

Structuri de date – Curs 9

Prof. univ. dr. Cristian CIUREA
Departamentul de Informatică și Cibernetică Economică
Academia de Studii Economice din București
cristian.ciurea@ie.ase.ro

Agenda

- ▶ Echilibrare perfectă/imperfectă
- ▶ Arbori AVL

Arbori AVL

Echilibrarea perfectă:

- ▶ implementare operație:
 - metoda divide et impera;
 - parcurgere șir de chei ordonate crescător și inserarea valorii din mijloc în arbore;
 - volum mare de calcule: operații de inserare și ștergere, parcurgere inordine arbore, reconstrucție structură arborescentă.

Arbori AVL

Echilibrarea perfectă:

- ▶ mentenanța unei astfel de structuri:
 - grad de complexitate foarte ridicat;
 - recrearea arborelui perfect echilibrat după fiecare operație de inserare sau ștergere.

Arbori AVL

Echilibrarea imperfectă:

- ▶ implementare operație:
 - utilizarea aceleiași metode ca la echilibrarea perfectă, pornind de la un set de valori sortate crescător sau descrescător.

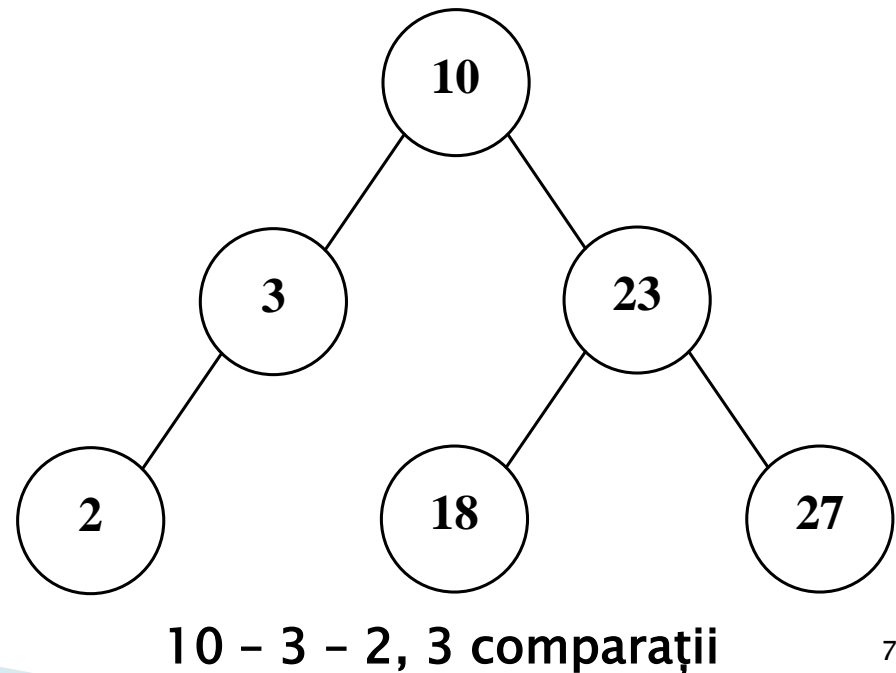
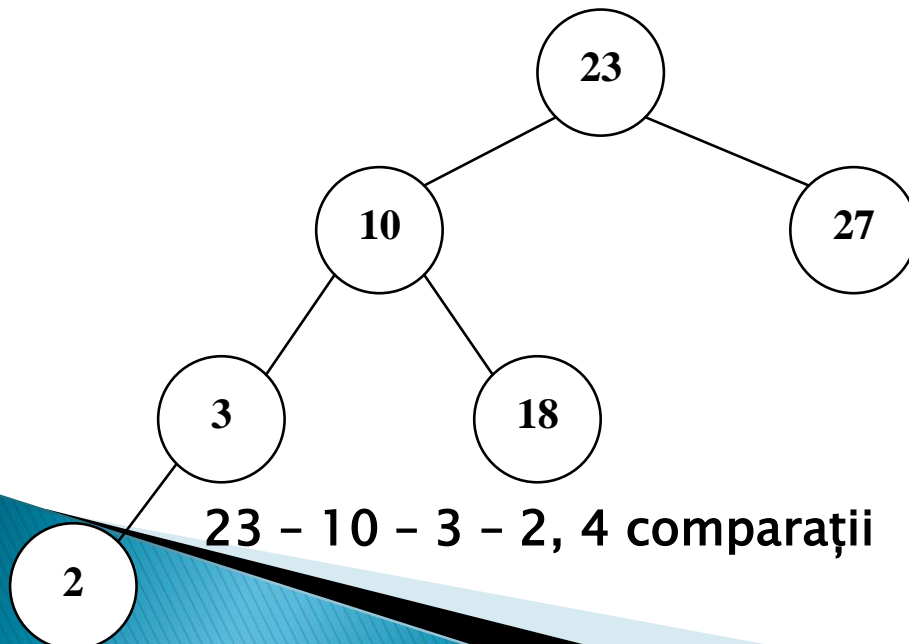
Arbori AVL

Echilibrarea imperfectă:

- ▶ mentenanța unei astfel de structuri:
 - grad de complexitate acceptabil;
 - metode specifice unor structuri arborescente echilibrate particulare: arbori AVL, arbori B, arbori Roșu & Negru;
 - efort de prelucrare mai mic decât volumul operațiilor asociat reconstrucției arborelui.

Arbori AVL

- ▶ Avantajul utilizării arborilor binari de căutare echilibrați:
 - minimizarea efortului de căutare, datorită aranjării echilibrate a valorilor pe ambii subarbori ai fiecărui nod.



Arbori AVL

Caracteristici:

- ▶ definit de G.M. Adelson–Velskii și E.M. Landis;
- ▶ arbore binar de căutare echilibrat pe înălțime;
- ▶ teorema demonstrată de Adelson–Velskii și Landis garantează că un arbore echilibrat nu va fi niciodată cu mai mult de 45% mai înalt decât omologul său, perfect echilibrat, oricare ar fi numărul de noduri;
- ▶ arbore binar de căutare este AVL dacă gradul de echilibru al fiecărui nod ia valori în mulțimea $\{-1, 0, 1\}$.

Arbori AVL

- ▶ Gradul de echilibru al unui nod (GE):

$$GE = H(SD) - H(SS),$$

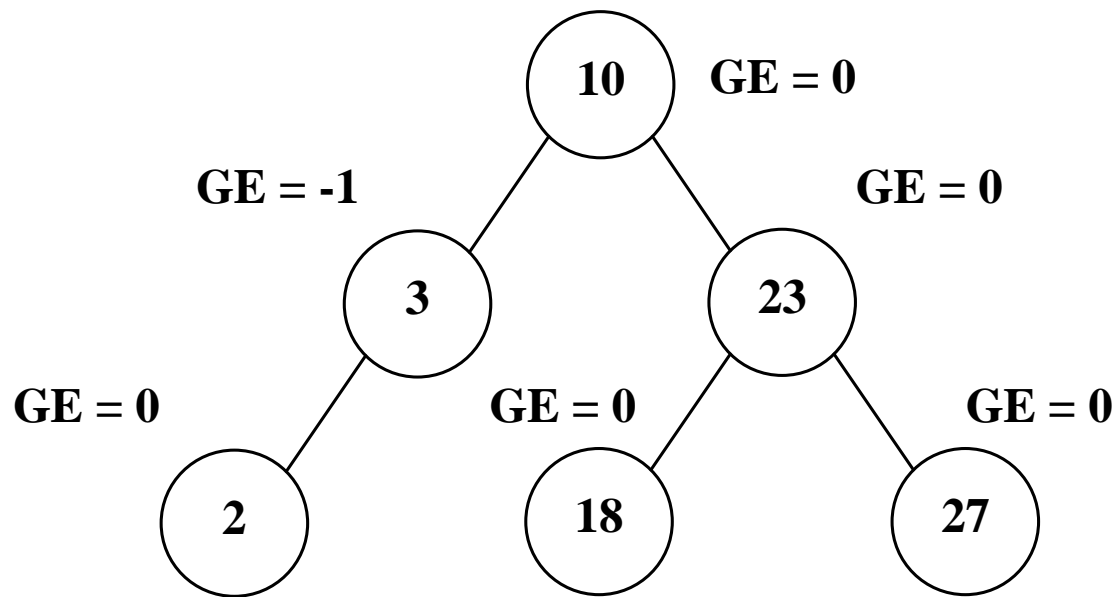
unde:

$H()$ – funcția de calcul a înălțimii unei structuri arborescente;

$$H(rad) = 1 + \max(H(SD), H(SS))$$

Arbori AVL

- ▶ Pentru $GE=0$, nodul este echilibrat;
- ▶ Pentru $GE=1$ și $GE=-1$, nodul descrie un dezechilibru la dreapta, respectiv la stânga.



Arbori AVL

- ▶ Cazurile $GE=1$ și $GE=-1$ sunt situații acceptate, deoarece pentru un număr par de valori este imposibil să se definească un arbore binar de căutare în care toate nodurile sunt perfect echilibrate.

Arbori AVL

Mentenanța structurii arbore AVL:

- ▶ verificarea gradului de echilibru, pentru fiecare nod în parte;
- ▶ operațiile de inserare/ștergere afectează structura arborelui și conduc la situații de dezechilibru;
- ▶ situațiile de dezechilibru puternic sunt identificate prin indicatorul GE care ia valori în mulțimea $\{-2, 2\}$.

Arbori AVL

- ▶ Reechilibrarea arborelui binar de căutare și păstrarea caracteristicilor aferente arborilor AVL se realizează prin:
 - rotire simplă la stânga (rotație stânga);
 - rotire simplă la dreapta (rotație dreapta);
 - dublă rotire la stânga (rotație dreapta–stânga);
 - dublă rotire la dreapta (rotație stânga–dreapta).

Arbori AVL

- ▶ Operația de echilibrare:
 - **inserare**: un arbore AVL dezechilibrat va fi reechilibrat printr-o singură rotație;
 - **ștergere**: mult mai complexă, necesitând minim o rotație.
- ▶ Metoda adecvată de reechilibrare: analiza gradului de echilibru al nodurilor aflate pe drumul de la rădăcina arborelui la locația unde a fost inserat/șters un nod.

Arbori AVL

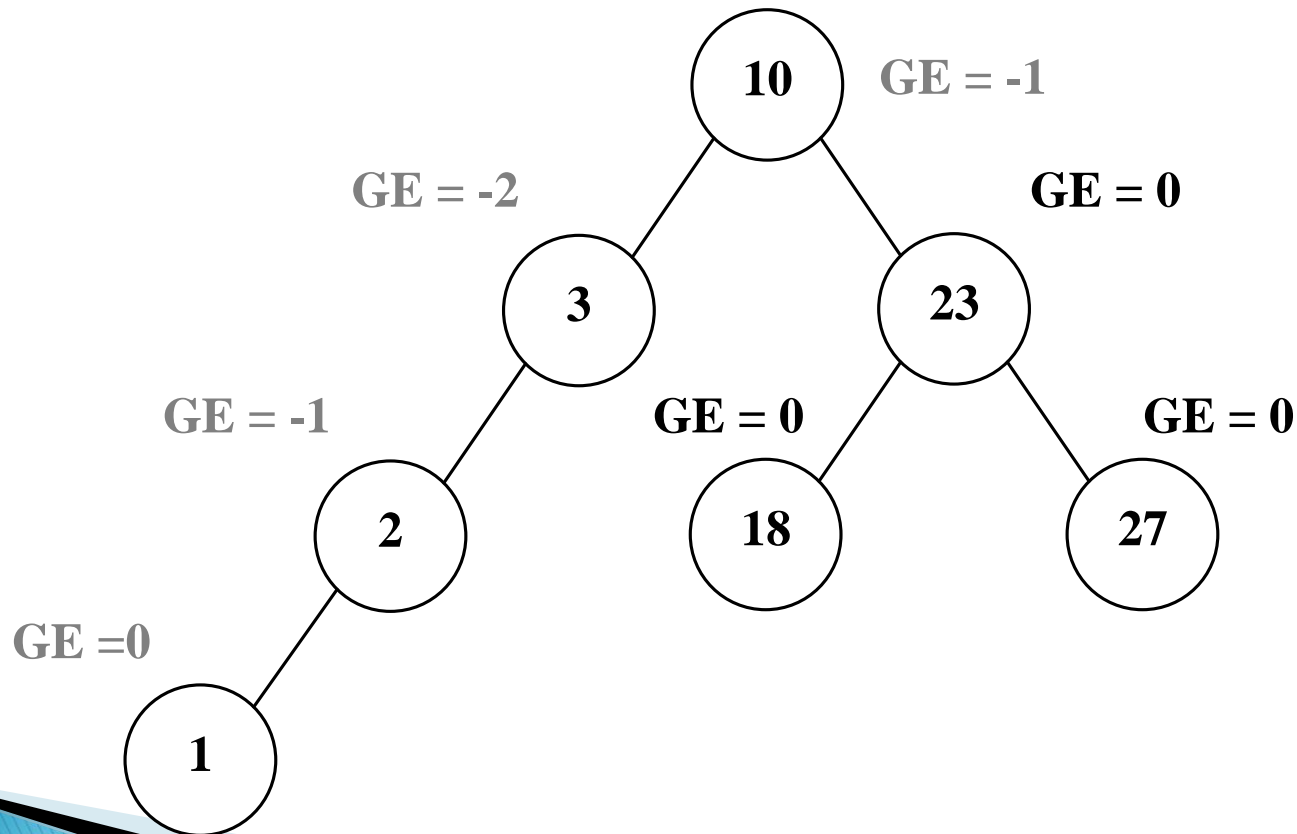
- ▶ Inserarea unui nod într-un arbore AVL se face în două etape:
 - în prima etapă se realizează inserarea nodului ca la o inserare obișnuită într-un arbore binar de căutare;
 - în a doua etapă, dacă este cazul, se echilibrează arborele.

Arbori AVL

- ▶ Dându-se un arbore cu rădăcina R și subarborii stâng și drept notați cu SS și SD , de înălțimi $H(SS)$ și $H(SD)$, la inserția unui nod în SS se disting trei cazuri:
 - $H(SS)=H(SD)$, în urma inserției, SS și SD devin de înălțimi egale, verificând criteriul echilibrului;
 - $H(SS)<H(SD)$, în urma inserției echilibrul se îmbunătățește;
 - $H(SS)>H(SD)$, criteriul echilibrului nu se mai verifică, arborele trebuie reechilibrat.

Arbori AVL

- ▶ Arbore binar AVL dezechilibrat dupa inserare nod cu valoare *cheie* = 1:



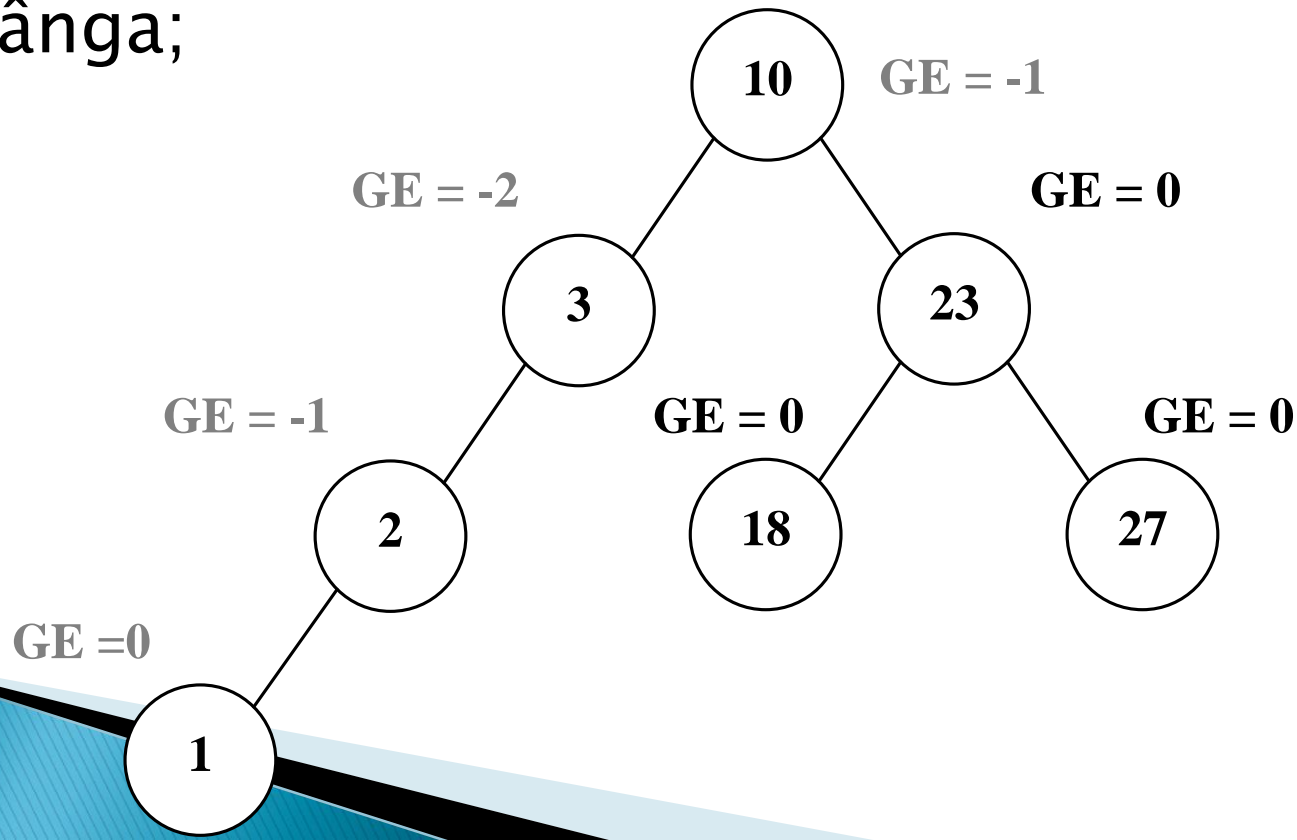
Arbori AVL

Aplicare metodă de reechilibrare:

- ▶ se identifică un nod (pivot) în care se realizează rotirea subarborelui – abordare bottom-up pornind de la locația nodului inserat/șters;
- ▶ reechilibrarea: cât mai aproape de locația care a generat dezechilibrul;
- ▶ identificarea operației de rotație în funcție de gradul de echilibru al nodului pivot și fiu al pivotului pe direcția dezechilibrului.

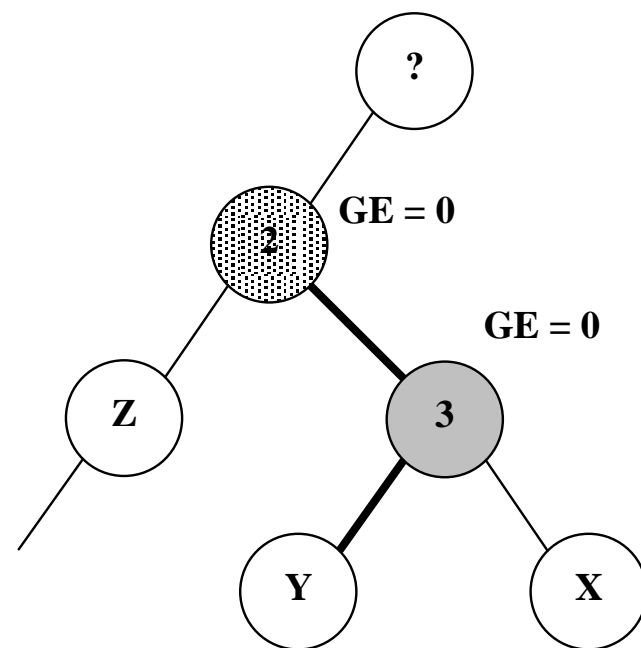
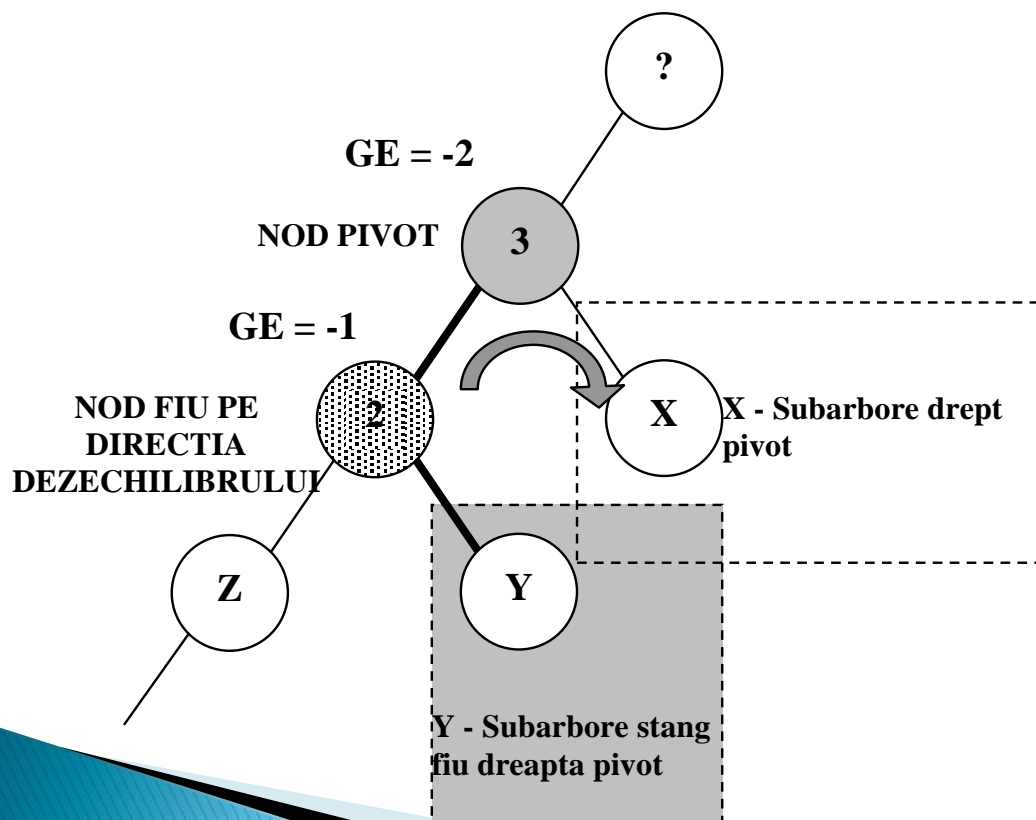
Arbori AVL

- ▶ Nodul pivot (cheia 3) are $GE = -2$, ceea ce indică un dezechilibru la stânga;
- ▶ Nodul fiu stânga (cheia 2) are dezechilibru la stânga;



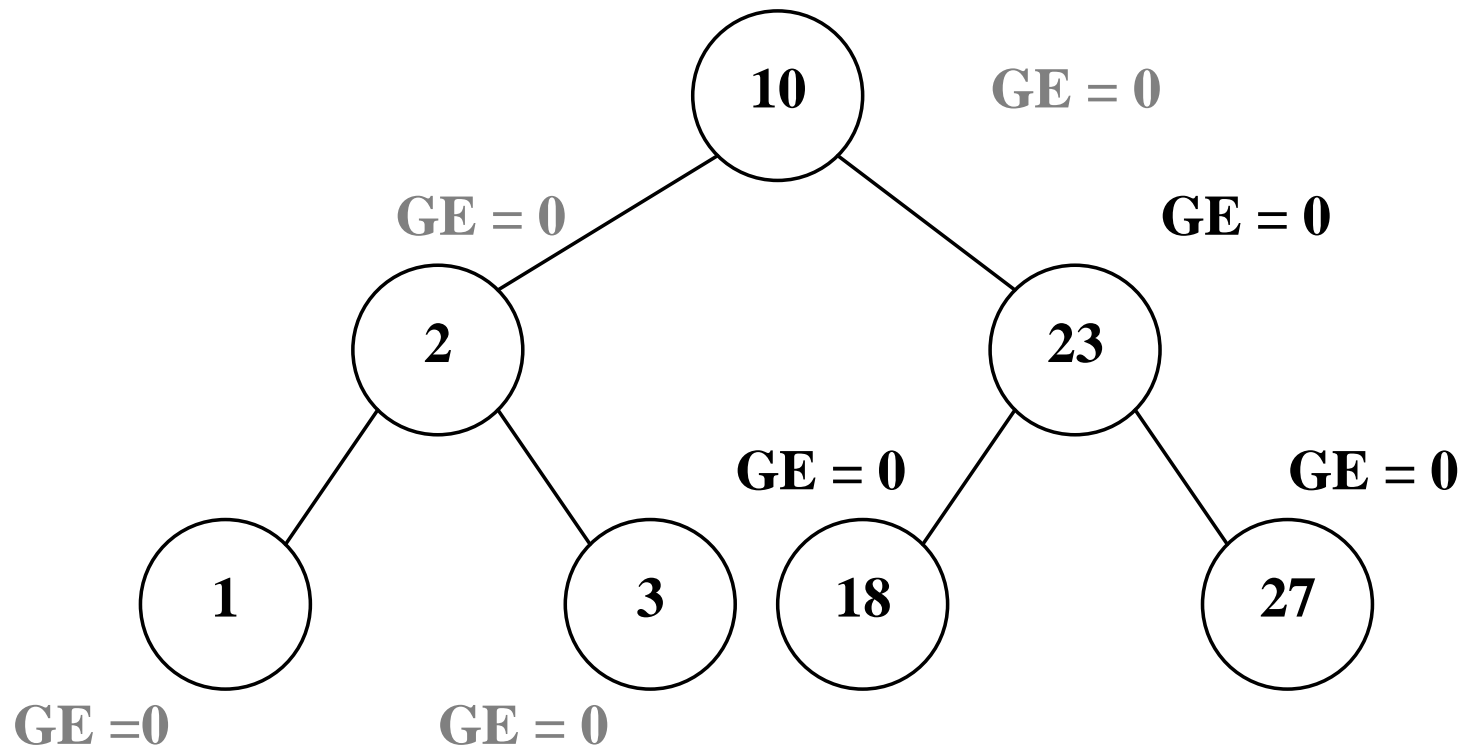
Arbori AVL

- ▶ Reechilibrarea se realizează prin operația de rotire simplă la dreapta.



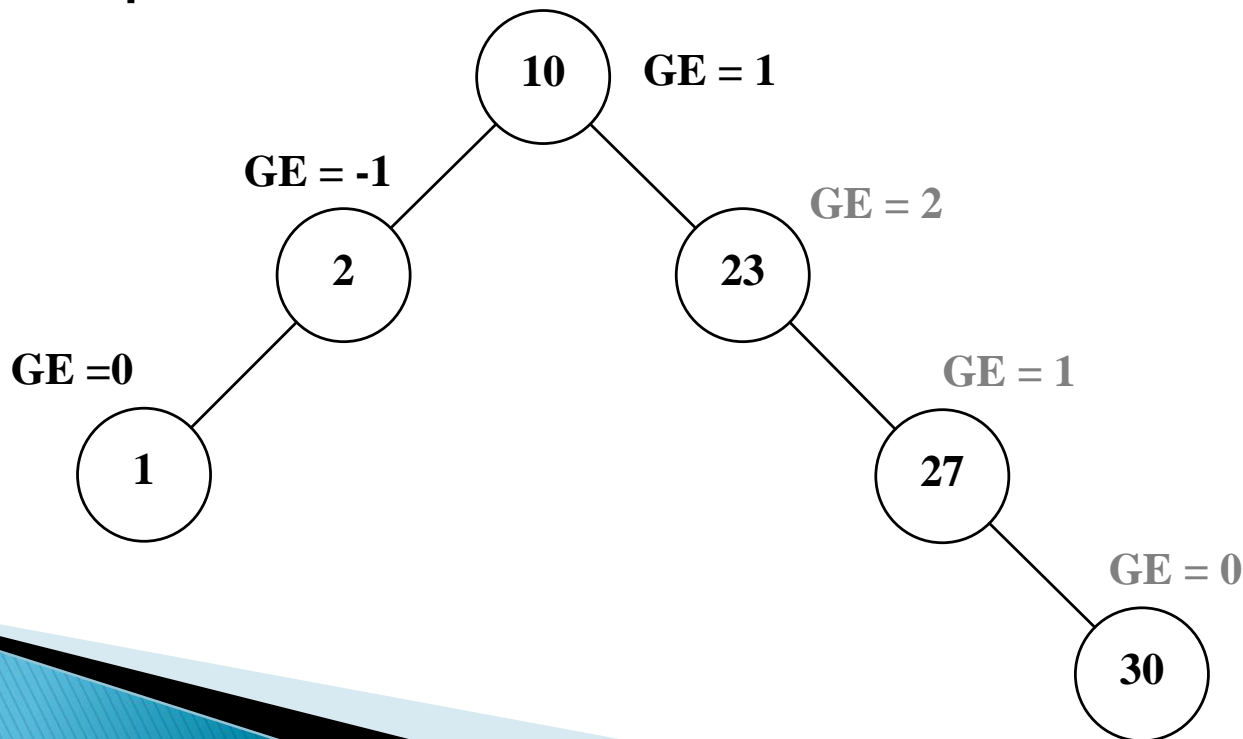
Arbore AVL

- ▶ Arbore AVL reechilibrat:



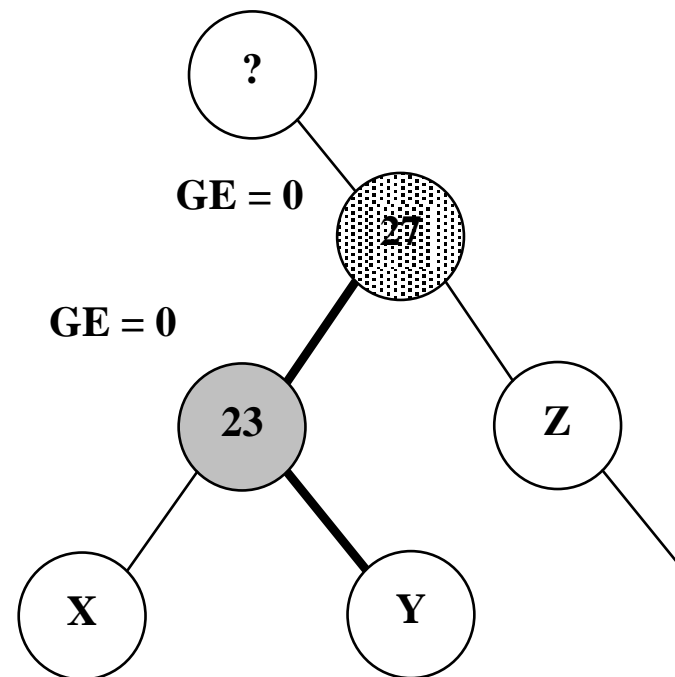
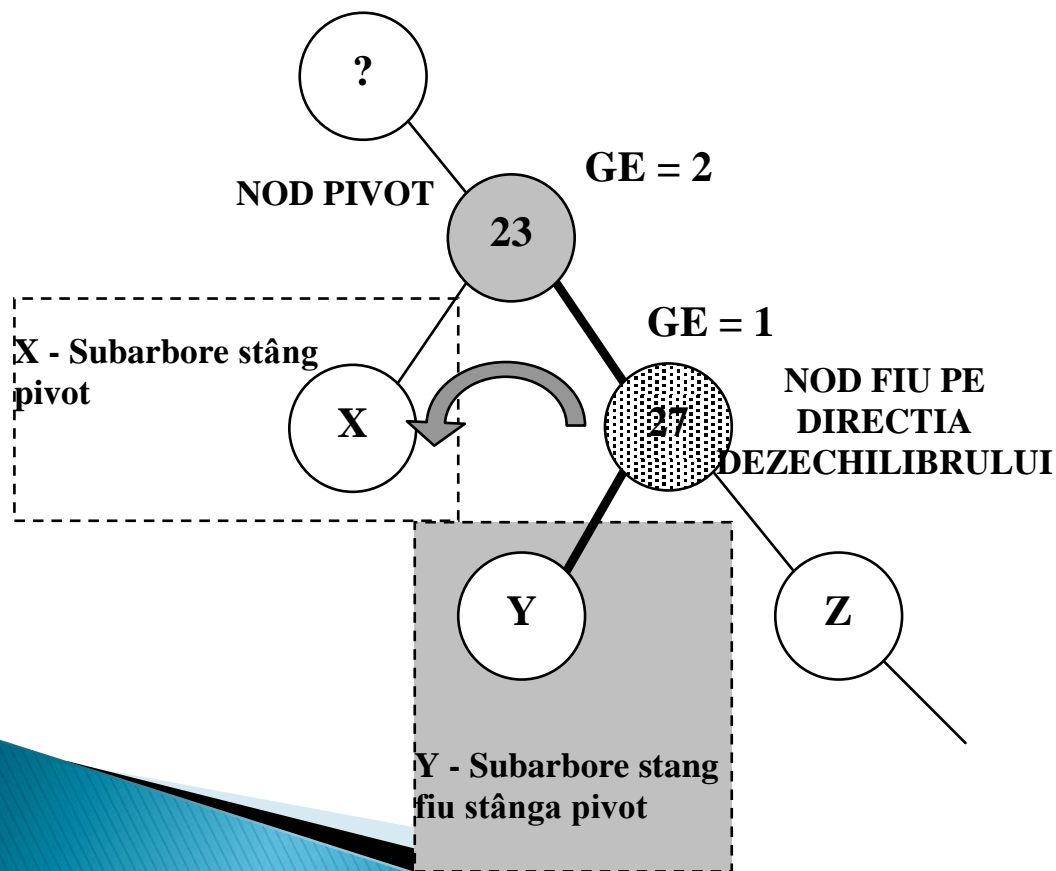
Arbori AVL

- ▶ Nodul pivot (cheia 23) are $GE=2$, ceea ce indică dezechilibru la dreapta.
- ▶ Nodul fiu dreapta (cheia 27) are dezechilibru la dreapta.



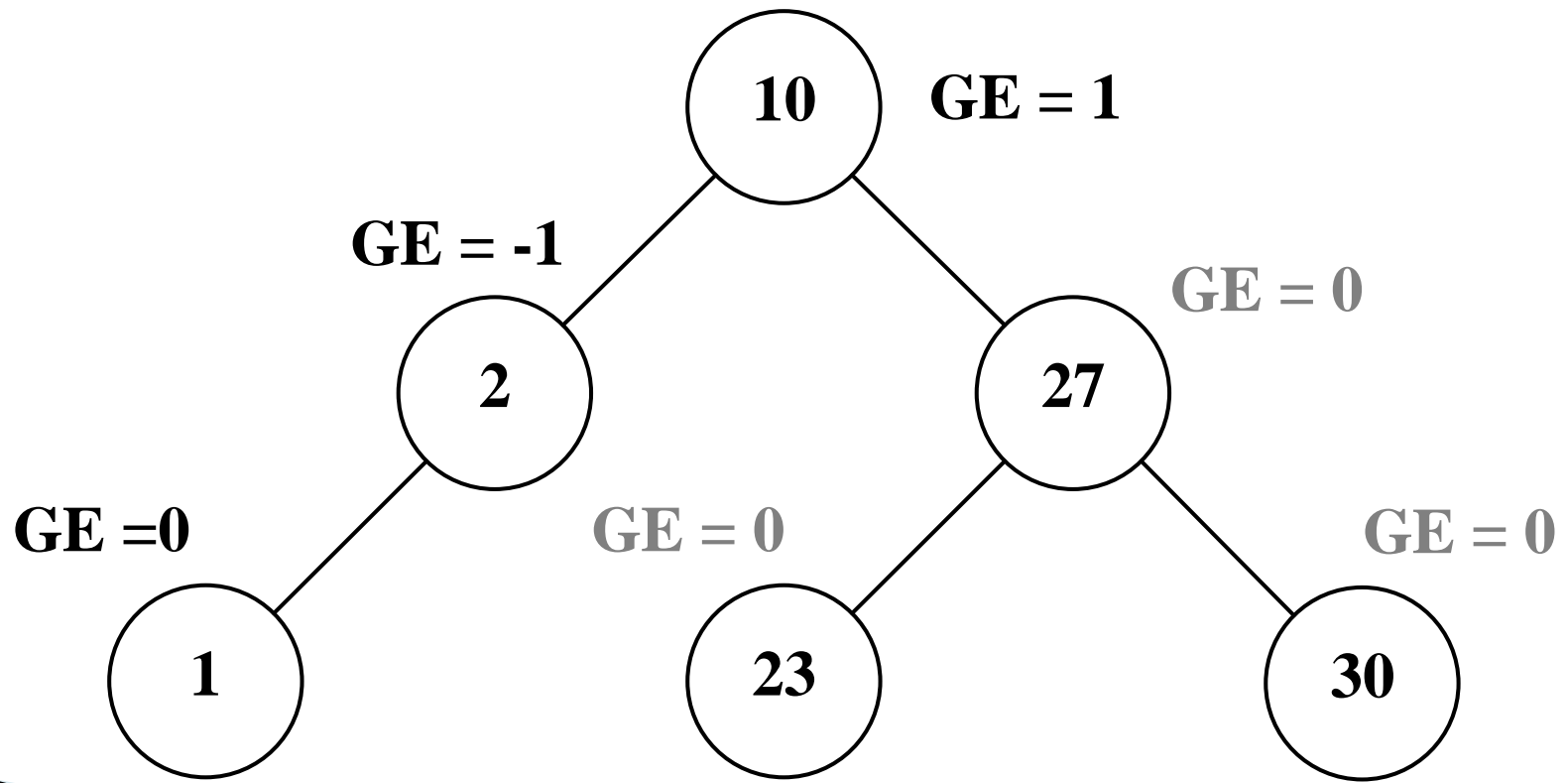
Arbori AVL

- ▶ Reechilibrarea se realizează prin operația de rotire simplă la stânga.



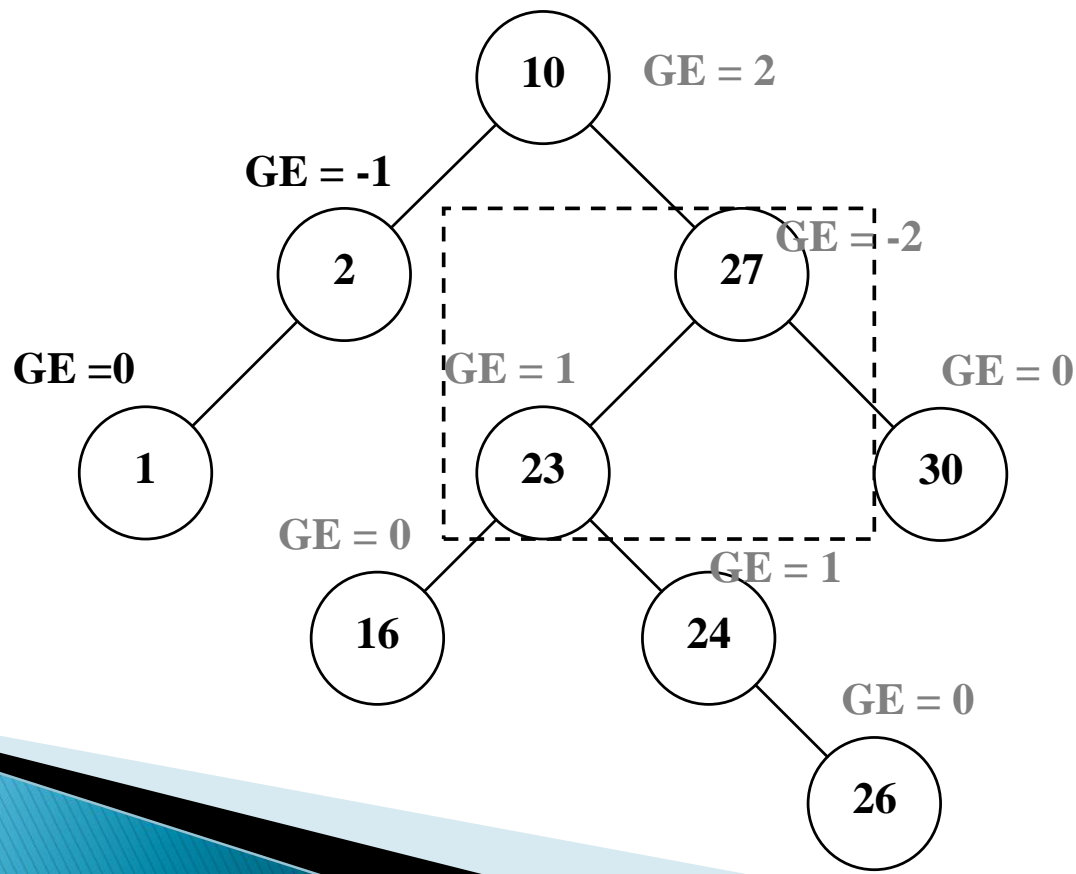
Arbore AVL

- ▶ Arbore AVL reechilibrat:



Arbori AVL

- Se inserează în arborele AVL anterior elementele cu valorile 16, 24, 26 și se obține structura arborescentă:

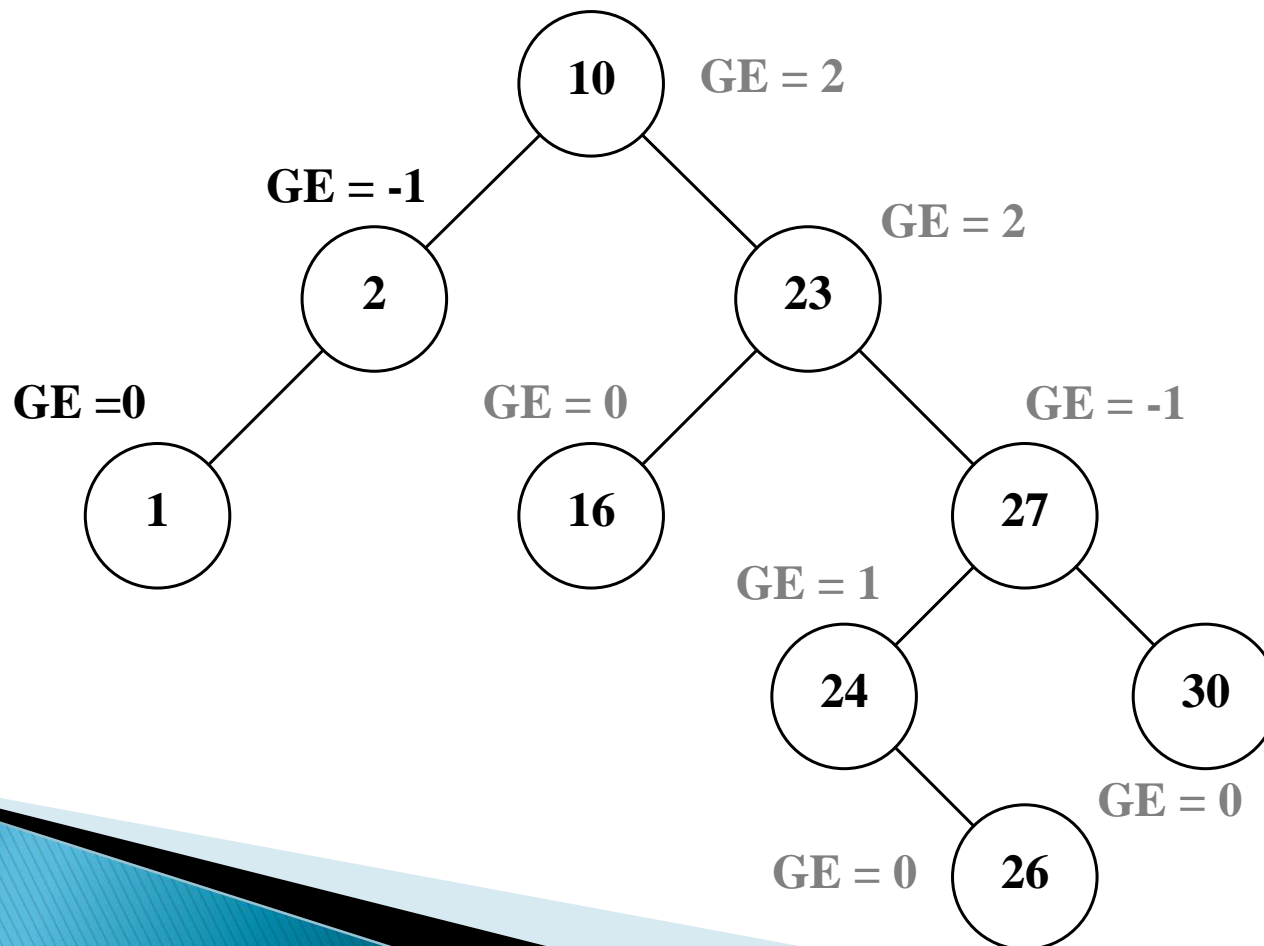


Arbori AVL

- ▶ Ultima operație: inserare nod 26;
- ▶ Analiza drumului de la nodul 26 la rădăcină conduce la identificarea pivotului, nodul 27;
- ▶ Nodul 27 este puternic dezechilibrat la stânga, iar nodul fiu, nodul 23, este dezechilibrat slab pe direcția opusă.

Arbori AVL

- ▶ Simulare rotire simplă la dreapta aplicată pivotului, nodul 27:



Arbori AVL

Arborele obținut:

- ▶ este dezechilibrat, dar în sens opus;
- ▶ reechilibrarea: tot cu o rotire simplă, dar în sens opus: va conduce la obținerea ipotezei inițiale;
- ▶ soluția este ineficientă.

Arbori AVL

Soluția eficientă:

- ▶ aplicarea unei rotiri duble: constă în două rotiri simple;
- ▶ prima rotire: scop de a rearanja structura arborescentă, astfel încât direcțiile dezechilibrului nodului pivot și a fiului acestuia să aibă același sens;
- ▶ a doua rotire are ca obiectiv reechilibrarea arborelui.

Arbori AVL

Soluția eficientă:

- ▶ cele două rotații sunt aplicate unor noduri diferite;
- ▶ prima rotație aplicată nodului fiu al nodului pivot, pe direcția dezechilibrului;
- ▶ a doua rotație aplicată nodului pivot și are sens opus dezechilibrului.

Arbori AVL

- ▶ Pivotul este nodul 27, puternic dezechilibrat la stânga.
- ▶ Etape pentru a reechilibra arborele:
 - se analizează nodul fiu al nodului pivot pe direcția dezechilibrului, respectiv nodul 23, care este slab dezechilibrat la dreapta;
 - reechilibrarea se realizează printr-o dublă rotație (pivotul și nodul fiu sunt dezechilibrate pe direcții diferite).

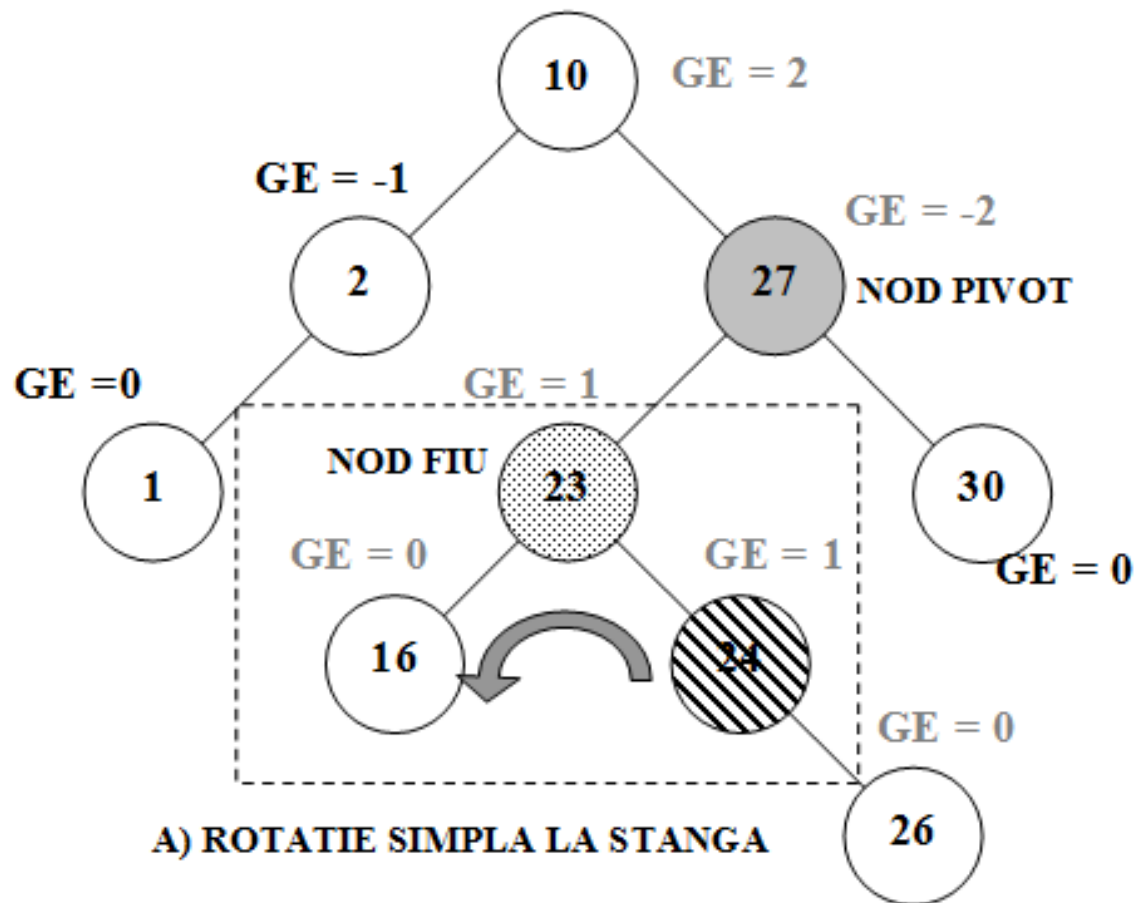
Arbori AVL

Etape pentru a reechilibra arborele:

- ▶ prima rotație se aplică nodului fiu și are sens identic cu dezechilibrul nodului pivot; redefinește situația pentru aplicarea unei rotații simple;
- ▶ a doua rotație se aplică nodului pivot și are sens opus dezechilibrului.

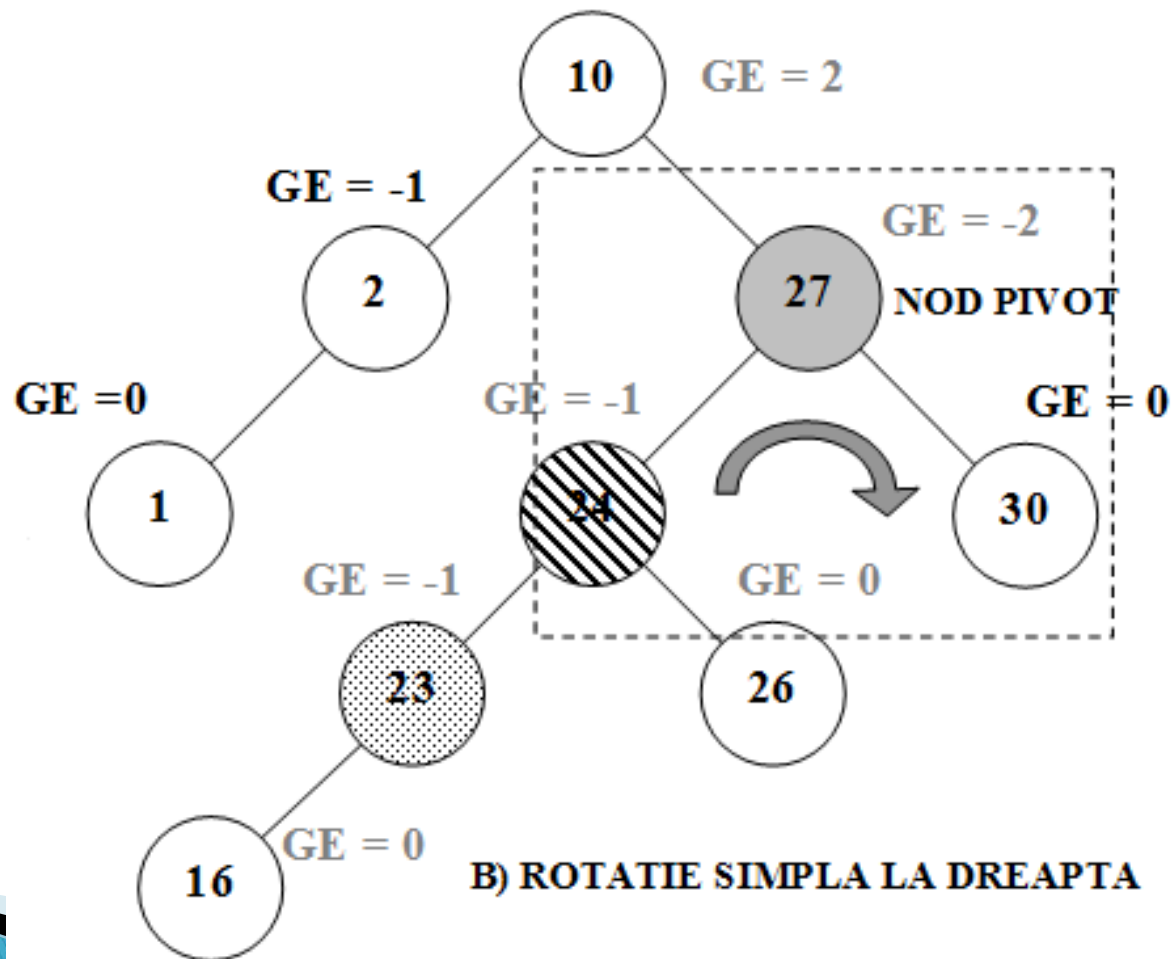
Arbori AVL

- ▶ Rotație simplă la stânga:



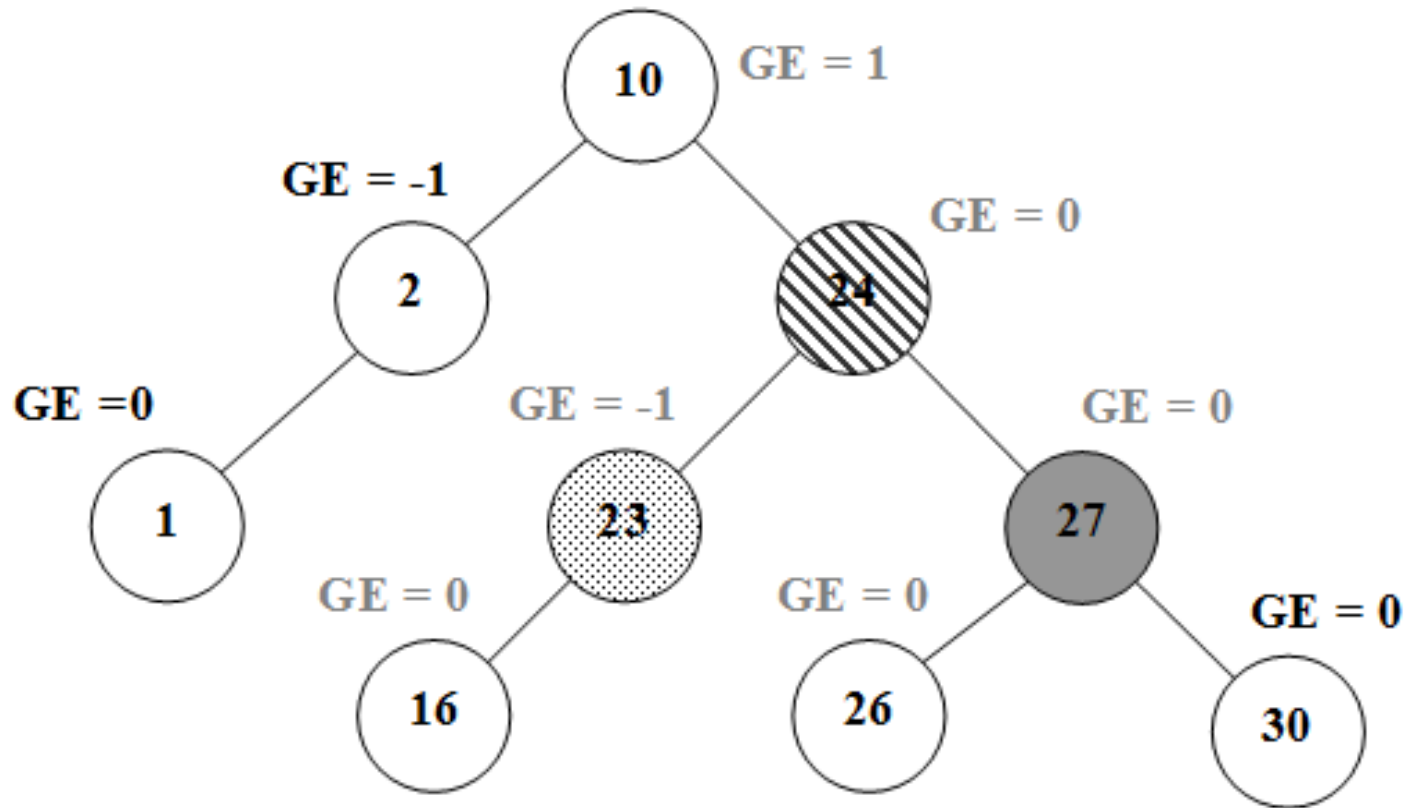
Arbori AVL

- ▶ Rotație simplă la dreapta:



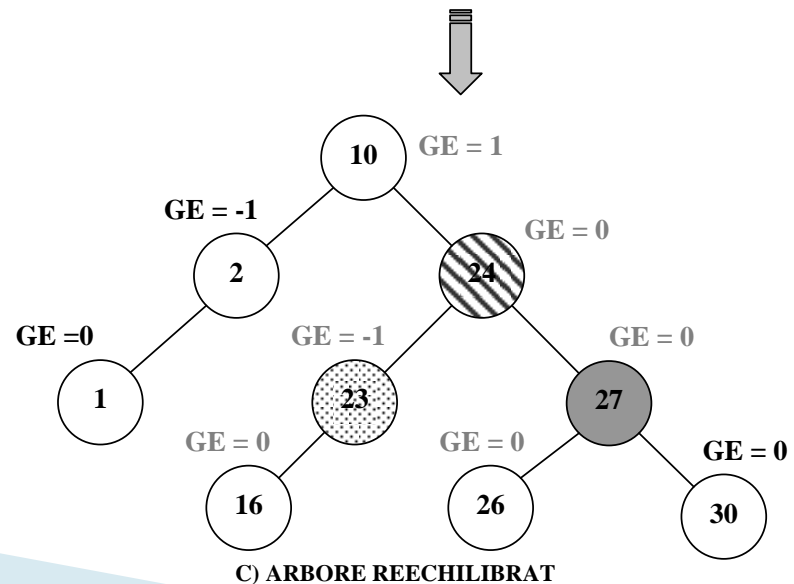
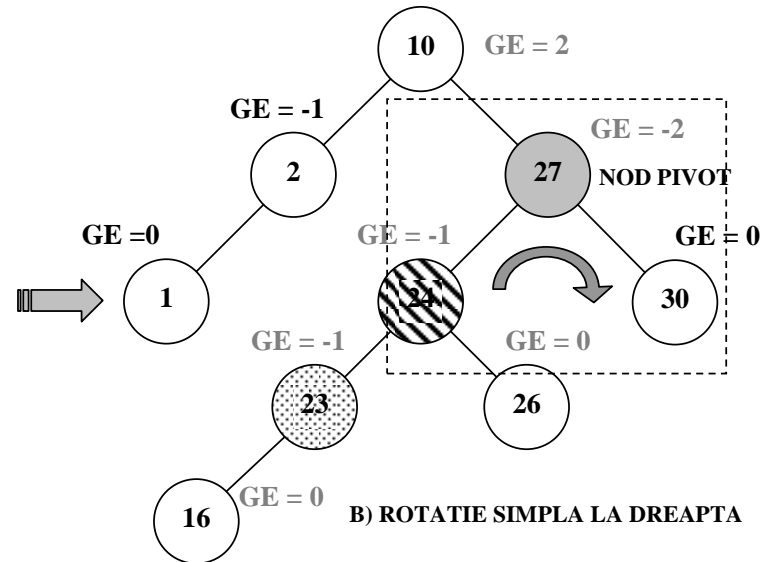
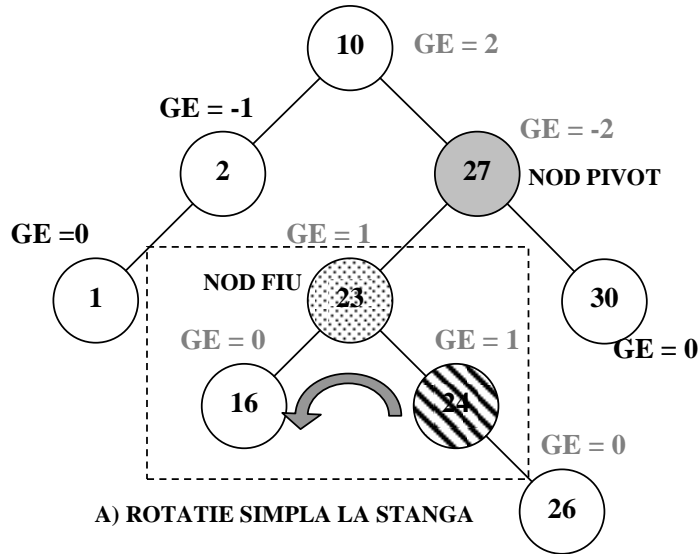
Arbore AVL

- ▶ Arbore AVL reechilibrat:



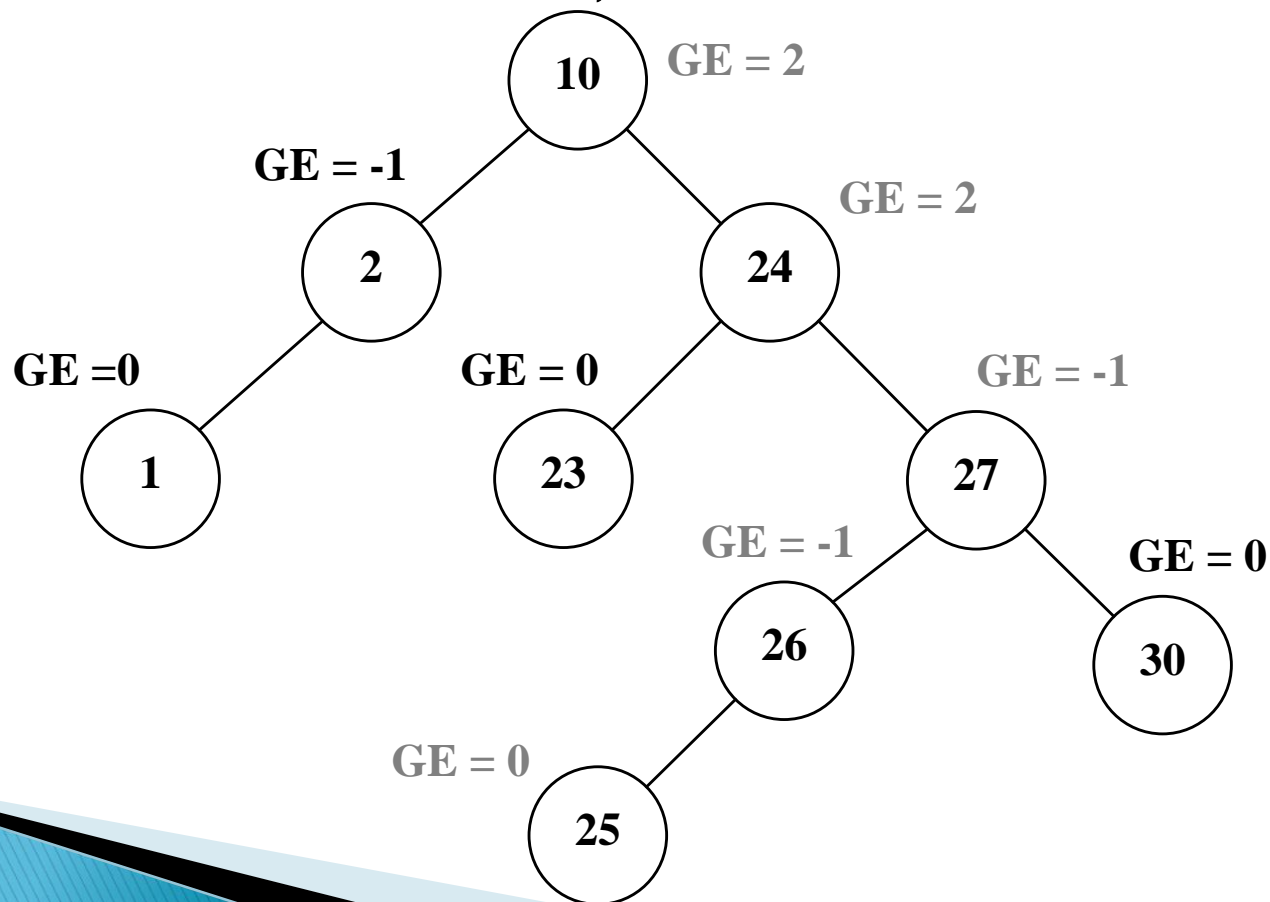
C) ARBORE REECHILIBRAT

Arbori AVL



Arbori AVL

- ▶ Reechilibrare arbore AVL prin ștergerea unei chei cu valoarea 16 și inserarea cheii 25.



Arbori AVL

- ▶ Există două noduri, 24 și 10 , ce descriu dezechilibre puternice, $GE = 2$, la dreapta.
- ▶ Analiza drumului de la noul nod inserat la rădăcină arborelui, stabilește ca fiind pivot nodul cu valoarea 24 .

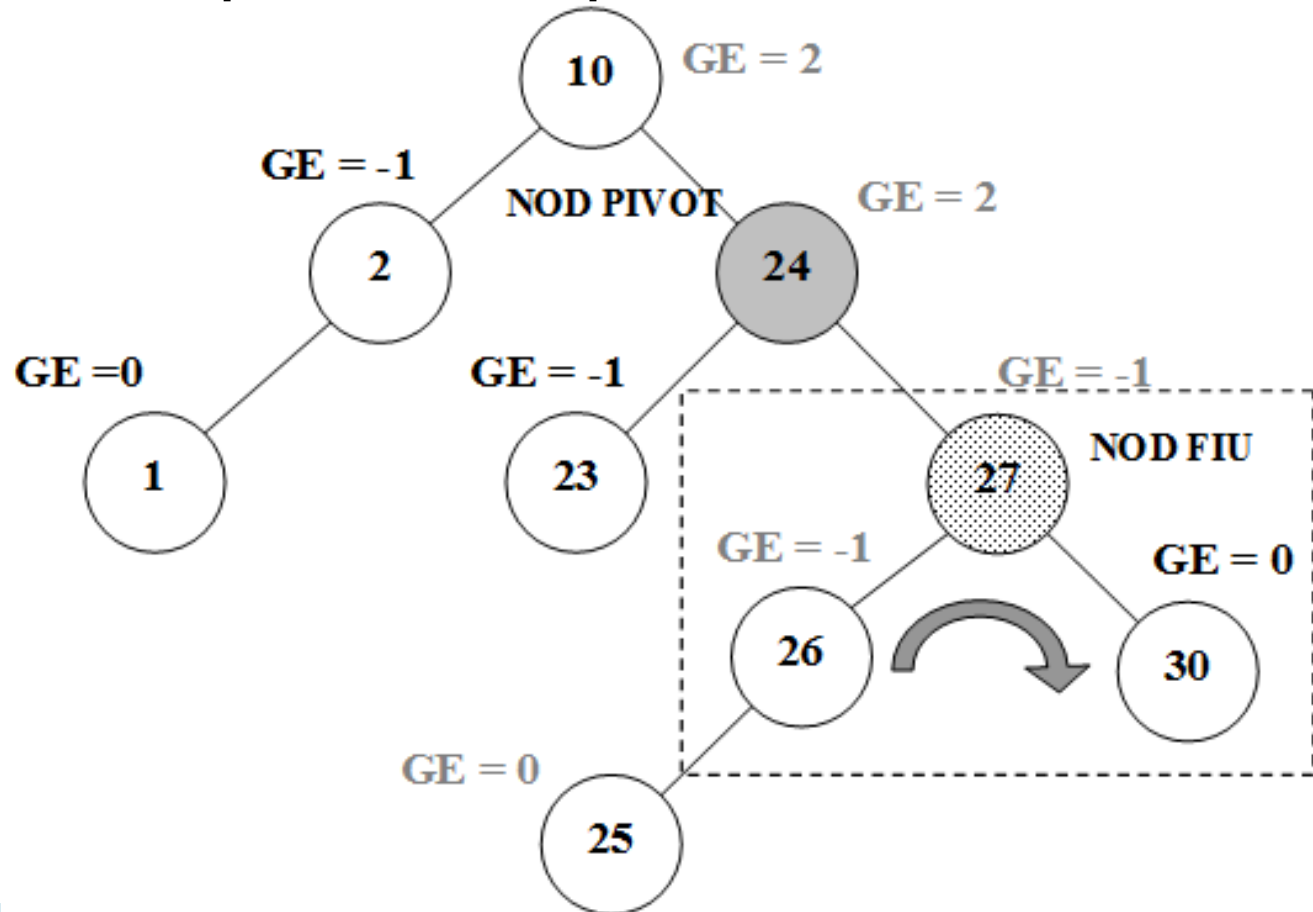
Arbori AVL

Reechilibrarea presupune:

- ▶ rotație simplă la dreapta în nodul fiu al pivotului, respectiv nodul 27; dacă pivotul are ambii fii, atunci rotația se face în direcția dezechilibrului;
- ▶ rotație simplă la stânga, în sens opus dezechilibrului, în nodul pivot, nodul 24.

Arbori AVL

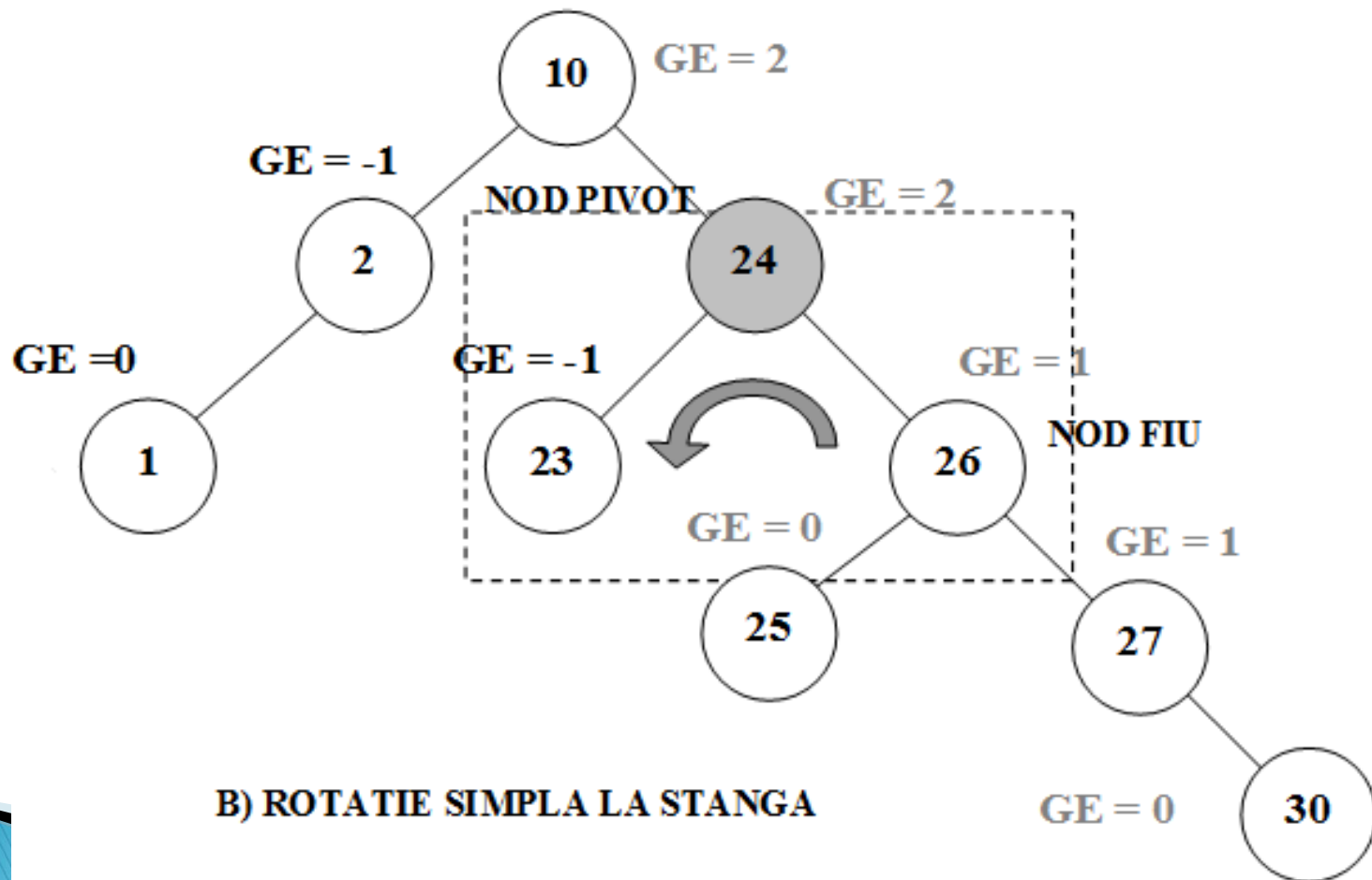
- ▶ Rotație simplă la dreapta:



A) ROTATIE SIMPLA LA DREAPTA

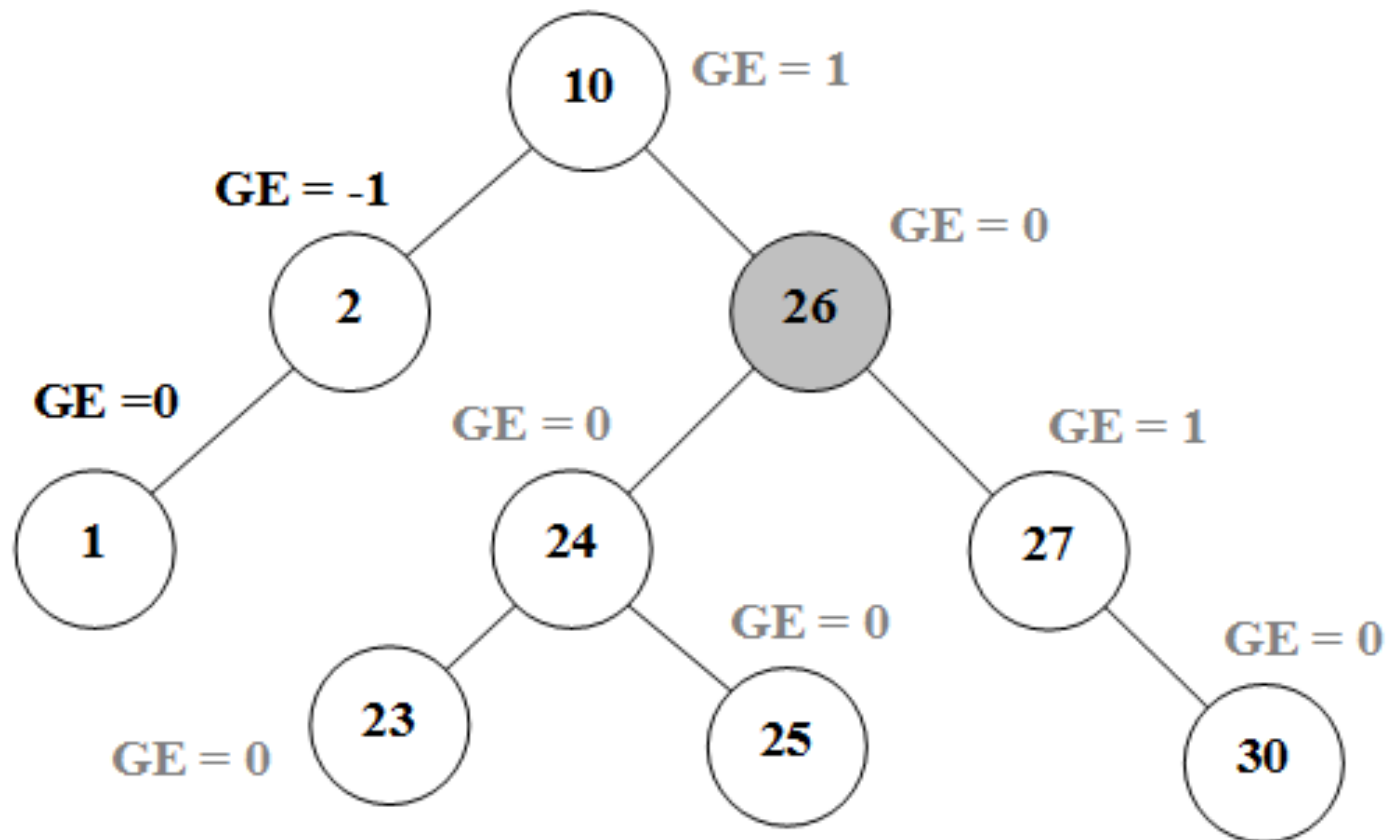
Arbori AVL

- ▶ Rotație simplă la stânga:



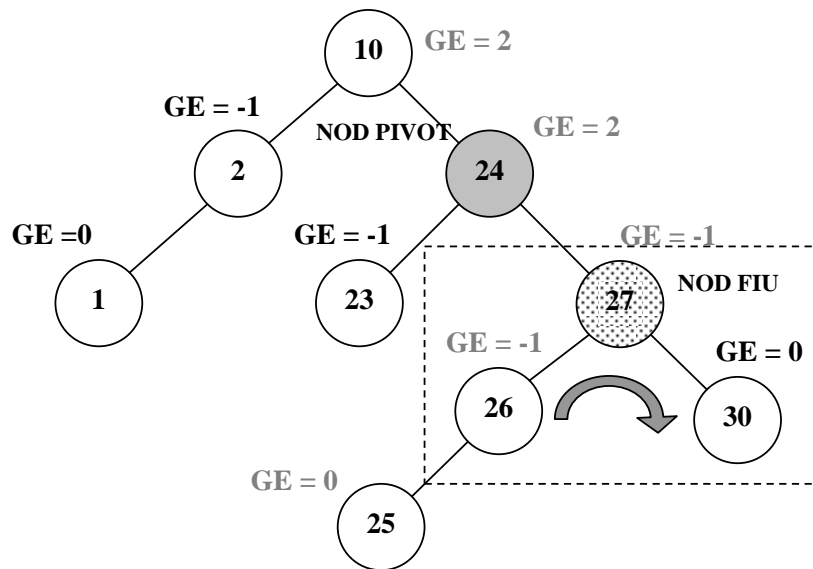
Arbore AVL

- ▶ Arbore AVL reechilibrat:

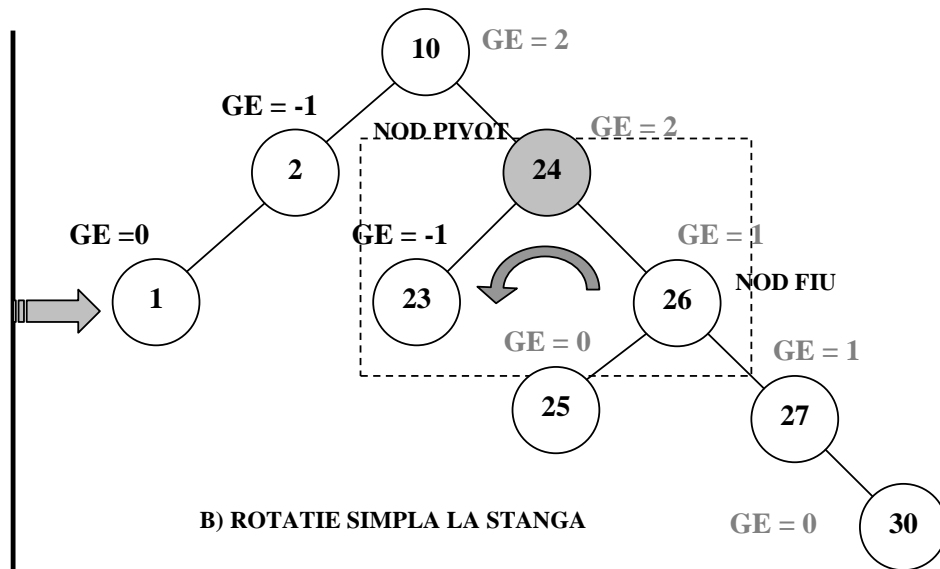


C) ARBORE REECHILIBRAT

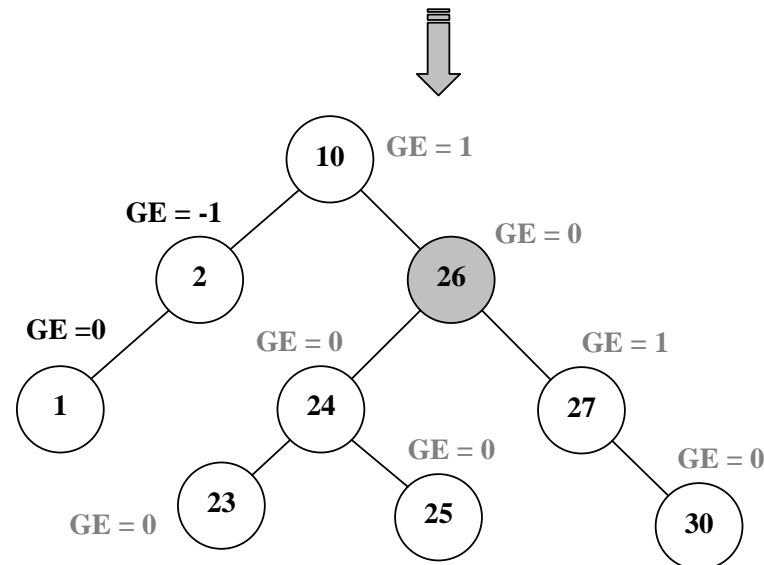
Arbori AVL



A) ROTATIE SIMPLA LA DREAPTA



B) ROTATIE SIMPLA LA STANGA



C) ARBORE REECHILIBRAT

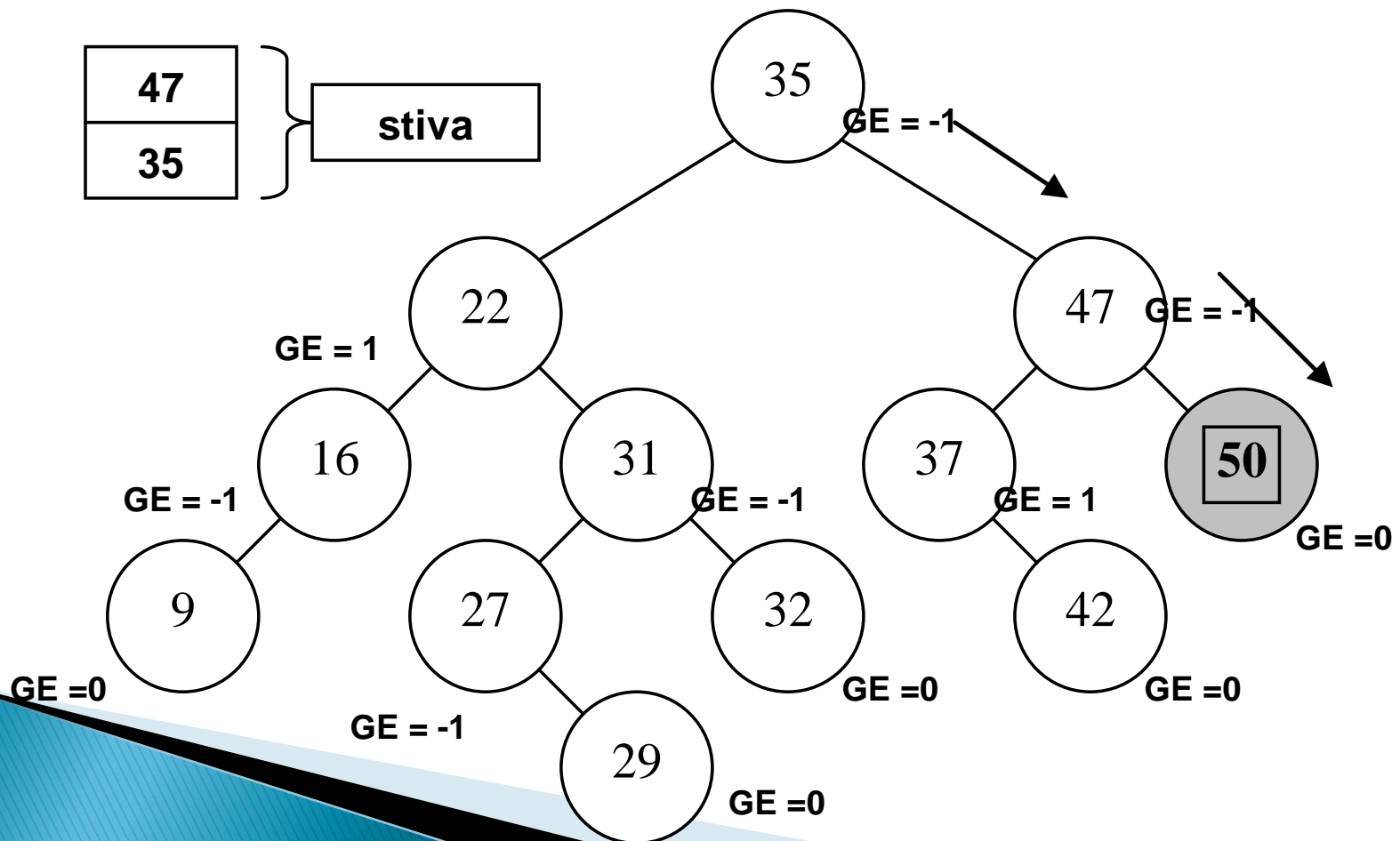
Arbori AVL

- Situații dezechilibru arbori AVL (operația de inserare):

Grad echilibru nod pivot	Nod fiu analizat	Grad echilibru nod fiu	Rotire
+2	dreapta	+1	Simplă la stânga
+2	dreapta	-1	Dublă la stânga: rotire simplă la dreapta în fiul din dreapta al pivotului; rotire simplă la stânga în pivot.
-2	stânga	-1	Simplă la dreapta
-2	stânga	+1	Dublă la dreapta: rotire simplă la stânga în fiul din stânga al pivotului; rotire simplă la dreapta în pivot.

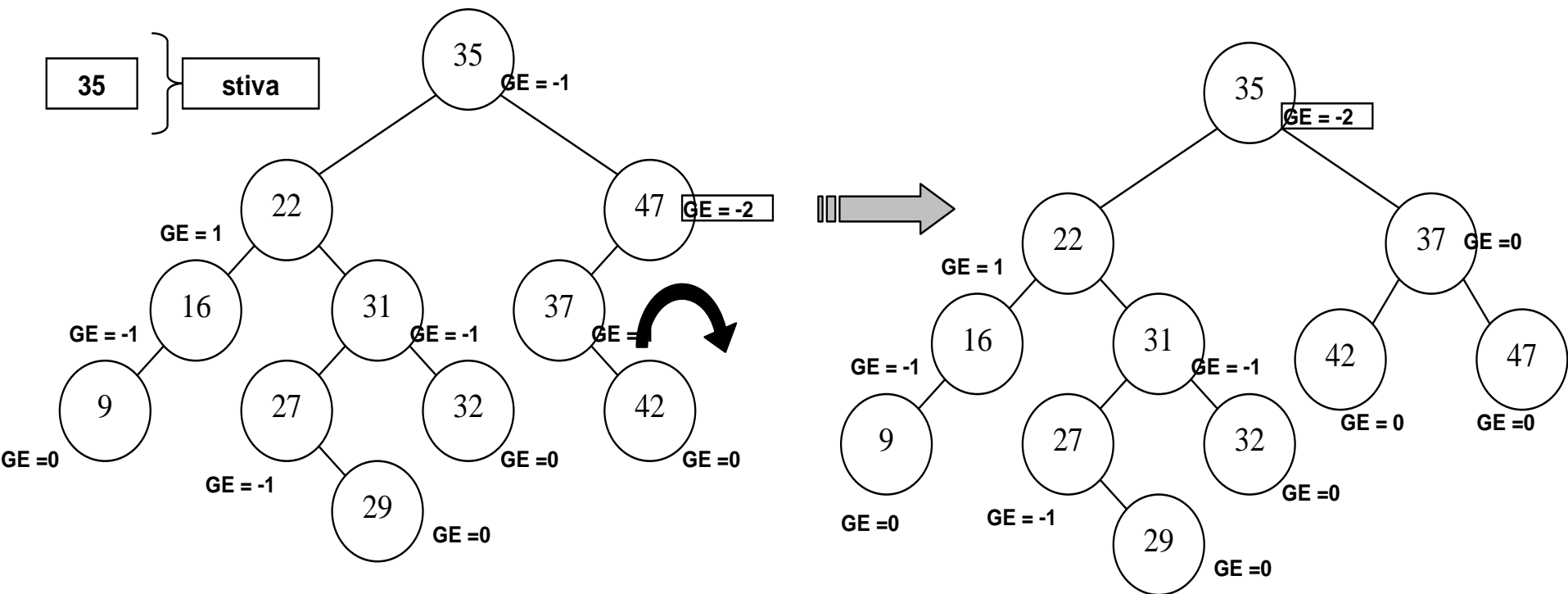
Arbori AVL

- Din arborele AVL de mai jos, se șterge nodul cu cheia *50*.



Arbore AVL

- ▶ Arbore de tip AVL dezechilibrat prin aplicarea unei rotații simple la dreapta în pivot:

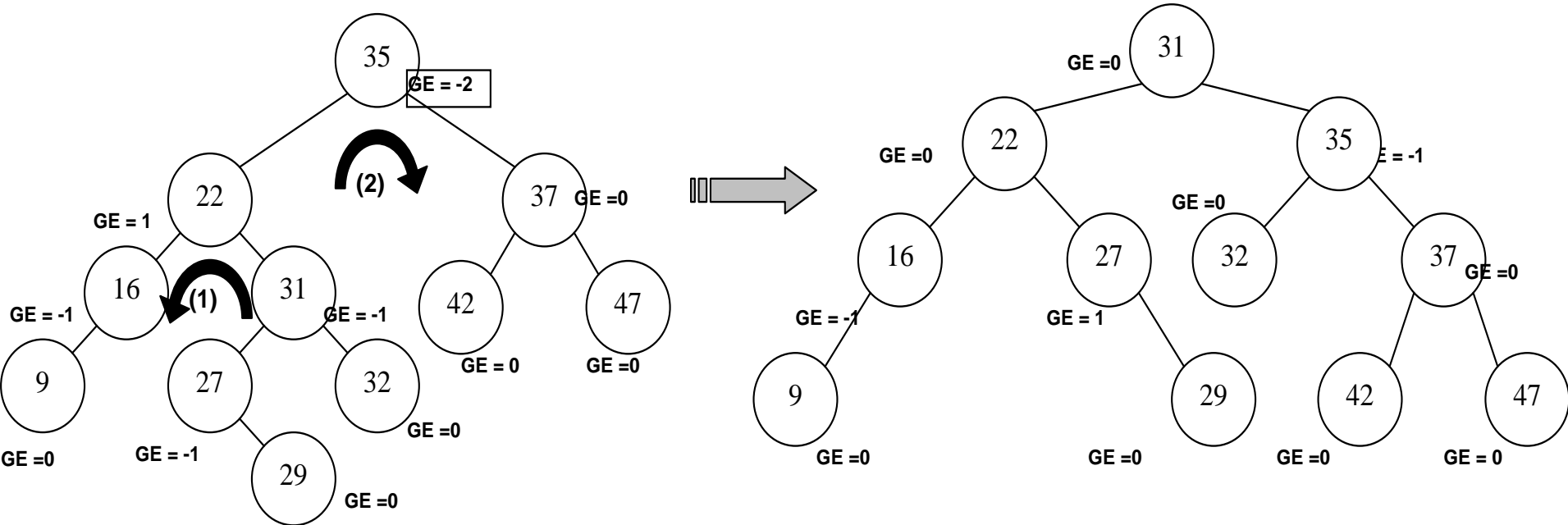


Arbori AVL

- ▶ Printr-o rotație la dreapta în nodul cu valoarea 35 considerat pivot, arborele AVL este reechilibrat.
- ▶ Deoarece stiva a fost golită, operația de ștergere se consideră încheiată.

Arbore AVL

▶ Arbore AVL reechilibrat:

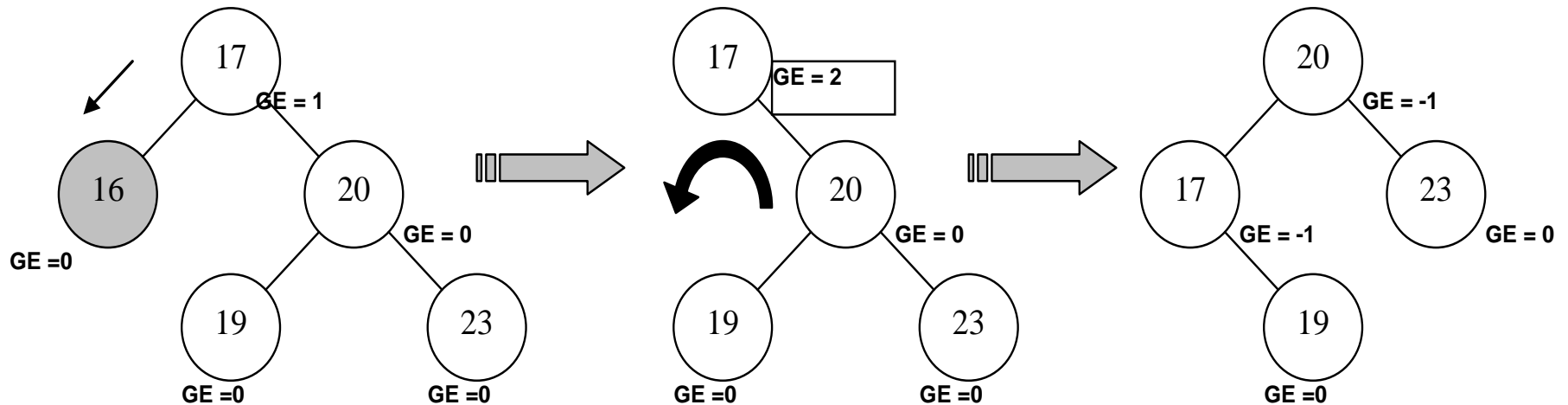


Arbori AVL

- ▶ Există cazuri în care prin ștergerea unui nod, se ajunge la situații de dezechilibru diferite de ipotezele analizate la operația de inserare:
 - pivotul are un grad de echilibru $\neq 2$, iar nodul fiu de pe direcția dezechilibrului are un echilibru 0 .
 - soluția este dată de o rotație simplă în pivot la stânga.

Arbori AVL

► Ștergere din arbore de tip AVL:



Bibliografie

- ▶ Marius Popa, Cristian Ciurea, Mihai Doinea, Alin Zamfiroiu – *Structuri de date: teorie și practică*, Editura ASE, București, 2023, 280 pg.
 - Cap. 7. Structuri arborescente