

punto 1

- Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra de n variables aleatorias de una distribución uniforme $[0, \theta]$.

1) Calcule un estimador insesgado $\hat{\theta}_1$ de θ basado en el método de momentos.

para $X \sim U[0, \theta]$, la media es:

$$E(X) = \frac{0+\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \mu$$

Dada una muestra X_1, X_2, \dots, X_n la media muestral es:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Al igualar el primer momento poblacional con el primer momento muestral, tenemos que:

$$E(X) = \bar{X} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$$

por lo tanto, el estimador por el método de momentos es:

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$$

$\hat{\theta}_1$ es insesgado ya que:

$$E(\hat{\theta}_1) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta.$$

2) Calcula el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_2$ de θ . ¿Es insesgado?

Para $i = 1, \dots, n$. Tenemos $X_i \sim U[0, \theta]$, la función de densidad para cada X_i es:

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\theta} ; 0 \leq x \leq \theta$$

$$F_{X_i}(x_i) = \frac{x_i}{\theta} ; 0 \leq x \leq \theta$$

Construimos la función de verosimilitud:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n} \end{aligned}$$

Debido a que $\frac{1}{\theta^n}$ es una función decreciente en θ .

(A medida que θ aumenta, $L(\theta)$ disminuye).

Por lo tanto, el mayor valor posible de $L(\theta)$ ocurre en el menor θ que

satisface $\theta \geq \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, es decir:

$$\hat{\theta}_2 = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

En este caso no es posible dominio $L(\theta)$ e igualar a cero, debido a la discontinuidad en $\theta = \max(X_i)$ ya que:

- $L(\theta)$ salta de 0 a $\frac{1}{\theta^n}$ en $\theta = \max(X_i)$
- las derivadas no están definidas en puntos de discontinuidad.

Analizando el comportamiento decreciente para $\theta > \max(X_i)$, llegamos a que su derivada es negativa, esto ya lo sabíamos debido a la naturaleza de la función $\frac{1}{\theta^n}$.

$$\frac{d}{d\theta} L(\theta) = -\frac{n}{\theta^{n+1}} < 0$$

Por lo tanto no hay un máximo donde la derivada sea cero, en conclusión el valor máximo de $L(\theta)$ no está en un punto donde la derivada es cero, sino en el límite inferior del dominio donde $L(\theta) > 0$ (entonces, $\hat{\theta}_2 = \max(X_i)$).

Para demostrar que $\hat{\theta}_2$ es insesgado, calcularemos su esperanza:

$$E[\hat{\theta}_2] = E[\max(X_1, X_2, \dots, X_n)]$$

La función de distribución acumulada para $X_i \leq x$ es:

$$P(X_i \leq x) = \int_0^x f(x_i) dx = \int_0^x \frac{1}{\theta} dx$$

$$= \frac{x}{\theta}, \text{ para } 0 \leq x \leq \theta.$$

$$P(\max(X_i) \leq x)$$

$$= P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \cdots P(X_n \leq x)$$

$$P(\max(X_i) \leq x) = \left(\frac{x}{\theta}\right) \cdot \left(\frac{x}{\theta}\right) \cdots \left(\frac{x}{\theta}\right) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

La función de densidad del máximo es:

$$f_{\max}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\theta}\right)^n = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, \text{ para } 0 \leq x \leq \theta$$

Por lo tanto, la esperanza del máximo es:

$$E[\max(X_i)] = \int_0^\theta x \cdot \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1}$$

$$= \theta - \frac{n}{n+1} \neq \theta \Rightarrow E[\hat{\theta}_2] \neq \theta$$

Entonces $\hat{\theta}_2$ es sesgado, ya que su esperanza no es igual al verdadero valor de θ .

- 3) Sea $m = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ el mínimo valor de la muestra. Calcule $E(m)$ y deduzca un estimador insesgado θ_3 de θ .

$$F_{X_i}(x) = P(X_i \leq x)$$

Dado que estamos trabajando con una variable X_i que sigue una distribución uniforme en el intervalo $[0, \theta]$: esto significa que:

- X_i toma valores entre 0 y θ

Por lo tanto:

- Si $x < 0$:
 - $P(X_i \leq x) = 0$, ya que X_i no puede ser negativo
- Si $0 \leq x \leq \theta$:
 - $P(X_i \leq x) = \frac{x}{\theta}$
- Si $x > \theta$:
 - $P(X_i \leq x) = 1$, ya que $X_i \leq \theta < x$

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1, & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

Tomamos $m = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Queremos encontrar $F_m(x) = P(m \leq x)$:

- $m \leq x$ significa que al menos uno de los $X_i \leq x$.

Tomamos, $P(m \leq x) = 1 - P(m > x)$

- $m > x$ significa que todos los X_i son $> x$.

Calculamos $P(m > x)$:

Como los X_i son independientes:

$$\begin{aligned} P(m > x) &= P(X_1 > x) \cdot P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x) \\ &= [P(X_1 > x)]^n \end{aligned}$$

Podemos reducir el producto de sus probabilidades a $[P(X_1 > x)]^n$ ya que cada X_i sigue la misma distribución Uniforme, $U[0, \theta]$, por lo tanto sus probabilidades son iguales.

Entonces:

$$P(X_1 > x) = 1 - P(X_1 \leq x) = 1 - F_{X_1}(x).$$

Así que:

$$P(X_1 > x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0, \\ 1 - \frac{x}{\theta}, & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

Por tanto, para $0 \leq x \leq \theta$:

$$P(m > x) = \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n$$

Finalmente:

$$F_m(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n, \quad 0 \leq x \leq \theta$$

- Si $x < 0$, $F_m(x) = 0$
- Si $x > \theta$, $F_m(x) = 1$

Hallamos la función de densidad de probabilidad del mínimo (m):

$f_m(x)$ es la derivada de $F_m(x)$:

$$f_m(x) = \frac{d}{dx} F_m(x)$$

$$f_m(x) = 0 - \left[-n \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{\theta}\right)\right]$$

$$= \frac{n}{\theta} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1}, \text{ si } 0 \leq x \leq \theta.$$

Calculamos la esperanza del mínimo:

$$E(m) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_m(x) dx$$

$$= \int_0^{\theta} x \cdot \frac{n}{\theta} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1} dx$$

Tomamos:

$$v = 1 - \frac{x}{\theta}, \quad dv = -\frac{1}{\theta} dx \Rightarrow dx = -\theta dv$$

Límites:

- Si $x=0, v=1$

- Si $x=\theta, v=0$

Además, $x = \theta(1-v)$

Sustituyendo:

$$E(m) = \int_{u=1}^{\theta} \theta(1-u) \cdot \frac{n}{\theta} u^{n-1} \cdot (-\theta du)$$

Simplificando:

$$E(m) = n\theta \int_0^1 (1-u) u^{n-1} du.$$

$$E(m) = n\theta \left(\int_0^1 u^{n-1} du - \int_0^1 u^n du \right)$$

$$\int_0^1 u^{n-1} du = \frac{u^n}{n} \Big|_0^1 = \frac{1}{n}$$

$$\int_0^1 u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$E(m) = n\theta \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= n\theta \left(\frac{n+1-n}{n(n+1)} \right) = \frac{\theta}{n+1}$$

$$E(m) = \frac{\theta}{n+1} \Rightarrow \theta = (n+1)E(m)$$

$$\hat{\theta}_3 = (n+1) \min(x_i)$$

verificaremos si $E(\hat{\theta}_3) = \theta$.

$$E(\hat{\theta}_3) = E((n+1)m) = (n+1)E(m)$$

$$E(\hat{\theta}_3) = (n+1) \frac{\theta}{n+1} = \theta.$$

$\hat{\theta}_3$ es insesgado porque $E(\hat{\theta}_3) = \theta$.

Varianza estimador θ_1

Sabemos que $\theta_1 = 2\bar{x}$ por lo tanto:

$$\text{Var}(\theta_1) = \text{Var}(2\bar{x})$$

Aplicando propiedades de la varianza sabemos que:

$$\text{Var}(\theta_1) = 2^2 \text{Var}(\bar{x})$$

La varianza de \bar{x} viene dada por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \Rightarrow \text{Var}(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$$

Dado que todos los x_i siguen la misma distribución y son una muestra aleatoria podemos asumir independencia de los valores observadas, por lo tanto:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i)$$

Y como en la distribución uniforme las observaciones tienen la misma probabilidad

$$\sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i) = n \cdot \text{Var}(x_i)$$

Por lo tanto

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \text{Var}(x_i) = \frac{\text{Var}(x_i)}{n}$$

Ahora, la varianza de x_i viene dada por la fórmula

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

$$E(x) = \int_0^\theta x \cdot \frac{1}{\theta} dx = \frac{1}{\theta} \frac{x^2}{2} \Big|_0^\theta = \frac{\theta}{2}$$

$$E(x^2) = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{1}{\theta} dx = \frac{1}{\theta} \frac{x^3}{3} \Big|_0^\theta = \frac{\theta^2}{3}$$

$$\text{Var}(x_i) = \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{4\theta^2 - 3\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{12}$$

Ahora reemplazamos

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\theta^2/12}{n} = \frac{\theta^2}{12n}$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) = 2^2 \cdot \frac{\theta^2}{12n} = 4 \cdot \frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

Varianza estimador $\hat{\theta}_2$:

$$\hat{\theta}_2 = \max(x_i)$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = E(\max(x_i))^2 - E(\max(x_i))^2$$

Para hallar las esperanzas de $\max(x_i)$ es necesario hallar la función de densidad y la función de distribución acumulada.

Función distribución acumulada:

$$F(x) = P(\max(x_i) \leq x)$$

Esto es equivalente a:

$$P(\max(x_i) \leq x) = P(x_1 \leq x \wedge x_2 \leq x \wedge \dots \wedge x_n \leq x)$$

Dado que los x_i son independientes se puede reescribir como

$$P(\max(x_i) \leq x) = P(x_1 \leq x) \cdot P(x_2 \leq x) \cdot \dots \cdot P(\max(x_i) \leq x)$$

Pero como todas las observaciones tienen la misma probabilidad

$$F(x) = P(x_i \leq x)^n$$

Y esta probabilidad en la distribución uniforme $[0, \theta]$ es:

$$P(x_i \leq x) = \frac{x}{\theta} \Rightarrow \text{reemplazamos}$$

$$F(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
 E(\min(x_i)) &= \int_0^\Theta x \cdot n \frac{(\theta-x)^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\Theta x (\theta-x)^{n-1} dx \\
 &= -\frac{n}{\theta^n} \int_0^\Theta (\theta-u) \cdot u^{n-1} du = -\frac{n}{\theta^n} \int_0^\Theta u^n - \theta u^{n-1} du \\
 &= -\frac{n}{\theta^n} \left(\frac{u^{n+1}}{n+1} - \theta \cdot \frac{u^n}{n} \right) \Big|_0^\Theta \xrightarrow{\text{combio de variable}} \theta - x = u \\
 &= -\frac{n}{\theta^n} \left(\frac{(\theta-x)^{n+1}}{n+1} - \theta \frac{(\theta-x)^n}{n} \right) \Big|_0^\Theta \quad -dx = du \\
 &= -\frac{n}{\theta^n} \left(\frac{\theta^{n+1}}{n+1} - \frac{\theta^{n+1}}{n} \right) = -\frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{n\theta^{n+1} - n+1 \cdot \theta^{n+1}}{n(n+1)} \\
 &= \frac{(n+1-n)\theta^{n+1}}{\theta^n(n+1)} = \frac{1-\theta^{n+1}}{\theta^n(n+1)} = \boxed{\frac{\theta}{n+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(\min(x_i)^2) &= \int_0^\Theta x^2 \cdot n \frac{(\theta-x)^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\Theta x^2 (\theta-x)^{n-1} dx \\
 \text{realizamos cambio de variable } &\Rightarrow \boxed{u = \theta - x} \\
 -\frac{n}{\theta^n} \int_0^\Theta (\theta-u)^2 \cdot u^{n-1} du &= -\frac{n}{\theta^n} \int_0^\Theta (u^2 - 2u\theta + \theta^2) \cdot u^{n-1} du \\
 &= -\frac{n}{\theta^n} \int_0^\Theta u^{n+1} - 2u^n\theta + \theta^2 u^{n-1} du \\
 &= -\frac{n}{\theta^n} \left(\frac{u^{n+2}}{n+2} - \frac{2u^{n+1}\theta}{n+1} + \theta^2 \frac{u^n}{n} \right) \Big|_0^\Theta
 \end{aligned}$$

Ahora para hallar la función de densidad es necesario derivar la función de distribución acumulada

$$\frac{d}{dx} \frac{x^n}{\theta} \Rightarrow n \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{n}{\theta} \cdot \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}$$

Ahora hallamos la esperanza con la función de densidad de probabilidad

$$E(\max(x)) = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{n}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} dx$$

$$= \frac{n}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta^{n-1}} \cdot \int_0^{\theta} x^n dx \Rightarrow \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{\theta}$$

$$= \frac{\theta^{n+1} \cdot n}{\theta^n \cdot n+1} \Rightarrow \boxed{\theta \cdot \frac{n}{n+1}}$$

$$E(\max(x_i)^2) = \int_0^{\theta} x^2 \cdot \frac{n}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} x^{n+1}$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2} \Big|_0^{\theta} \Rightarrow \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+2}}{n+2} \Rightarrow \boxed{\theta^2 \cdot \frac{n}{n+2}}$$

Reemplazamos para hallar la varianza

$$\text{Var}(\theta_2) = \theta^2 \cdot \frac{n}{n+2} - \left(\theta \cdot \frac{n}{n+1}\right)^2 = \theta^2 \cdot \frac{n}{n+2} - \theta^2 \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= \theta^2 \left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} \right) = \theta^2 \left(\frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{n+2 \cdot (n+1)^2} \right)$$

$$= \theta^2 \left(\frac{n(n^2 + 2n + 1) - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} \right) = \boxed{\theta^2 \cdot \frac{n^2}{n \cdot (n+2)(n+1)^2}}$$

Varianza estimador $\hat{\theta}_3$:

$$\hat{\theta}_3 = (n+1) \min X$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_3) = \text{Var}((n+1) \min X)$$

Por propiedades de la varianza:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_3) = (n+1)^2 \text{Var}(\min X)$$

La varianza del $\min(X_i)$ viene dada por

$$\text{Var}(\min(X_i)) = E(\min(X_i)^2) - E(\min(X_i))^2$$

Para hallar la varianza se requiere de la función de densidad y la función de distribución acumulada del mínimo

$$F(x) = P(\min(X_i) \leq x) \leftarrow \text{función distribución acm.}$$

Y esta probabilidad del mínimo es equivalente a:

$$F(x) = 1 - P(\min(X_i) > x) =$$

$P(\min(X_i) > x)$ es equivalente a

$$P(X_1 > x \wedge X_2 > x \wedge \dots \wedge X_n > x)$$

Pero al ser cada una de estas probabilidades independientes podemos escribir la función de dist. acumulada como:

$$F(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n \quad \text{función dist. acm.}$$

$$\text{Ya que } P(X_i > x) = 1 - P(X_i \leq x) = 1 - \frac{x}{\theta}$$

Ahora hallamos su función de densidad la acm.

$$\frac{d}{dx} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n\right) = 0 - \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n = -n \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta}$$

$$= \frac{n}{\theta} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1} = \frac{n}{\theta} \cdot \frac{(\theta - x)^{n-1}}{\theta^{n-1}} = \frac{n(\theta - x)^{n-1}}{\theta^n}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{n}{\theta^n} \left(\frac{(\theta-x)^{n+2}}{n+2} - \frac{2(\theta-x)^{n+1}}{n+1} \cdot \theta + \theta^2 \frac{(\theta-x)^n}{n} \right) \Big|_{\theta} \\
 &= -\frac{n}{\theta^n} \left(\frac{\theta^{n+2}}{n+2} - 2 \frac{\theta^{n+2}}{n+1} + \frac{\theta^{n+2}}{n} \right) = \boxed{\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}}
 \end{aligned}$$

Reemplazamos para hallar la varianza

$$V_r(\theta_3) = \left(\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{\theta}{n+1} \right)^2 \right) \cdot (n+1)^2$$

$$= \theta^2 \left(\frac{2(n+1) - (n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \right) \cdot (n+1)^2$$

$$= \theta^2 \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \cdot (n+1)^2 = \boxed{\frac{\theta^2 n}{n+2}}$$