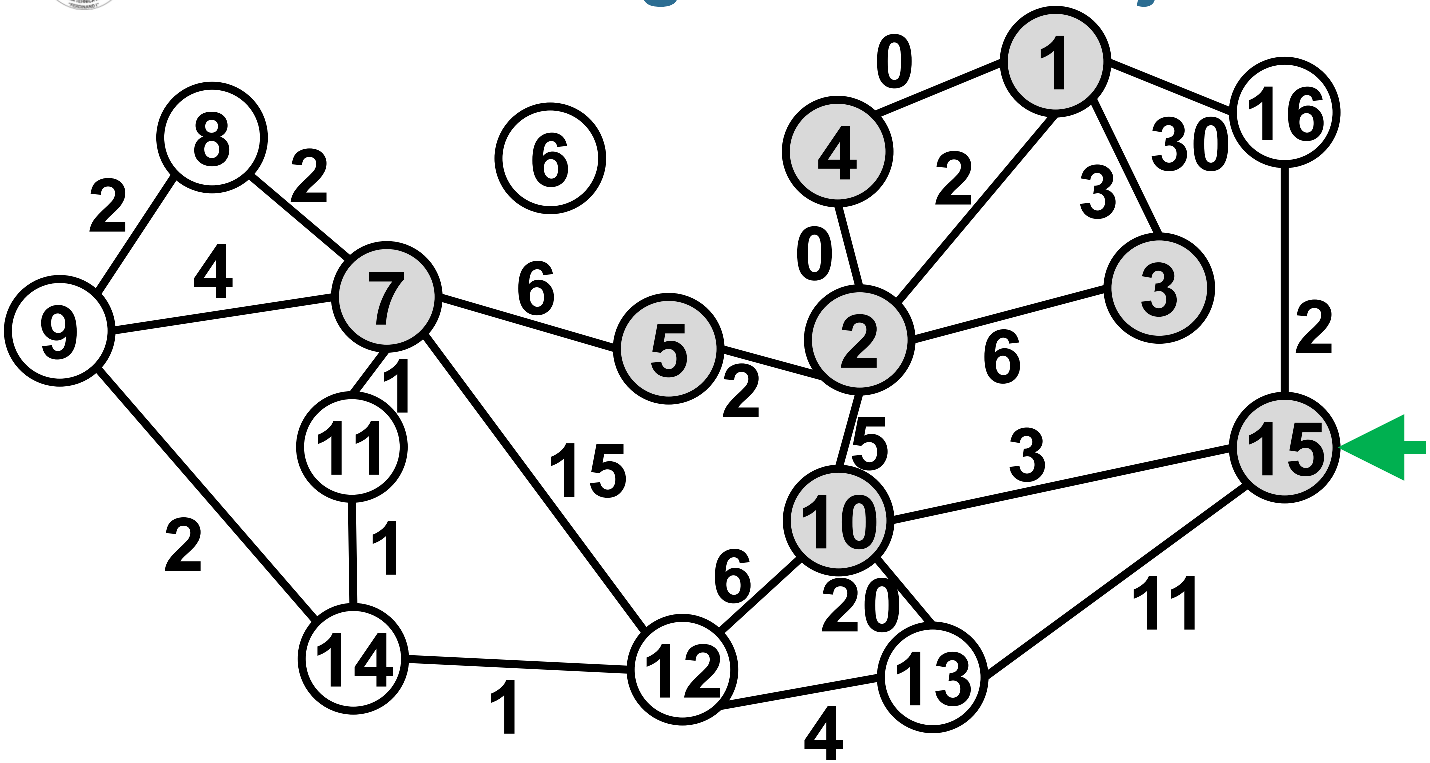
Algoritmul lui Dijsktra



11	8	12	9	13	16	6	14
9	10	11	12	19	10	∞	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	10	7
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	11	10
13	19	15
14	∞	-
15	8	10
16	10	15

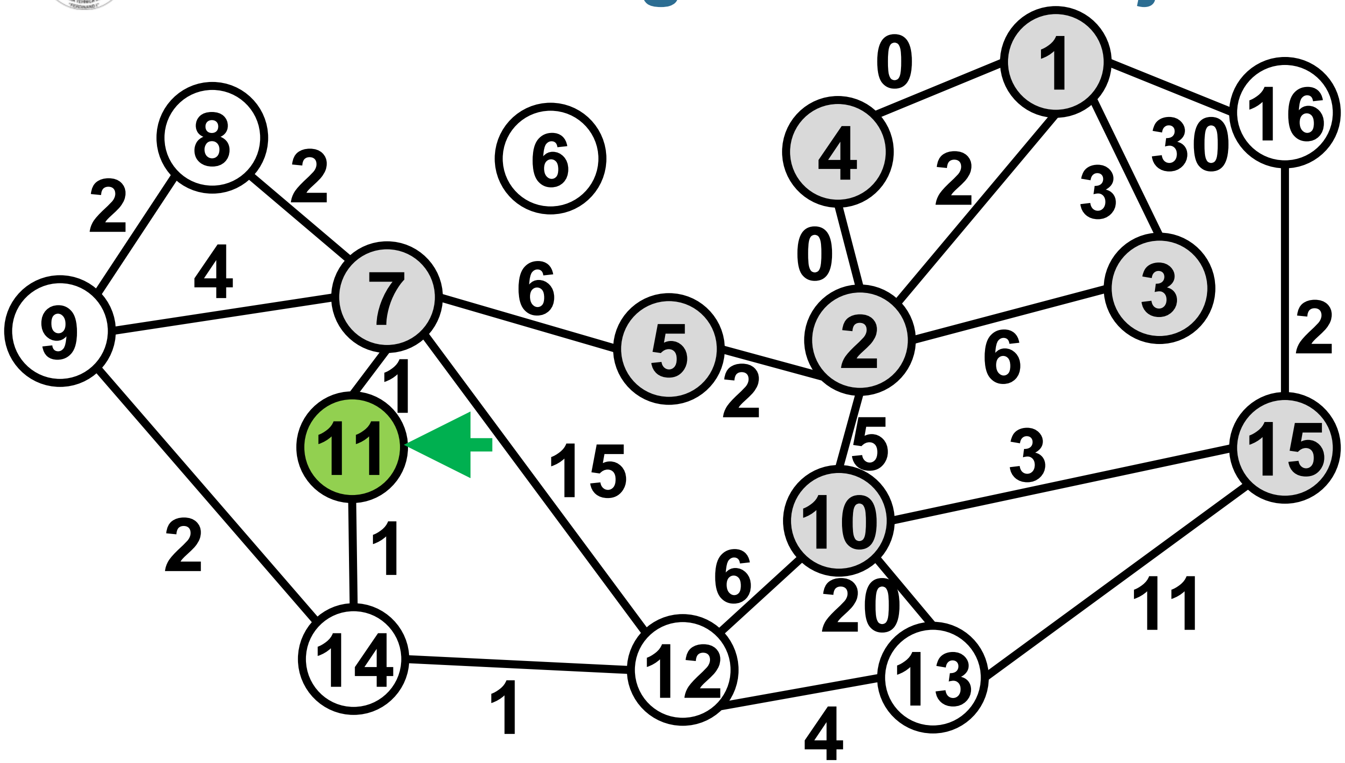
Algoritmul lui Dijsktra



11	8	16	12	9	13	6	14
9	10	10	11	12	19	∞	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	10	7
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	11	10
13	19	15
14	∞	-
15	8	10
16	10	15

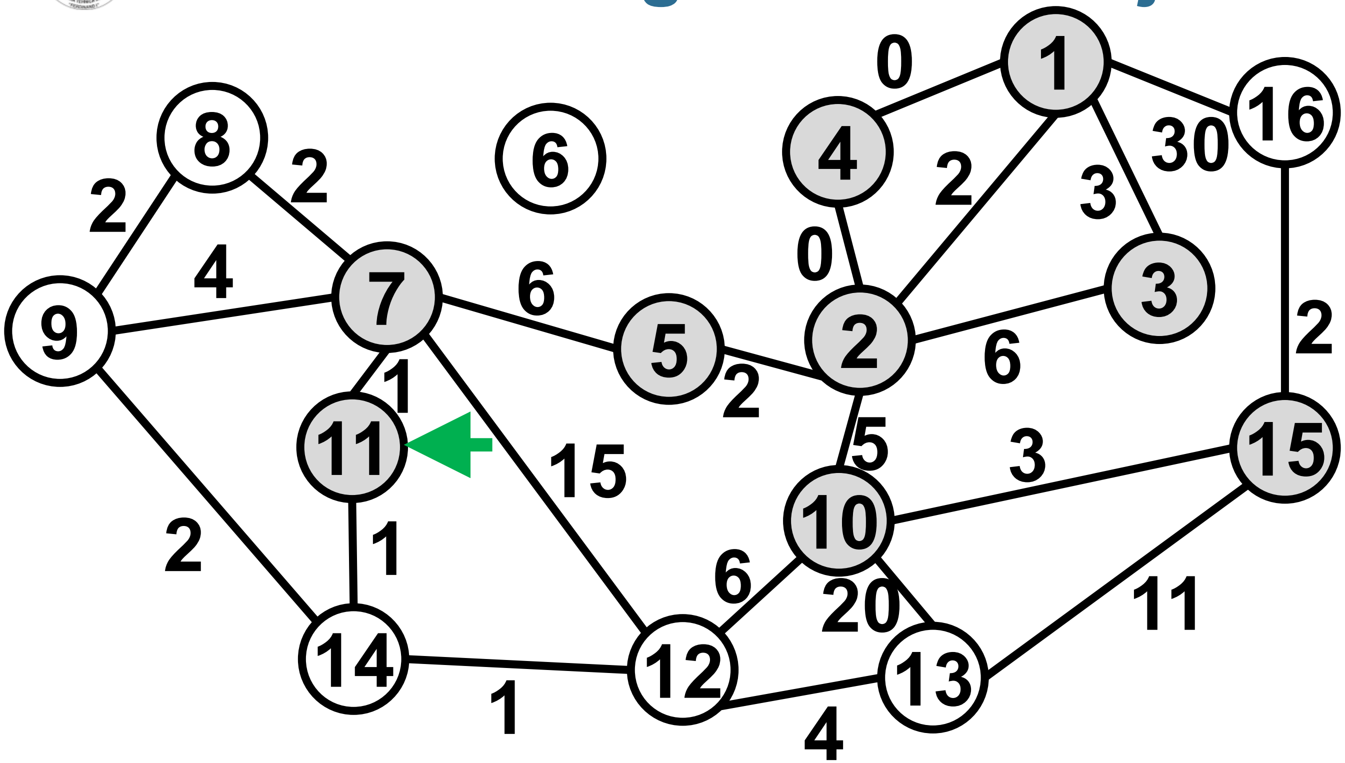
Algoritmul lui Dijsktra



8	16	12	9	13	6	14
10	10	11	12	19	∞	10

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	10	7
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	11	10
13	19	15
14	10	11
15	8	10
16	10	15

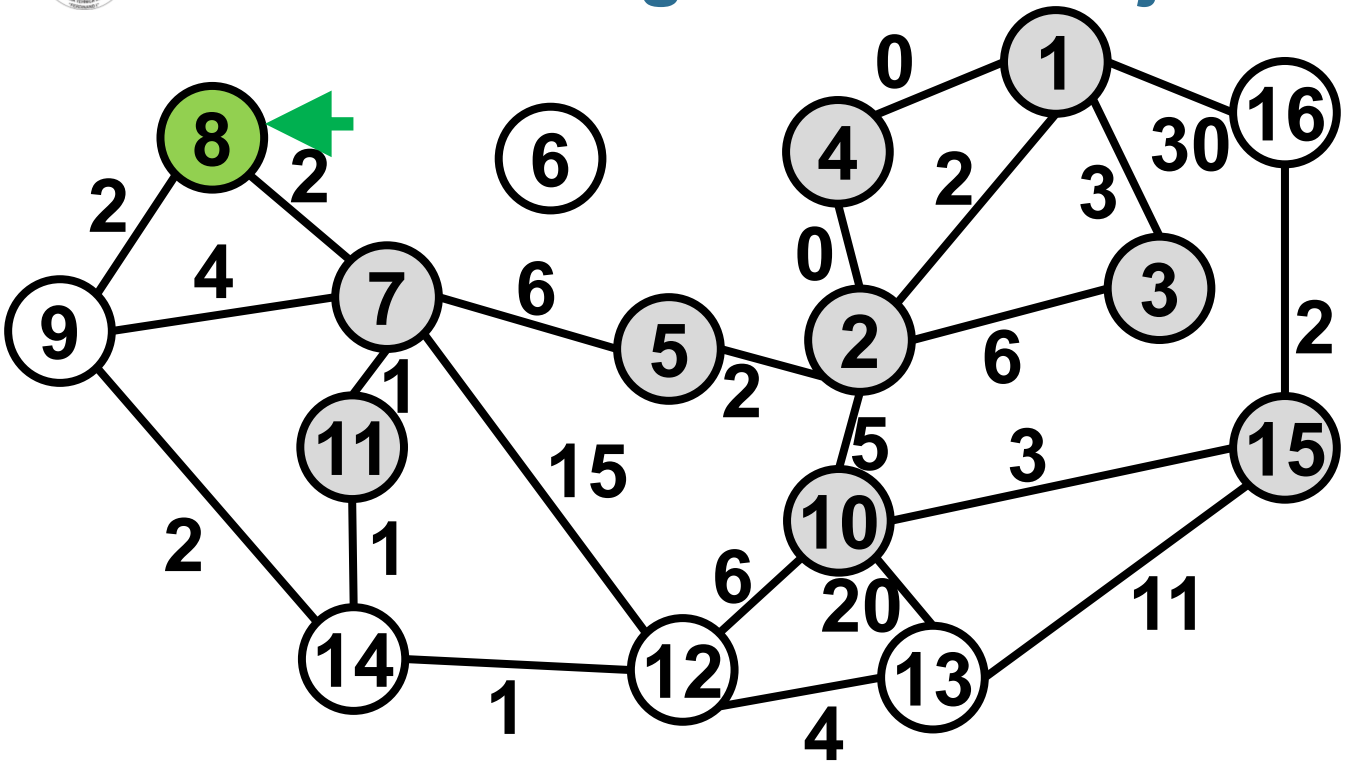
Algoritmul lui Dijsktra



8	16	14	12	9	13	6
10	10	10	11	12	19	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	10	7
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	11	10
13	19	15
14	10	11
15	8	10
16	10	15

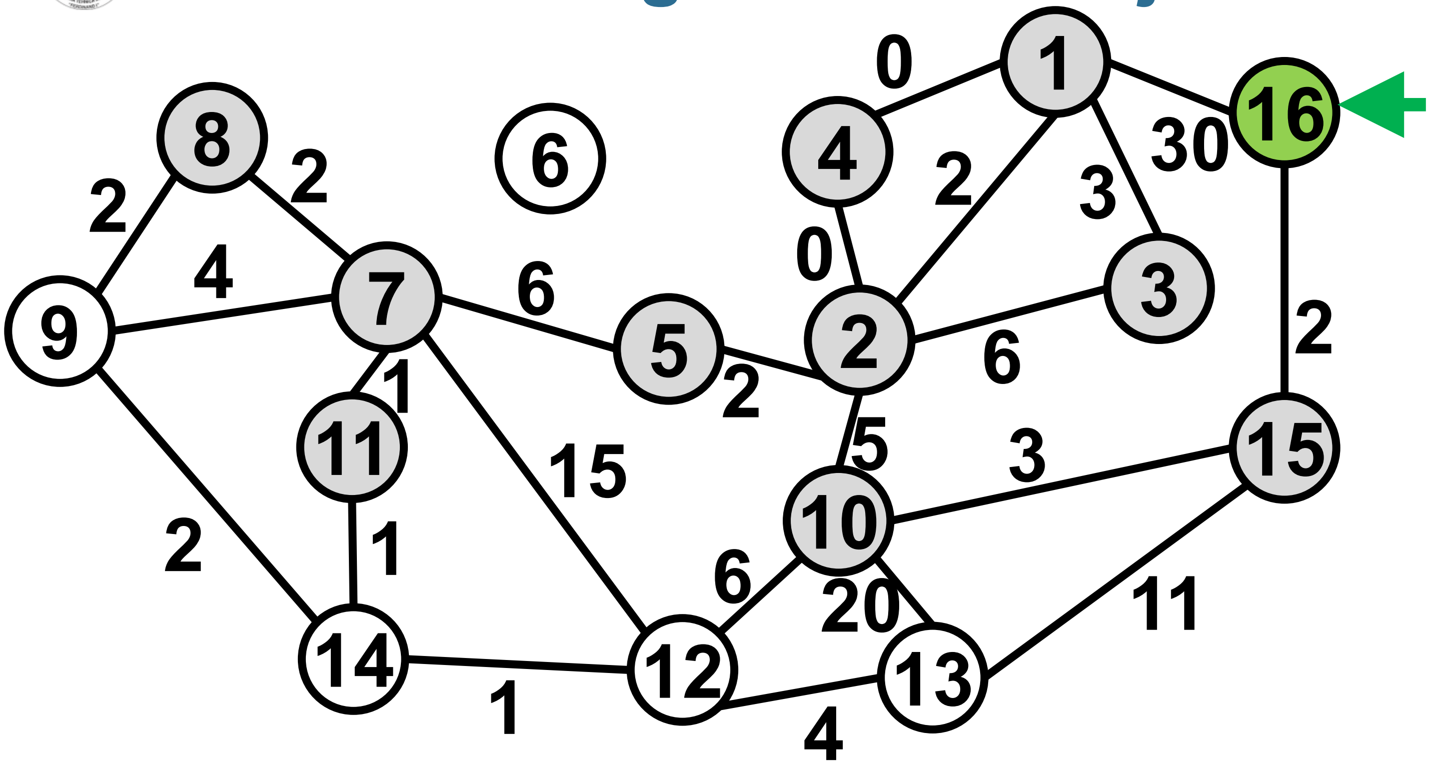
Algoritmul lui Dijsktra



16	14	12	9	13	6
10	10	11	12	19	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	**10**	**7**
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	11	10
13	19	15
14	10	11
15	8	10
16	10	15

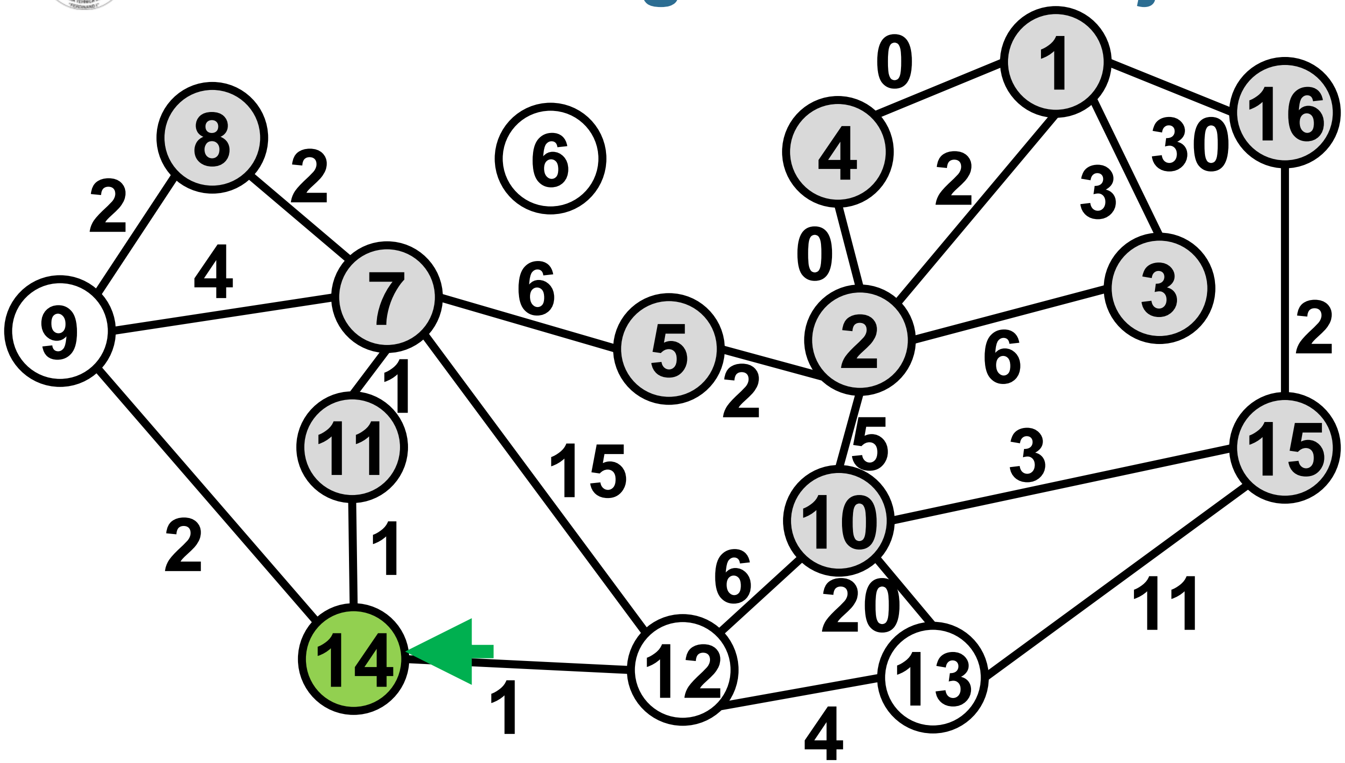
Algoritmul lui Dijsktra



14	12	9	13	6
10	11	12	19	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	10	7
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	11	10
13	19	15
14	10	11
15	8	10
16	**10**	**15**

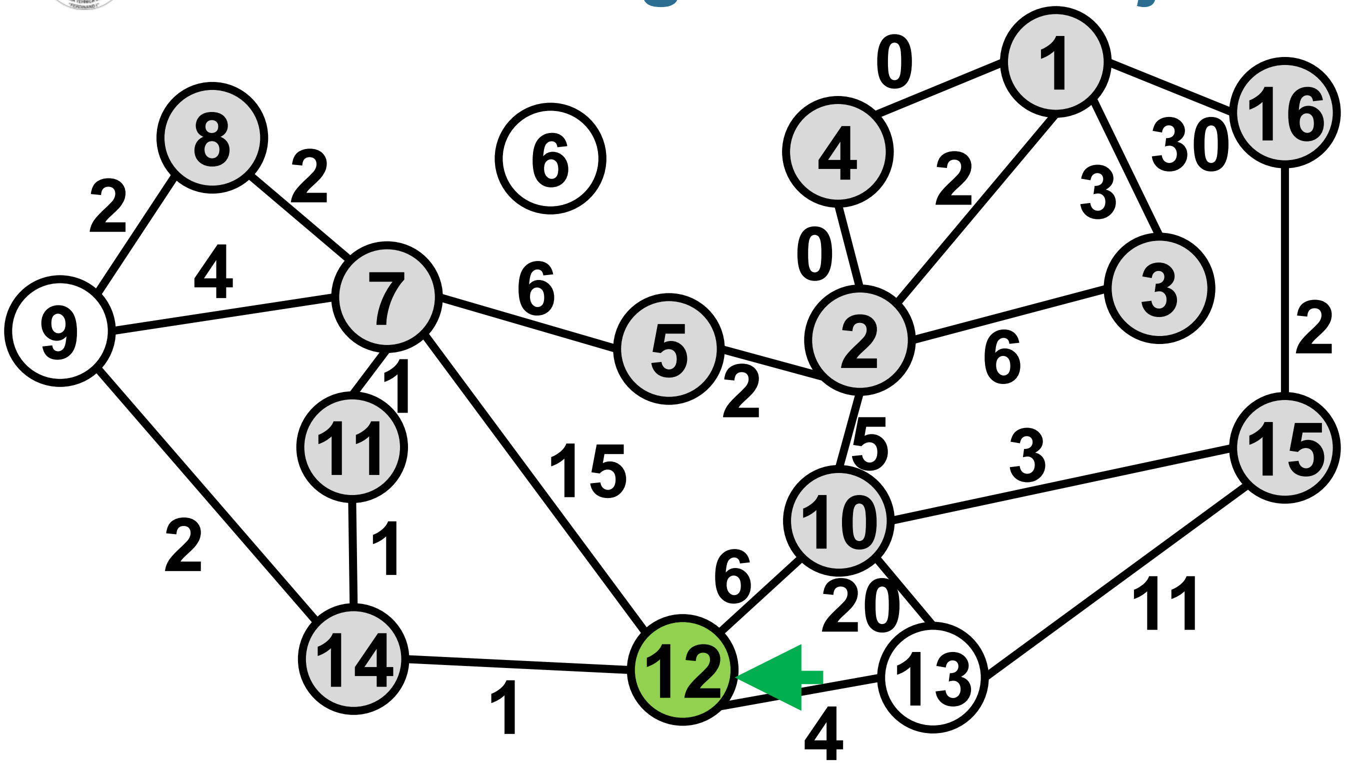
Algoritmul lui Dijsktra



12	9	13	6
11	12	19	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	10	7
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	11	10
13	19	15
14	**10**	**11**
15	8	10
16	10	15

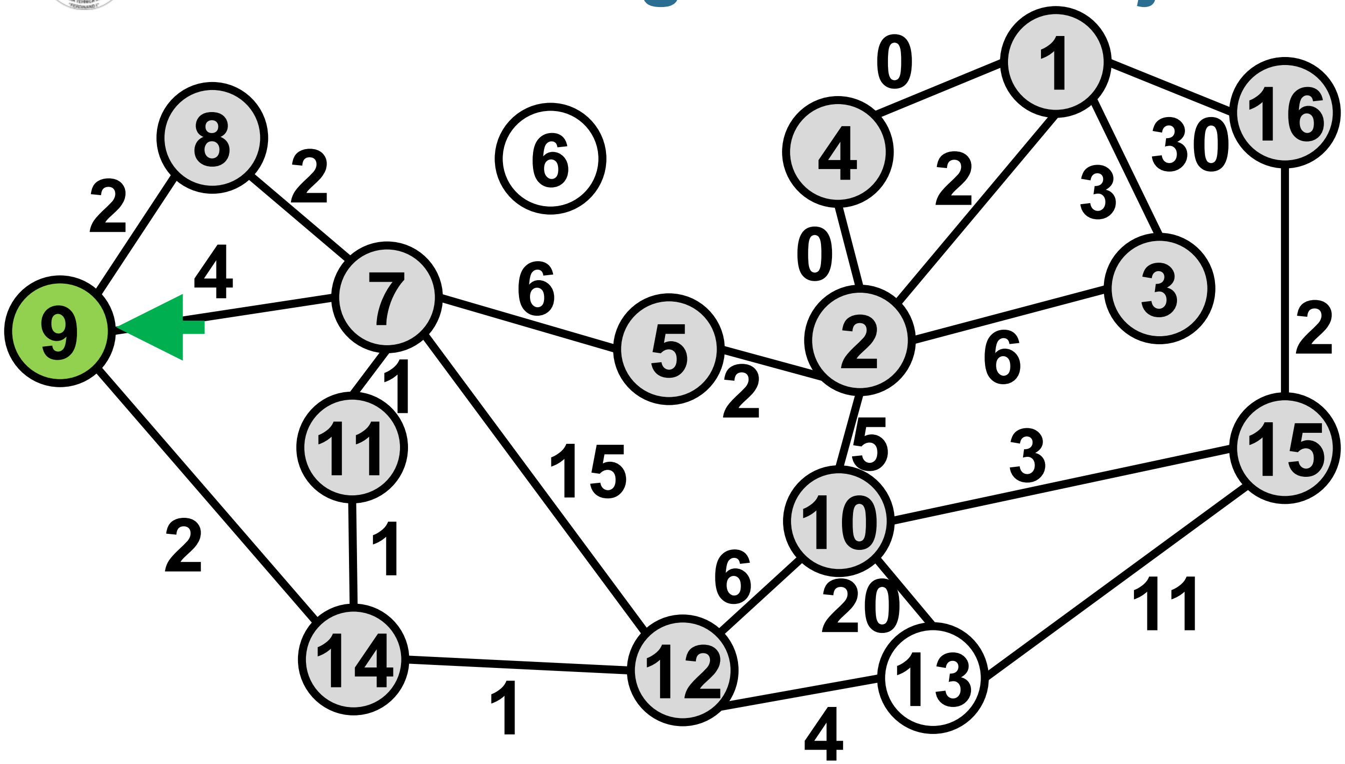
Algoritmul lui Dijsktra



9	13	6
12	15	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	10	7
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	**11**	**10**
13	15	12
14	10	11
15	8	10
16	10	15

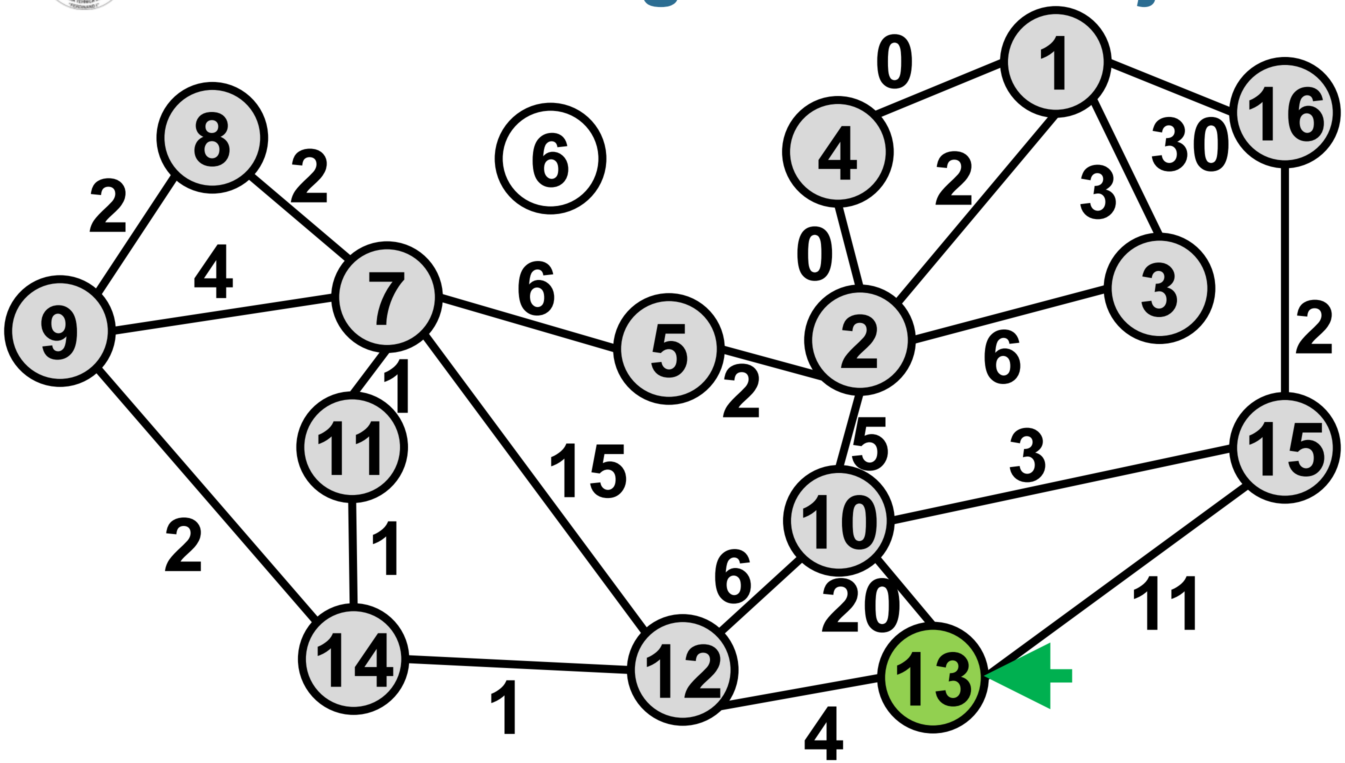
Algoritmul lui Dijsktra



13	6
15	∞

#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	10	7
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	11	10
13	15	12
14	10	11
15	8	10
16	10	15

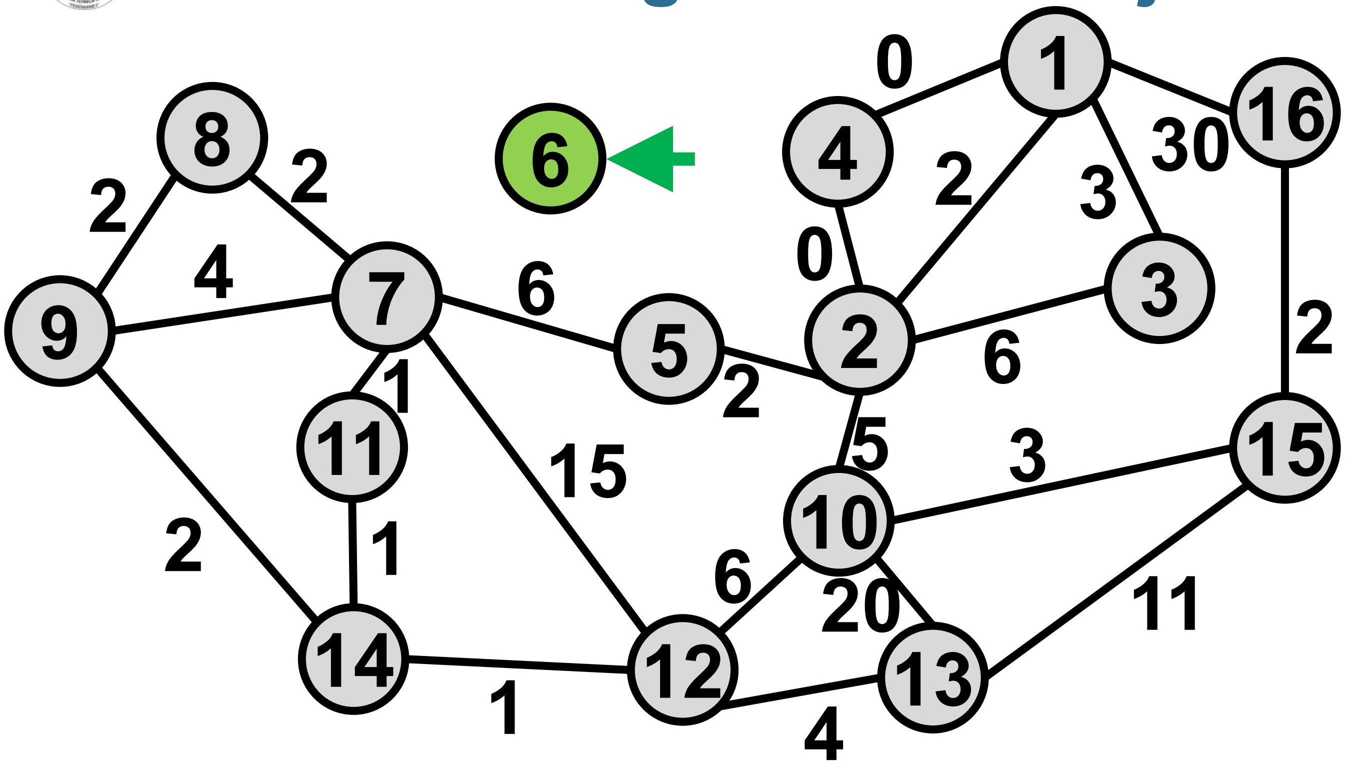
Algoritmul lui Dijsktra



6
∞

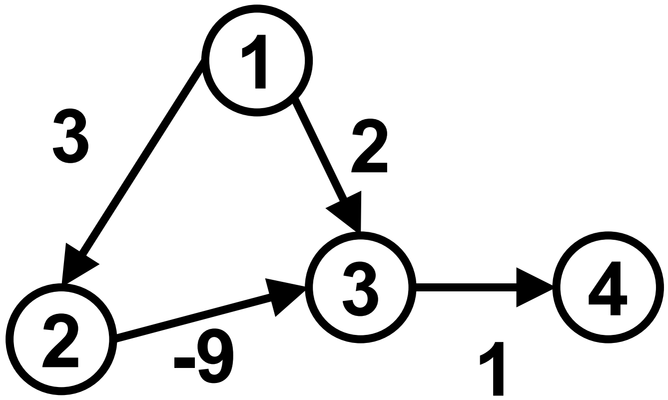
#	d	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	10	7
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	11	10
13	**15**	**12**
14	10	11
15	8	10
16	10	15

Algoritmul lui Dijsktra

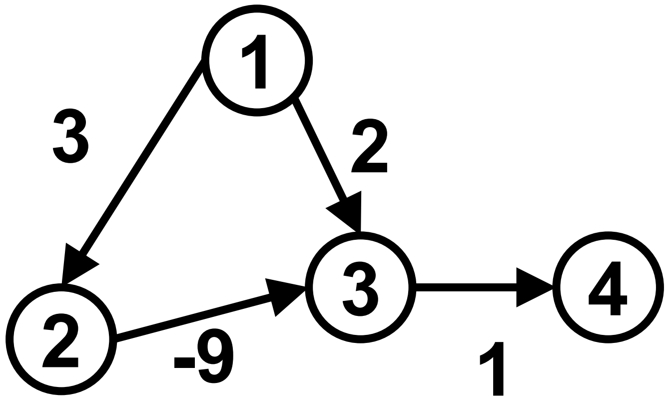


#	D	π
1	0	-
2	0	4
3	3	1
4	0	1
5	2	2
6	∞	-
7	8	5
8	10	7
9	12	7
10	5	2
11	9	7
12	11	10
13	15	12
14	10	11
15	8	10
16	10	15

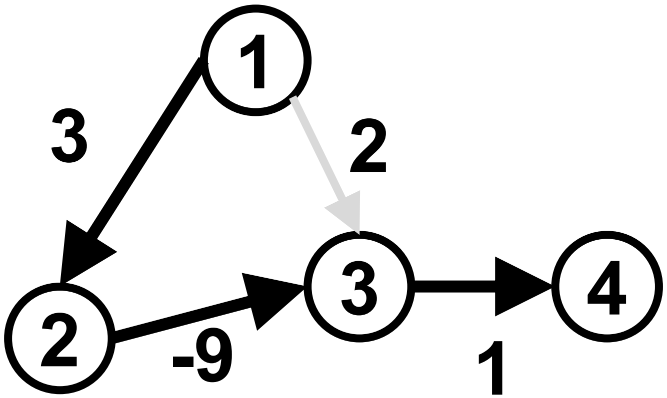
Algoritmul lui Dijsktra
De ce nu muchii negative?



Algoritmul lui Dijsktra
De ce nu muchii negative?
Care este drum minim 1->4 ?

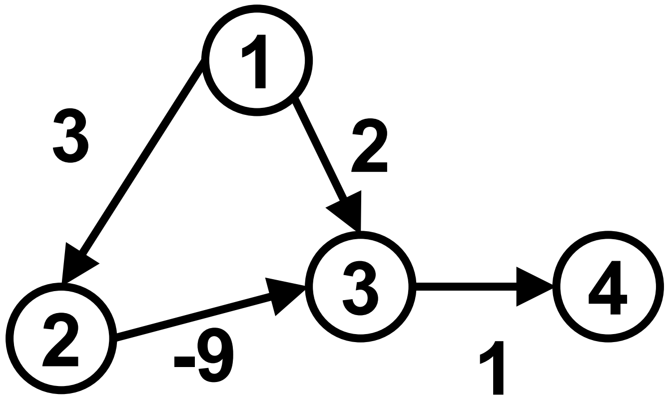


Algoritmul lui Dijsktra
De ce nu muchii negative?
Care este drum minim 1->4 ?



(1,2,3,4) cu costul 3+(-9)+1 = -5

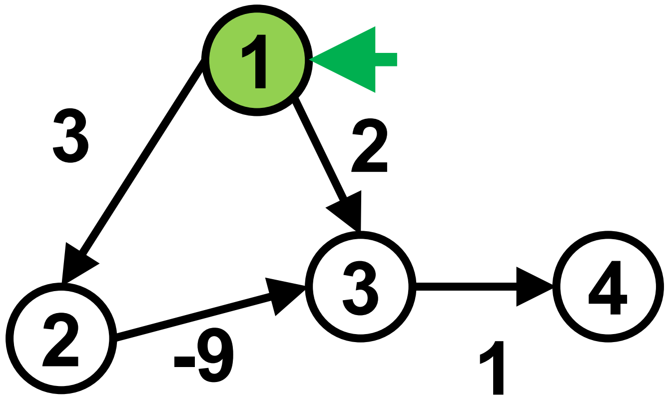
Algoritmul lui Dijsktra
De ce nu muchii negative?



#	D	π
1	0	-
2	∞	-
3	∞	-
4	∞	-

1	2	3	4
0	∞	∞	∞

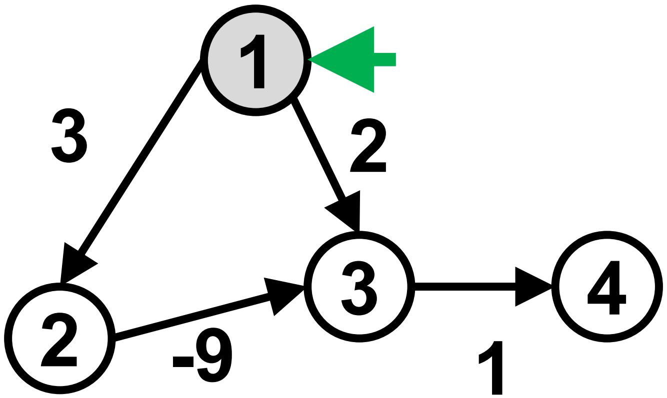
Algoritmul lui Dijsktra
De ce nu muchii negative?



#	D	π
1	0	-
2	3	1
3	2	1
4	∞	-

2	3	4
3	2	∞

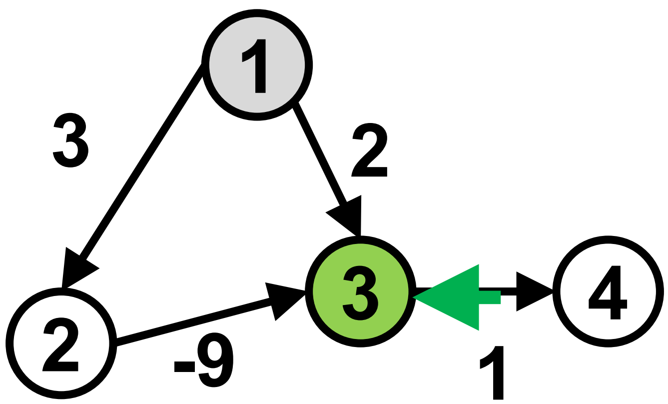
Algoritmul lui Dijsktra
De ce nu muchii negative?



#	D	π
1	0	-
2	3	1
3	2	1
4	∞	-

3	2	4
2	3	∞

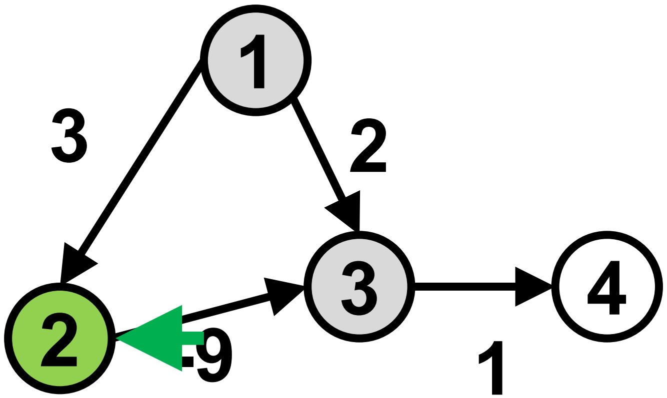
Algoritmul lui Dijsktra
De ce nu muchii negative?



#	D	π
1	0	-
2	3	1
3	2	1
4	3	3

2	4
3	3

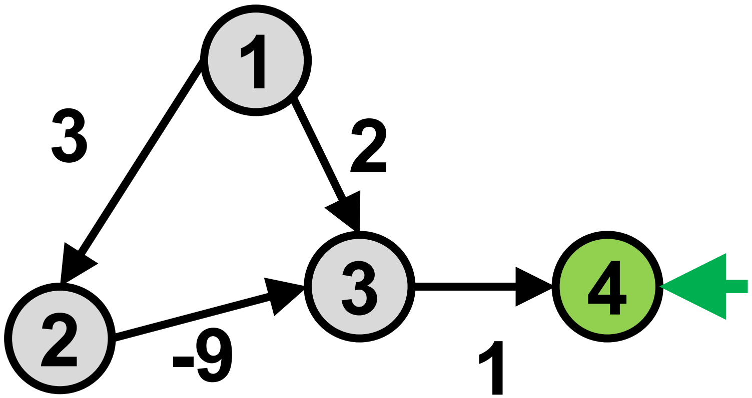
Algoritmul lui Dijsktra
De ce nu muchii negative?



#	D	π
1	0	-
2	3	1
3	-6	2
4	3	3

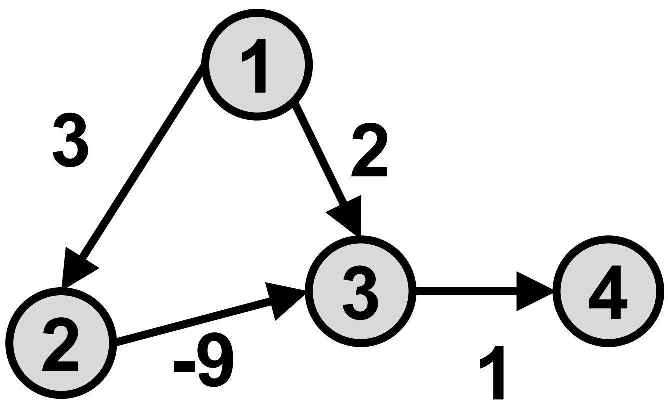
4
3

Algoritmul lui Dijsktra
De ce nu muchii negative?



#	D	π
1	0	-
2	3	1
3	-6	2
4	3	3

Algoritmul lui Dijsktra
De ce nu muchii negative?

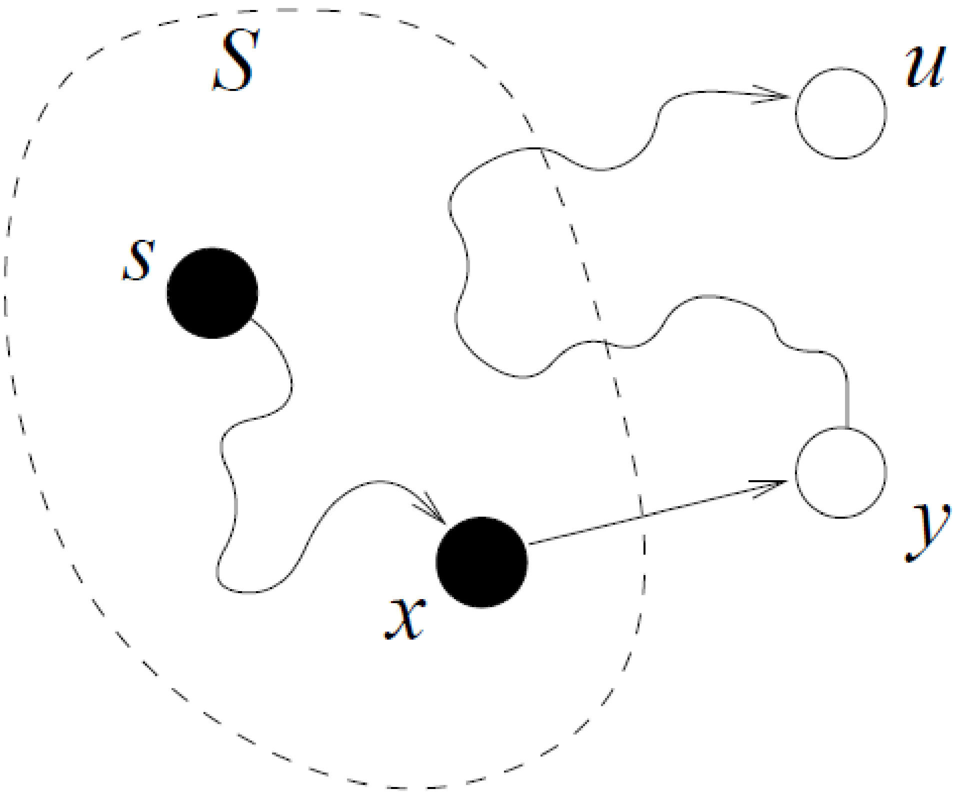


#	D	π
1	0	-
2	3	1
3	-6	2
4	3	3

Dar știm (1,2,3,4) cu costul 3+(-9)+1 = -5

Algoritmul Dijsktra Demonstrație corectitudine

- S setul de noduri extrase din listă



Algoritmul Dijsktra Demonstrație corectitudine

- Teoremă: Pentru un graf cu muchii pozitive la final vom avea $v.d = \delta(s, v)\ \forall v \in V$

- Demonstrație:
  - Invariant de buclă: La începutul fiecărei iterații nodurile extrase au $v.d = \delta(s, v)$.
  - Este suficient să arătăm că la extragere $v.d = \delta(s, v)$, toate momentele de după sunt confirmate de **limita superioară a estimării**.

- Inițial: nu este nici un nod extras, invariantul este corect.

Algoritmul Dijsktra Demonstrație corectitudine

- La fiecare pas:
  - Prin contradicție fie $u.d \neq \delta(s,v)$ primul adăugat la S
  - Fie $s \rightsquigarrow x \rightarrow y \rightsquigarrow u; \mathrm{x} \in S; y \in V - S$
  - $y.d = \delta(s,y)$ deoarece u primul
  - $y.d = \delta(s,y) \leq \delta(s,u) \leq u.d$
  - Dar $u.d \leq y.d$ deoarece u ales înainte de y

  =>$y.d = \delta(s,y) = \delta(s,u) = u.d$
- Terminare: Toate nodurile sunt extrase deci

$v.d = \delta(s,v)\ \forall v \in V$.

```
dijsktrasAlgorithm(G, source) {
    int d[|G.V|] = { INFINITY };
    d[source] = 0;
    for each(node in G.V)        //O(|V|)
        push(LIST, node, d);     //T_insert

    while (!isEmpty(LIST)) {         //O(|V|)
        node = pop_MIN(LIST, d);   //T_min
        for each (neighbor of node) {  //O(|L_u|)
            if (d[node] + w(node, neighbor) < d[neighbor]) {
                d[neighbor] = d[node] + w(node, neighbor);
                prev[neighbor] = node;
                update(LIST, d); //T_acces
            }
        }
    }
    return dist, prev;
}
```

Complexitatea Generală Dijkstra

$$T(V,E) = \theta(VT_{insert}) + \sum_{u \in V} [T_{min} + L_u T_{acces}]$$

$$T(V,E) = \theta(VT_{insert}) + \theta(VT_{min}) + T_{acces} \sum_{u \in V} L_u$$

$$\boldsymbol{T(V,E) = \theta[V(T_{insert} + T_{min})] + \theta(ET_{acces})}$$

Complexitatea Dijkstra LISTA ca vector

$$T(V,E) = \theta[V(T_{insert} + T_{min})] + \theta(ET_{acces})$$

- $T_{insert} = \theta(1)$
- $T_{min} = \theta(V)$
- $T_{acces} = \theta(1)$

$$T(V,E) = \theta\left(V^2 + E\right)$$

Complexitatea Dijkstra LISTA ca listă înlănțuită

$$T(V,E) = \theta[V(T_{insert} + T_{min})] + \theta(ET_{acces})$$

- $T_{insert} = \theta(1)$
- $T_{min} = \theta(V)$
- $T_{acces} = \theta(V)$

$E \geq V - 1$
pentru graf connex

$$T(V,E) = \theta\left(V^2 + EV\right) = \theta(EV)$$

Complexitatea Dijkstra LISTA ca o coadă priorități implementată cu vector

$$T(V,E) = \theta[V(T_{insert} + T_{min})] + \theta(ET_{acces})$$

- $T_{insert} = \theta(lnV)$
- $T_{min} = \theta(1)$
- $T_{acces} = \theta(lnV)$

$$T(V,E) = \theta((E+V)lnV)$$

Complexitatea Dijkstra LISTA ca un arbore binar

$$T(V,E) = \theta[V(T_{insert} + T_{min})] + \theta(ET_{acces})$$

- $T_{insert} = \theta(lnV)$
- $T_{min} = \theta(lnV)$
- $T_{acces} = \theta(lnV)$

$$T(V,E) = \theta((E+V)lnV)$$

Complexitatea Dijkstra
arbore binar vs vector

$$\boldsymbol{\theta}((\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V})\boldsymbol{lnV})$$

$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{V}^2+\boldsymbol{E})$$

Graf obişnuit : $E \approx kV$;

Graf complet : $E = V(V-1)/2$

Complexitatea Dijkstra LISTA ca un heap fibonacci

$$T(V,E) = \theta[V(T_{insert} + T_{min})] + \theta(ET_{acces})$$

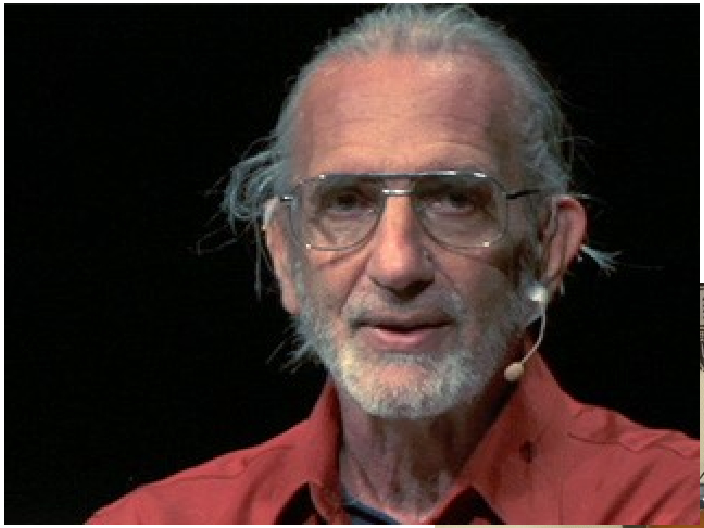
- $T_{insert} = \theta(1)$
- $T_{min} = \theta(1 + lnV)$
- $T_{acces} = \theta(1)$

- Heap Binar : arbore binar unde $tatal \leq ambii\ copii$
- Heap Fibonacci : colectie speciala de heapuri binare

$$T(V,E) = \theta(E + VlnV)$$

Algoritmul Floyd-Warshall (Roy)

- Găsește drum minim între oricare 2 noduri



Algoritmul Floyd-Warshall (Roy)

```
floydWarshallAlgorithm(G) {
    for (k = 0; k < |G.V| ; k++)
        for (i = 0; i < |G.V| ; i++)
            for (j = 0; j < |G.V| ; j++)
                if (dist[i][j] > dist[i][k] + dist[k][j])
                    dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j];
}
```

Complexitate?

```
floydWarshallAlgorithm(G) {
    for (k = 0; k < |G.V| ; k++)
        for (i = 0; i < |G.V| ; i++)
            for (j = 0; j < |G.V| ; j++)
                if (dist[i][j] > dist[i][k] + dist[k][j])
                    dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j];
}
```

Complexitate?

$$O(|V|^3)$$

Algoritmul A*

- Algoritm euristic
- Nu găsește calea minimă dar una destul de apropiată
- $h(v)$ **estimare** a distanței de la nodul v la destinație
- $g(v)$ distanța de la nodul de start la v

- A* adaugă câte un nod la cale. Este ales mereu nodul care minimizează $f(v) = h(v) + g(v)$

- Dacă $h(x) \le w(x, y) + h(y) \ \forall (x, y) \in E$ funcția este numită monotonă sau consistentă.

```
A_Star(start, goal, h, G) {
    int prev[|G.V|] = { UNDEFINED };
    int g[|G.V|] = { INFINITE }; g[start] : = 0;
    int f[|G.V|] = { INFINITE }; f[start] : = h(start);

    while (!isEmpty(priorityQueue)) {
        node = pop(priorityQueue) //pop based on f[]
        if node = goal
            return;
        for each (neighbor of node) {
            if (g[node] + w(node, neighbor) < g[neighbor]) {
                prev[neighbor] = current
                g[neighbor] = g[node] + w(node, neighbor)
                f[neighbor] = g[neighbor] + h(neighbor)
                if (neighbor not in priorityQueue)
                    push(priorityQueue, neighbor);
            }
}   }   }
```

Dijsktra vs A*