Trabajo Práctico 2

Estructuras de Datos y Algoritmos II

Cantore, Ignacio
Genga, Cristian

Especificación de costos para la implementación de listas

mapS

$W_{mapS}(0) = c_1$
$W_{mapS}(n) = W_f(xs_0) + W_{mapS}(n-1) + c_2 = W_f(xs_0) + w_f(xs_1) + ... + W_f(xs_{n-1}) + n \cdot c_2$

$$W_{mapS} \in O\left(\sum_{i=0}^{n-1} W_f(xs_i)\right)$$

El orden depende exclusivamente del trabajo de la función f.

$S_{mapS}(0) = p_1$
$S_{mapS}(n) = \max(S_f(xs_0),\ S_{mapS}(n-1)) + p_2 = \max(S_f(xs_0),\ \max(S_f(xs_1),\ S_{mapS}(n-2)) + p_2) + p_2 \leq \max(S_f(xs_0) + p_2,\ \max(S_f(xs_1),\ S_{mapS}(n-2)) + p_2) + p_2 = \max(S_f(xs_0),\ \max(S_f(xs_1),\ S_{mapS}(n-2))) + 2 \cdot p_2 \leq ... \leq \max_{i=0}^{n-1} + n \cdot p_2$

$$S_{mapS} \in O\left(\max_{i=0}^{n-1} S_f(i)\right)$$

Al paralelizar la aplicación de f con la llamada recursiva de *mapS*, la profundidad de *mapS* resulta de la máxima profundidad de aplicar f a los elementos de la lista.

appendS:

$W_{appendS}(0) = c_1$
$W_{appendS}(n) = W_{appendS}(n-1) + c_2 = n \cdot c_2$

$$W_{appendS} \in O(n)$$

Para el trabajo de *appendS*, el orden corresponde a n ya que depende de la longitud de la lista.

$S_{appendS}(0) = c_1$
$S_{appendS}(n) = S_{appendS}(n-1) + c_2$

$$S_{appendS} \in O(n)$$

Al no hacer ninguna operación en paralelo, se obtiene el mismo resultado que para el trabajo.

reduceS:

$W_{contractS}(0) = k_1$
$W_{contractS}(1) = k_2$
$W_{contractS}(n) = \underbrace{W_{\oplus}(xs_0)}_{\in O(1)} + W_{contractS}(n-2) + k_3 = W_{contractS}(n-4) + k'_3 + k'_3 = ... = (\lceil \frac{n}{2} \rceil) \cdot k'_3$

$$W_{contractS} \in O(n)$$

Ya que depende directamente de la cantidad de elementos de la lista.

$S_{contractS}(0) = s_1$
$S_{contractS}(1) = s_2$
$S_{contractS}(n) = \text{máx}(\underbrace{W_{\oplus}(xs_0)}_{\in O(1)}, S_{contractS}(n-2)) + s_3 = S_{contractS}(n-2)) + s'_3 + S_{contractS}(n-4)) + s'_3 + s'_3 = ... = (\lceil \frac{n}{2} \rceil) \cdot s'_3$

$$S_{contractS} \in O(n)$$

Al igual que en el caso anterior, depende de la cantidad de elementos de la lista.

$W_{reduceS}(0) = c_1$
$W_{reduceS}(1) = \underbrace{W_{\oplus}(xs_0)}_{\in O(1)} + c_2 = c'_2$
$W_{reduceS}(n) = W_{reduceS}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + \underbrace{W_{contractS}(n)}_{\in O(n)} + c_3 = W_{reduceS}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n + c_3$

Tomando $W'_{reduceS}(n) = W_{reduceS}(\frac{n}{2}) + n + c_3$ tenemos por el Teorema Maestro que

$$W'_{reduceS} \in O(n)$$

Y, como n es suave, luego $W_{reduceS} \in O(n)$

$S_{reduceS}(0) = p_1$
$S_{reduceS}(1) = \underbrace{S_{\oplus}(xs_0)}_{\in O(1)} + p_2 = p'_2$
$S_{reduceS}(n) = S_{reduceS}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + \underbrace{S_{contractS}(n)}_{\in O(n)} + p_3 = S_{reduceS}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n + p_3$

Igual que para el trabajo, tomando $S'_{reduceS}(n) = S_{reduceS}(\frac{n}{2}) + n + p_3$ tenemos por el Teorema Maestro que

$$S'_{reduceS} \in O(n)$$

Y, como n es suave, luego $S_{reduceS} \in O(n)$

scanS:

$W_{expandS}(0) = k_1$
$W_{expandS}(1) = W_{singleton}(1) = k_2$
$W_{expandS}(n) = W_{expandS}(n-2) + k_3 = W_{expandS}(n-4) + k_3 + k_3 = \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot k_3$

$$W_{expandS} \in O(n)$$

Al igual que ocurre con *contractS*, el costo de esta función depende del tamaño de la lista.

$S_{expandS}(0) = s_1$
$S_{expandS}(1) = S_{singleton}(1) = s_2$
$S_{expandS}(n) = S_{expandS}(n-2) + s_3 = S_{expandS}(n-4) + s_3 + s_3 = \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot s_3$

$$S_{expandS} \in O(n)$$

Nuevamente, al no haber ninguna paralelización, la profundidad de *expandS* es de orden n.

$W_{scanS}(0) = c_1$
$W_{scanS}(1) = \underbrace{W_{\oplus}(xs_0)}_{\in O(1)} = c_2$
$W_{scanS}(n) = \underbrace{W_{expandS}(n)}_{\in O(n)} + W_{scanS}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + \underbrace{W_{contractS}(n)}_{\in O(n)} + c_3$

$$W_{scanS} \in O(n)$$

Como *expandS* y *contracS* son de orden lineal, y el trabajo de *scanS* depende del tamaño de la lista, luego éste también es de orden n.

$S_{scanS}(0) = p_1$
$S_{scanS}(1) = \underbrace{S_{\oplus}(xs_0)}_{\in O(1)} = p_2$
$S_{scanS}(n) = \underbrace{S_{expandS}(n)}_{\in O(n)} + S_{scanS}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + \underbrace{S_{contractS}(n)}_{\in O(n)} + p_3$

$$S_{scanS} \in O(n)$$

Para la profundidad de *scanS* ocurre lo mismo que para su trabajo, al no realizar nada en paralelo.

Especificación de costos para la implementación de arreglos

mapS

$W_{mapS}(0) = c_1$
$W_{mapS}(n) = W_{tabulateS}(n) + c_2$

$$W_{mapS} \in O\left(\sum_{i=0}^{n-1} W_f(xs_i)\right)$$

El orden depende exclusivamente del trabajo de la función f.

$S_{mapS}(0) = p_1$
$S_{mapS}(n) = S_{tabulateS}(n) + p_2$

$$S_{mapS} \in O\left(\max_{i=0}^{n-1} S_f(i)\right)$$

La profundidad de *mapS* para arreglos resulta del costo de la máxima profundiad de aplicar f a los elementos del arreglo.

appendS:

$W_{appendS}(2) = W_{flattenS}(2) + W_{fromList}(1) = O(2) + \left(\sum_{i=0}^{1} O(2!i)\right) = O(1)$

$$W_{appendS} \in O(1)$$

Para el trabajo de *appendS*, el orden es constante.

$S_{appendS}(2) = S_{flattenS}(2) + W_{fromList}(1) = O(lg(2)) + O(1) = O(1)$

$$S_{appendS} \in O(1)$$

Para la profundidad, ocurre lo mismo que para el trabajo.

reduceS:

$$W_{reduceS}(0) = c_1$$
$$W_{reduceS}(1) = \underbrace{W_{\oplus}(xs_0)}_{\in O(1)} + c_2 = c_2'$$
$$W_{reduceS}(n) = W_{reduceS}(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + \underbrace{W_{contractS}(n)}_{\in O(n)} + c_3 = W_{reduceS}(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n + c_3$$

Tomando $W'_{reduceS}(n) = W_{reduceS}(\frac{n}{2}) + n + c_3$ tenemos por el Teorema Maestro que

$$W'_{reduceS} \in O(n)$$

Y, como n es suave, luego $W_{reduceS} \in O(n)$

$$S_{reduceS}(0) = p_1$$
$$S_{reduceS}(1) = \underbrace{S_{\oplus}(xs_0)}_{\in O(1)} + p_2 = p_2'$$
$$S_{reduceS}(n) = S_{reduceS}(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + \underbrace{S_{contractS}(n)}_{\in O(n)} + p_3 = S_{reduceS}(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n + p_3$$

Igual que para el trabajo, tomando $S'_{reduceS}(n) = S_{reduceS}(\frac{n}{2}) + n + p_3$ tenemos por el Teorema Maestro que

$$S'_{reduceS} \in O(n)$$

Y, como n es suave, luego $S_{reduceS} \in O(n)$

scanS:

$$W_{scanS}(0) = c_1$$
$$W_{scanS}(1) = \underbrace{W_{\oplus}(xs_0)}_{\in O(1)} = c_2$$
$$W_{scanS}(n) = \underbrace{W_{expandS}(n)}_{\in O(n)} + W_{scanS}(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + \underbrace{W_{contractS}(n)}_{\in O(n)} + c_3$$

$$W_{scanS} \in O(n)$$

Como *expandS* y *contracS* son de orden lineal, y el trabajo de *scanS* depende del tamaño del arreglo, luego éste también es de orden n.

$$S_{scanS}(0) = p_1$$
$$S_{scanS}(1) = \underbrace{S_{\oplus}(xs_0)}_{\in O(1)} = p_2$$
$$S_{scanS}(n) = \underbrace{S_{expandS}(n)}_{\in O(n)} + S_{scanS}(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + \underbrace{S_{contractS}(n)}_{\in O(n)} + p_3$$

$$S_{scanS} \in O(n)$$

Para la profundidad de *scanS* ocurre lo mismo que para su trabajo, al no realizar nada en paralelo.