Structuri de date – Curs 10

Prof. univ. dr. Cristian CIUREA
Departamentul de Informatică și Cibernetică Economică
Academia de Studii Economice din București
cristian.ciurea@ie.ase.ro

Agenda

- Arbori multicăi de căutare
- Arbori B

Arbori B

- Sisteme de Gestiune a Bazelor de Date Relaţionale (SGBDR): operație importantă este regăsirea rapidă a datelor pe baza de indecși.
- Indexul este o colecţie de perechi *<valoare cheie, adresa articol>* pentru a facilita accesul la o colecţie de articole.
- Structura de date foarte des folosită pentru implementarea indecşilor este arborele de căutare.

Arbori B

- Un index se numește *dens* dacă el conţine câte o pereche *<valoare cheie, adresa articol>* pentru fiecare articol din colecţie.
- Un index care nu este dens este numit index *rar*.

Arbori B

- Articolele memorate:
  - oricât de complexe;
  - conţin un câmp numit cheie pentru identificare.

- Dacă există o relaţie de ordine totală pe mulţimea cheilor posibile ce vor trebui regăsite cu ajutorul arborelui de căutare, atunci arborele de căutare se numește *bazat pe ordinea cheilor*.

Arbori B

- Arbori de căutare bazaţi pe ordinea cheilor:
  - ***arbori binari de căutare***: o singură cheie asociată fiecărui nod;
  - ***arbori multicăi de căutare***: mai multe chei asociate fiecărui nod.

- Performanţele unui index se îmbunătăţesc prin mărirea factorului de ramificare a arborelui de căutare folosit.

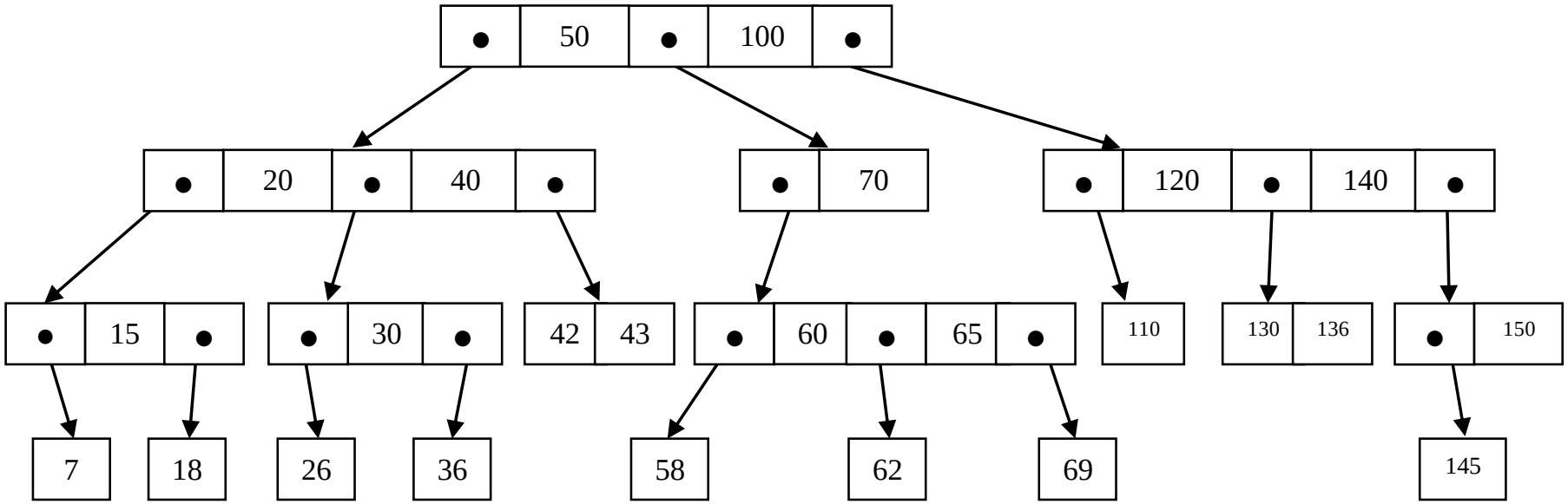
Arbori B

Arborii multicăi de căutare:

- generalizare a arborilor binari de căutare;
- nod oarecare: număr de *M* chei, ordonate strict crescător, ramificare în *M+1* subarbori;
- *M* diferă de la nod la nod;
- *M* este între anumite limite pentru folosirea eficientă a mediului de stocare;
- *M* chei ataşate unui nod formează o *pagină*.

Arbori B

- Arbore multicăi de căutare de ordin *n=3*:



Arbori B

Arbore multicăi de căutare – proprietăţi:

- structura nodului:

n	P_0	K_0	P_1	K_1	P_2	...	P_{n-1}	K_{n-1}	P_n

- $P_0, P_1, \ldots, P_n$ pointeri către subarbori;
- $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$ valorile cheilor.
- număr de ramificaţii – restricţia $M \leq n - 1$.

Arbori B

- Arbore multicăi de căutare – proprietăţi (continuare):
  - valorile cheilor într-un nod sunt în ordine crescătoare;
  - valorile cheilor din nodurile subarborelui *Pi* sunt mai mici decât valoarea cheii *Ki, i= 1, 2, …, n-1*;
  - valorile cheilor din nodurile subarborelui *Pn* sunt mai mari decât valoarea de cheie *Kn – 1*;
  - subarborii *Pi* sunt, de asemenea, arbori multicăi de căutare.

Arbori B

Arbore B de ordin *N* – proprietati:

- arbore multicăi de căutare;
- toate nodurile frunză sunt pe acelaşi nivel (arborele este echilibrat);
- rădăcina are cel puţin doi descendenţi, dacă nu este frunză (ramificare timpurie);
- pagina conţine cel puţin *N* chei; excepţie rădăcina, care poate avea mai puţine chei, dacă este frunză (un nod este cel putin 50% plin);

Arbori B

- Arborii B sunt structuri de date dinamice arborescente utilizate pentru memorarea informatiilor necesare căutării rapide în baze de date foarte largi.

Arbori B

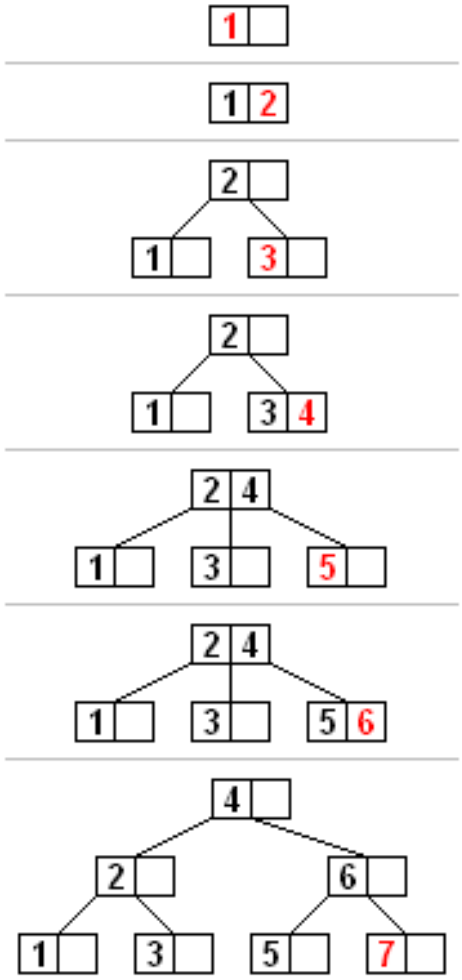
- Un arbore B de ordin *N* este o structură de date arborescentă în care nodurile și operatiile de inserare/ștergere respectă un set de reguli bine definite:
  - fiecare nod al arborelui poate contine la un moment dat maxim *2*N* chei;
  - fiecare nod al arborelui conține minim *N* chei;
  - oricare nod al arborelui B de grad *N* nu conține mai mult de *2*N* valori;
  - cheile din fiecare nod sunt sortate descrescător sau crescător;

Arbori B

- Arbori B – proprietăți (continuare):
  - operația de inserare/ștergere cheie are loc în noduri frunză;
  - toate nodurile frunză ale arborelui B de ordin *N* se găsesc pe același nivel;
  - înălțimea unui arbore B de grad *N* ce conține *n* chei este egală cu $log_N n$.

Arbori B

- Arbore B de ordinul $N=1$:



Arbori B

- Arborele B este o structura de date de tip N-ară. Această caracteristică este dată de faptul ca în arborele B de ordin *N* nodurile părinte au maxim *2*N+1* noduri fii.
- Arborele B este utilizat pentru a realiza operații de căutare în baze de date stocate pe suporturi externe, datorită dimensiunii lor foarte mari.
- Principiul de la care s-a pornit în dezvoltarea arborilor B a fost minimizarea timpului de acces la disk, în momentul căutării unei chei.

Arbori B

Operații de bază:

- **Căutarea**:
  - Comparație cheie căutată cu cheile nodului curent;
  - Nodul de start: rădăcina
  - Lungimea maximă a drumului de căutare este dată de înălţimea arborelui
  - Situații de continuare a cautarii:
    - $c_i < x < c_{(i+1)}$: căutare în nodul indicat de P_i;
    - $c_n < x$: căutare în nodul indicat de P_n;
    - $x < c_0$: căutare în nodul indicat de P_0.

Arbori B

Operații de bază (continuare):

- Inserarea unei chei în arbore B:
  - precedată de operaţia de căutare;
  - cheie găsită în arbore: abandon operație inserare;
  - cheia nu a fost găsită: căutare terminată într-un nod frunză, unde se inserează noua cheie;
- Situații de inserare:
  - nodul are mai puţin de *2*N* chei: inserare fără modificarea structurii arborelui B;
  - nodul are numărul maxim de *2*N* chei: “fisionare” nod; rezultă două noduri care se vor găsi pe acelaşi nivel şi o cheie mediană care nu se va mai găsi în nici unul din cele două noduri.

Arbori B

- Operatia de inserare a unei noi valori într-un arbore B are în centru un nod frunză, iar după orice inserare arborele este tot unul B.

Arbori B

- Inserarea unei noi valori, *CheieNoua*, într-un arbore B de ordin *N* existent necesită parcurgerea pașilor:
  - căutarea nodului în care se face inserarea;
  - poziționarea pe un nod frunză, care nu are noduri fiu, determină inserarea noii valori, *CheieNoua*, în șirul sortat crescător de chei fără a deteriora ordonarea;
  - verificarea numărului de chei din acest nod pentru a vedea dacă cu această nouă valoare nu a avut loc depășirea numărului maxim de valori, *2*N*;
  - dacă nodul conține *2*N+1* chei atunci arborele trebuie reechilibrat;

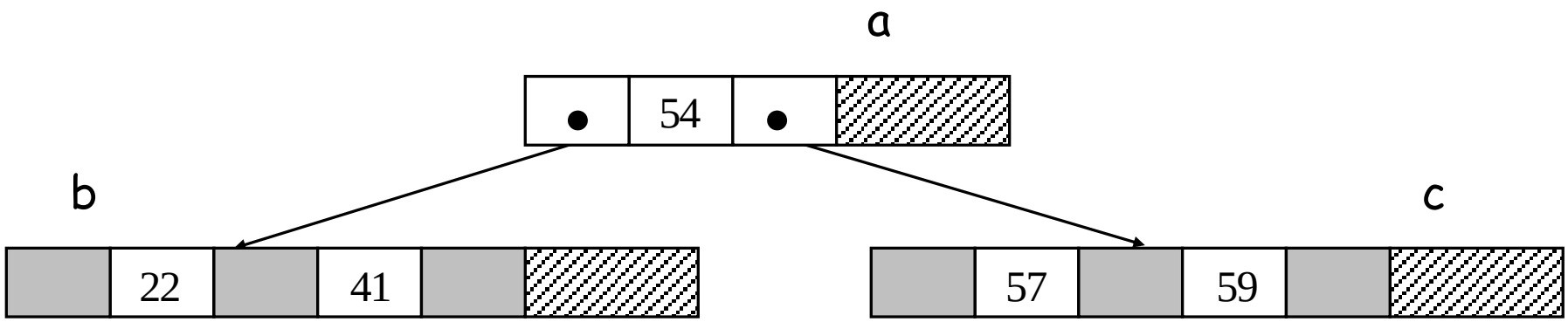
Arbori B

Arbore B de ordin 2:

- Numărul maxim de chei dintr-un nod este 4;
- Inserarea valorilor de cheie 22, 57, 41, 59.

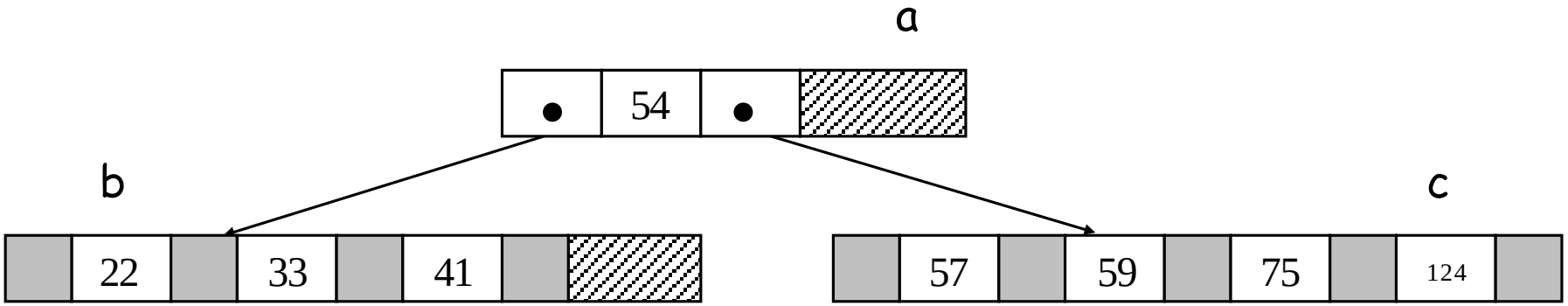
Arbori B

- În urma inserării cheii 54, nodul rădăcină va conţine prea multe chei, aşa că el va “fisiona”:



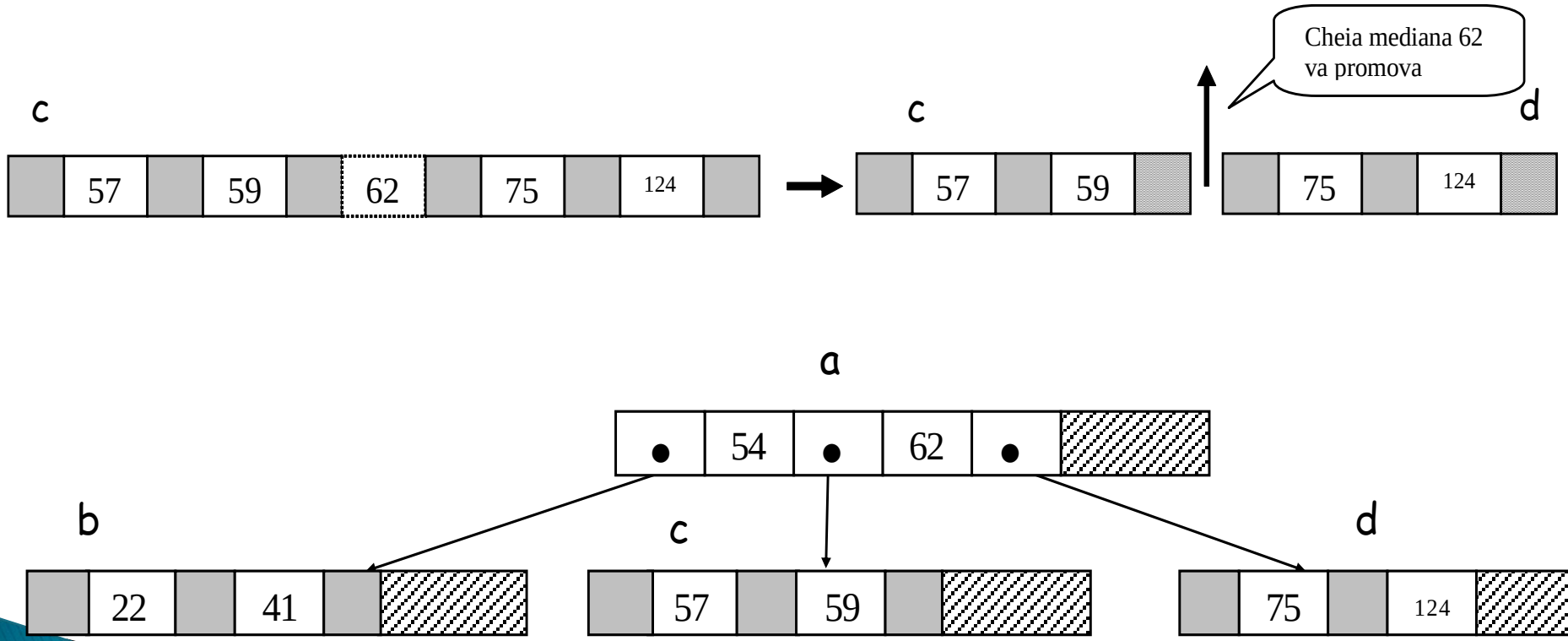
Arbori B

- Inserarea cheilor 33, 75, 124:



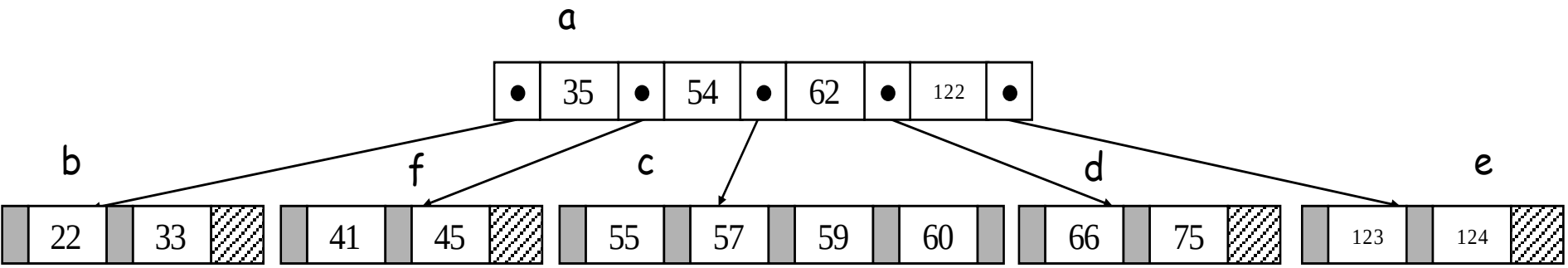
Arbori B

- Inserarea cheii 62: divizarea nodului *c*:
- Cheia 62 promovează în nodul rădăcină:



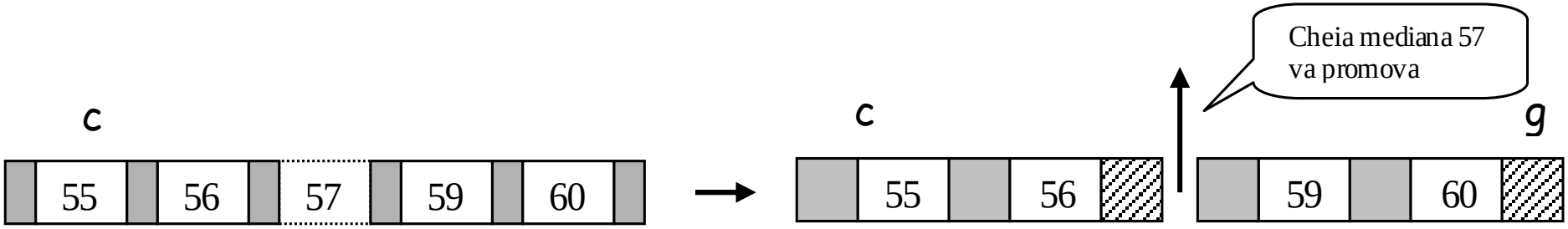
Arbori B

- Inserarea cheilor 33, 122, 123, 55, 60, 45, 66, 35:



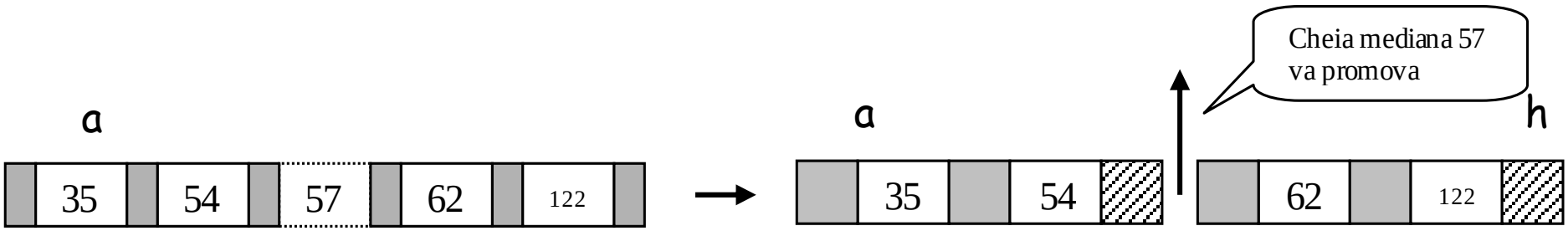
Arbori B

- Inserarea cheii 56: fisionarea nodului *c*:



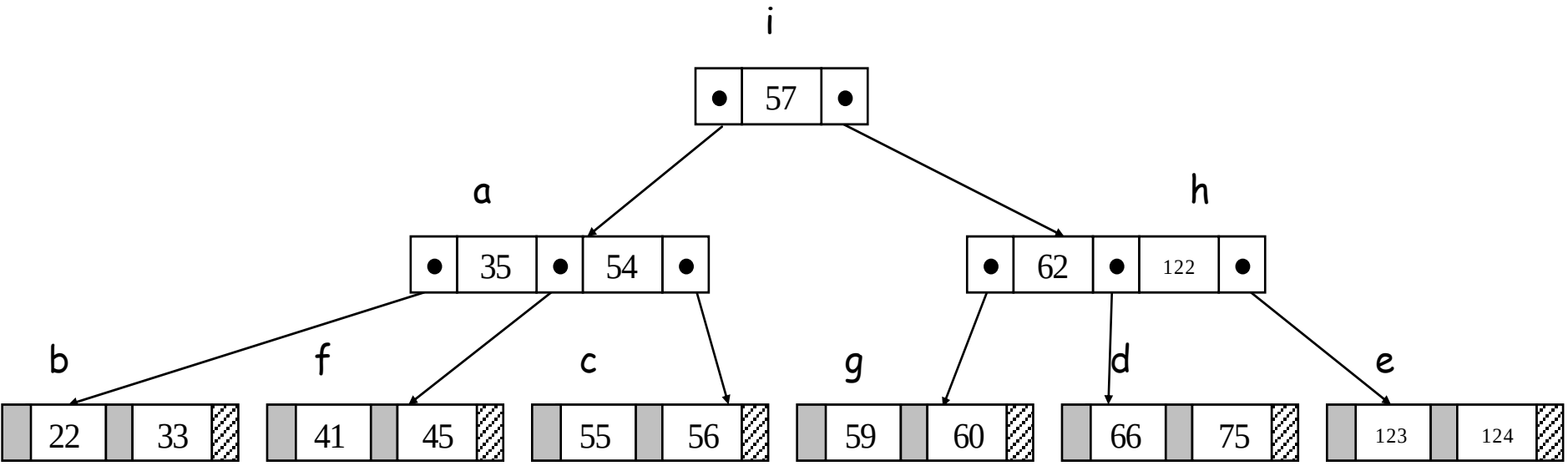
Arbori B

- Nodul părinte *a* este plin şi nu poate primi noua cheie 57. Algoritmul de fisionare este aplicat din nou, pentru nodul *a*.



Arbori B

- Noua structură a arborelui B:



Arbori B

- Algoritmul de inserare a unei chei într-un arbore B:
  - inserează noua valoare de cheie în nodul frunză corespunzător;
  - nodul_curent = nodul_frunză;
  - while (nodul_curent este OVERFLOW):
    - divide nodul_curent în două noduri aflate pe acelaşi nivel şi promovează cheia mediană în nodul părinte pentru nodul_curent;
    - nodul_curent = nodul_părinte pentru nodul_curent.

Arbori B

- Cel mai rău caz: aplicarea algoritmului de fisionare pe întreaga înălţime a arborelui, fisionându-se *h-1* noduri (*h* este înălţimea arborelui înainte de inserare).

Arbori B

Operații de bază (continuare):

- Ștergerea unei chei dintr-un arbore B:
  - simplă, dacă valoarea de cheie ştearsă se află într-un nod frunză;
  - complexă, dacă valoarea de cheie ştearsă nu se află într-un nod frunză: ştergere logică, fiind înlocuită cu o altă cheie, vecină în inordine, care va fi ştearsă fizic.

Arbori B

- Dacă în cazul operației de inserare, nodul arborelui nu trebuie să dețină mai mult de *2*N* chei, în cazul ștergerii se urmărește ca nodul din care s-a șters să nu rămână cu mai puțin de *N* chei.

Arbori B

- Ștergerea valorii *ValCheie* dintr-un arbore B de ordin *N* implică parcurgerea pașilor:
  - căutarea nodului ce conține cheia cu valoarea de șters;
  - dacă valoarea de șters se află în nodul rădăcină și acesta este unicul nod al arborelui, adică nu are noduri fiu, atunci valoarea este ștearsă;
  - daca valoarea *ValCheie* se găsește într-un nod frunză, iar acesta conține mai mult de *N* chei, atunci ștergerea are loc efectiv.

Arbori B

- Pași operație ștergere (continuare):
  - dacă valoarea *ValCheie* se găsește într-un nod rădăcină ce are noduri fiu, atunci, fie se alege cea mai mare valoarea din nodul fiu stânga, cu care se înlocuiește valoarea ștearsă, fie se alege cea mai mică valoare din nodul fiu dreapta;
  - dacă valoarea de șters se găsește într-un nod frunză ce are exact *N* chei, procesul de eliminare este urmat de un împrumut de la unul dintre nodurile vecine, stânga sau dreapta, ce conțin mai mult de *N* chei;

Arbori B

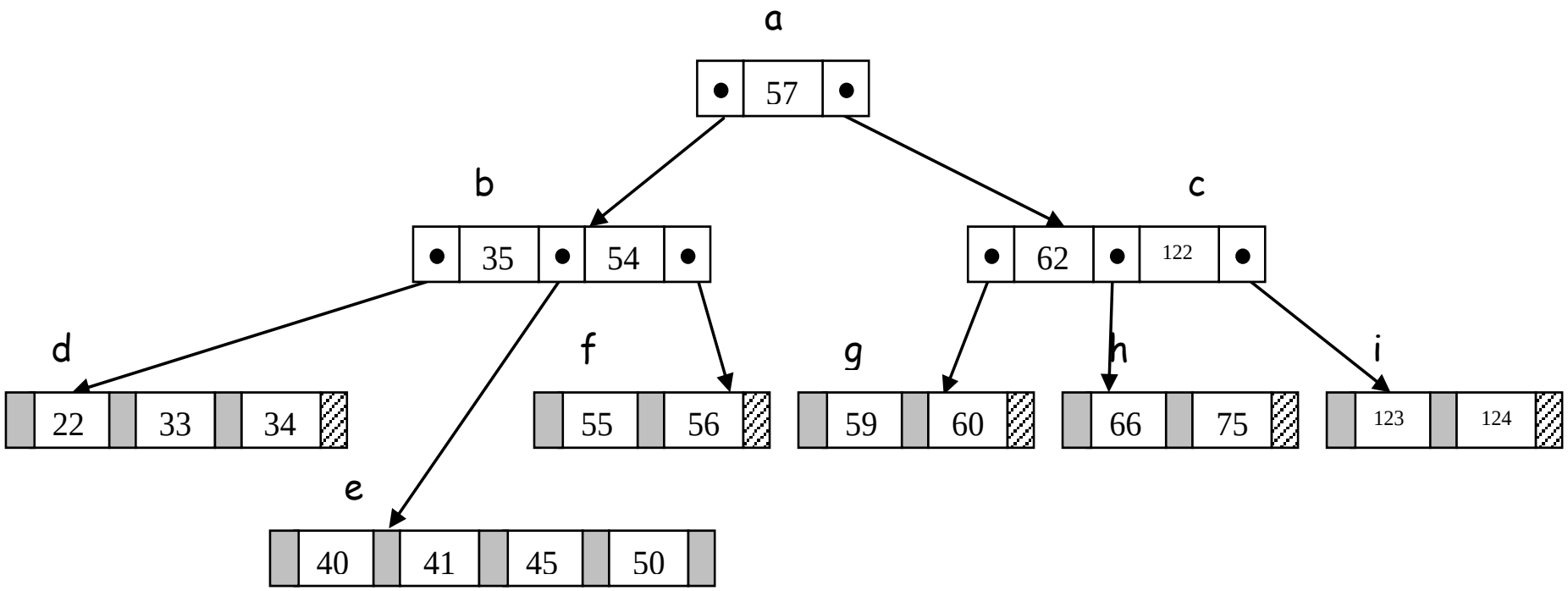
- Situații de ștergere:
  - nodul conţine mai mult de *N* chei: ştergerea nu ridică probleme;
  - nodul are numărul minim de chei *N*: după ştergere, numărul de chei din nod va fi insuficient; se împrumută o cheie din nodul vecin cu cel puţin *N* chei (partajare).

Arbori B

- Ștergerea unei chei dintr-un arbore B (continuare):
  - Dacă nu se poate face o partajare (nodurile vecine au numărul minim de chei), atunci două noduri vecine vor fuziona, împrumutându-se o cheie şi din nodul părinte.
  - Partajarea sau fuzionarea trebuie eventual repetate şi pentru nivelurile superioare.
  - Cazul cel mai nefavorabil: partajarea sau fuzionarea parcurg întreaga înălţime a arborelui; se va forma o nouă rădăcină, înălţimea arborelui scăzând cu un nivel.

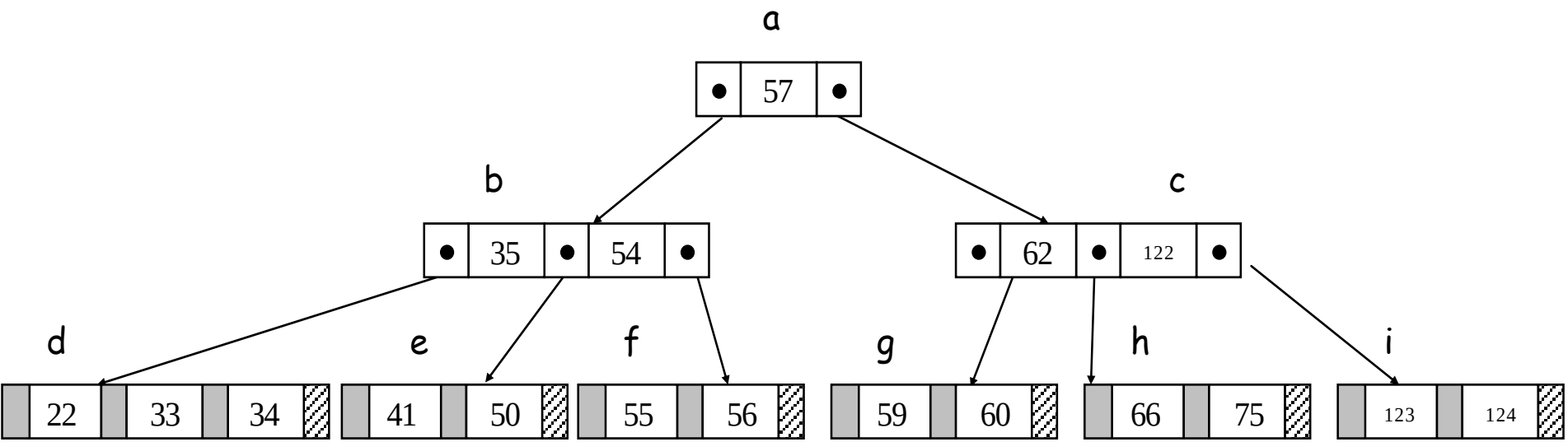
Arbori B

- Se consideră următoarea configuraţie de arbore B de ordin 2:



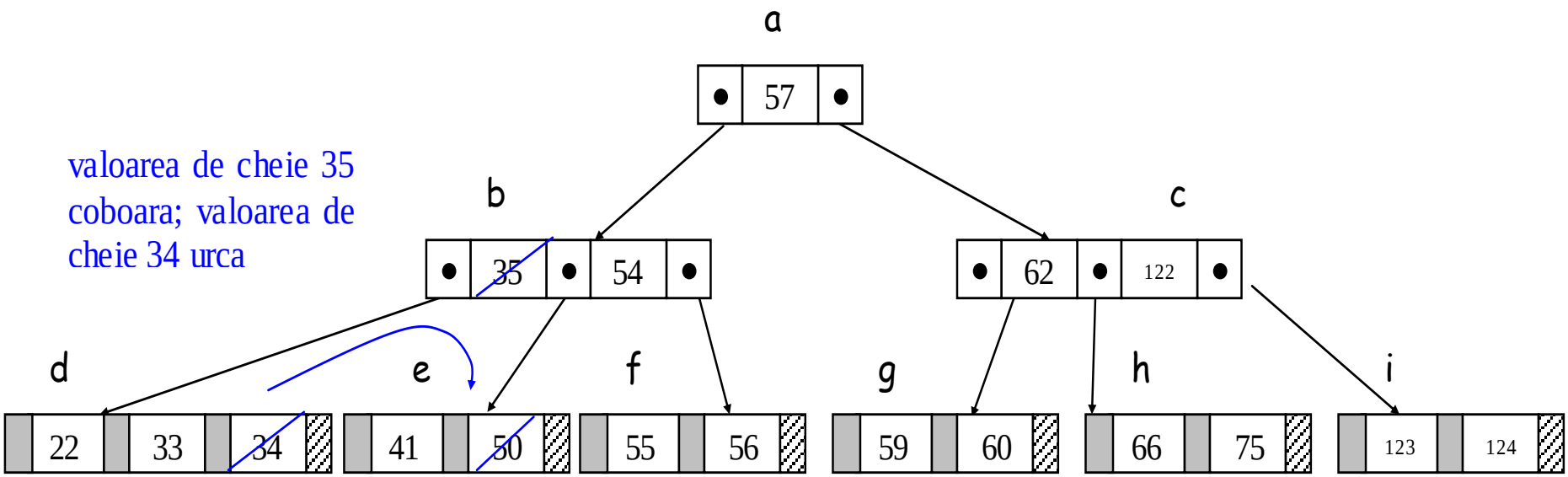
Arbori B

- Ştergerea valorilor de cheie 40 şi 45 din nodul *e* nu ridică probleme:



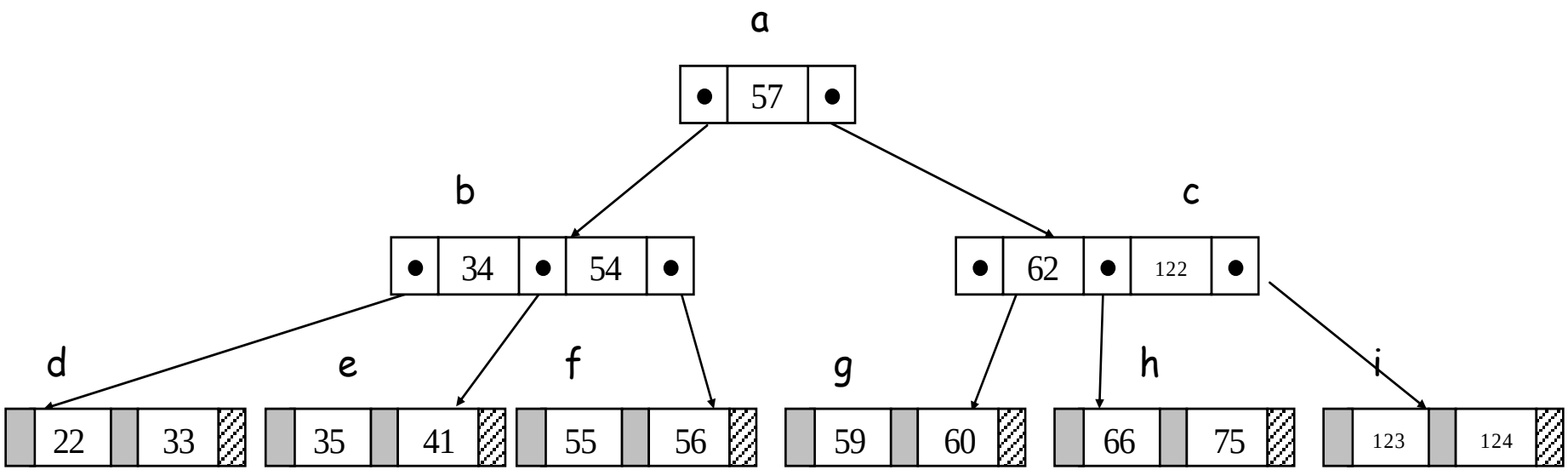
Arbori B

- Ştergerea valorii de cheie 50: partajare între nodurile *d* şi *e*:



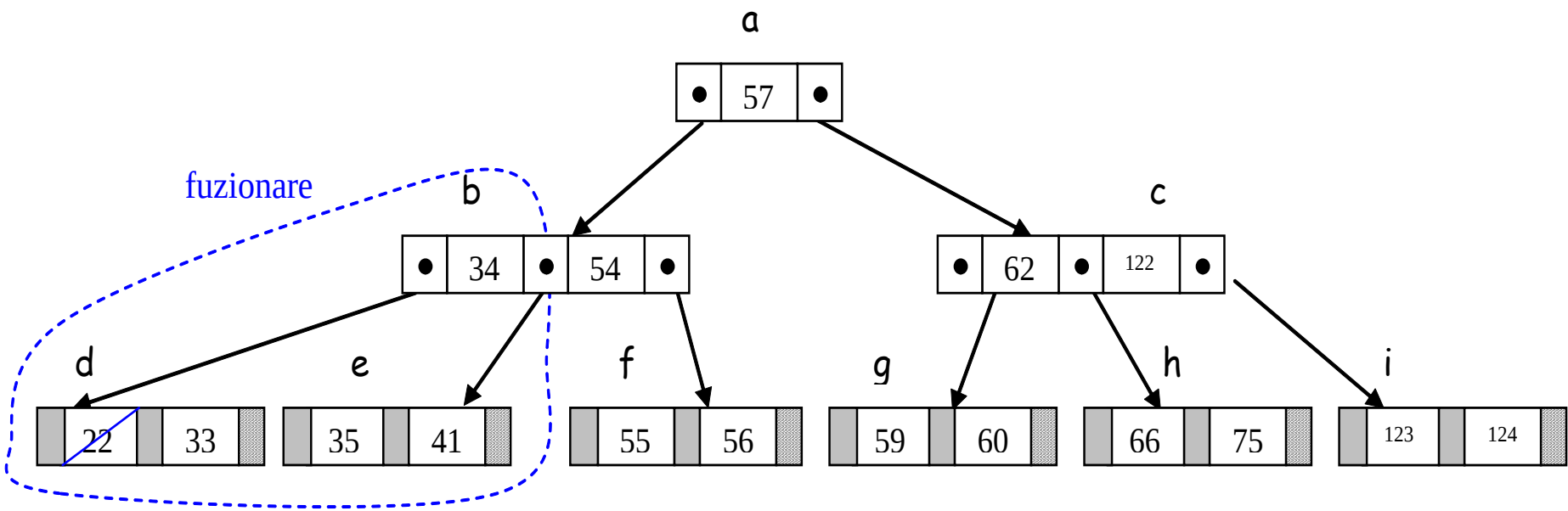
Arbori B

- Structura arborelui după partajare:



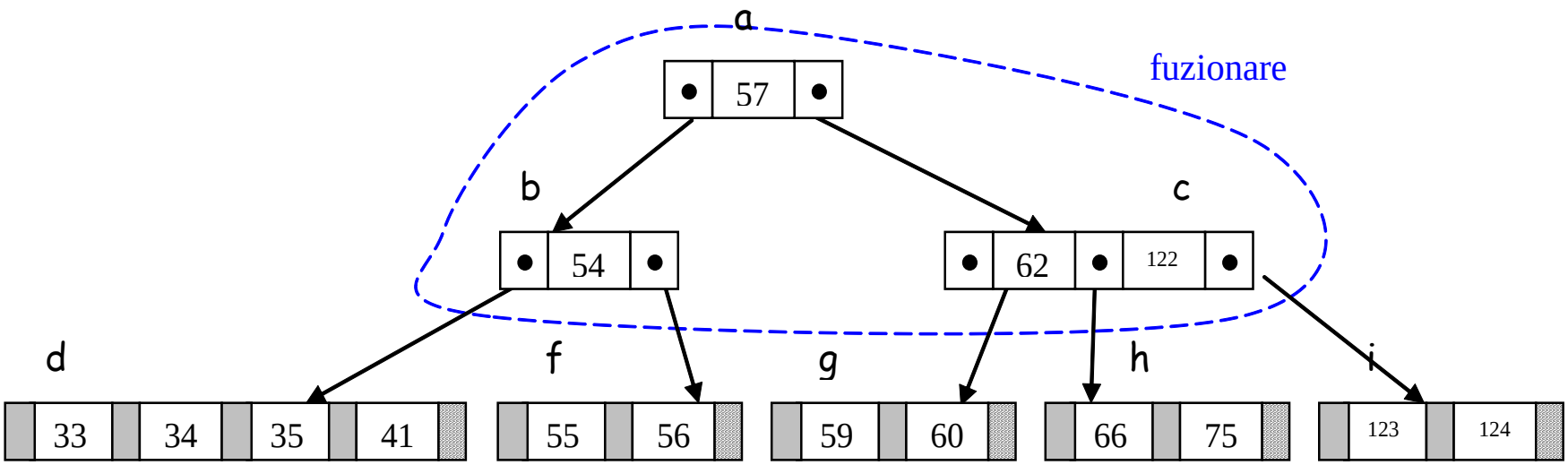
Arbori B

- Ştergerea valorii de cheie 22: fuzionarea nodurilor *d* şi *e*:



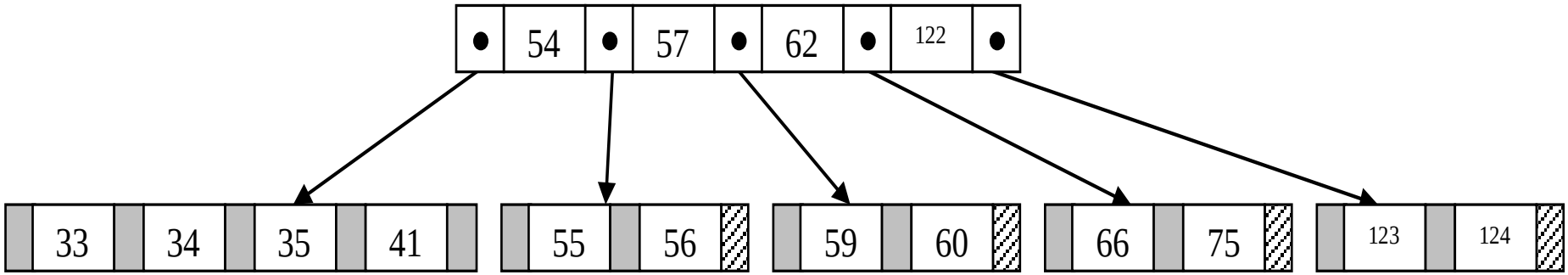
Arbori B

- În urma fuzionării nodurilor *d* şi *e*, nodul *b* va conţine prea puţine valori de cheie: fuzionare nodurile *b* şi *c*:



Arbori B

- Structura finală a arborelui B:



Arbori B

Algoritmul de ştergere dintr-un arbore B:

- dacă valoarea cheii care se şterge nu este într-un nod frunză, atunci se înlocuieşte valoarea cheii cu cheia succesor/predecesor;
- nodul_curent = nodul_frunza;
- while (nodul_curent este UNDERFLOW):
  - încearcă partajarea cu unul din nodurile vecine aflate pe acelaşi nivel, via nodul părinte;
  - dacă nu este posibilă partajarea, atunci:
    - 1. fuzionează nodul_curent cu un nod vecin, folosind o valoare de cheie din nodul părinte;
    - 2. nodul_curent = nod_părinte pentru nodul_curent.

Bibliografie

- Marius Popa, Cristian Ciurea, Mihai Doinea, Alin Zamfiroiu – *Structuri de date: teorie şi practică*, Editura ASE, Bucureşti, 2023, 280 pg.
  - Cap. 7. Structuri arborescente