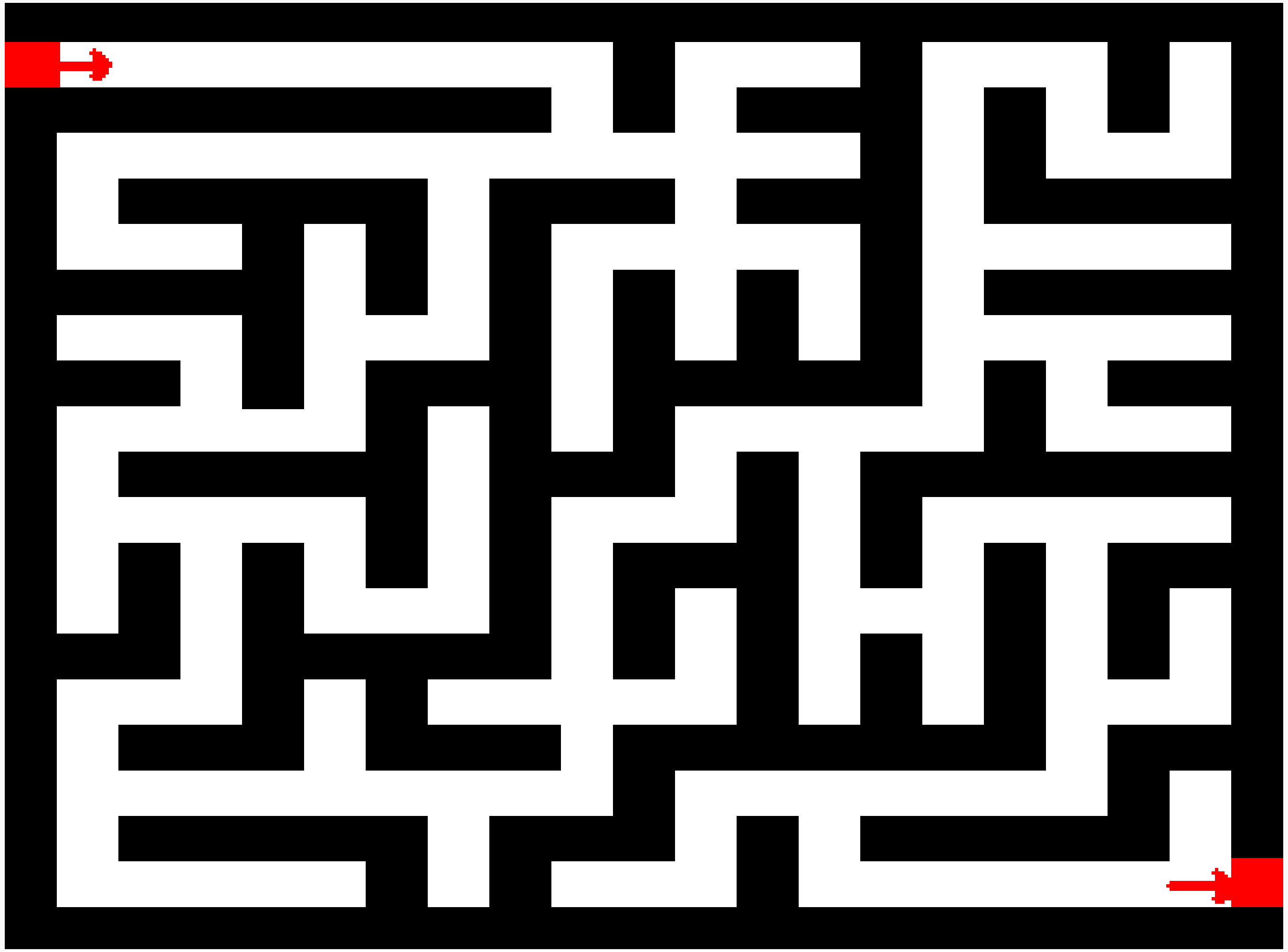
Structuri de date și algoritmi

Backtracking

Lect. Dr. Ing. Cristian Chilipirea – cristian.chilipirea@mta.ro

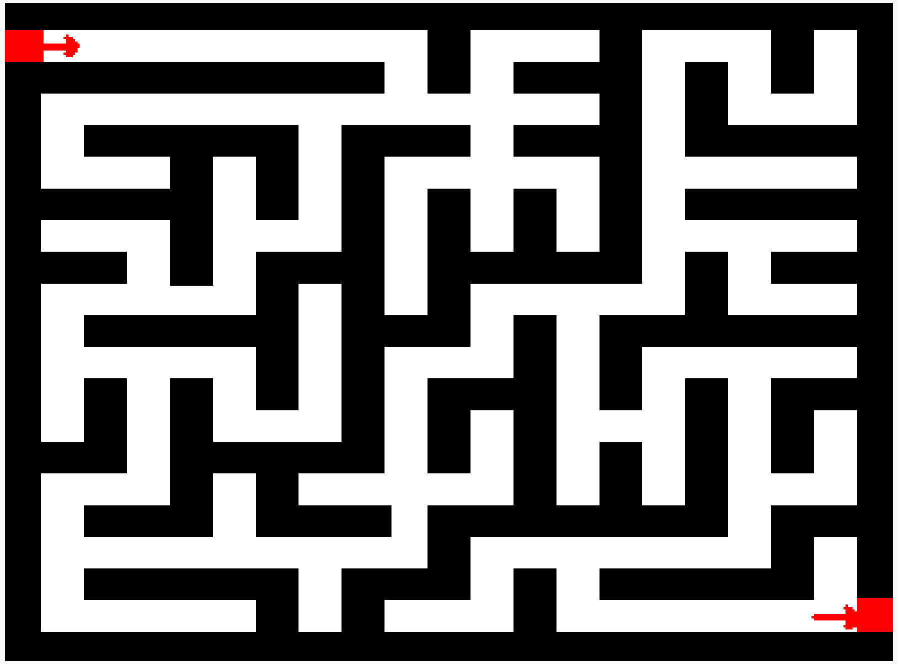
Rezolvarea unui labirint



Rezolvarea unui labirint

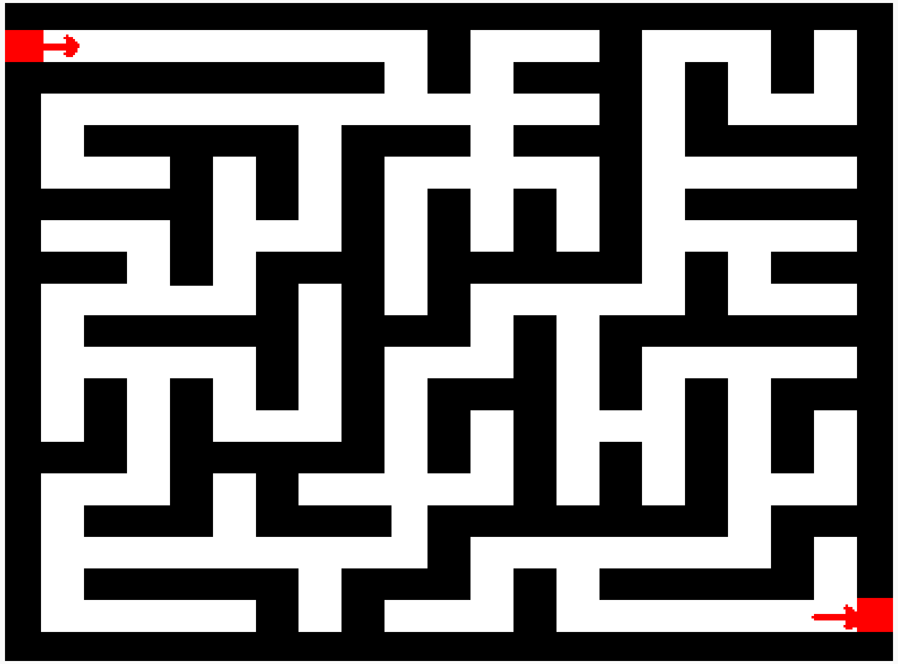
- Din orice poziție avem maxim 4 mutări:

- **SUS**
- **JOS**
- **STÂNGA**
- **DREAPTA**



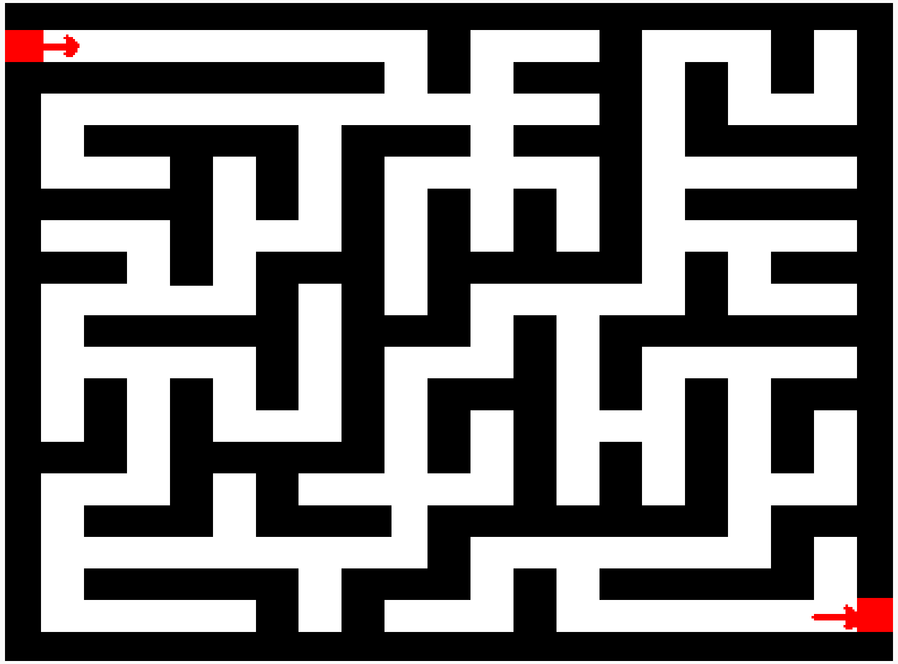
Rezolvarea unui labirint

- Unele mutări evident nu pot fi făcute. Nu putem intra într-un zid.
- Nu dorim să trecem printr-o celulă de 2 ori.



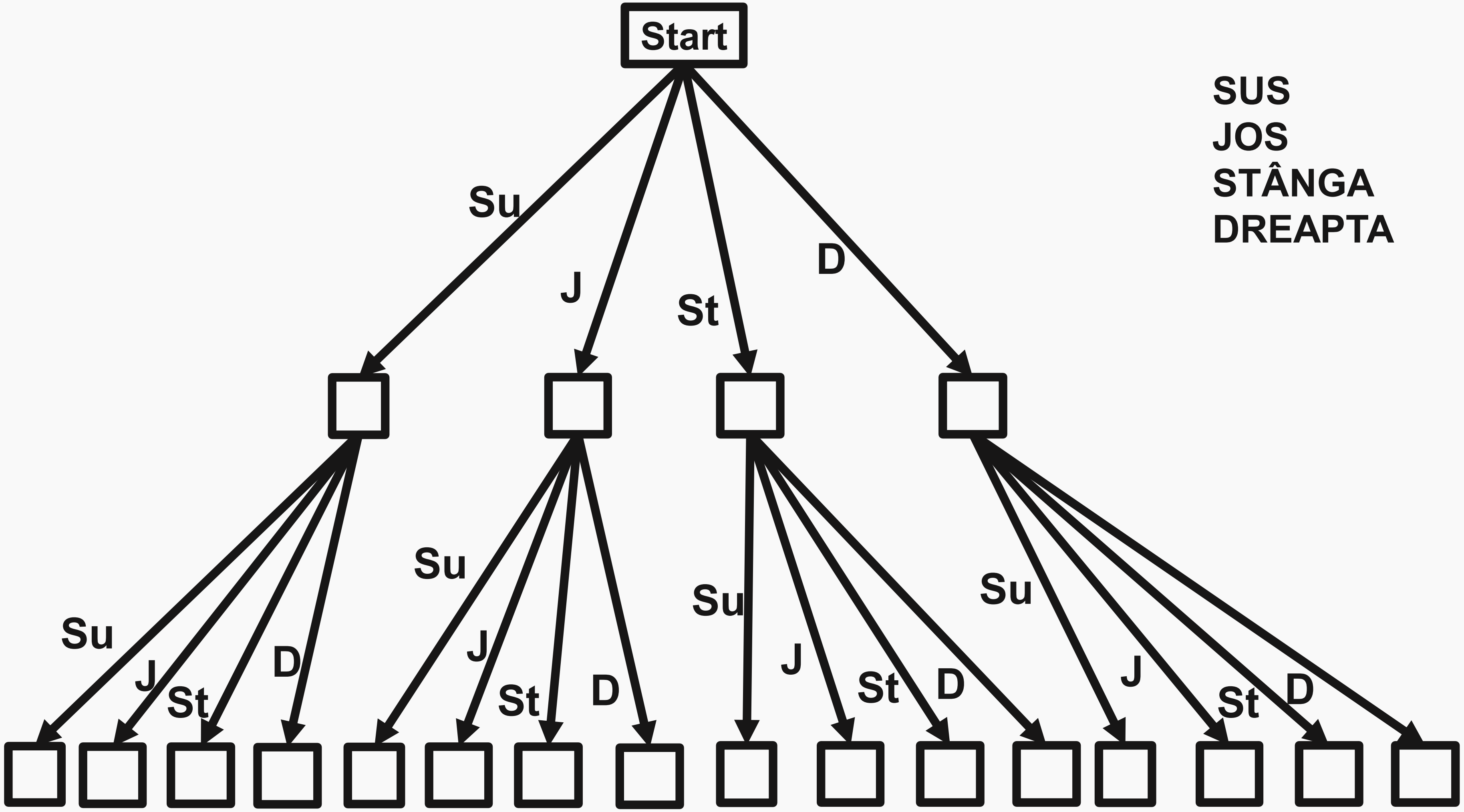
Rezolvarea unui labirint

- La fiecare pas putem lua maxim 4 decizii.
- Oricare ar fi decizia repetăm procesul până nu mai avem posibilitate de mișcare sau am ajuns la sfârșit.



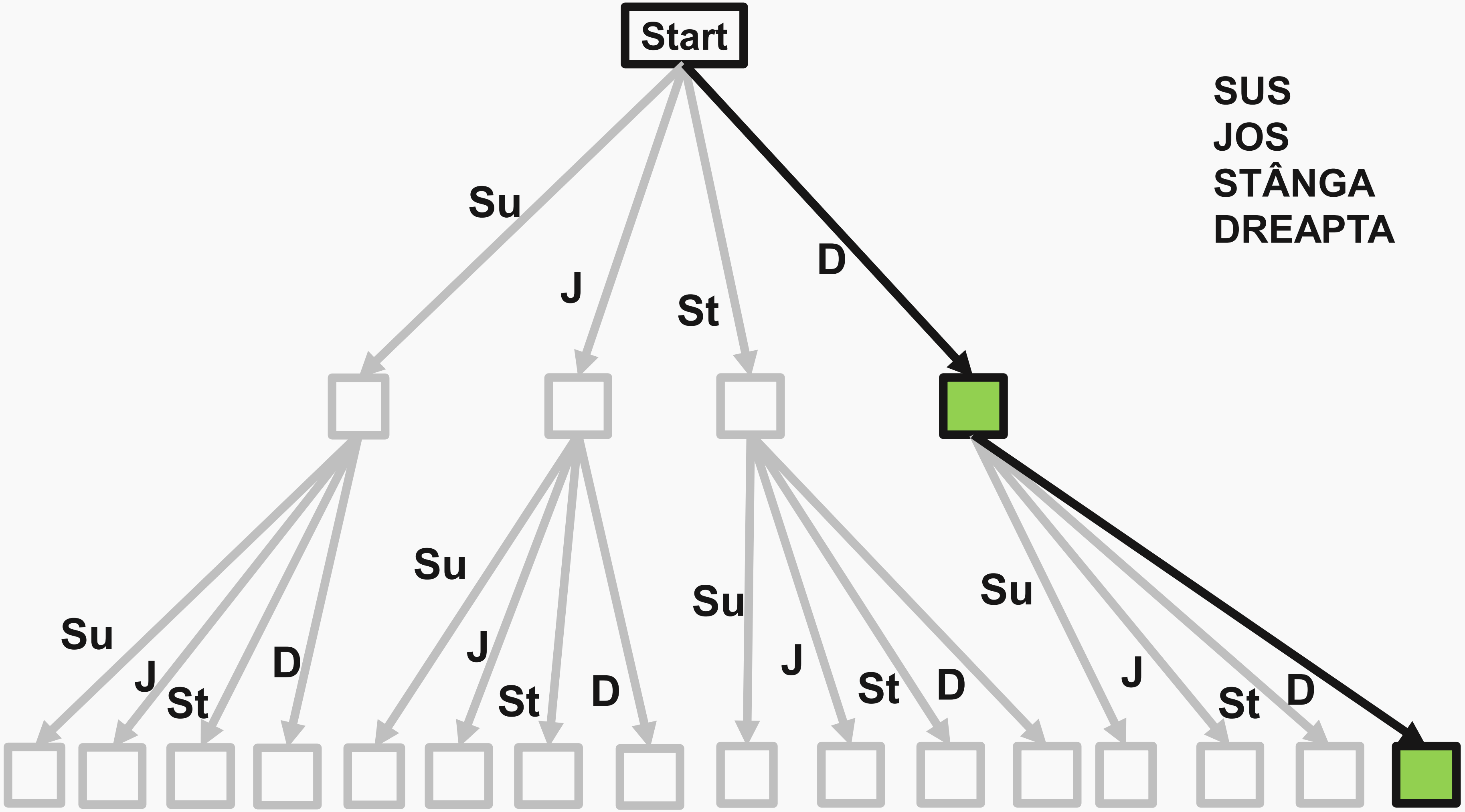
- Dacă reprezentăm toate deciziile avem un arbore.

Rezolvarea unui labirint



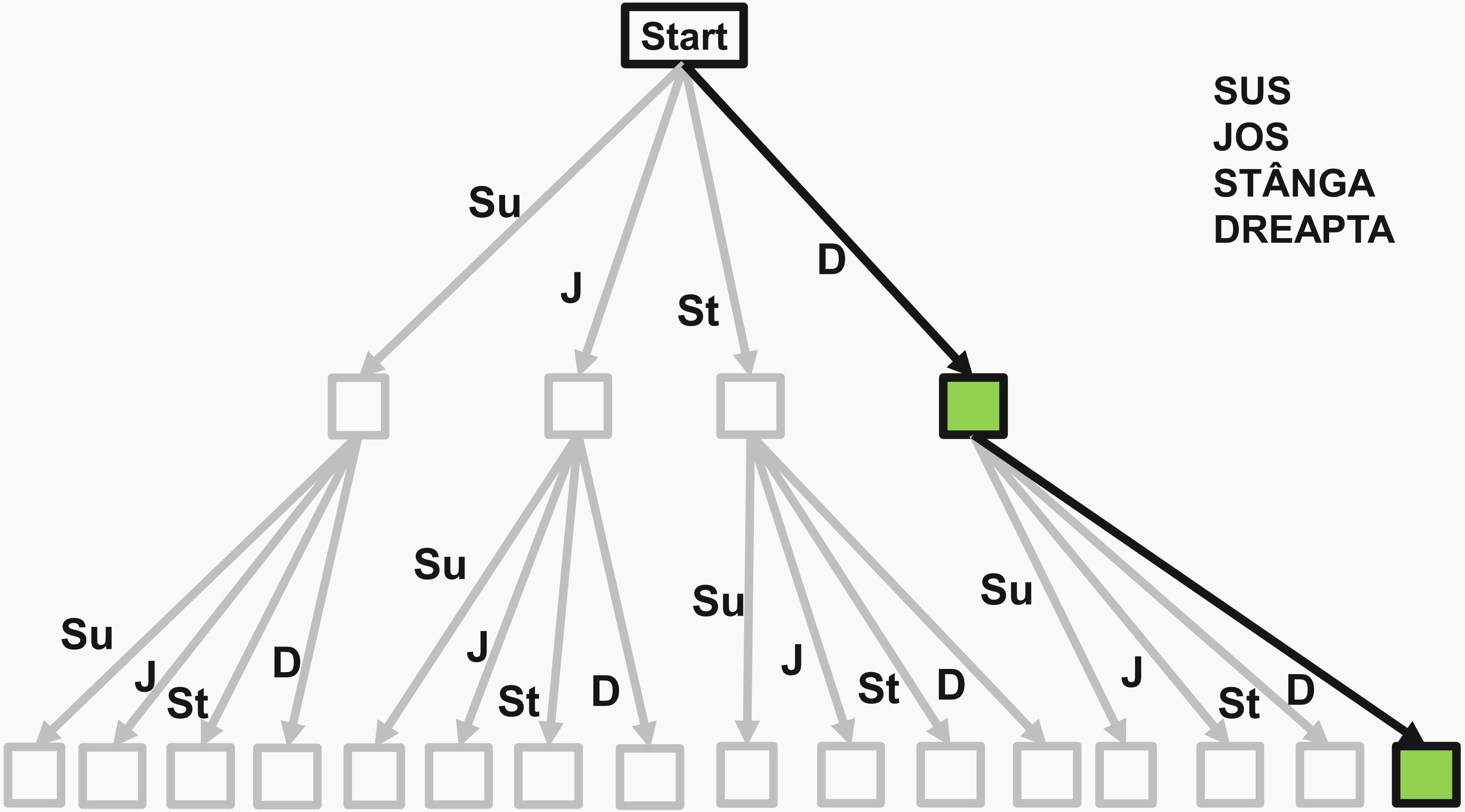
SUS
JOS
STÂNGA
DREAPTA

Rezolvarea unui labirint



SUS
JOS
STÂNGA
DREAPTA

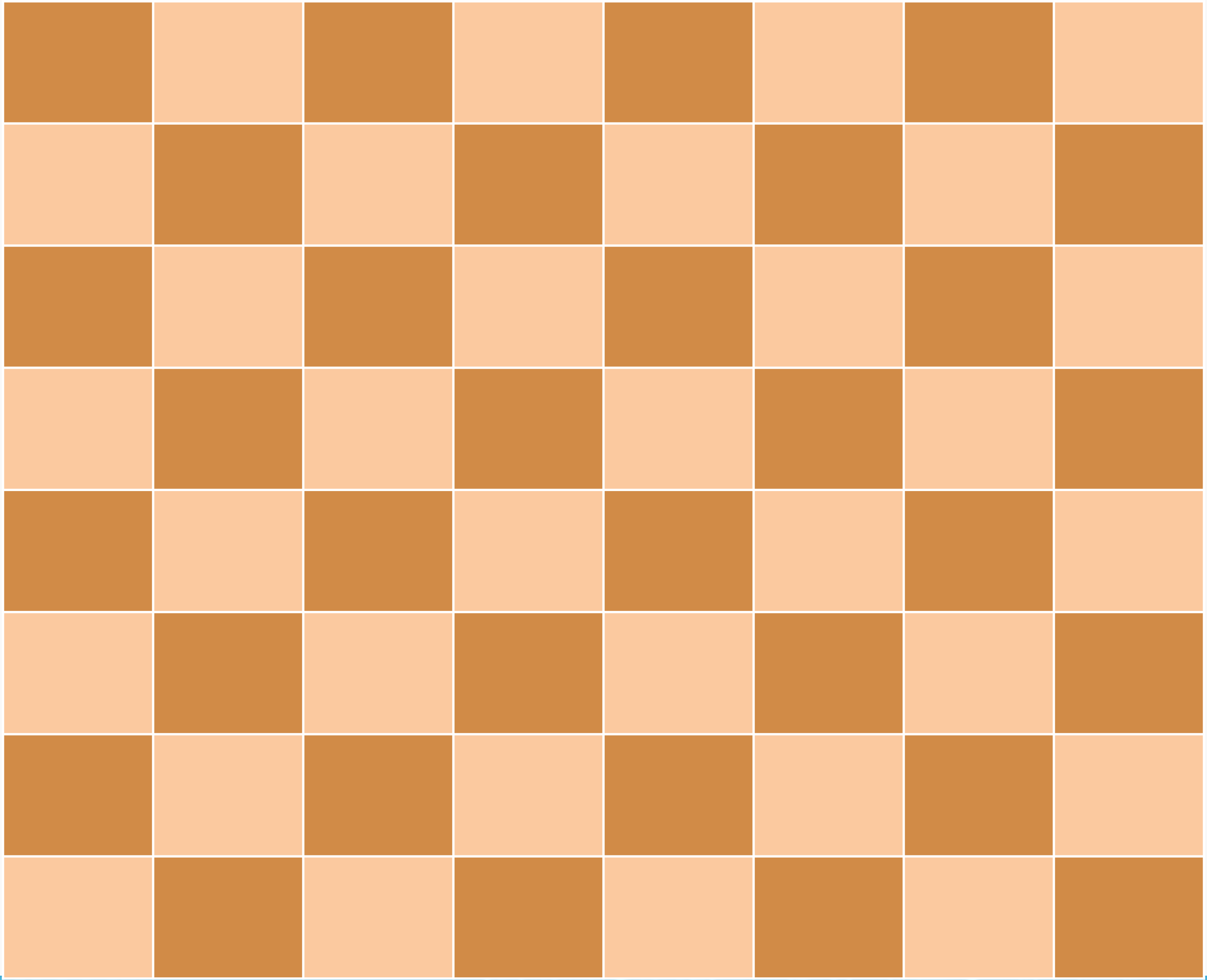
Rezolvarea unui labirint



SUS
JOS
STÂNGA
DREAPTA

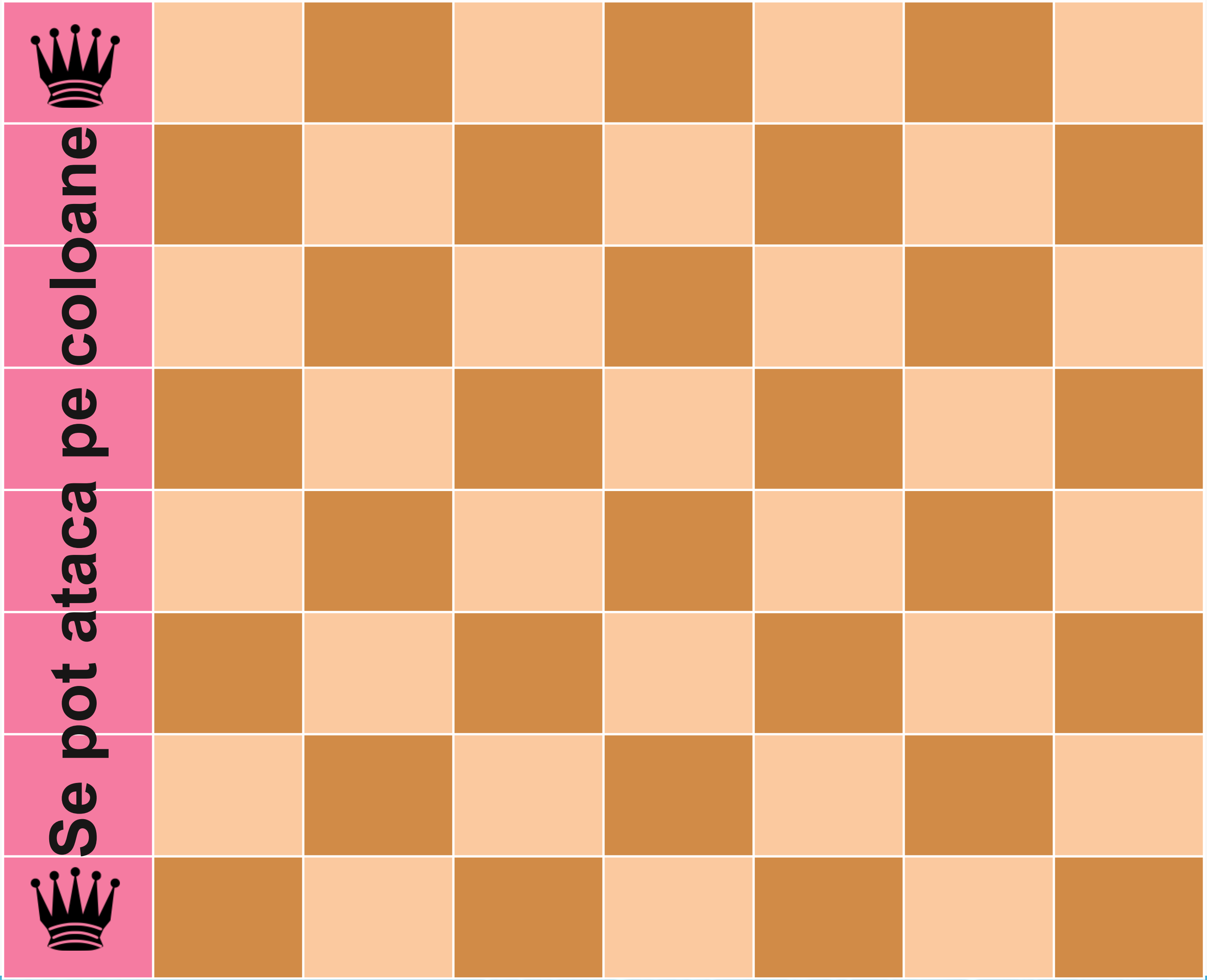
Garantat: Dacă labirintul are soluție va exista minim o frunză care ajunge la ieșire.

Problema reginelor

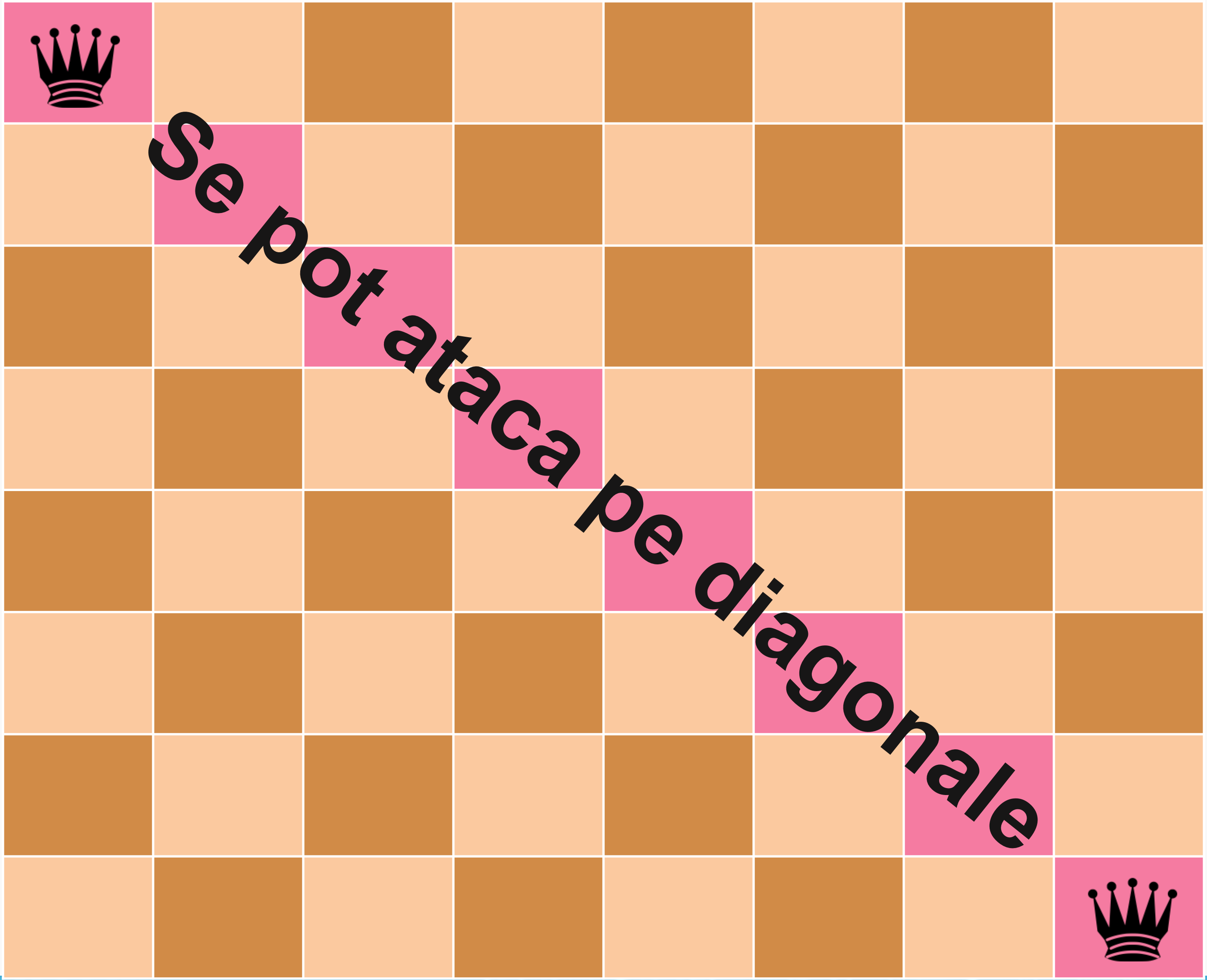


Problema reginelor

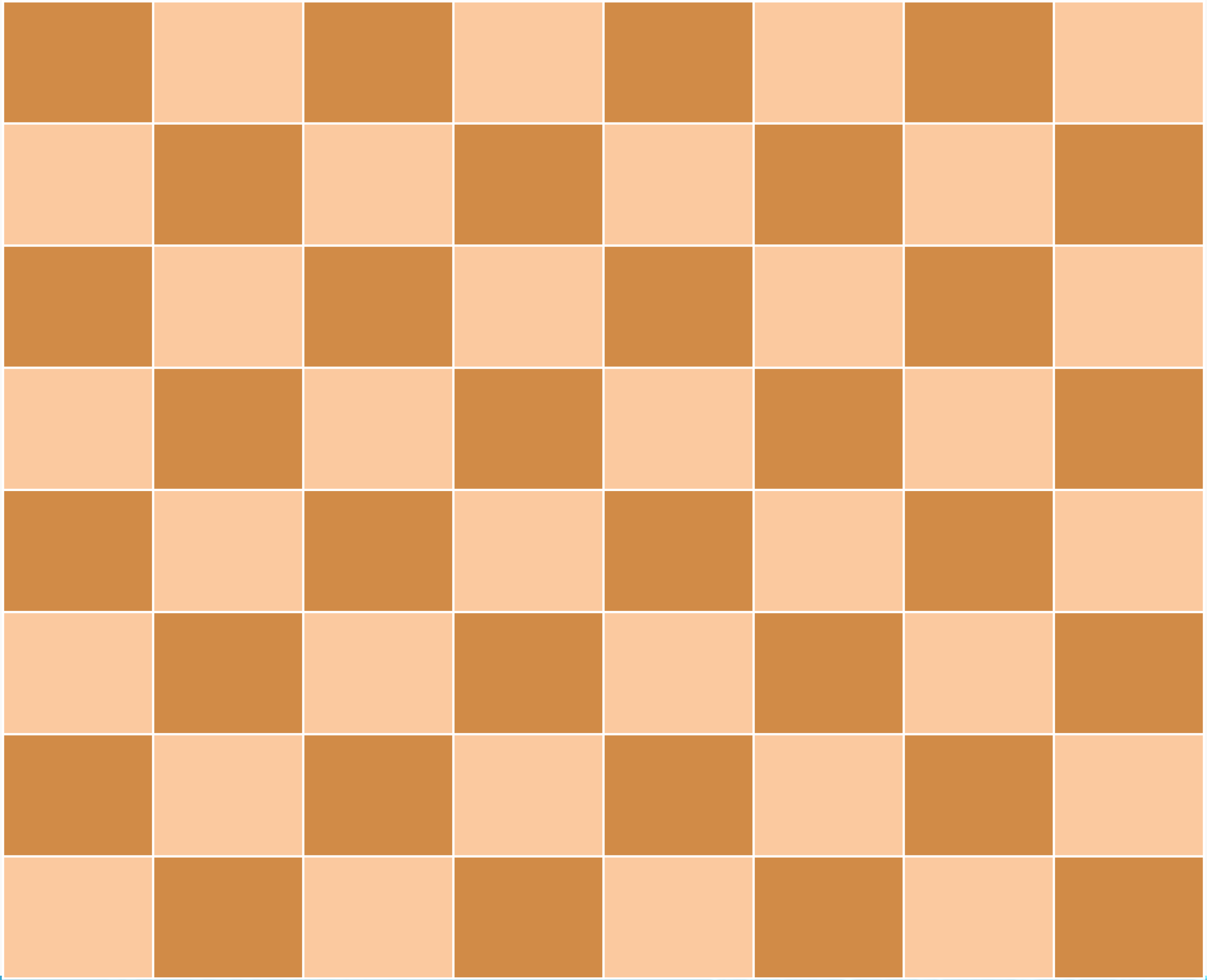
Problema reginelor



Problema reginelor

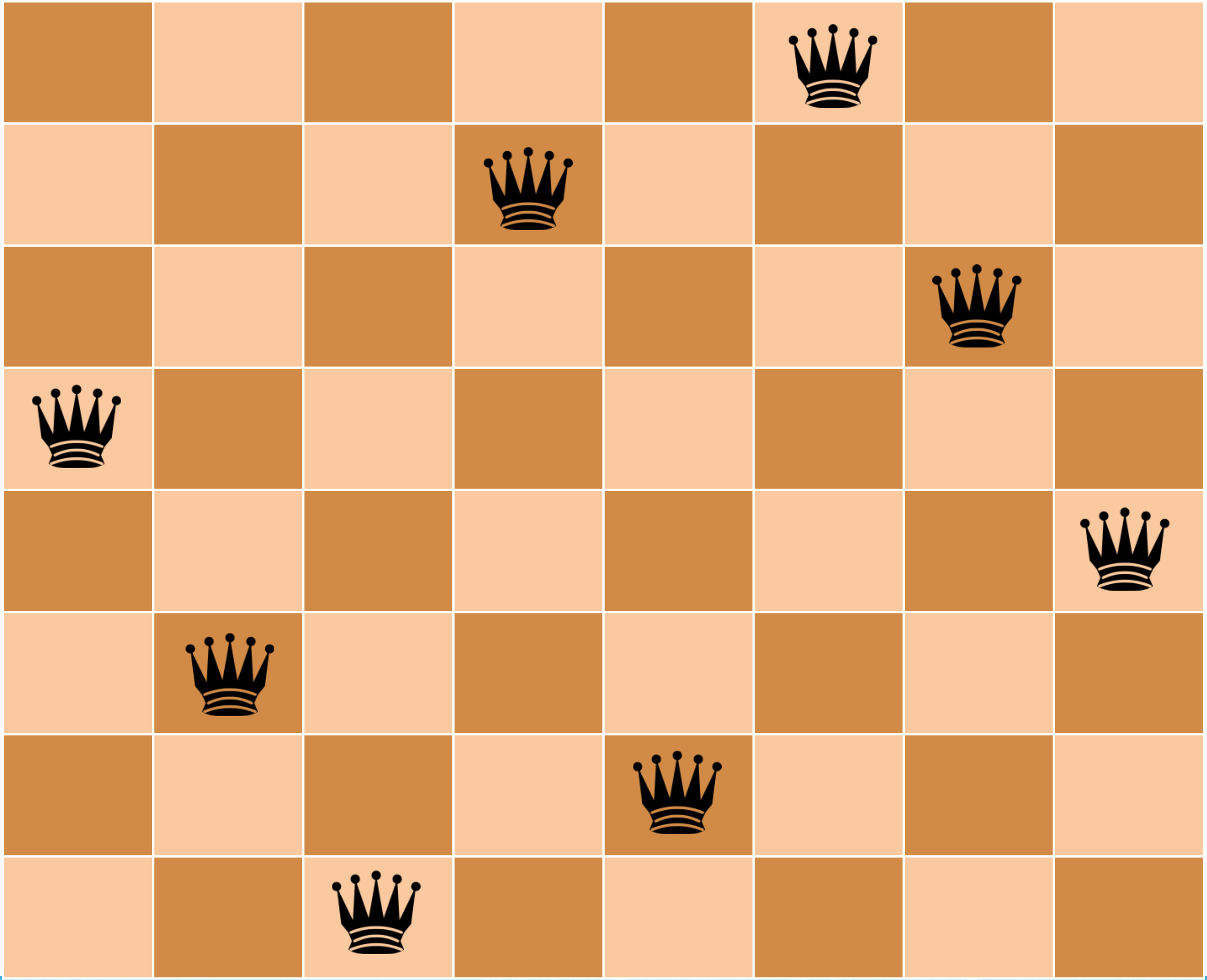


Problema reginelor

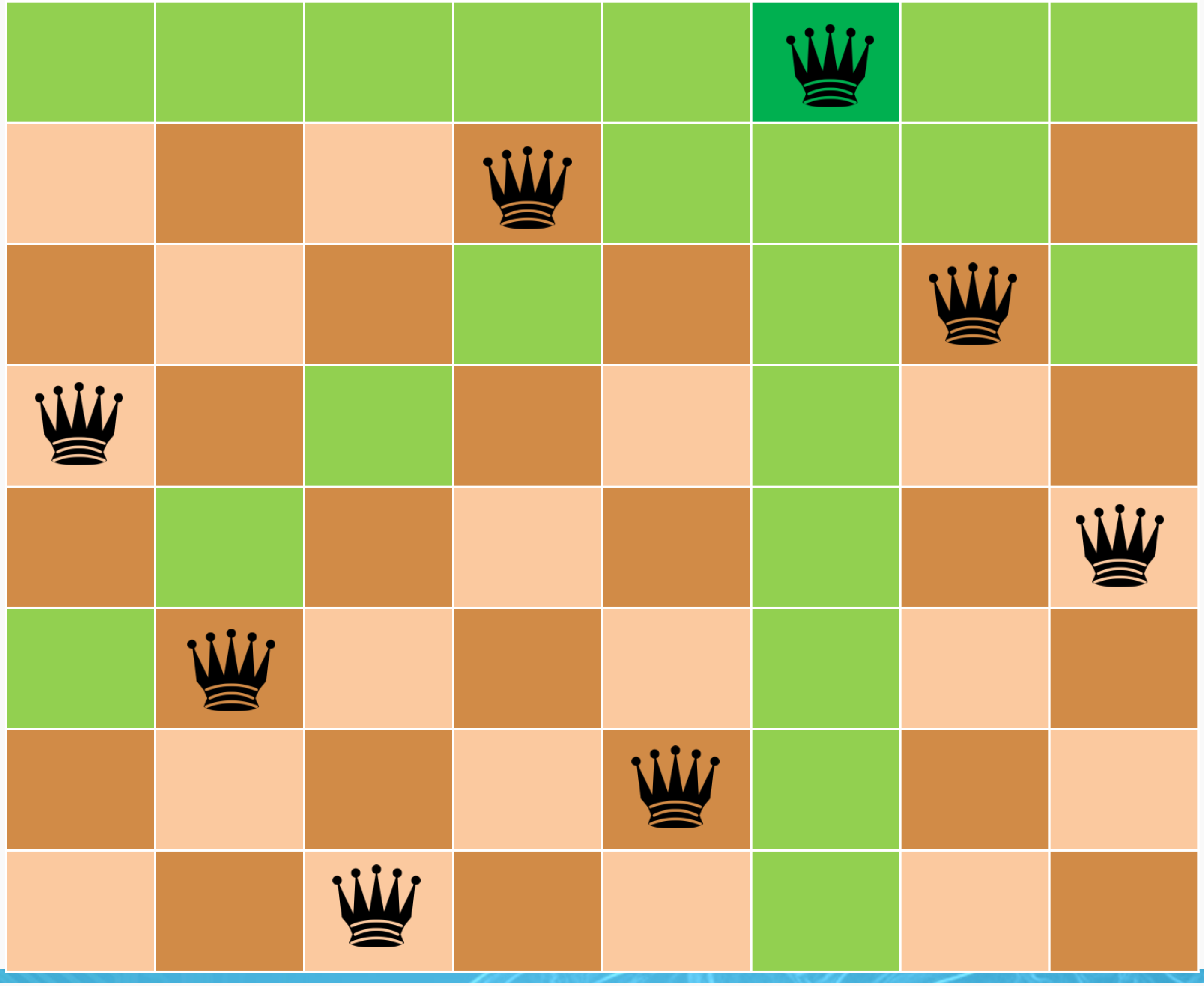


Vrem să așezăm 8 regine care NU se pot ataca

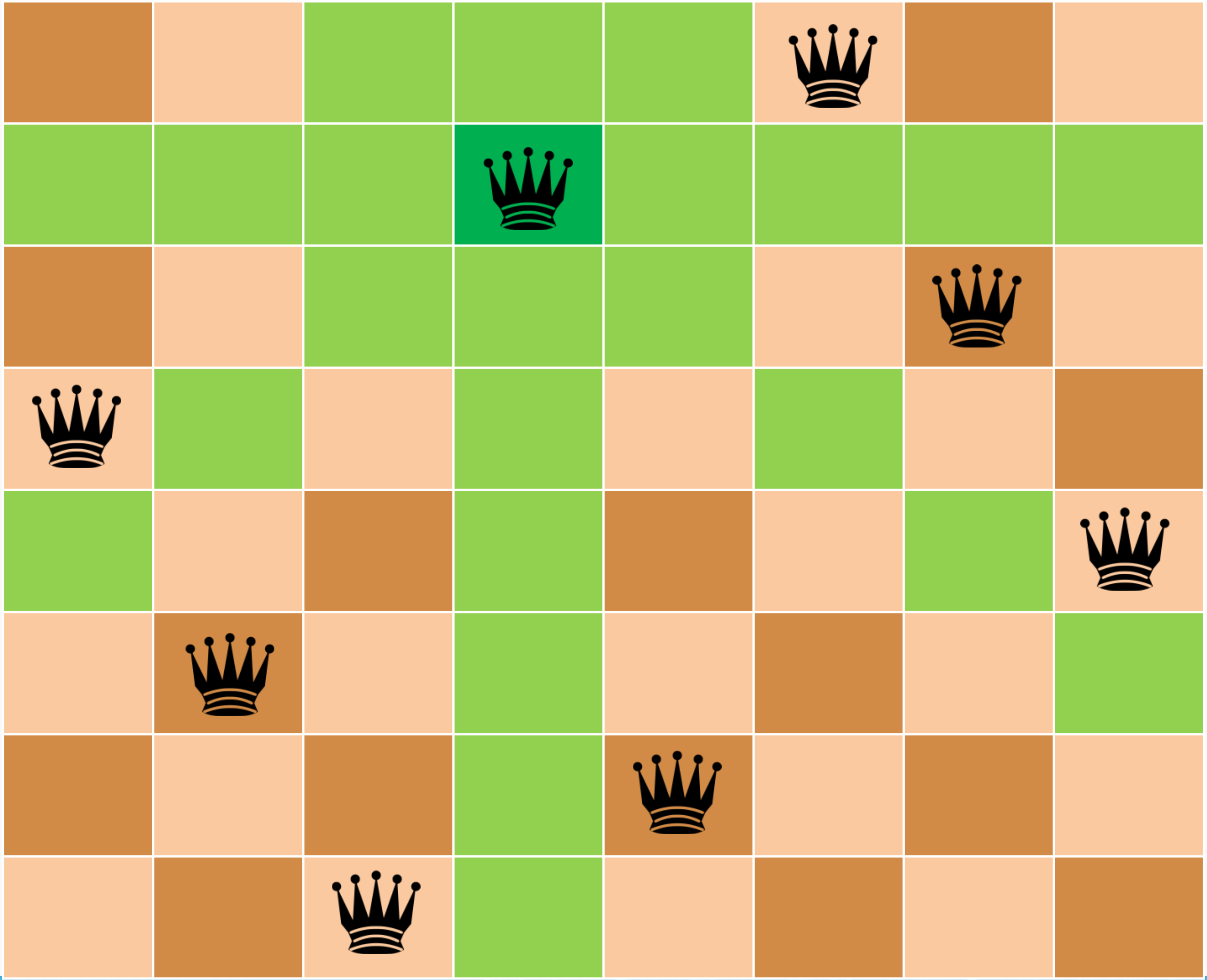
Problema reginelor – soluție



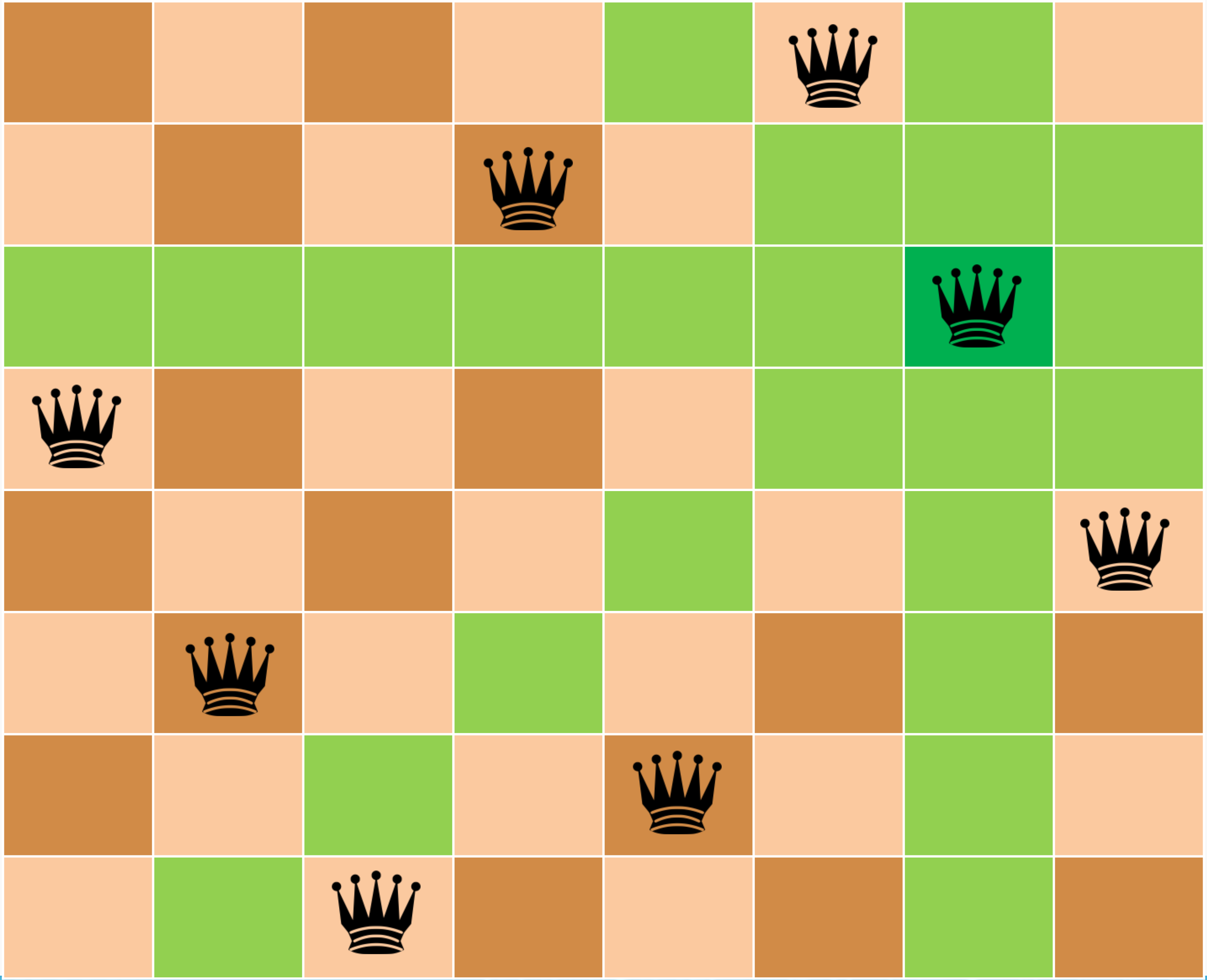
Problema reginelor – soluție



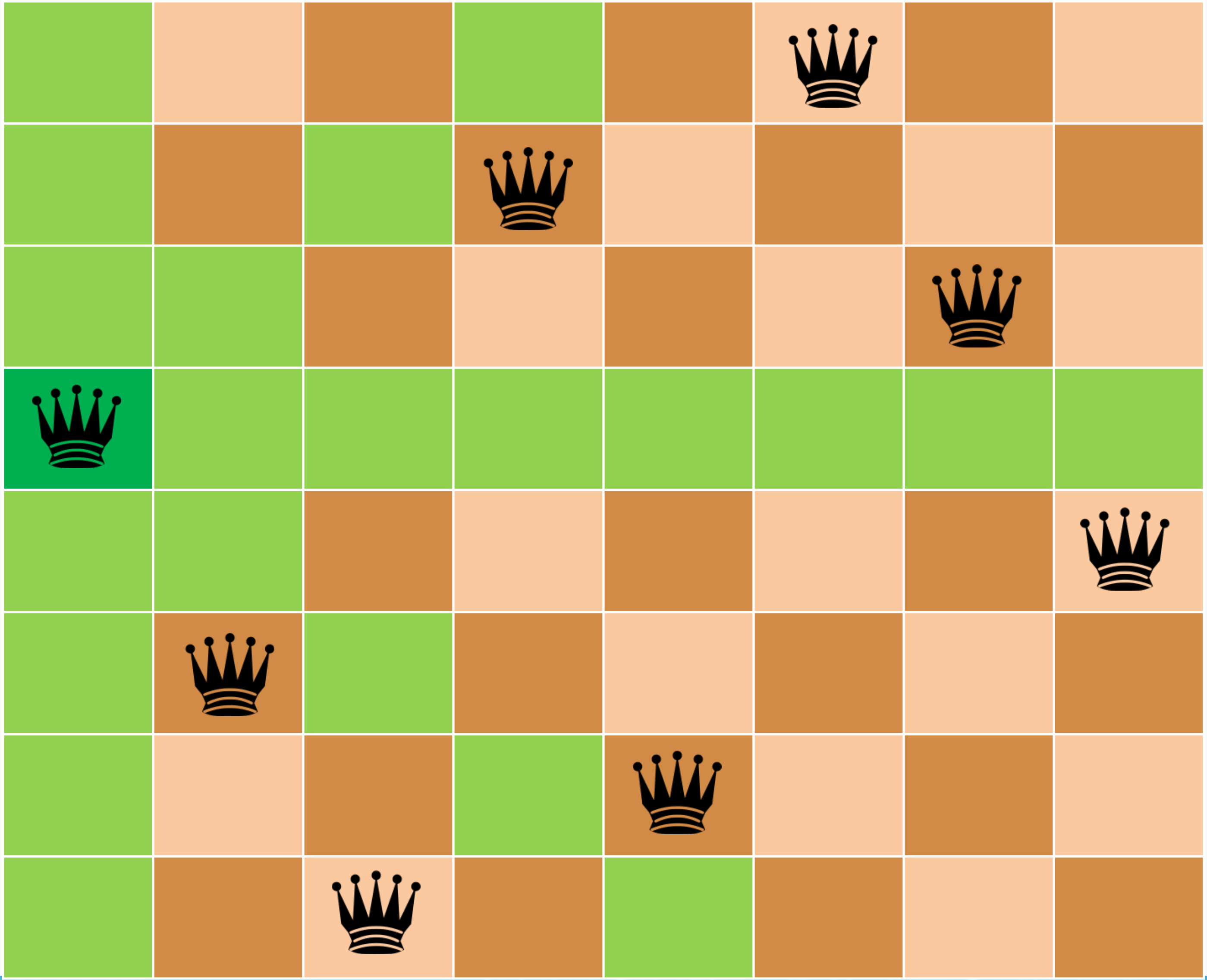
Problema reginelor – soluție



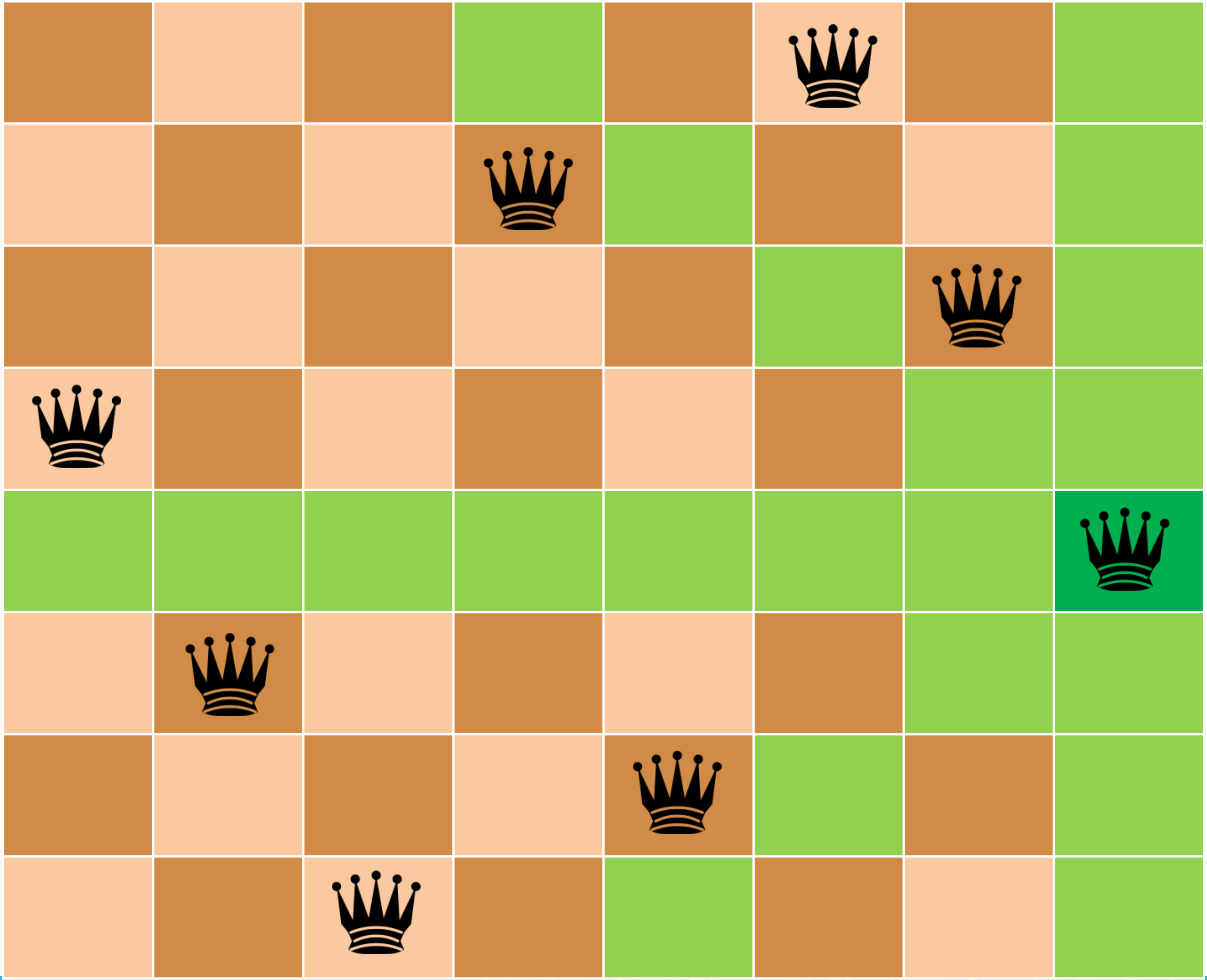
Problema reginelor – soluție



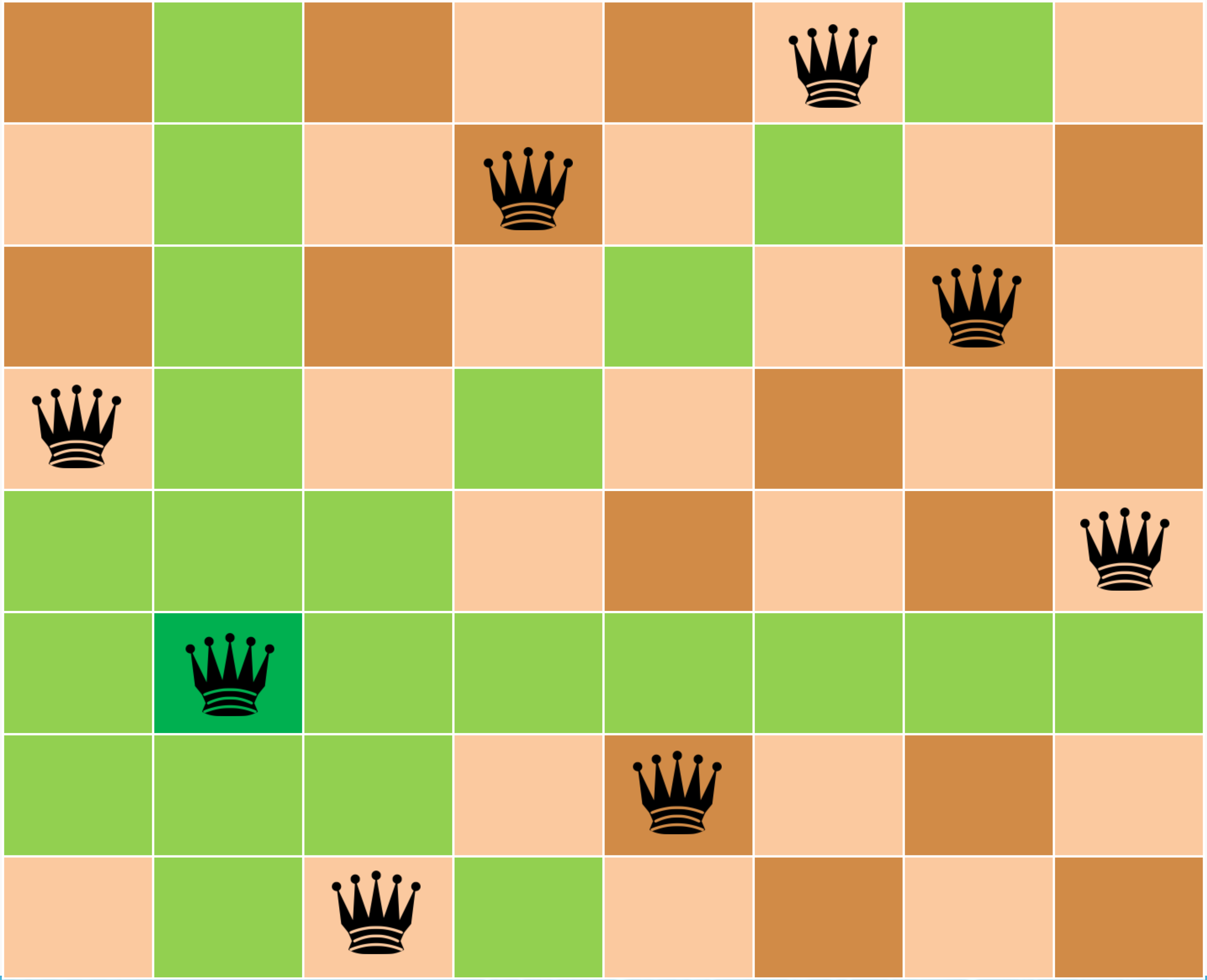
Problema reginelor – soluție



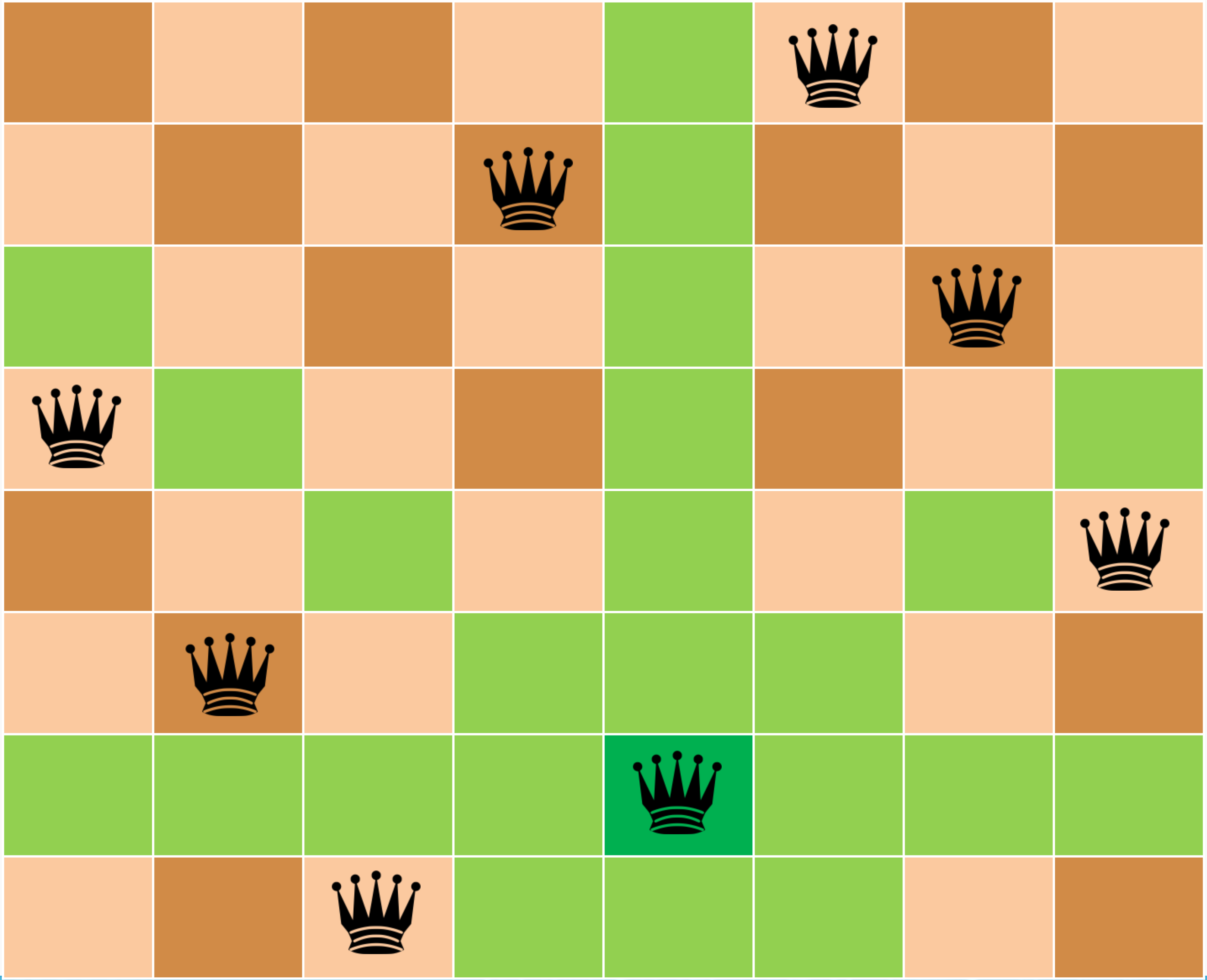
Problema reginelor – soluție



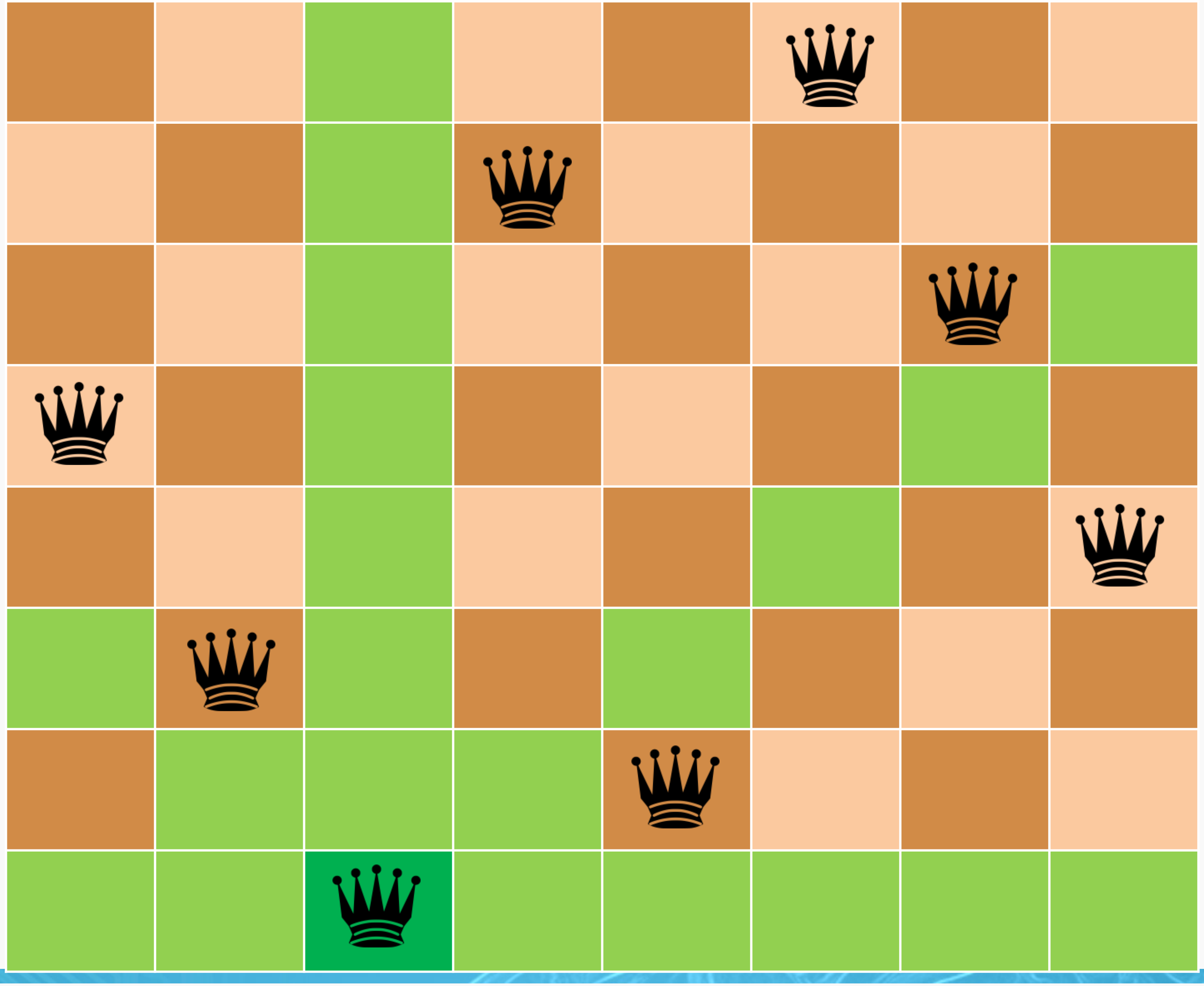
Problema reginelor – soluție



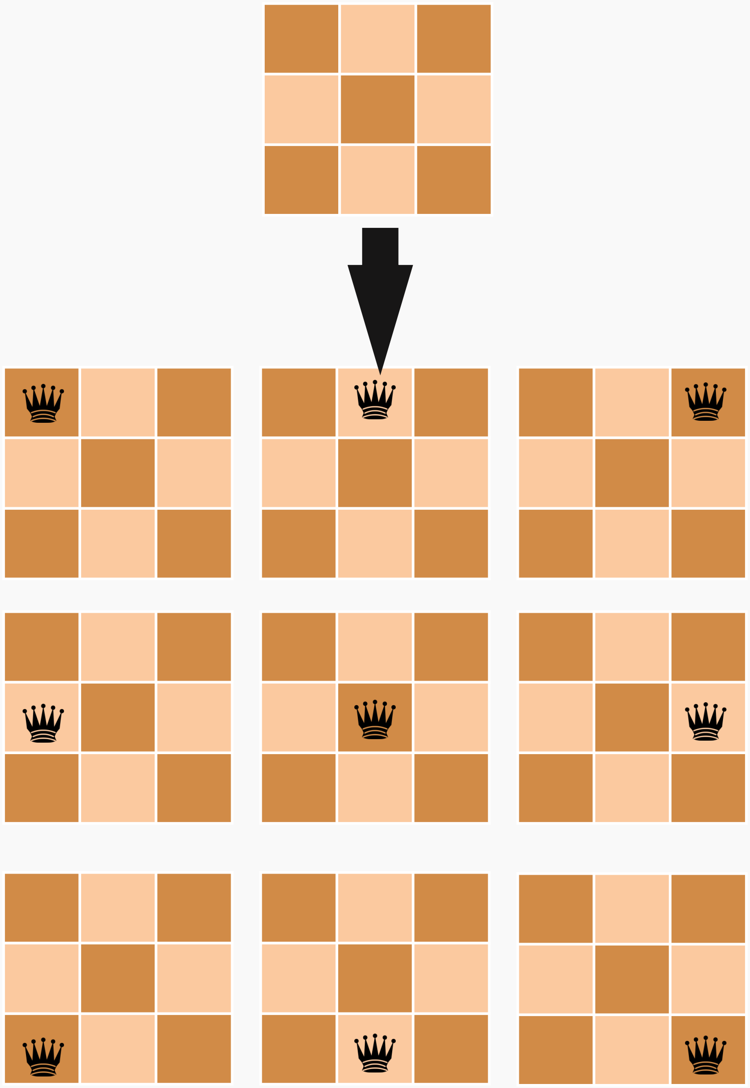
Problema reginelor – soluție



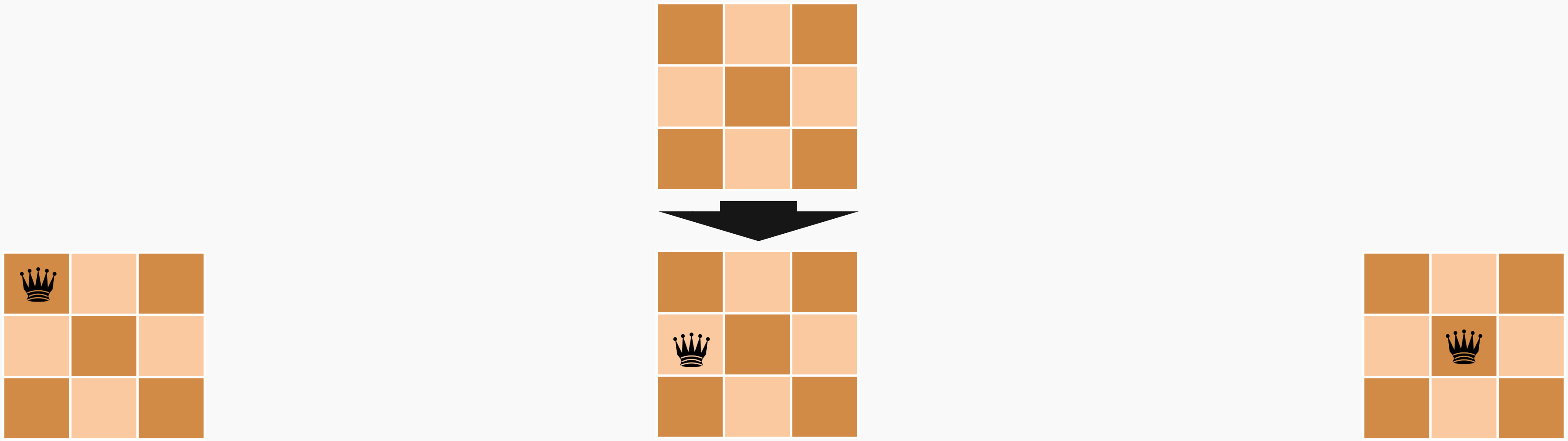
Problema reginelor – soluție



Problema reginelor

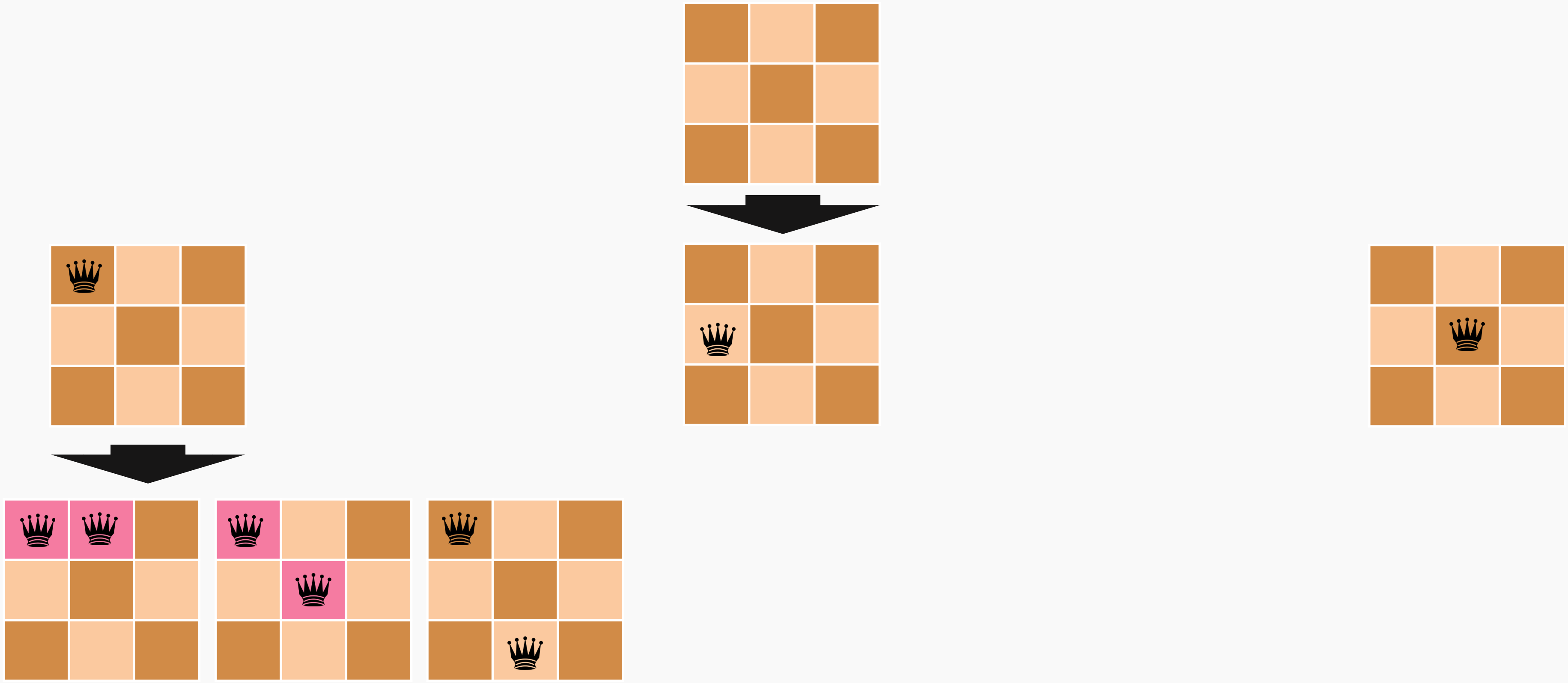


Problema reginelor

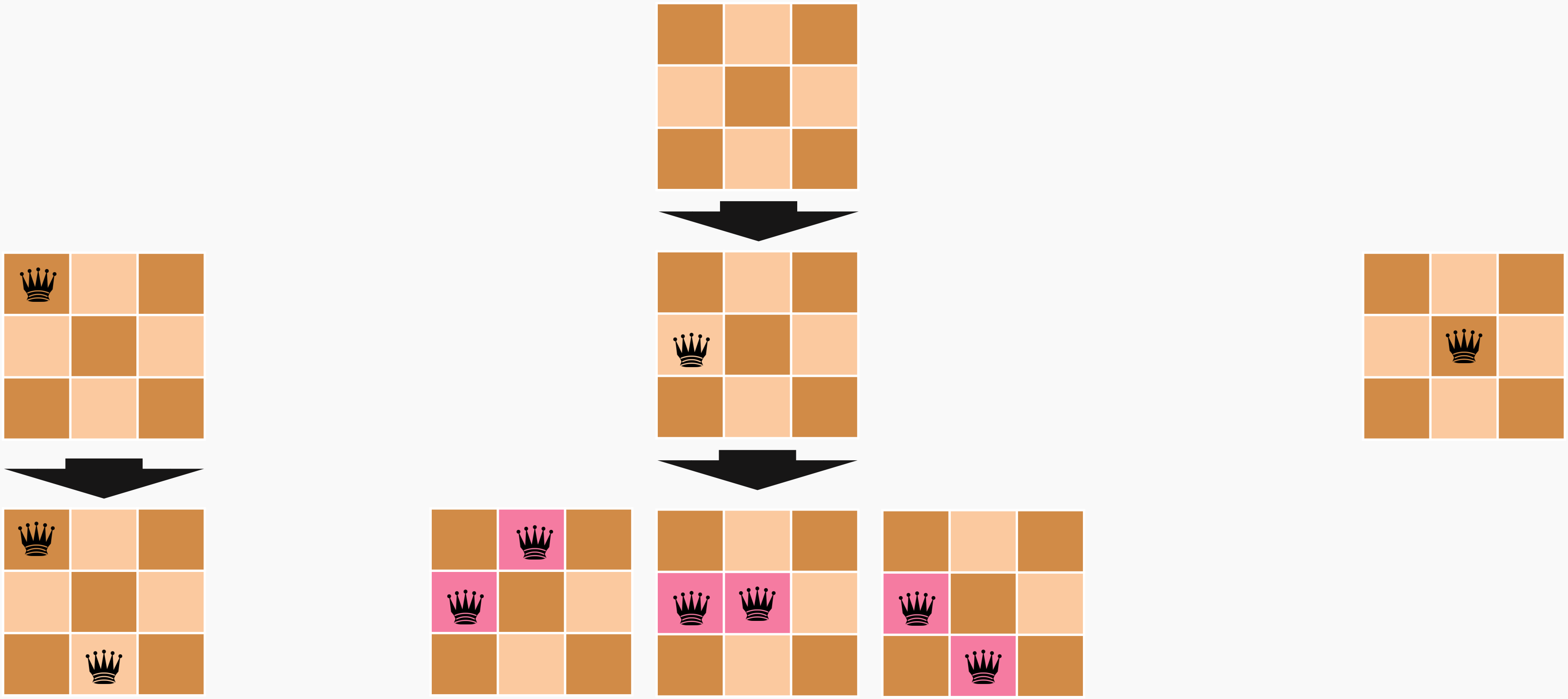


Simplificare: Știm că putem avea maxim o regină pe coloană și atâtea regine cât coloane. Putem astfel să completăm reginele coloană cu coloană.

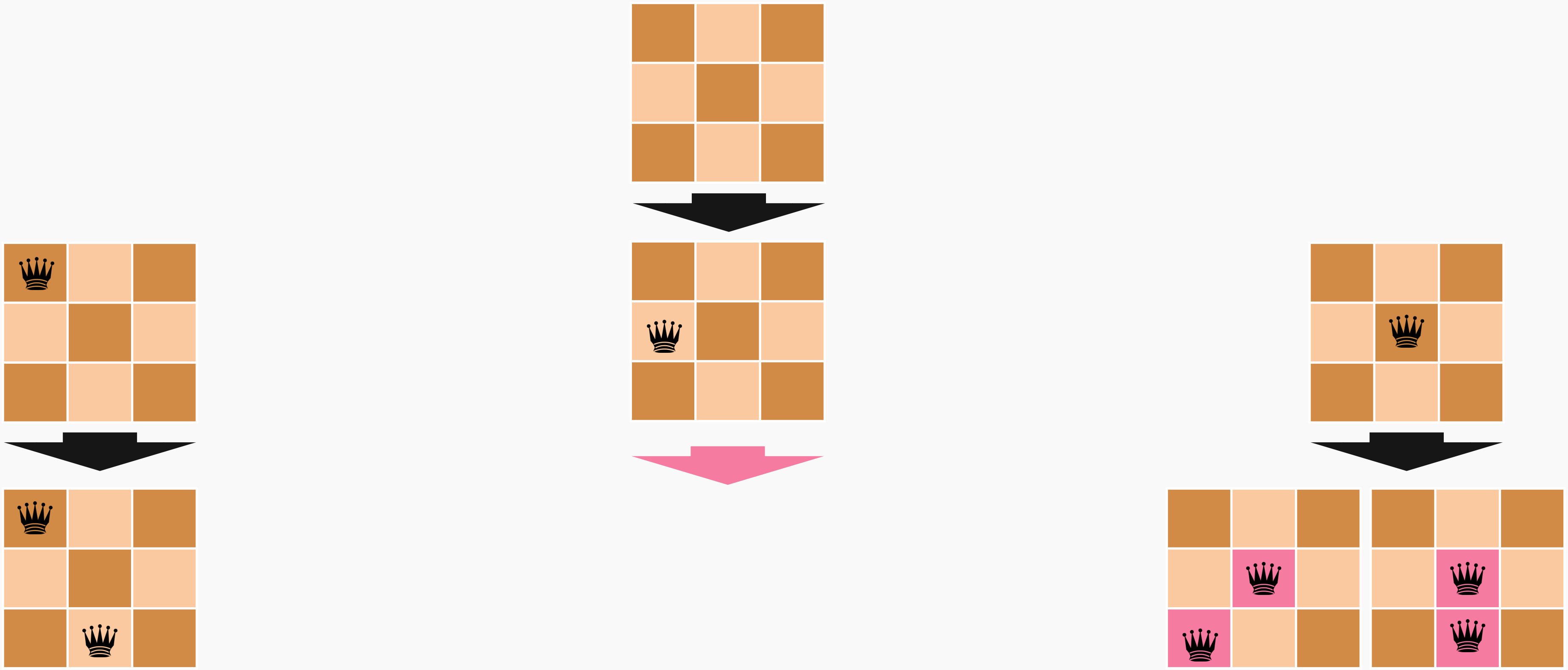
Problema reginelor



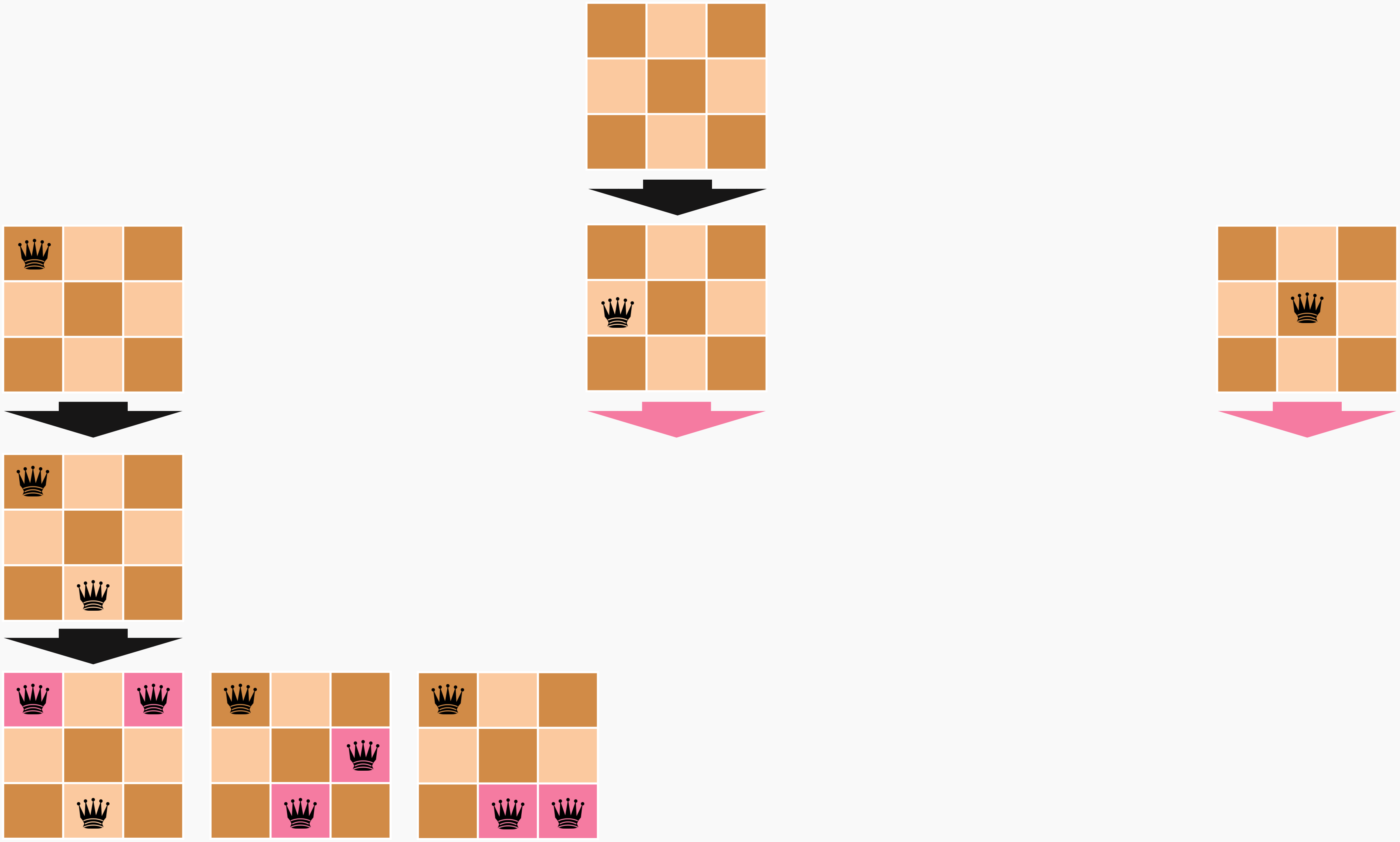
Problema reginelor



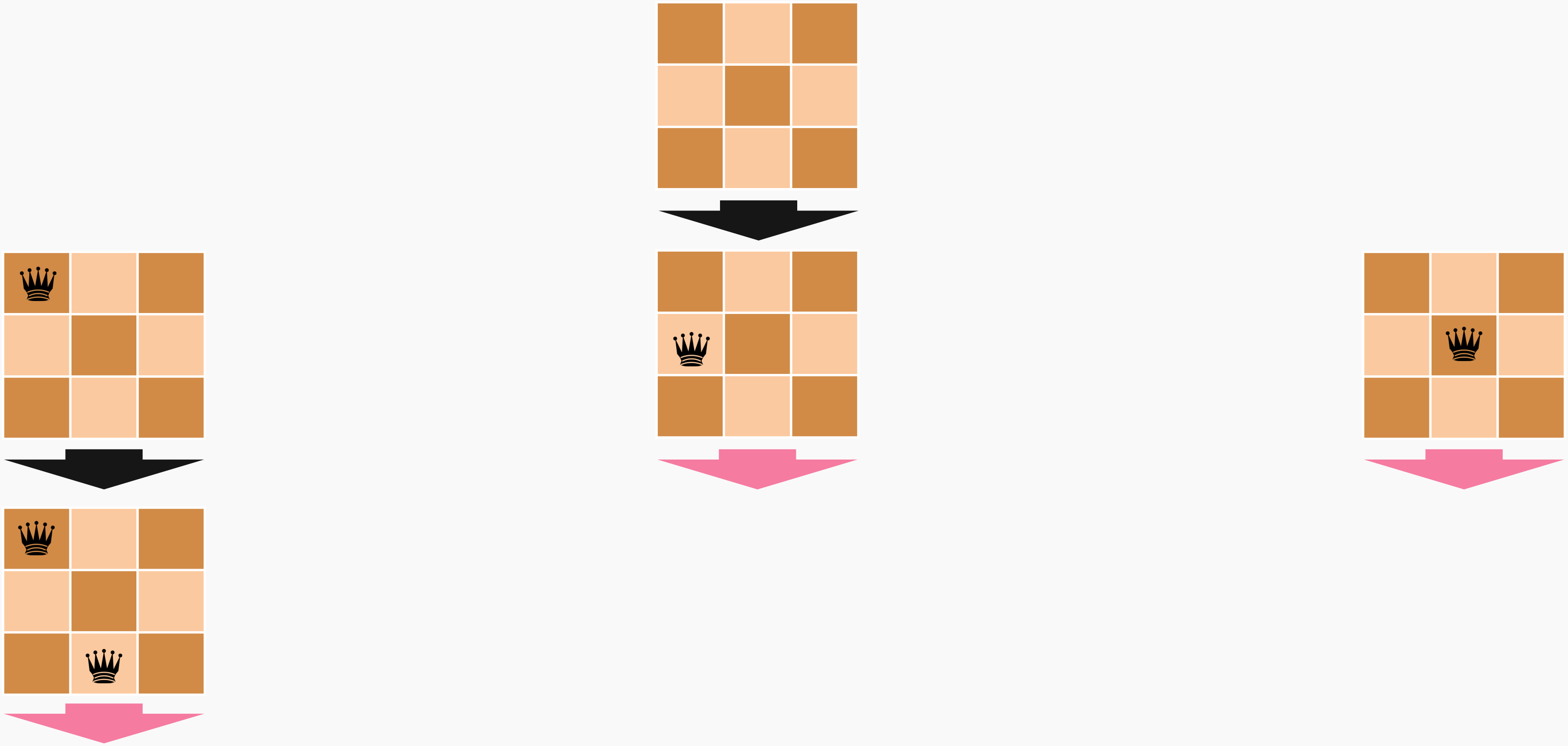
Problema reginelor



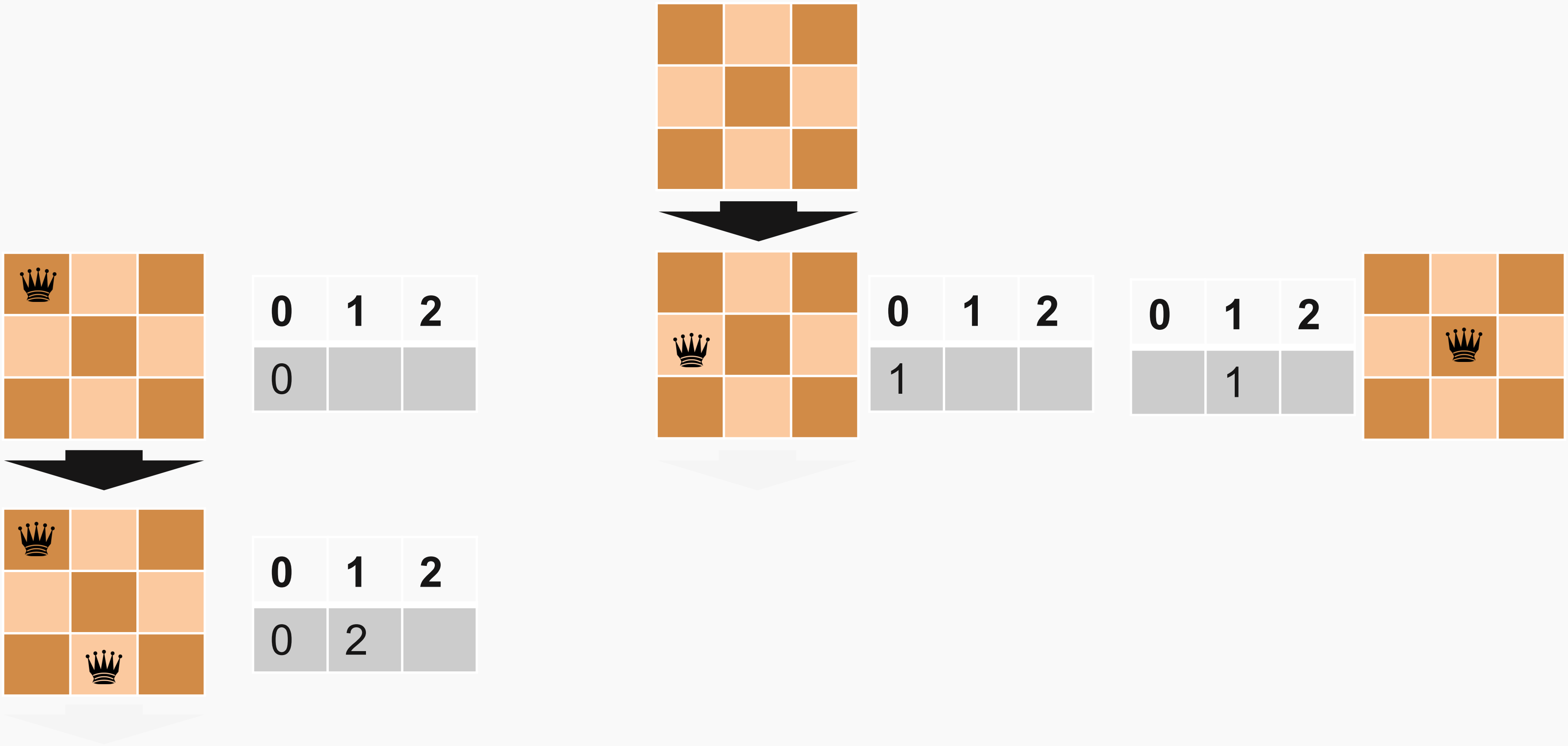
Problema reginelor



Problema reginelor

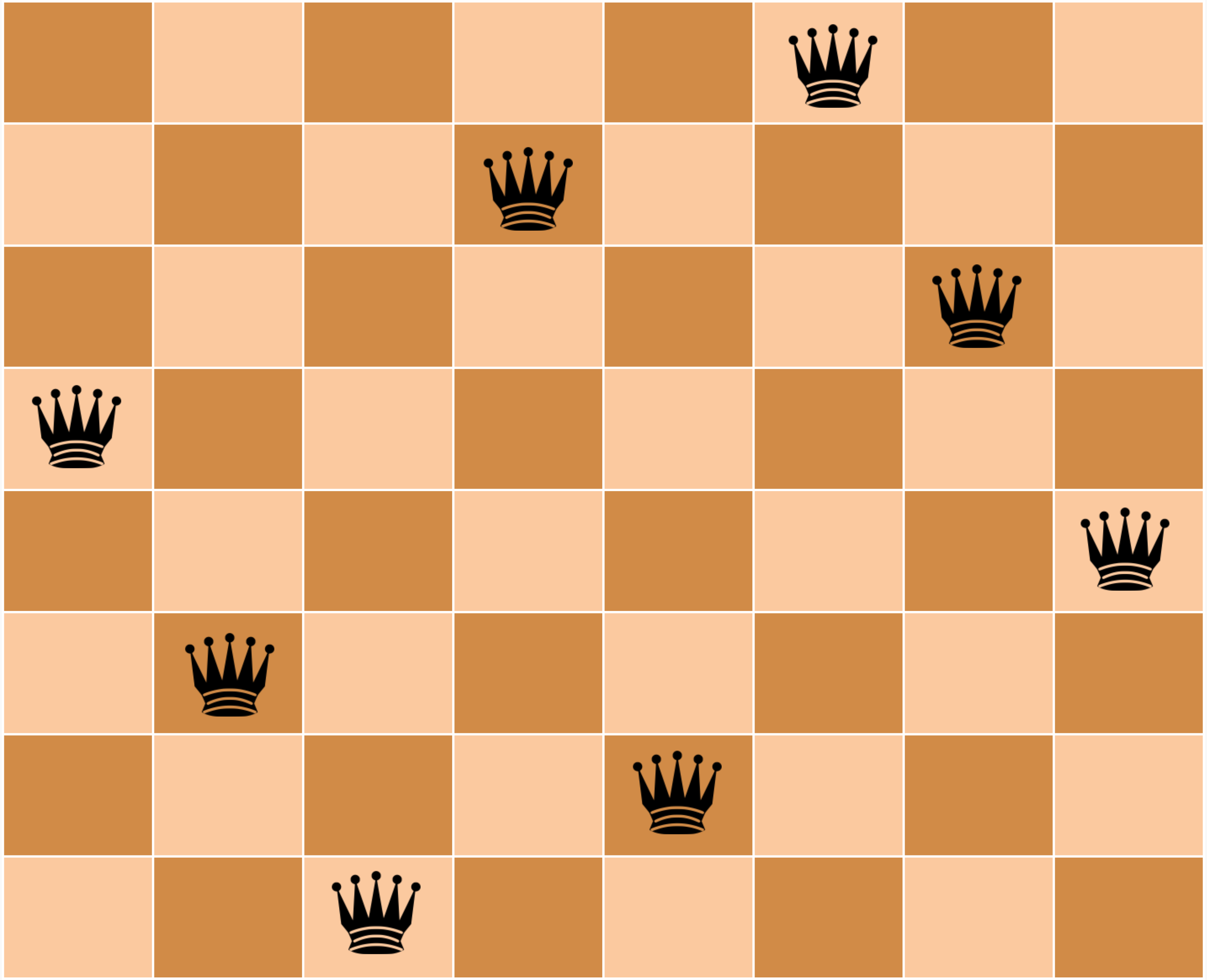


Problema reginelor



Dacă avem doar o regină pe coloană putem să nu folosim o matrice ci un vector. Index-ul vectorului reprezintă coloana iar valoarea reprezintă linia.

Problema reginelor – soluție



0	1	2	3	4	5	6	7
3	5	7	1	6	0	2	4

Modelarea problemelor

- Foarte multe soluții pentru probleme pot fi modelate ca un arbore.
- Fiecare nod al arborelui reprezintă o soluție parțială.
- Cu cât mergem mai adânc, mai jos, în arbore soluția crește.
- Unele frunze pot fi soluții.

- E important ca verificarea soluției să se poate face mai rapid decât găsirea ei.

- Dacă putem construi un astfel de arbore putem găsi soluții printr-o simplă parcurgere a sa.

Reminder DFS

```
int visited[N] = { 0 };
void DFS(vertex currentNode) {
    visited[currentNode.name] = 1;
    for (int i = 0; i < currentNode.numNeighbors; i++) {
        if (!visited[currentNode.neighbors[i]->name])
            DFS(*(currentNode.neighbors[i]));
    }
}
```

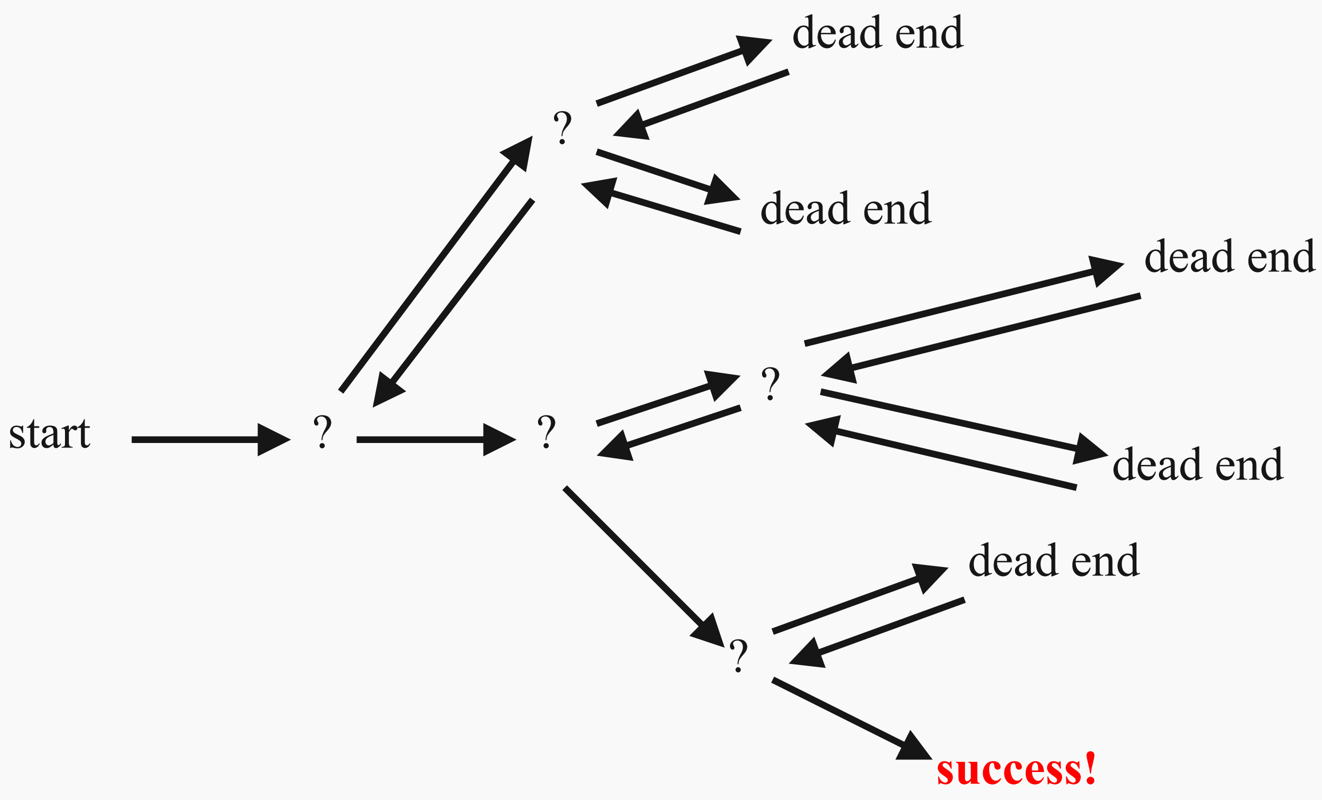
Backtracking

```
void backtracking(possiblePartialSolution PPS) {
  if (canReject(PPS))
    return;
  if (isSolution(PPS))
    printSolution(PPS);
  PPS = increaseStep(PPS); // Mai jos pe arbore
  while (hasChoiceAtStep(PPS)) { // Mai sunt copiii?
    PPS = getNextChoiceAtStep(PPS); // Următor copil
    backtracking(PPS);
  }
}
```

De ce backtracking și nu DFS?

- Nu este necesar să ținem avem tot arborele, știind structura sa putem să lucrăm cu un singur nod la un moment dat.

Căutarea progresivă a unei soluţii



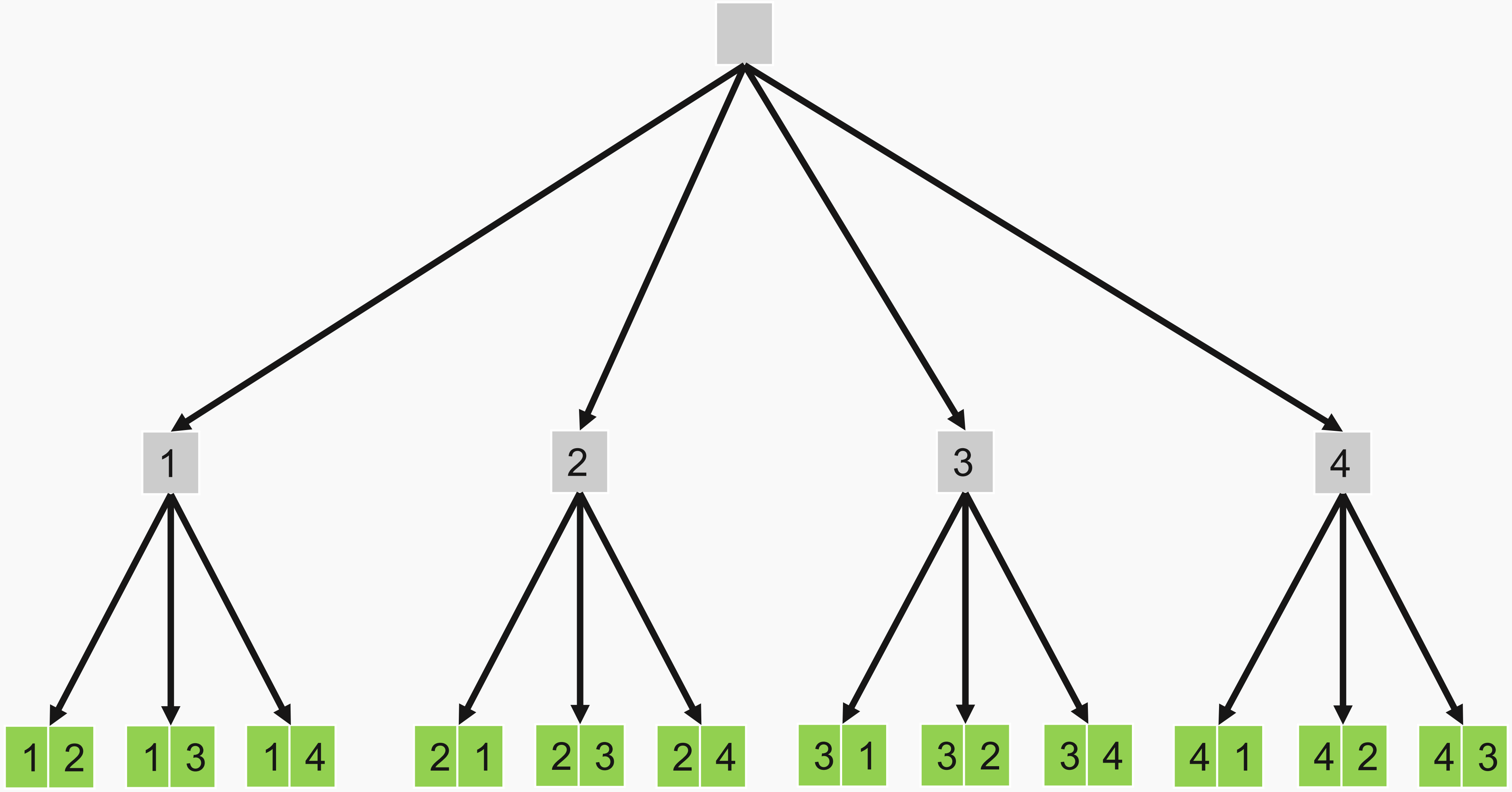
Problemă: generarea aranjamentelor

- Aranjamante de 4 luate câte 2:

{1,2},{1,3},{1,4},{2,1},{2,3},{2,4},{3,1},{3,2},{3,4},{4,1},{4,2},{4,3}

- Aranjamente de n luate câte k sunt toate submulţimile de k elemente : $\{x_1, x_2, \ldots x_k\}, x_i \neq x_j, x_i \in \{1,2 \ldots n\}$

Problemă: generarea aranjamentelor



Backtracking algorithm

```
void backtracking(possiblePartialSolution PPS) {
   if (canReject(PPS))
      return;
   if (isSolution(PPS))
      printSolution(PPS);
   PPS = increaseStep(PPS); // Mai jos pe arbore
   while (hasChoiceAtStep(PPS)) { // Mai sunt copiii?
      PPS = getNextChoiceAtStep(PPS); // Următor copil
      backtracking(PPS);
   }
}
```

Problemă: generarea aranjamentelor

```c
#define N 4
#define k 2

//ARANGEMENTS
typedef struct possiblePartialSolution {
    int originalVector[N] = { 0, 2, 4, 8 };
    int arrangement[k] = { -1,-1 };
    int step = -1;
    int choice = -1;
}partialSolution;
```

```c
void printSolution(possiblePartialSolution PPS) {
    for (int i = 0; i < k; i++)
        printf("%3i", PPS.arrangement[i]);
    printf("\n");
}
```

Backtracking algorithm

```
void backtracking(possiblePartialSolution PPS) {
  if (canReject(PPS))
    return;
  if (isSolution(PPS))
    printSolution(PPS);
  PPS = increaseStep(PPS); // Mai jos pe arbore
  while (hasChoiceAtStep(PPS)) { // Mai sunt copiii?
    PPS = getNextChoiceAtStep(PPS); // Următor copil
    backtracking(PPS);
  }
}
```

Problemă: generarea aranjamentelor

```
possiblePartialSolution increaseStep(possiblePartialSolution PPS) {
    PS.step++;
    PS.choice = 0;
    return PS;
}

int hasChoiceAtStep(possiblePartialSolution PPS) {
    return PPS.step<k && PPS.choice < N;
}

possiblePartialSolution getNextChoiceAtStep(possiblePartialSolution PPS) {
    PPS.arrangement[PPS.step] = PPS.originalVector[PPS.choice];
    PPS.choice++;
    return PS;
}
```

Problemă: generarea aranjamentelor

```
int canReject(possiblePartialSolution PPS) {
    for (int i = 0; i < PPS.step; i++) {
        if (PPS.arrangement[i] == PPS.arrangement[PPS.step])
            return 1;
    }
    return 0;
}

int isSolution(possiblePartialSolution PPS) {
    return !canReject(PPS) && PPS.step == k-1;
}
```

Întrebări

- Cum scoatem o singură soluție? (Nu ne interesează care)
- Cum scoatem cea mai bună soluție după un criteriu?

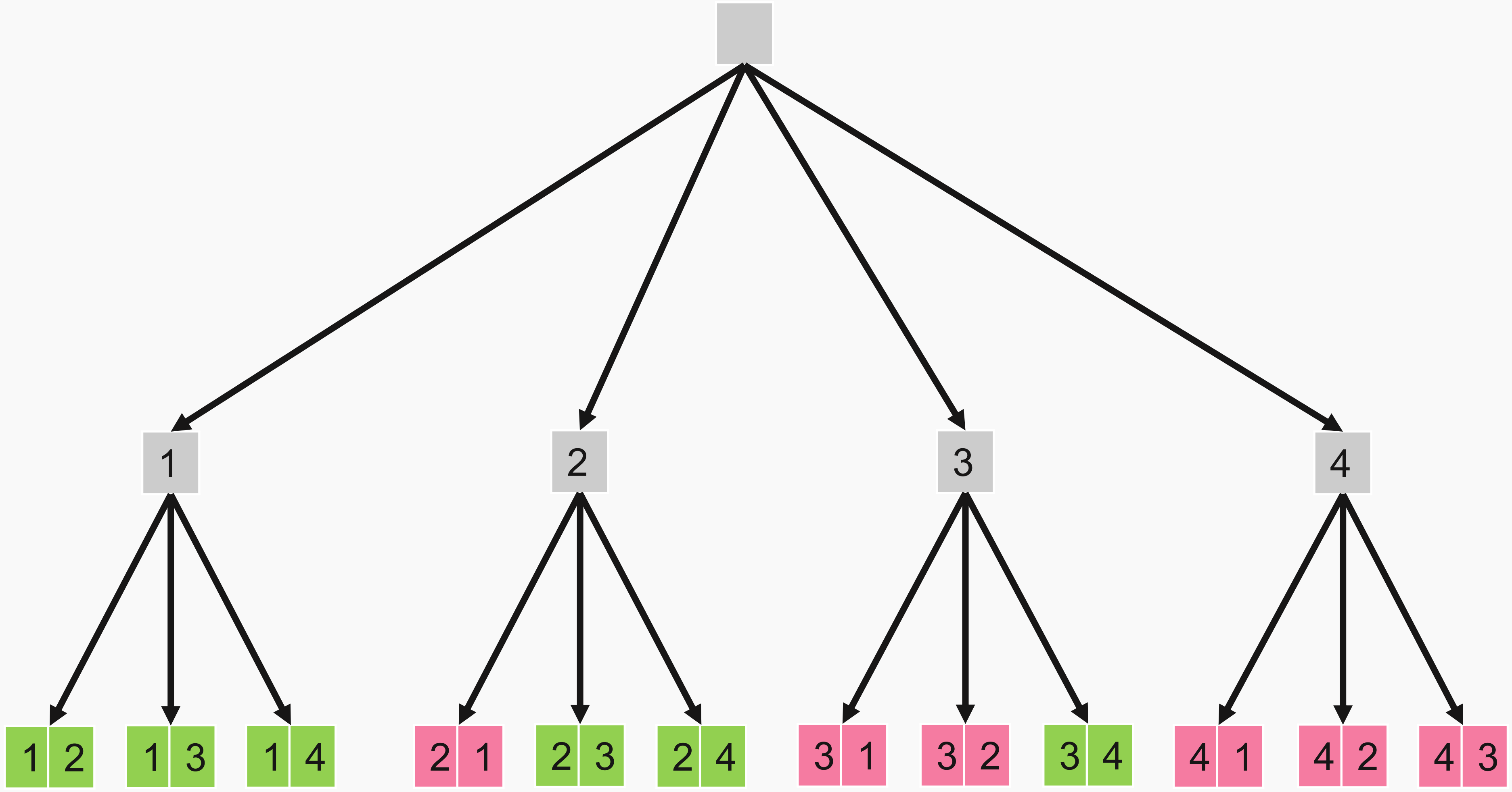
Problemă: generarea combinărilor

- Combinări de 4 luate câte 2:

{1,2},{1,3},{1,4},{2,3},{2,4},{3,4}

- Combinări de n luate câte k sunt toate submulţimile de k elemente : $\{x_1, x_2, \dots x_k\}, x_i < x_j, x_i \in \{1,2 \dots n\}$

Problemă: generarea combinărilor



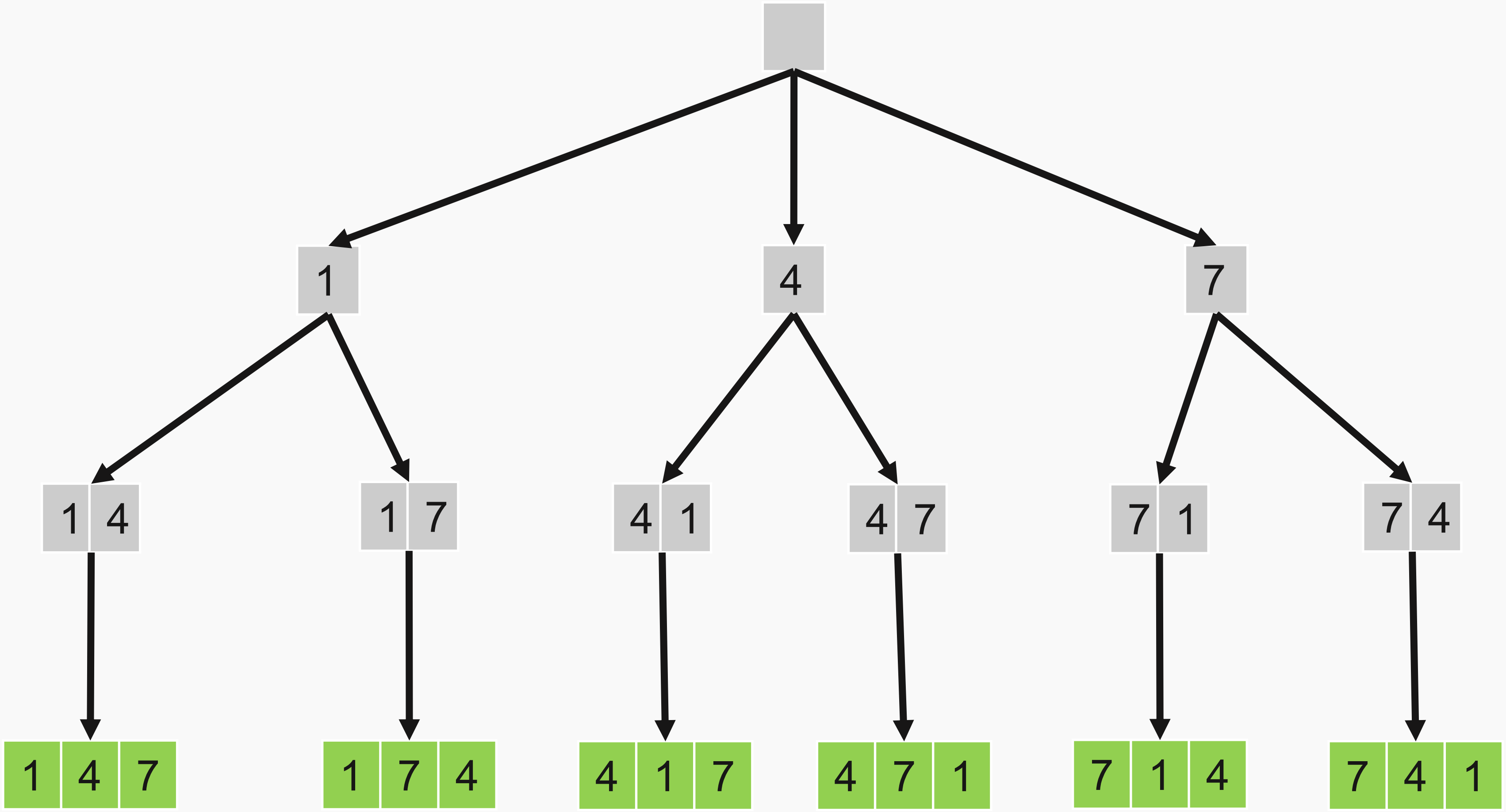
Problemă: generarea permutărilor

- Permutări de 3 elemente. Fie acestea X = {1,4,7}:

{1,4,7},{1,7,4},{4,1,7},{4,7,1},{7,1,4},{7,4,1}

- Permutările unei mulțimi de n elemente sunt toate mulţimile: $\{x_1, x_2, \dots x_k\}, x_i \neq x_j, x_i \in X$

Problemă: generarea permutărilor



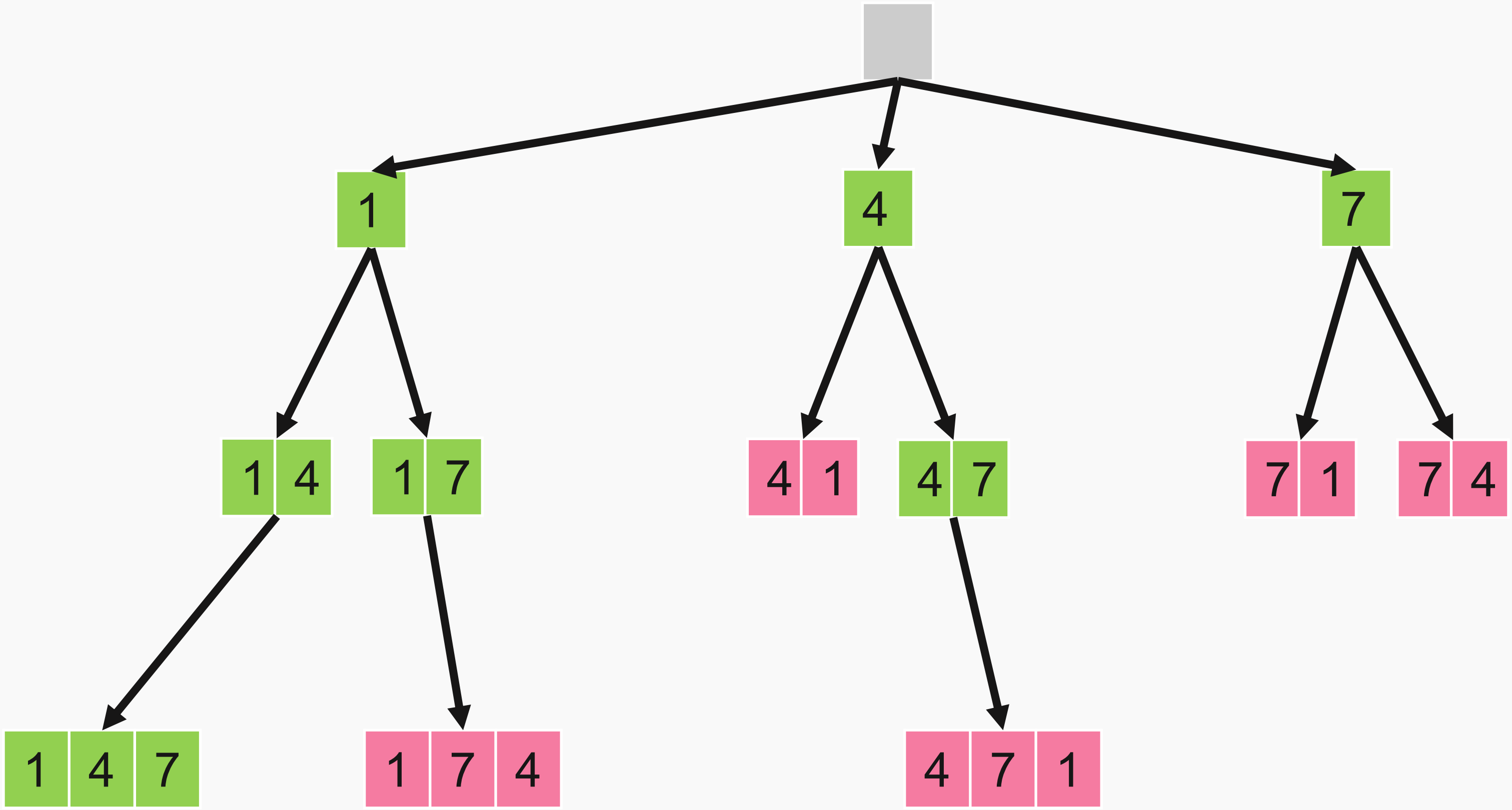
Problemă: generarea tuturor submulțimiilor

- Submulțimile mulțimii de 3 elemente. Fie acestea X = {1,4,7}:

Ø,{1},{4},{7},{1,4},{1,7},{4,7},{1,4,7}

- Submulțimiile unei mulțimi de n elemente sunt toate mulţimile: $\{x_1, x_2, \dots x_k\}, x_i \neq x_j, x_i \in X; 0 \leq k \leq n$

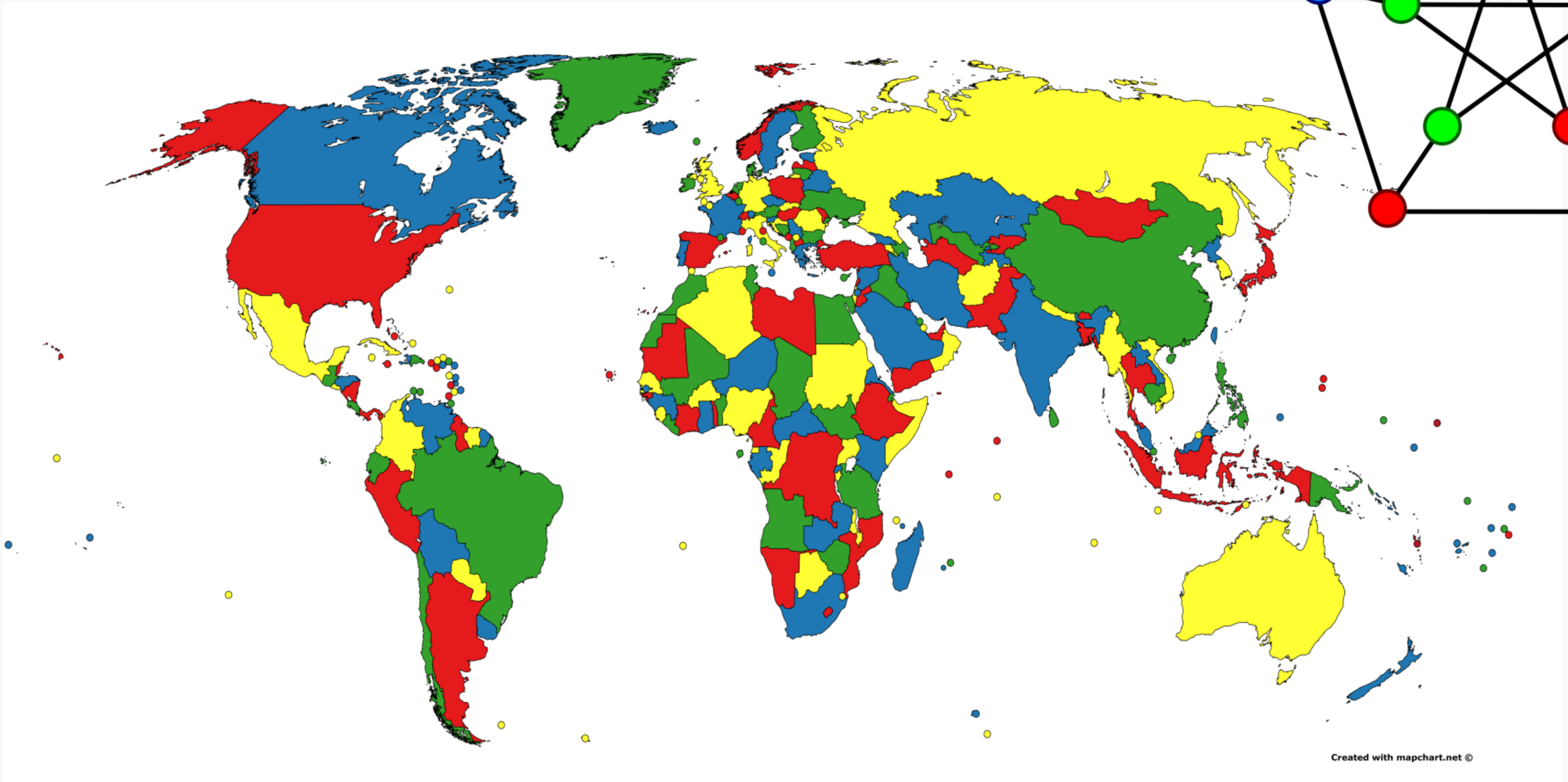
Problemă: generarea permutărilor

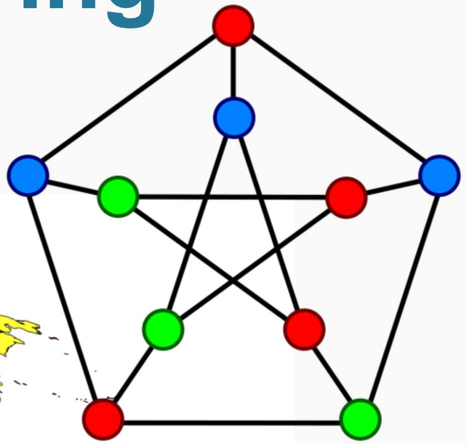


Problemă: 15 – sliding puzzle

http://lorecioni.github.io/fifteen-puzzle-game/

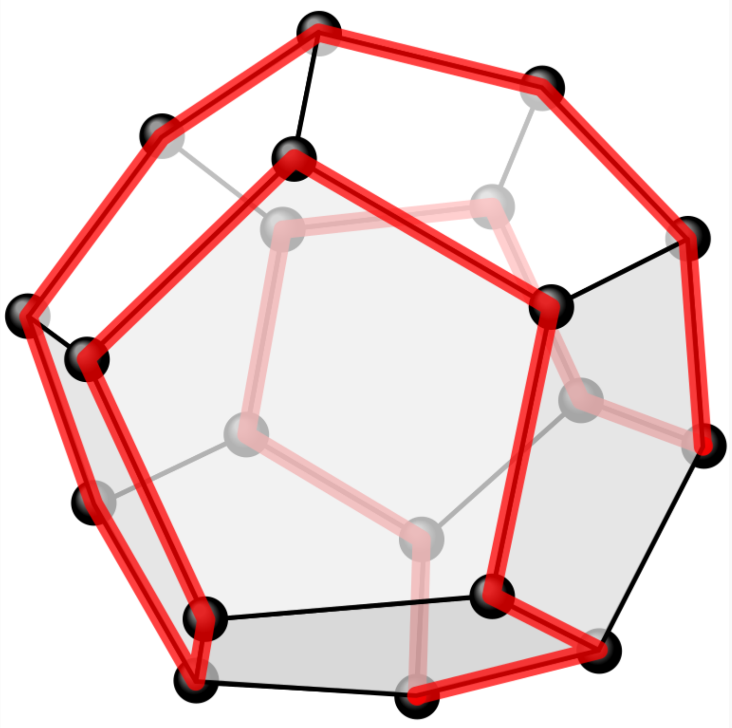
Problemă: Graph coloring

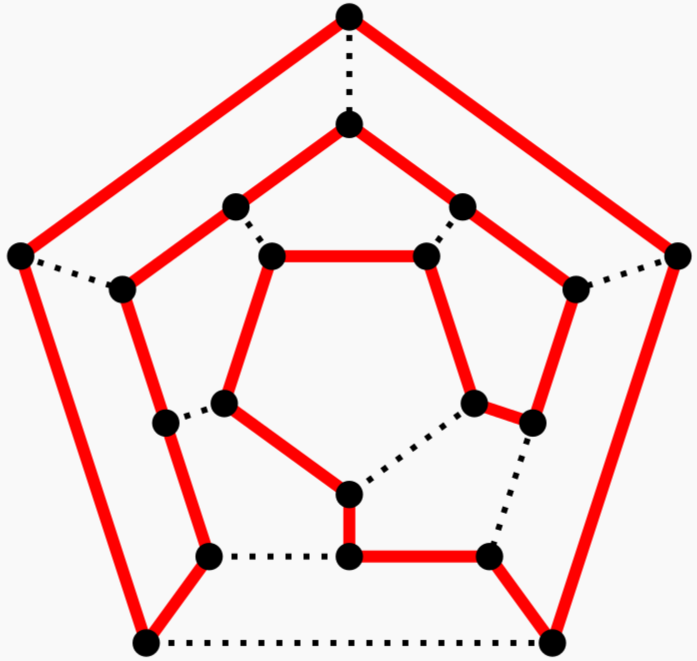




Două noduri adiacente trebuie să aibă culori diferite.

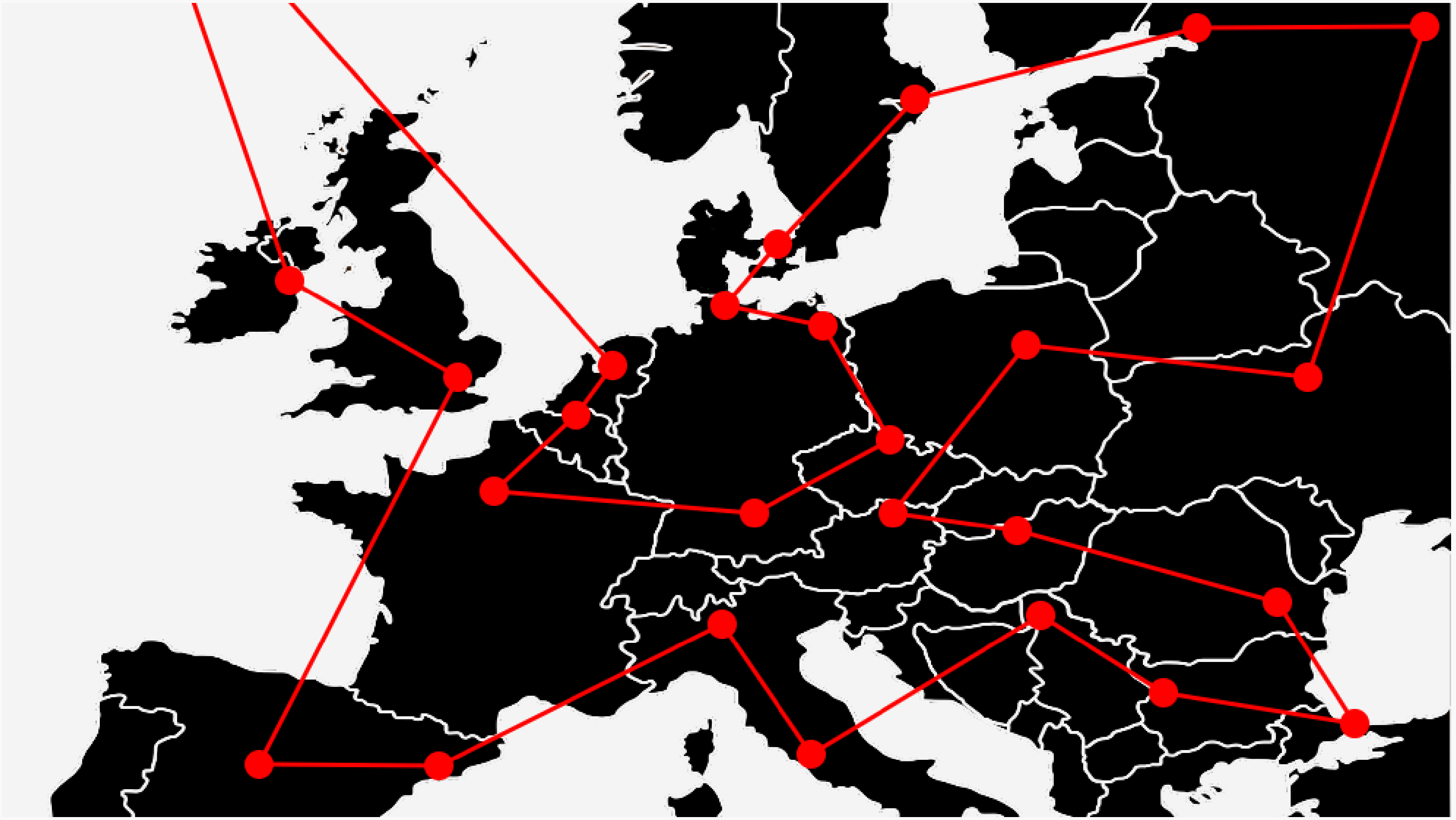
Problemă: Ciclu hamiltonian





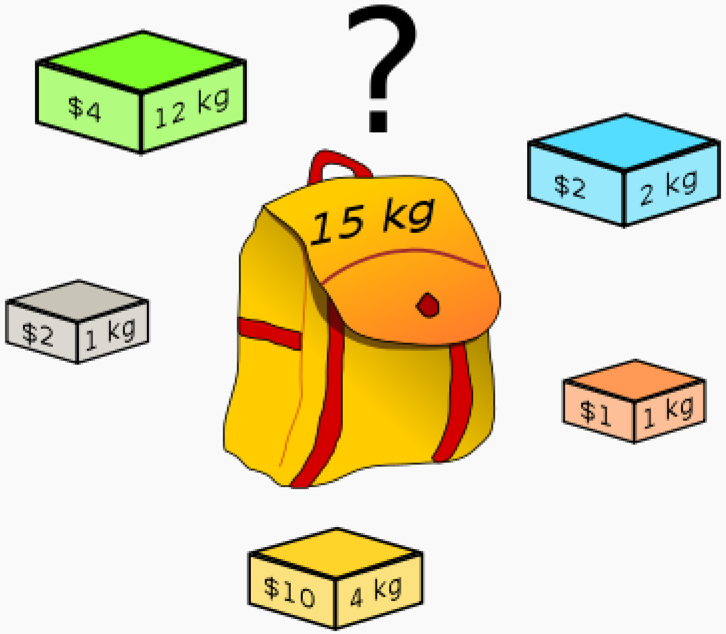
Ciclu care trece prin fiecare nod exact o dată.

Problemă: comis voiajor (travelling salesman)



Cel mai scurt drum care trece prin toate orașele.

Problemă: Rucsacului (Kanpsack)



Ce obiecte aleg să fac cât mai valoros ghiozdanul?

Problemă: subset de sume (subset sub)

Fiind dată o mulţime S de valori naturale $x_1, x_2 \; \ldots x_n$ şi un număr T, să se găsească submulţimea de sumă T.

Exemplu : dacă S={8, 11, 26, 29, 37} şi T=37.
Soluţii posibile sunt: {8, 29}, {11, 26}, {37}.

La fiecare pas, set de alegeri cunoscute (unul dintre elementele rămase) !
Constrângerile sunt date de elemente diferite în cadrul mulţimii (posibil ordonate) şi nedepăşirea sumei date!

Complexitate backtracking?

alegeri pe nivel 0 *

alegeri pe nivel 1 *

alegeri pe nivel 2 *

...

În general:

$$O(N!)$$

Backtracking – discuție finală

- Nu putem folosi dacă pe un nivel avem extrem de multe sau o infinitate de alegeri disponibile.
  - Gen: care două numere adunate dau 15?
- Este **extraordinar de lent**, în general dacă avem altă opțiune e bine să alegem pe aceea.
  - Gândiți-vă cât ar dura o sortare cu backtracking?
- Aproape orice problemă poate fi abordată prin backtracking. Avantajul este că o astfel de implementare este ușor de scris și poate fi folosită pentru a genera soluții complexe corecte cu care putem să verificăm corectitudinea unui algoritm mai eficient.