punto 1

- Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de n variables aleatorias de una distribución uniforme $[0, \theta]$.

1) calcule un estimador insesgado $\hat{\theta}_1$ de θ basado en el método de momentos.

para $X \sim U[0, \theta]$, la media es:

$$E(X) = \frac{0 + \theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \mu$$

Dada una muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ la media muestral es:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Al igualar el primer momento poblacional con el primer momento muestral, tenemos que:

$$E(X) = \bar{X} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$$

por lo tanto, el estimador por el método de momentos es:

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$$

$\hat{\theta}_1$ es insesgado ya que:

$$E(\hat{\theta}_1) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta.$$

2) Calcule el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_2$ de θ. ¿Es insesgado?

Para $i = 1, \ldots, n$. Tenemos $X_i \sim U[0, \theta]$, la función de densidad para cada X_i es:

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\theta - 0} \; ; \; 0 \leq x \leq \theta$$

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\theta} \; ; \; 0 \leq x \leq \theta$$

Construimos la función de verosimilitud:

$$L(\theta) = f(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i, \theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n}$$

Debido a que $\frac{1}{\theta^n}$ es una función decreciente en θ.

(A medida que θ aumenta, $L(\theta)$ disminuye). Por lo tanto, el mayor valor posible de $L(\theta)$ ocurre en el menor θ que satisface $\theta \geq \max(X_i)$, es decir:

$$\hat{\theta}_2 = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

En este caso no era posible derivar $L(\theta)$ e igualar a cero, debido a la discontinuidad en $\theta = max(X_i)$ ya que:

- $L(\theta)$ salta de 0 a $\frac{1}{\theta^n}$ en $\theta = max(X_i)$
- Las derivadas no estan definidas en puntos de discontinuidad.

Analizando el comportamiento decreciente para $\theta \geq max(X_i)$, llegamos a que su derivada es negativa, esto ya lo sabiamos debido a la naturaleza de la función $\frac{1}{\theta^n}$.

$$\frac{d}{d\theta} L(\theta) = \frac{-n}{\theta^{n+1}} < 0$$

Por lo tanto no hay un maximo donde la derivada sea cero, en conclusión el valor maximo de $L(\theta)$ no está en un punto donde la derivada es cero, sino en el limite inferior del dominio donde $L(\theta)>0$ (entonces, $\hat{\theta}_2 = max(X_i)$).

para demostrar, si $\hat{\theta}_2$ es insesgado, calculamos la esperanza:

$$E[\hat{\theta}_2] = E[\max(X_1, X_2, \dots, X_n)]$$

La función de distribución acumulada para $X_i \leq x$ es:

$$P(X_i \leq x) = \int_0^x f(x_i)\,dx = \int_0^x \frac{1}{\theta}\,dx$$

$$= \frac{x}{\theta}, \text{ para } 0 \leq x \leq \theta.$$

$$P(\max(X_i) \leq x)$$
$$= P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \cdots P(X_n \leq x)$$

$$P(\max(X_i) \leq x) = \left(\frac{x}{\theta}\right) \cdot \left(\frac{x}{\theta}\right) \cdots \left(\frac{x}{\theta}\right) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

La función de densidad del máximo es:

$$f_{\max}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\theta}\right)^n = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}, \text{ para } 0 \leq x \leq \theta$$

por lo tanto, la esperanza del máximo es:

$$E[\max(X_i)] = \int_0^\theta x \cdot \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}\,dx$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n\,dx = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1}$$

$$= \theta - \frac{n}{n+1} \neq \theta \Rightarrow E[\hat{\theta}_2] \neq \theta$$

Entonces $\hat{\theta}_2$ es sesgado, ya que su esperanza no es igual al verdadero valor de θ.

3) Sea $m = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ el mínimo valor de la muestra. Calcule $E(m)$ y deduzca un estimador insesgado θ_3 de θ.

$$F_{X_i}(x) = P(X_i \leq x)$$

Dado que estamos trabajando con una variable X_i que sigue una distribución uniforme en el intervalo $[0, \theta]$; esto significa que:

- X_i toma valores entre 0 y θ

Por lo tanto:

- Si $x < 0$:
  - $P(X_i \leq x) = 0$, ya que X_i no puede ser negativo
- Si $0 \leq x \leq \theta$:
  - $P(X_i \leq x) = \frac{x}{\theta}$
- Si $x > \theta$:
  - $P(X_i \leq x) = 1$, ya que $X_i \leq \theta < x$

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & si \ x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & si \ 0 \leq x \leq \theta \\ 1, & si \ x > \theta \end{cases}$$

Tomamos $m = min(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Queremos encontrar $F_m(x) = p(m \leq x)$:

- $m \leq x$ significa que al menos uno de los $X_i \leq x$.

Tomamos $p(m \leq x) = 1 - p(m > x)$

- $m > x$ significa que todos los X_i son $> x$.

Calculamos $p(m > x)$:

Como los X_i son independientes:

$$p(m > x)$$
$$= p(X_1 > x) \cdot p(X_2 > x) \cdots p(X_n > x)$$
$$= [p(X_1 > x)]^n$$

podemos reducir el producto de sus probabilidades a $[p(X_1 > x)]^n$ ya que cada X_i sigue la misma distribución uniforme, $U[0, \theta]$, por lo tanto sus probabilidades son iguales.

Entonces:

$$P(X_1 > x) = 1 - P(X_1 \leq x) = 1 - F_{X_1}(x).$$

Asi que:

$$P(X_1 > x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0, \\ 1 - \frac{x}{\theta}, & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

Por lo tanto, para $0 \leq x \leq \theta$:

$$P(m > x) = \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n$$

Finalmente:

$$F_m(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n, \quad 0 \leq x \leq \theta$$

- Si $x < 0$, $F_m(x) = 0$
- Si $x > 0$, $F_m(x) = 1$

Hallamos la función de densidad de probabilidad del mínimo (m):

$f_m(x)$ es la derivada de $F_m(x)$:

$$f_m(x) = \frac{d}{dx} F_m(x)$$

$$f_m(x) = 0 - \left[-n\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{\theta}\right) \right]$$

$$= \frac{n}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1}, \quad \text{si } 0 \leq x \leq \theta$$

Calculamos la esperanza del mínimo:

$$E(m) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_m(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\theta} x \cdot \frac{n}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1} dx$$

Tomamos:

$$u = 1 - \frac{x}{\theta}, \quad du = -\frac{1}{\theta} dx \Rightarrow dx = -\theta du$$

Límites:

- si $x = 0$, $u = 1$
- si $x = \theta$, $u = 0$

Además, $x = \theta(1-u)$

sustituyendo:

$$E(m) = \int_{u=1}^{0} \theta(1-u) \cdot \frac{n}{\theta} u^{n-1} \cdot (-\theta du)$$

simplificando:

$$E(m) = n\theta \int_0^1 (1-u) u^{n-1} du.$$

$$E(m) = n\theta \left(\int_0^1 u^{n-1} du - \int_0^1 u^n du \right)$$

$$\int_0^1 u^{n-1} du = \left. \frac{u^n}{n} \right|_0^1 = \frac{1}{n}$$

$$\int_0^1 u^n du = \left. \frac{u^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$E(m) = n\theta \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \cancel{n}\theta \left(\frac{\cancel{n+1-n}}{\cancel{n}(n+1)} \right) = \frac{\theta}{n+1}$$

$$E(m) = \frac{\theta}{n+1} \Rightarrow \theta = (n+1)E(m)$$

$$\hat{\theta}_3 = (n+1)\min(X_i)$$

verifiquemos si $E(\hat{\theta}_3) = \theta$.

$$E(\hat{\theta}_3) = E((n+1)m) = (n+1)E(m)$$

$$E(\hat{\theta}_3) = (n+1)\frac{\theta}{n+1} = \theta.$$

$\hat{\theta}_3$ es insesgado porque $E(\hat{\theta}_3) = \theta$.

Varianza estimador θ_1

Sabemos que $\theta_1 = 2\bar{x}$ por lo tanto:

$Var(\theta_1) = Var(2\bar{x})$

Aplicando propiedades de la varianza sabemos que:

$Var(\theta_1) = 2^2 \underbrace{Var(\bar{x})}$

La varianza de $\bar{x}$ viene dada por:

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1} X_i\right) \Rightarrow Var(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

Dado que todos los X_i siguen la misma distribución y son una muestra aleatoria podemos asumir independencia de los valores observados, por lo tanto:

$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

Y como en la distribución uniforme las observaciones tienen la misma probabilidad

$\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \underbrace{n\, Var(X_i)}$

Por lo tanto

$Var(\bar{x}) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n} \cdot Var(X_i) = \boxed{\frac{Var(X_i)}{n}}$

Ahora, la varianza de X_i viene dada por la formula

$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2$

$E(x) = \int_0^\theta x \cdot \frac{1}{\theta}\, dx = \frac{1}{\theta} \frac{x^2}{2}\Big|_0^\theta = \boxed{\frac{\theta}{2}}$

$E(x^2) = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{1}{\theta}\, dx = \frac{1}{\theta} \frac{x^3}{3}\Big|_0^\theta = \boxed{\frac{\theta^2}{3}}$

$$Var(x_i) = \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{4\theta^2 - 3\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{12}$$

Ahora reemplazamos

$$Var(\bar{x}) = \frac{\theta^2/12}{n} = \frac{\theta^2}{12n}$$

$$Var(\theta_1) = 2^2 \cdot \frac{\theta^2}{12n} = 4 \cdot \frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

Varianza estimador θ_2:

$\theta_2 = max(X_i)$

$$Var(\theta_2) = E(max(X_i)^2) - E(max(X_i))^2$$

Para hallar las esperanzas de máximo X_i es necesario hallar la función de densidad y la función de distribución acumulada

Función distribución acumulada:

$$F(x) = P(max(X_i) \leq x)$$

Esto es equivalente a:

$$P(max(X_i) \leq x) = P(X_1 \leq x \wedge X_2 \leq x \wedge \dots max(X_i) \leq x)$$

Dado que los X_i son independientes se puede reescribir como

$$P(max(X_i) \leq x) = P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \cdot \dots \cdot P(max(X_i) \leq x)$$

Pero como todas las observaciones tienen la misma probabilidad

$$F(x) = P(X_i \leq x)^n$$

Y esta probabilidad en la distribución uniforme $[0, \theta]$ es:

$$P(X_i \leq x) = \frac{x}{\theta} \underset{\text{reemplazamos}}{\Rightarrow} F(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

$$E(\min(X_i)) = \int_0^\theta x \cdot \frac{n(\theta - x)^{n-1}}{\theta^n}\, dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x(\theta - x)^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{-n}{\theta^n}\int_\theta^0 (\theta - u)\cdot u^{n-1}\, du = \frac{-n}{\theta^n}\int_0^\theta u^n - \theta\cdot u^{n-1}\, du$$

$$= \frac{-n}{\theta^n}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1} - \theta\cdot\frac{u^n}{n}\right)\Bigg|_\theta^0$$

cambio de variable

$\theta - x = u$

$-dx = du$

$x = \theta - u$

$$= \frac{-n}{\theta^n}\left(\frac{(\theta - x)^{n+1}}{n+1} - \theta\,\frac{(\theta - x)^n}{n}\right)\Bigg|_\theta^0$$

$$= \frac{-n}{\theta^n}\left(\frac{\theta^{n+1}}{n+1} - \frac{\theta^{n+1}}{n}\right) = \frac{-\cancel{n}}{\theta^n}\cdot\frac{n\,\theta^{n+1} - (n+1)\cdot\theta^{n+1}}{\cancel{n}(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1-n)\,\theta^{n+1}}{\theta^n(n+1)} = \frac{1\cdot\theta^{\cancel{n}+1}}{\cancel{\theta^n}(n+1)} = \boxed{\frac{\theta}{n+1}}$$

$$E(\min(X_i)^2) = \int_0^\theta x^2\cdot\frac{n(\theta - x)^{n-1}}{\theta^n}\, dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^2(\theta - x)^{n-1}\, dx$$

realizamos cambio de variable $\Rightarrow \boxed{u = \theta - x}$

$$\frac{-n}{\theta^n}\int_\theta^0 (\theta - u)^2\cdot u^{n-1}\, du = \frac{-n}{\theta^n}\int_\theta^0 (u^2 - 2u\theta + \theta^2)\cdot u^{n-1}\, du$$

$$= \frac{-n}{\theta^n}\int_\theta^0 u^{n+1} - 2u^n\theta + \theta^2 u^{n-1}\, du$$

$$= \frac{-n}{\theta^n}\left(\frac{u^{n+2}}{n+2} - \frac{2u^{n+1}\theta}{n+1} + \theta^2\,\frac{u^n}{n}\right)\Bigg|_\theta^0$$

Ahora para hallar la función de densidad es necesario derivar la función de distribución acumulada

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{\theta}^n \Rightarrow n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta} = \underbrace{\frac{n}{\theta}\cdot\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}}$$

Ahora hallamos la esperanza con la función de densidad de probabilidad

$$E(\max(x_i)) = \int_0^\theta x\cdot\frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}dx$$

$$= \frac{n}{\theta}\cdot\frac{1}{\theta^{n-1}}\cdot\int_0^\theta x^n\,dx \Rightarrow \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta$$

$$= \frac{\theta^{n+1}\cdot n}{\theta^n\cdot n+1} \Rightarrow \boxed{\theta\cdot\frac{n}{n+1}}$$

$$E(\max(x_i)^2) = \int_0^\theta x^2\cdot\frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\,\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^\theta \Rightarrow \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{\theta^{n+2}}{n+2} \Rightarrow \boxed{\theta^2\cdot\frac{n}{n+2}}$$

reemplazamos para hallar la varianza

$$Var(\theta_2) = \theta^2\cdot\frac{n}{n+2} - \left(\theta\cdot\frac{n}{n+1}\right)^2 = \theta^2\cdot\frac{n}{n+2} - \theta^2\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= \theta^2\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = \theta^2\left(\frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{n+2 * (n+1)^2}\right)$$

$$= \theta^2\left(\frac{n(n^2+2n+1) - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\right) = \boxed{\theta^2\cdot\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}}$$

Varianza estimador θ_3:

$\theta_3 = (n+1) \min X$

$Var(\theta_3) = Var((n+1)\min X)$

Por propiedades de la varianza:

$Var(\theta_3) = (n+1)^2 \; Var(\min X)$

La varianza del $\min(X_i)$ viene dada por

$Var(\min(X_i)) = E(\min(X_i)^2) - E(\min(X_i))^2$

Para hallar la esperanza se requiere de la función de densidad y la función de distribución acumulada del mínimo

$F(x) = P(\min(X_i) \leq x)$ ← función distribución acumulada

Y esta probabilidad del mínimo es equivalente a:

$F(x) = 1 - P(\min(X_i) > x) =$

$P(\min(X_i) > x)$ es equivalente a

$P(X_1 > x \wedge X_2 > x \wedge \ldots \wedge X_n > x)$

Pero al ser cada una de estas probabilidades independientes podemos escribir la función de dist acumulada como:

$F(x) = \underbrace{1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n}$ función dist acumulada

Ya que $P(X_i > x) = 1 - P(X_i \leq x) = 1 - \frac{x}{\theta}$

Ahora hallamos su función de densidad la acumulada

$$\frac{d}{dx}\left(1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n\right) = 0 - \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n = -n\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot -\frac{1}{\theta}$$

$$= \frac{n}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1} = \frac{n}{\theta} \cdot \frac{(\theta - x)^{n-1}}{\theta^{n-1}} = \underbrace{\frac{n(\theta - x)^{n-1}}{\theta^n}}$$

$$= \frac{-n}{\theta^n}\left(\frac{(\theta-x)^{n+2}}{n+2} - \frac{2(\theta-x)^{n+1}}{n+1}\cdot\theta + \theta^2\frac{(\theta-x)^n}{n}\right)\Bigg|_{\theta}^{0}$$

$$= \frac{-n}{\theta^n}\left(\frac{\theta^{n+2}}{n+2} - 2\frac{\theta^{n+2}}{n+1} + \frac{\theta^{n+2}}{n}\right) = \boxed{\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}}$$

Reemplazamos para hallar la varianza

$$Var(\theta_3) = \left(\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{\theta}{(n+1)}\right)^2\right)\cdot(n+1)^2$$

$$= \theta^2\left(\frac{2(n+1)-(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}\right)\cdot(n+1)^2$$

$$= \theta^2\frac{n}{\cancel{(n+1)^2}(n+2)}\cdot\cancel{(n+1)^2} = \boxed{\frac{\theta^2 n}{n+2}}$$