Structuri de date – Curs 7

Conf. univ. dr. Cristian CIUREA
Departamentul de Informatica si Cibernetica Economica
Academia de Studii Economice din Bucuresti
cristian.ciurea@ie.ase.ro

Agenda

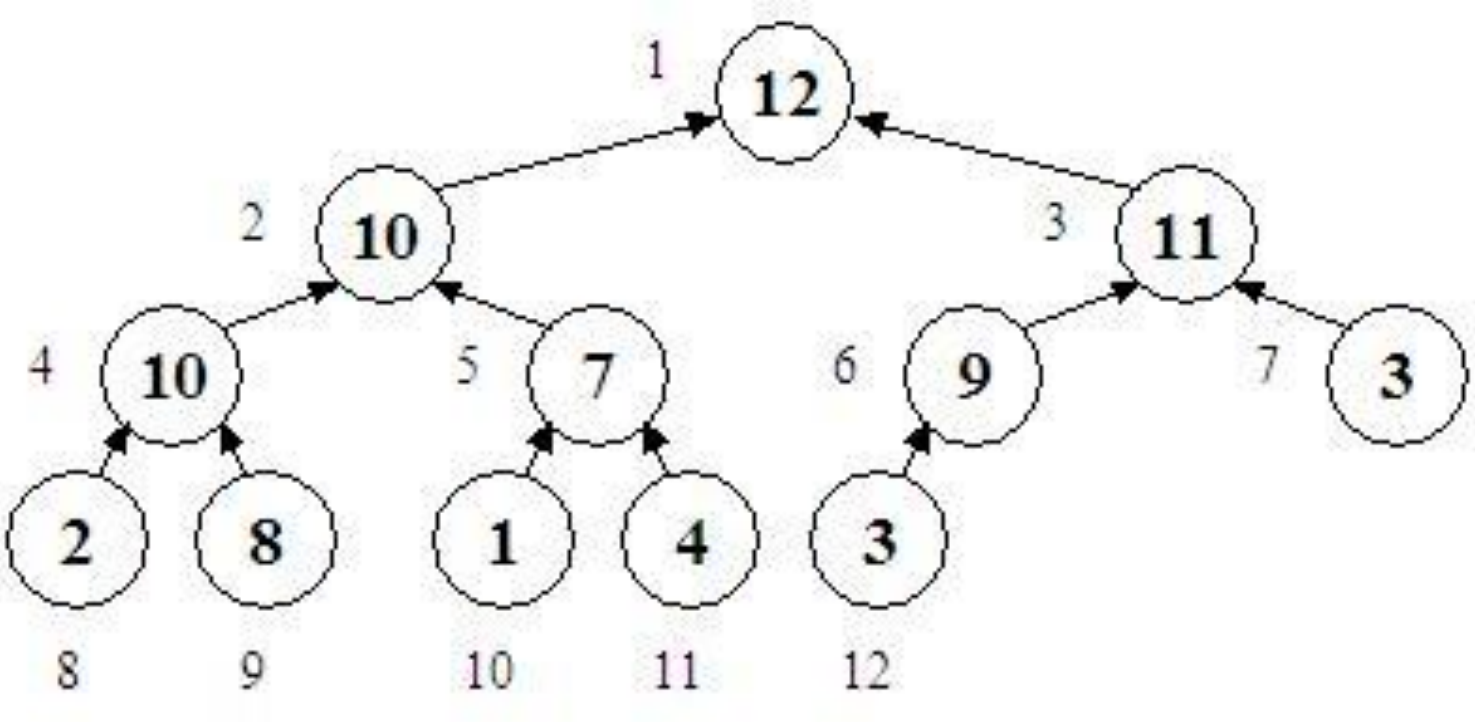
- Structura de tip *Heap*
- Cozi de prioritate
- Sortarea datelor prin *HeapSort*

Heap

- Structura de tip Heap este un arbore binar care respectă proprietăţile de structură şi de ordonare:
  - *proprietatea de structură* specifică faptul că elementele sunt organizate sub forma unui arbore binar complet, respectiv un arbore binar în care toate nodurile, cu excepţia celor de pe ultimul nivel, au exact doi fii, iar nodurile de pe ultimul nivel sunt completate de la stânga la dreapta.
  - *proprietatea de ordonare* impune ca valoarea asociată fiecărui nod, cu excepţia nodului rădăcină, să fie mai mică sau egală decât valoarea asociată nodului părinte. Spre deosebire de arborii binari de căutare, nu se impune nici o regulă referitoare la poziţia sau relaţia dintre nodurile fiu.

Heap

- v[ ] = {12, 10, 11, 10, 7, 9, 3, 2, 8, 1, 4, 3}

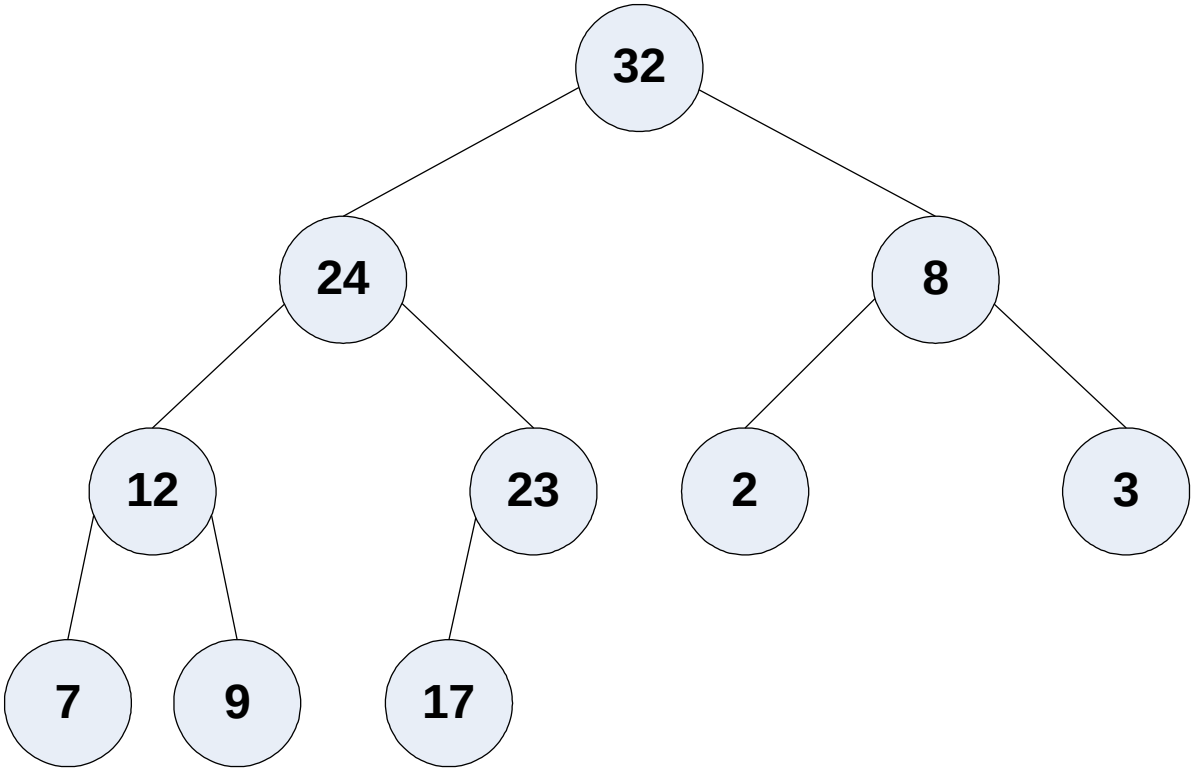


Heap

- Fiecare nod al arborelui trebuie să conţină o valoare asociată numită cheie şi poate conţine și alte informaţii suplimentare.
- Cheia trebuie să permită definirea unei relaţii de ordine totală pe mulţimea nodurilor.
- În funcţie de obiectivul urmărit, heap-ul poate fi organizat sub formă de *max-heap* sau *min-heap*.
- Cele două tipuri de heap sunt echivalente. Transformarea unui *max-heap* în *min-heap*, sau invers, se poate realiza prin simpla inversare a relaţiei de ordine.

Heap

- Exemplu reprezentarea grafică a structurii heap:



Heap

- Operaţiile principale care se execută pe o structură heap sunt:
  - construirea heap-ului, pornind de la un masiv unidimensional oarecare;
  - inserarea unui element în structură;
  - extragerea elementului maxim sau minim.

Heap

- *Construirea heap-ului* se face utilizând o procedură ajutătoare numită procedură de filtrare.
- Rolul acesteia este de a transforma un arbore în care doar subarborii rădăcinii sunt heap-uri, ale căror înălţimi diferă cu cel mult o unitate, într-un heap prin coborârea valorii din rădăcină pe poziţia corectă.
- Structura rezultată în urma aplicării procedurii de filtrare este un heap (respectă proprietăţile de structură şi ordonare).

Heap

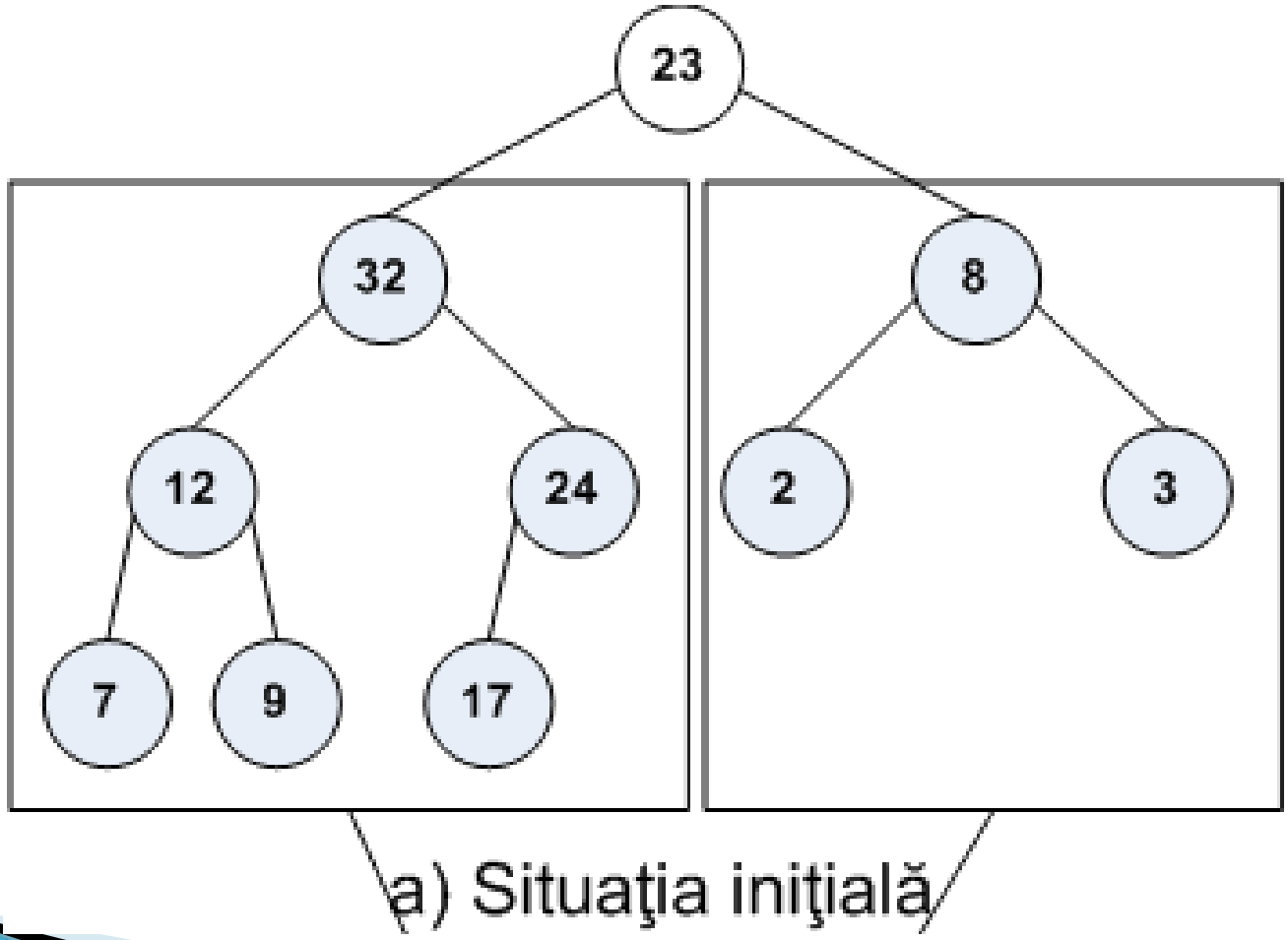
- Algoritmul de filtrare presupune parcurgerea următoarelor etape, începând cu nodul rădăcină:
  - se determină maximul dintre nodul curent, fiul stânga şi fiul dreapta (dacă există);
  - dacă maximul se află în nodul curent, atunci algoritmul se opreşte;
  - dacă maximul se află într-unul dintre fii, atunci se interschimbă valoarea din nodul curent cu cea din fiu şi se continuă execuţia algoritmului cu nodul fiu.

Heap

- Construirea heap-ului pornind de la un arbore binar, care respectă doar proprietatea de structură, se face aplicând procedura de filtrare pe nodurile non-frunză ale arborelui, începând cu nodurile de la baza arborelui şi continuând în sus, până când se ajunge la nodul rădăcină.
- Corectitudinea algoritmului este garantată de faptul că, la fiecare pas, subarborii nodului curent sunt heap-uri (deoarece sunt noduri frunză sau sunt noduri pe care a fost aplicată procedura de filtrare).

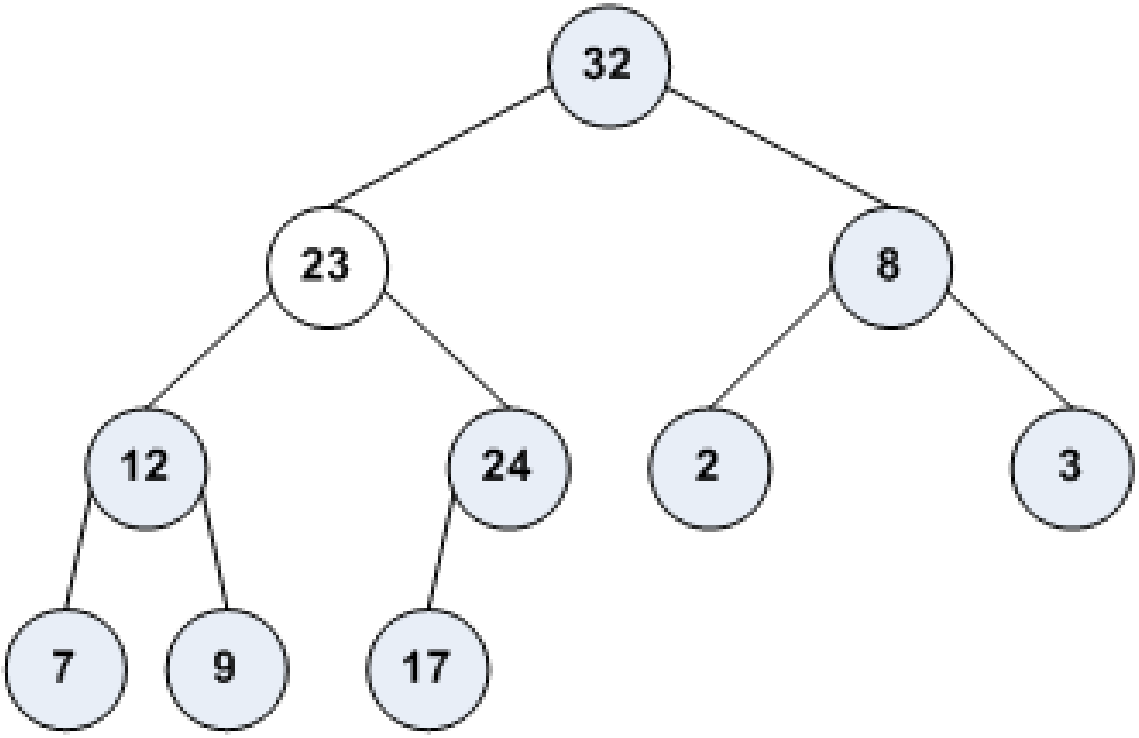
Heap

- Aplicarea algoritmului de filtrare:



Heap

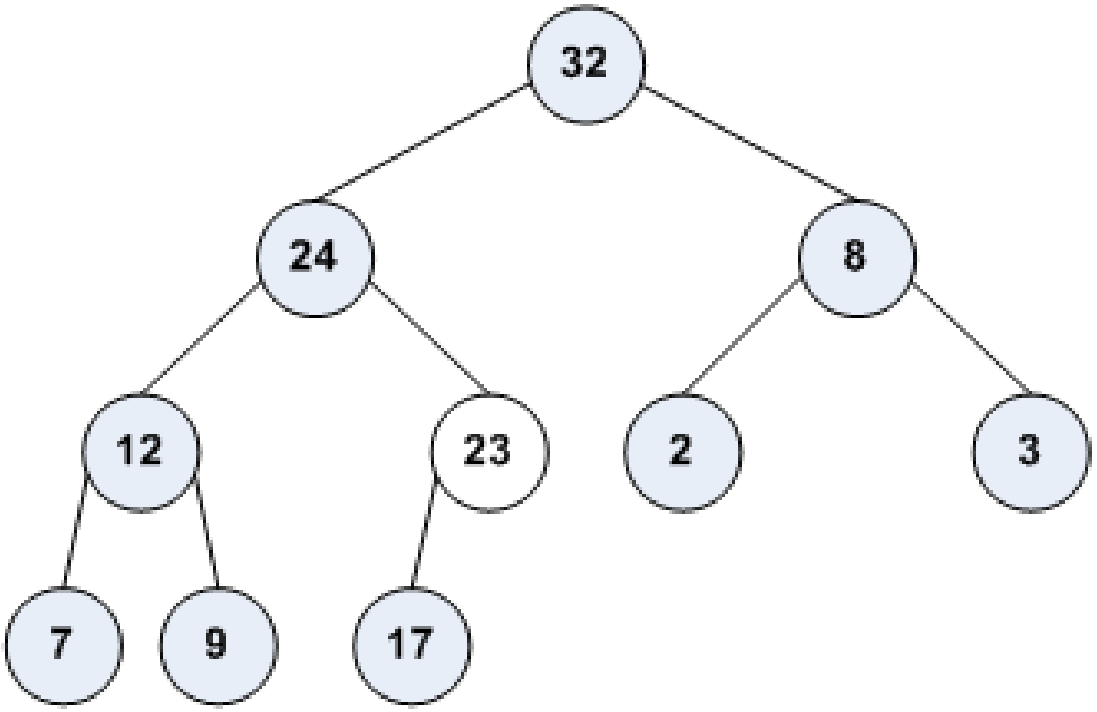
- Aplicarea algoritmului de filtrare:



b) Arborele după aplicarea primului pas

Heap

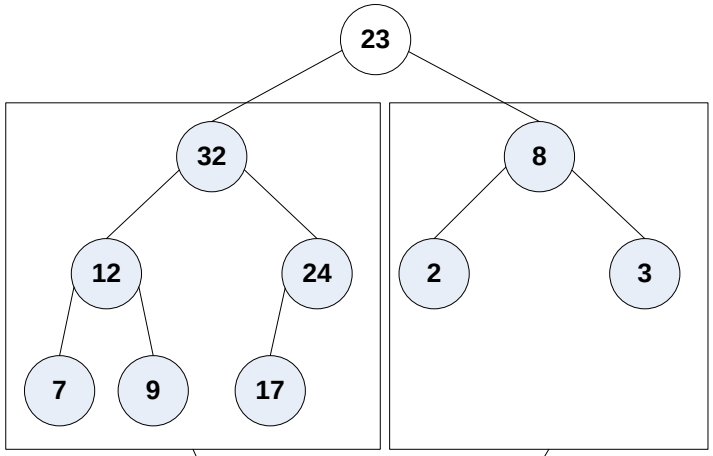
- Aplicarea algoritmului de filtrare:



c) Arborele la sfârşitul procedurii de filtrare

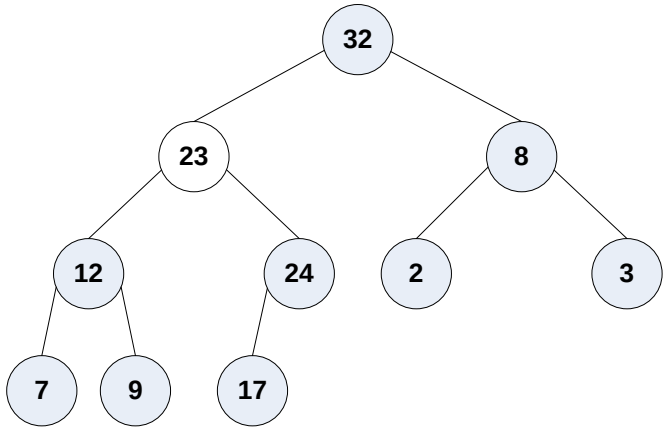
Heap

- Aplicarea algoritmului de filtrare:

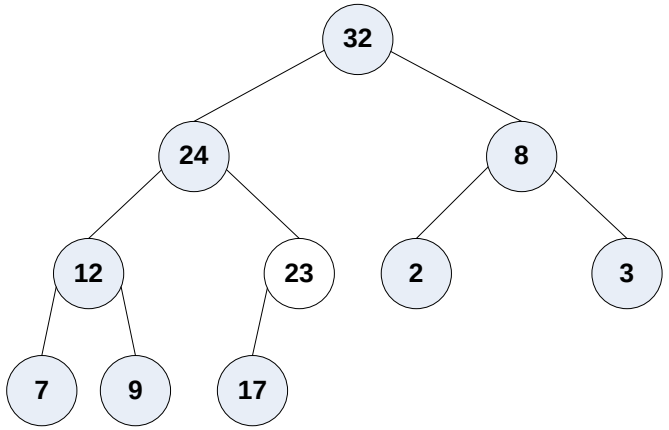


a) Situaţia iniţială

Subarbori organizaţi sub formă de heap (respectă proprietăţile de structură şi ordonare)



b) Arborele după aplicarea primului pas



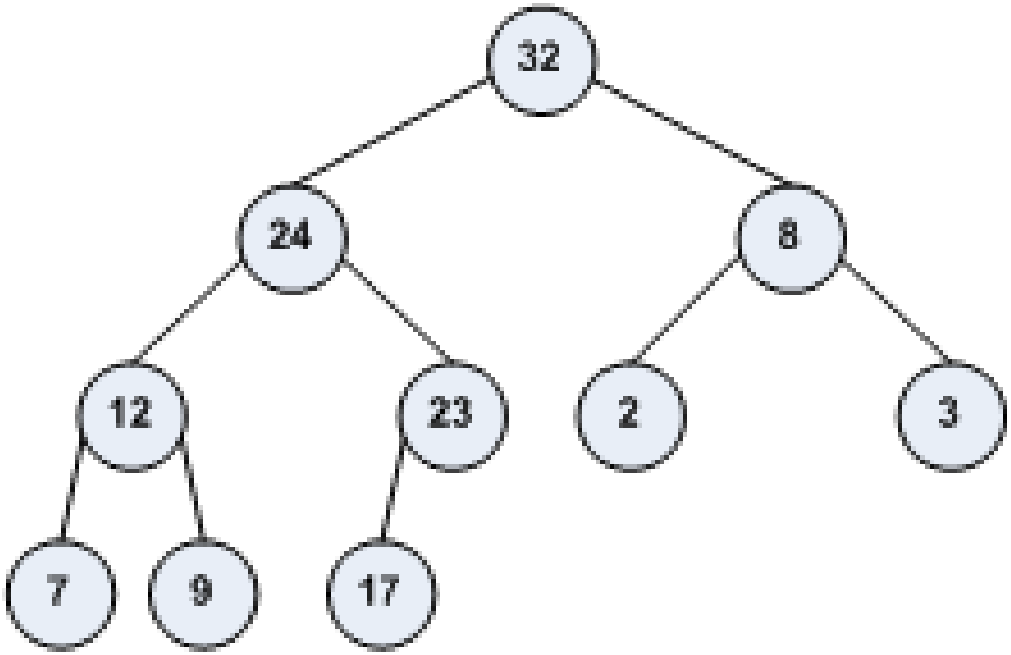
c) Arborele la sfârşitul procedurii de filtrare

Heap

- *Inserarea elementelor* într-un heap se poate face şi după etapa iniţială de construcţie. Adăugarea elementului nou trebuie făcută astfel încât structura rezultată să păstreze proprietatea de ordonare.
- Inserarea unui element în heap presupune parcurgerea următoarelor etape:
  - se adaugă elementul ca nod frunză la sfârşitul arborelui pentru a păstra proprietatea de structură;
  - se compară nodul curent cu nodul părinte;
  - dacă nodul părinte este mai mic, se interschimbă nodul curent cu nodul părinte;
  - dacă nodul părinte este mai mare sau egal, atunci algoritmul se opreşte.

Heap

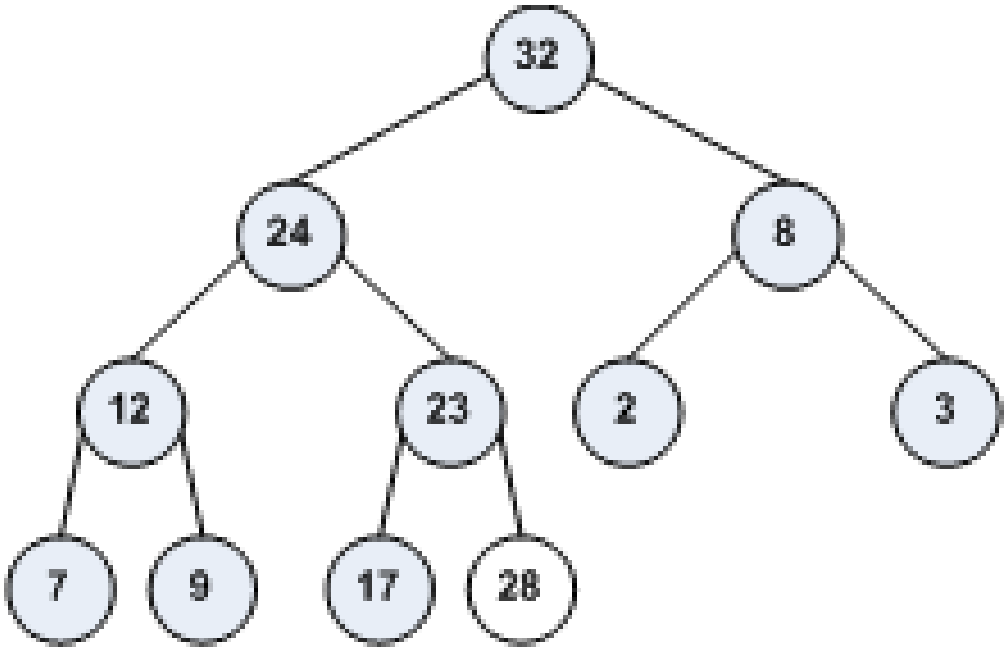
- Aplicarea algoritmului de inserare:



a) Heap-ul înaintea inserării elementului 28

Heap

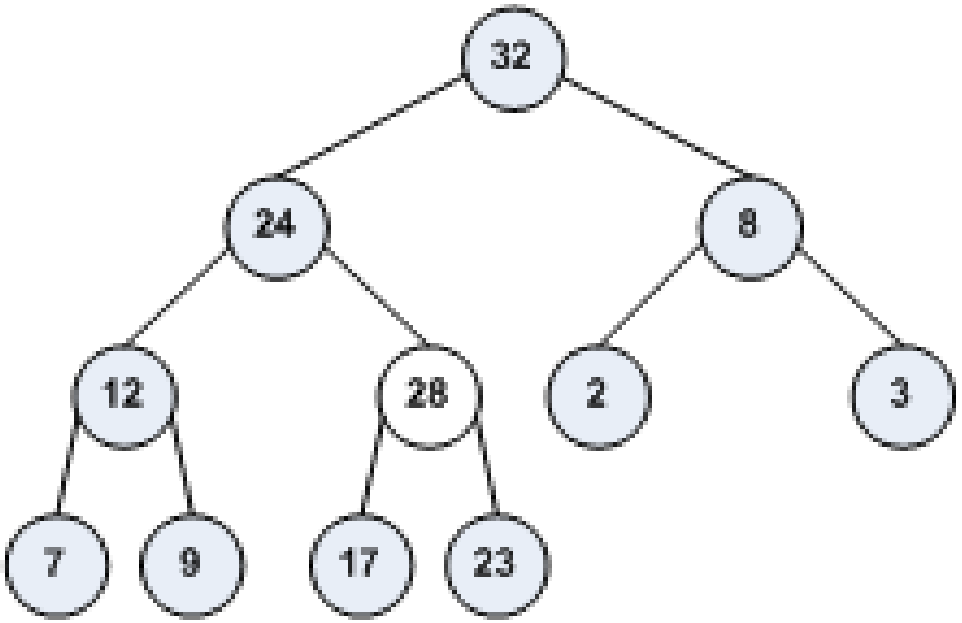
- Aplicarea algoritmului de inserare:



b) Elementul este inserat la sfârşitul structurii

Heap

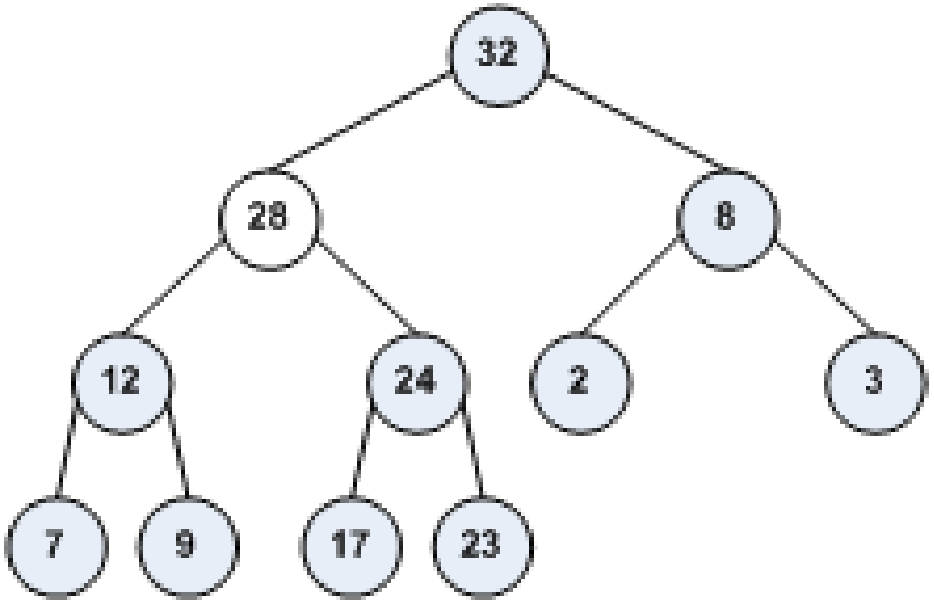
- Aplicarea algoritmului de inserare:



c) Elementul ridicat în arbore deoarece nu se respectă proprietatea de ordonare

Heap

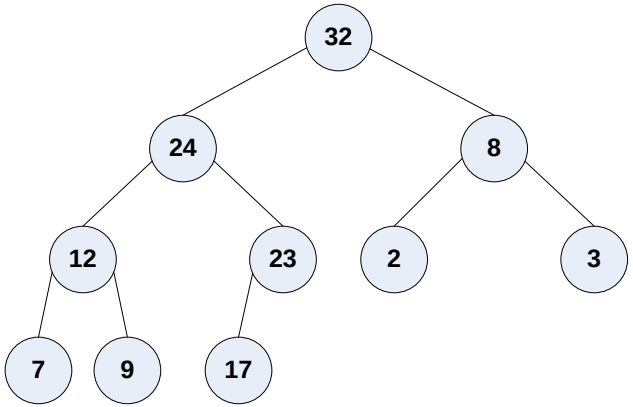
- Aplicarea algoritmului de inserare:



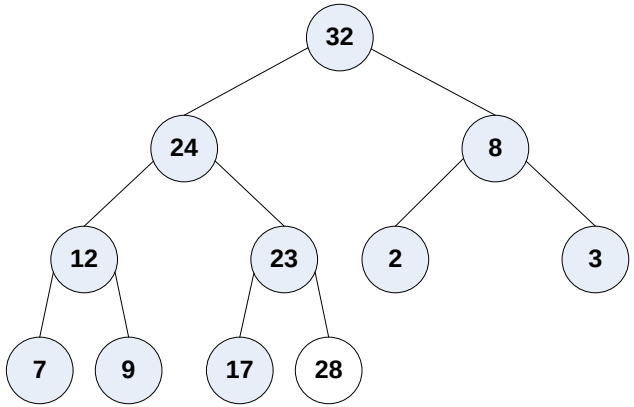
d) Algoritmul este încheiat deoarece valoarea nodului inserat este mai mică decât valoarea nodului părinte

Heap

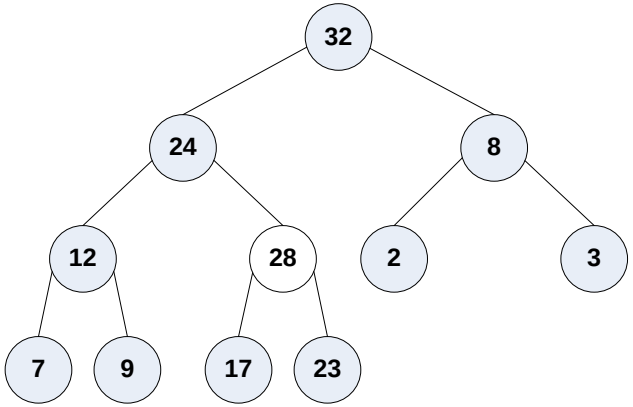
- Aplicarea algoritmului de inserare:



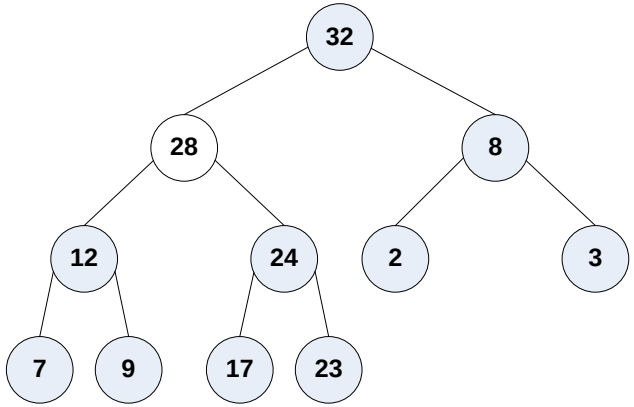
a) Heap-ul înaintea inserării elementului 28



b) Elementul este inserat la sfârşitul structurii



c) Elementul ridicat în arbore deoarece nu se respectă proprietatea de ordonare



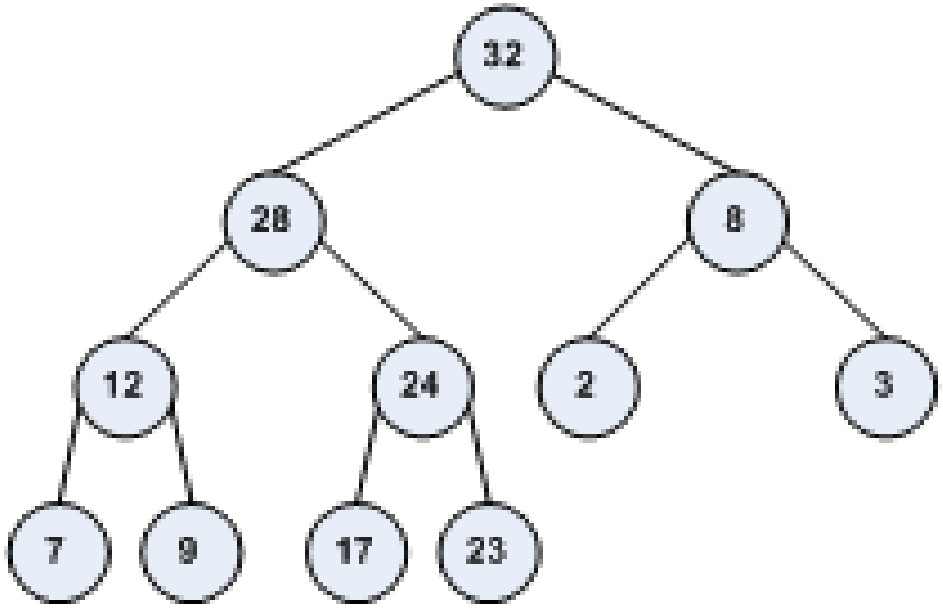
d) Algoritmul este încheiat deoarece valoarea nodului inserat este mai mică decât valoarea nodului părinte

Heap

- *Ştergerea elementelor* dintr-un heap se poate efectua doar prin extragerea elementului maxim sau minim. Pentru păstrarea structurii de heap se utilizează procedura de filtrare prezentată anterior. Algoritmul de extragere a elementului maxim presupune parcurgerea etapelor:
  - se interschimbă valoarea din nodul rădăcină cu valoarea din ultimul nod al arborelui;
  - se elimină ultimul nod din arbore;
  - se aplică procedura de filtrare pe nodul rădăcină pentru a păstra proprietatea de ordonare;
  - se returnează valoarea din nodul eliminat.

Heap

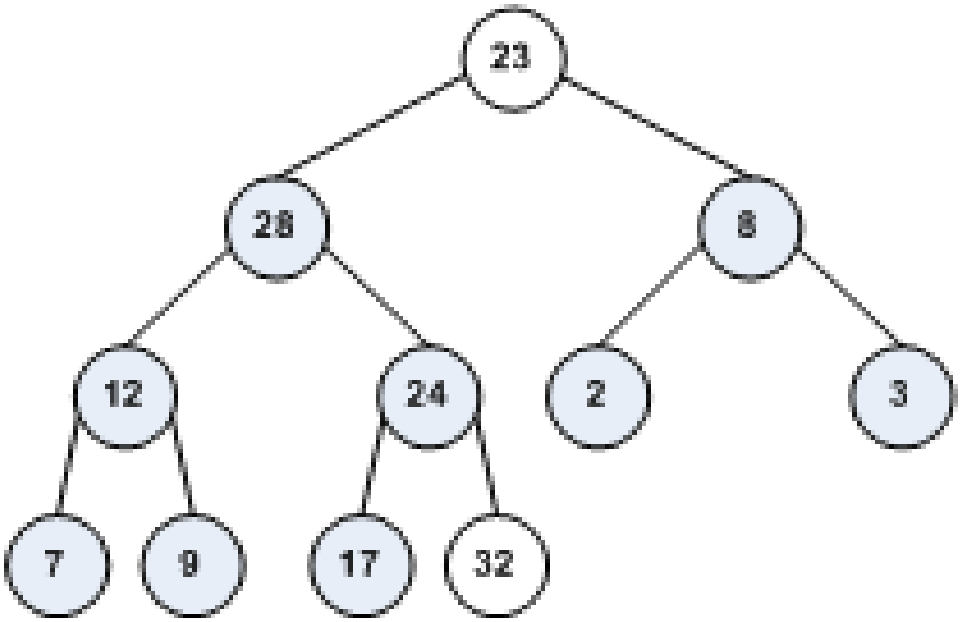
- Aplicarea algoritmului extragere element maxim:



a) Heap-ul înaintea extragerii elementului maxim

Heap

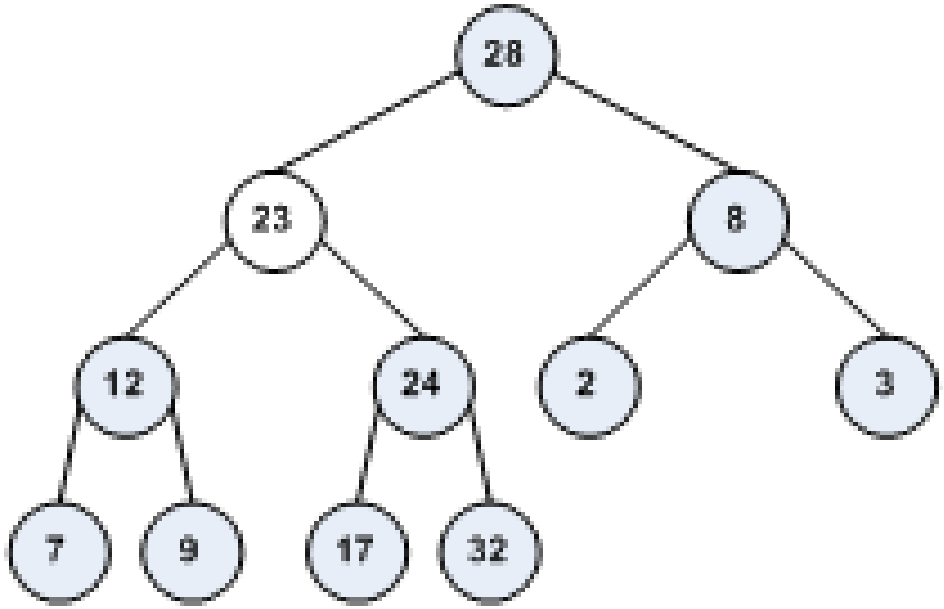
- Aplicarea algoritmului extragere element maxim:



b) Se interschimbă rădăcina cu ultimul nod

Heap

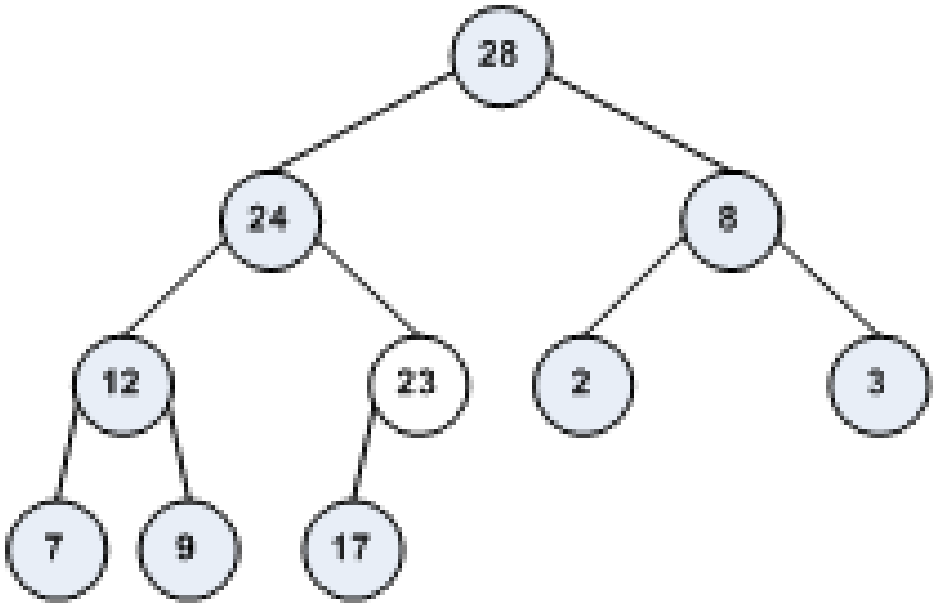
- Aplicarea algoritmului extragere element maxim:



c) Se aplică procedura de filtrare pentru coborârea nodului pe poziţia corectă

Heap

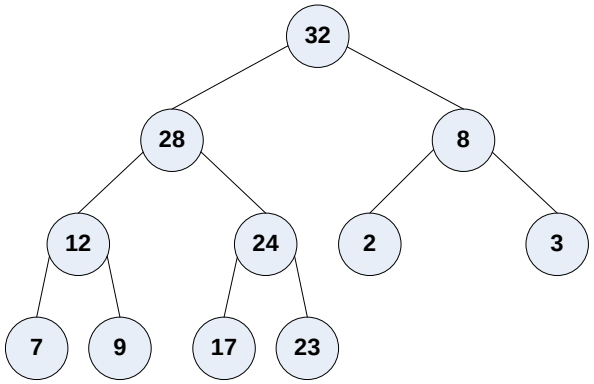
- Aplicarea algoritmului extragere element maxim:



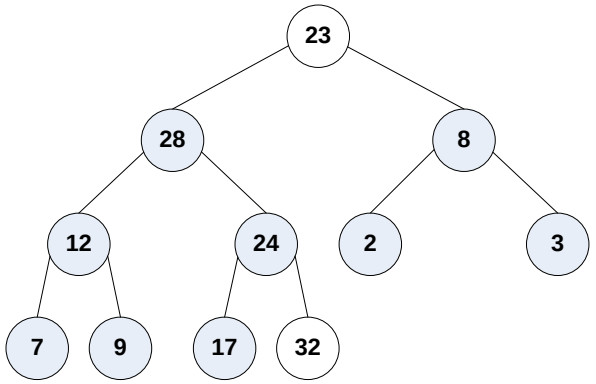
d) După încheierea procedurii de filtrare se elimină ultimul nod din structură

Heap

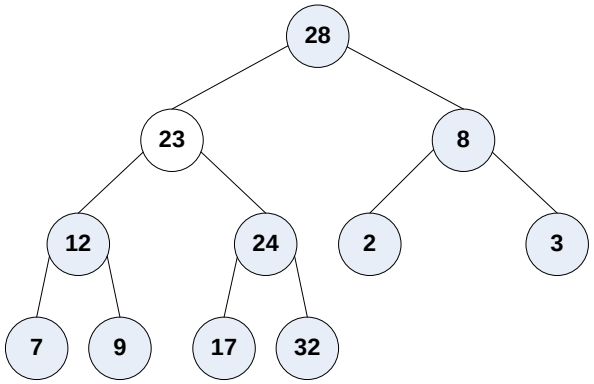
- Aplicarea algoritmului extragere element maxim:



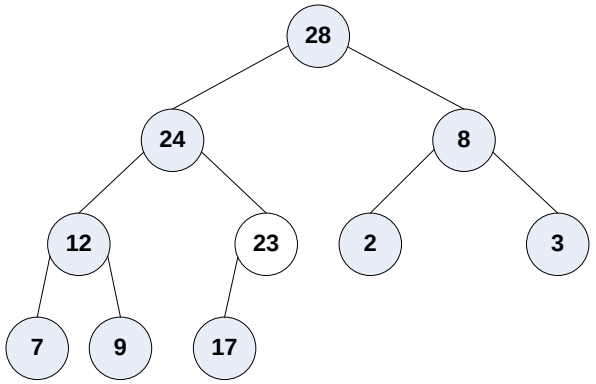
a) Heap-ul înaintea extragerii elementului maxim



b) Se interschimbă rădăcina cu ultimul nod



c) Se aplică procedura de filtrare pentru coborârea nodului până în poziția corectă



d) După încheierea procedurii de filtrare se elimină ultimul nod din structură

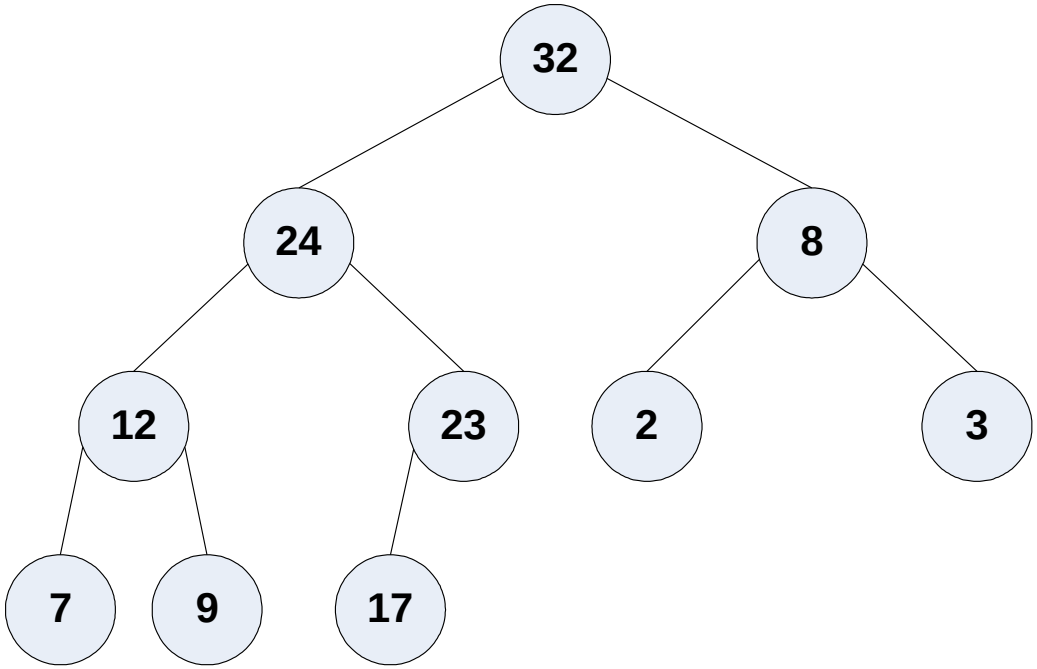
Heap

- Implementarea structurii *Heap*:
  - deşi este posibilă implementarea folosind arbori binari, stocarea eficientă a structurii heap poate fi realizată folosind un masiv unidimensional;
  - elementele arborelui se stochează în masiv începând cu nodul rădăcină şi continuând cu nodurile de pe nivelurile următoare, preluate de la stânga la dreapta.

Heap

- Reprezentarea în memorie pentru structura heap:

32	24	8	12	23	2	3	7	9	17
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



Heap

- Navigarea între elementele arborelui se poate face în ambele direcţii folosind următoarele formule:

$$\text{Parinte}(i) = \left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor, \text{Stânga}(i) = 2 \cdot i + 1, \text{Dreapta}(i) = 2 \cdot i + 2$$

Heap

- Structura heap este preferată pentru multe tipuri de aplicaţii. Cele mai importante utilizări sunt:
  - implementarea cozilor de prioritate, utilizate pentru simularea pe bază de evenimente sau algoritmi de alocare a resurselor;
  - implementarea selecţiei în algoritmi de tip greedy, cum ar fi algoritmul lui Prim pentru determinarea arborelui de acoperire minimă sau algoritmul lui Dijkstra pentru determinarea drumului minim;
  - sortarea masivelor utilizând algoritmul HeapSort.

Heap

- Cozile de prioritate sunt structuri de date care suportă următoarele două operaţii de bază:
  - inserarea unui element cu o prioritate asociată;
  - extragerea elementului cu prioritate maximă.
- Cele mai importante aplicaţii ale cozilor de prioritate sunt: simularea bazată pe evenimente, gestionarea resurselor partajate (lăţime de bandă, timp de procesare) şi căutarea în spaţiul soluţiilor.

Heap

- Structura de date de tip Heap este una dintre cele mai eficiente modalităţi de implementare a cozilor de prioritate.
- Prioritatea elementelor este dată de relaţia de ordine existentă între valorile asociate nodurilor.

Heap

- Într-un simulator discret pentru o coadă de aşteptare la un magazin, modul de operare este reprezentat sub forma unei secvenţe de evenimente ordonate cronologic.
- Evenimentele sunt sosirile clienţilor în coada de aşteptare şi servirea clienţilor. Simulatorul conţine o coadă de evenimente. Evenimentele sunt adăugate în coadă pe măsură ce timpul lor de producere poate fi determinat şi sunt extrase din coadă pentru procesare în ordine cronologică.

Heap

- Un simulator discret pe bază de evenimente are următoarele componente:
  - *coada de evenimente* – o coadă de prioritate care conţine lista evenimentelor care se vor petrece în viitor;
  - *starea simulatorului* – conţine un contor pentru memorarea timpului curent, informaţiile referitoare la starea actuală a sistemului simulat (clienţii aflaţi în coadă şi starea staţiei de servire) şi indicatori;
  - *logica de procesare* – extrage din coadă evenimentele în ordine cronologică şi le procesează; procesarea unui eveniment determină modificarea stării sistemului şi generarea de alte evenimente.

Heap

- Pentru simularea propusă trebuie luate în considerare următoarele ipoteze:
  - există o singură staţie de servire cu un timp de servire distribuit normal, cu o medie şi dispersie cunoscute;
  - există o singură coadă pentru clienţi, iar intervalul de timp dintre două sosiri este distribuit uniform într-un interval dat;
  - durata simulării este stabilită de către utilizator.

Heap

- O altă aplicaţie a structurii heap este implementarea algoritmului de sortare Heapsort.
- Sortarea presupune extragerea elementelor din heap şi stocarea acestora, în ordine inversă, la sfârşitul masivului utilizat pentru memorarea structurii.
- Algoritmul poate fi utilizat pentru sortarea oricărui masiv unidimensional pentru care a fost definită o relaţie de ordine.

Heap

- Ideea algoritmului de sortare vine de la sine. Se începe prin a construi un heap. Apoi se extrage maximul (adica vârful heap-ului) și se reface heap-ul.
- Se extrage din nou maximul (care va fi al doilea element ca mărime din vector) și se reface din nou heap-ul.
- Dacă aceste operații se fac de *n* ori, se obține vectorul sortat.

Heap

- Partea frumoasă a algoritmului este că el nu folosește deloc memorie suplimentară.
- Când heap-ul are *n* elemente, se extrage maximul și se reține undeva în memorie.
- În locul maximului (adică în rădăcina arborelui) trebuie adus ultimul element al vectorului, adică v[n].

Heap

- După această operație, heap-ul va avea *n-1* noduri, al *n*-lea rămânând liber. Acest al *n*-lea nod se folosește pentru a stoca maximul.
- Practic, se interschimbă rădăcina, adică pe v[1] cu v[n].
- Același lucru se face la fiecare pas, ținând cont de micșorarea permanentă a heap-ului.

Heap

Heap	swap elements	delete element	sorted array	details
8, 6, 7, 4, 5, 3, 2, **1**	8, 1			swap 8 and 1 in order to delete 8 from heap
1, 6, 7, 4, 5, 3, 2, **8**		8		delete 8 from heap and add to sorted array
1, 6, **7**, 4, 5, 3, 2	1, 7		8	swap 1 and 7 as they are not in order in the heap
7, 6, **1**, 4, 5, **3**, 2	1, 3		8	swap 1 and 3 as they are not in order in the heap
7, 6, 3, 4, 5, 1, **2**	7, 2		8	swap 7 and 2 in order to delete 7 from heap
2, 6, 3, 4, 5, 1, **7**		7	8	delete 7 from heap and add to sorted array
2, **6**, 3, 4, 5, 1	2, 6		7, 8	swap 2 and 6 as they are not in order in the heap
6, **2**, 3, 4, **5**, 1	2, 5		7, 8	swap 2 and 5 as they are not in order in the heap
6, 5, 3, 4, 2, **1**	6, 1		7, 8	swap 6 and 1 in order to delete 6 from heap
1, 5, 3, 4, 2, **6**		6	7, 8	delete 6 from heap and add to sorted array
1, **5**, 3, 4, 2	1, 5		6, 7, 8	swap 1 and 5 as they are not in order in the heap
5, **1**, 3, **4**, 2	1, 4		6, 7, 8	swap 1 and 4 as they are not in order in the heap
5, 4, 3, 1, **2**	5, 2		6, 7, 8	swap 5 and 2 in order to delete 5 from heap
2, 4, 3, 1, **5**		5	6, 7, 8	delete 5 from heap and add to sorted array
2, **4**, 3, 1	2, 4		5, 6, 7, 8	swap 2 and 4 as they are not in order in the heap
4, 2, 3, **1**	4, 1		5, 6, 7, 8	swap 4 and 1 in order to delete 4 from heap
1, 2, 3, **4**		4	5, 6, 7, 8	delete 4 from heap and add to sorted array
1, 2, **3**	1, 3		4, 5, 6, 7, 8	swap 1 and 3 as they are not in order in the heap
3, 2, **1**	3, 1		4, 5, 6, 7, 8	swap 3 and 1 in order to delete 3 from heap
1, 2, **3**		3	4, 5, 6, 7, 8	delete 3 from heap and add to sorted array
1, **2**	1, 2		3, 4, 5, 6, 7, 8	swap 1 and 2 as they are not in order in the heap
2, **1**	2, 1		3, 4, 5, 6, 7, 8	swap 2 and 1 in order to delete 2 from heap
1, **2**		2	3, 4, 5, 6, 7, 8	delete 2 from heap and add to sorted array
1		1	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	delete 1 from heap and add to sorted array
			1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	completed

Bibliografie

- Ion Ivan, Marius Popa, Paul Pocatilu (coordonatori) – *Structuri de date*, Editura ASE, Bucureşti, 2008.
  - Cap. 15. Heap