Notas de clase
Probabilidad y Estadística

Este material está sujeto a correcciones, comentarios y demostraciones adicionales durante el dictado de las clases, no se recomienda su uso a aquellos alumnos que no concurran a las mismas.

Mgs. Nora Arnesi

narnesi@fcecon.unr.edu.ar

¿CÓMO TOMAR UNA DECISIÓN CON ESTADÍSTICA?

Estadística es la "**ciencia** de los datos "

Conocimiento

Método Científico

comprende un conjunto de principios y procedimientos para la obtención sistemática del conocimiento

La Estadística y el Método Científico nos proveen un conjunto de principios y procedimientos para obtener y resumir la información para la ***Toma de Decisiones.***

Tenemos ***competencia de teorías*** sobre una población que deseamos investigar. Estas teorías en estadística se denominan ***Hipótesis Estadís***

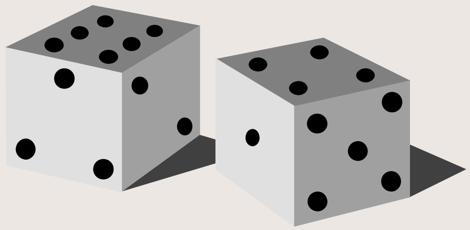
- ensayamos una teoría
- realizamos experimentos (juntamos datos)

Una teoría será rechazada si se puede demostrar estadísticamente que los datos que observamos son ***muy poco probables*** *de ocurrir si la teoría fuera cierta.*

Hay dos teorías que compiten ⇨ **H_o vs H_1**

H_o (Hipótesis nula): es la afirmación de que nada está sucediendo, no existe diferencia, no hay cambios en la población.

H_1 (Hipótesis alternativa): es la afirmación que el investigador espera que sea cierta. El cambio en la población que el investigador está buscando.



✓ **RESUELVE !!! 1.1**

¿Dados regulares?

En un famoso experimento de dados: de 315.672 tiradas, 106.656 resultaron 5 ó 6. Si los dados son regulares la verdadera proporción de 5 ó 6 es 2/6. Sin embargo en un examen hecho a los dados revela que los puntos son hechos por pequeñas muescas o depresiones en la cara del dado.

Los lados con 5 y 6 tienen más muescas que las otras caras y así estos lados son más livianos que las otras caras, de lo cual se sugiere que la verdadera proporción de 5 ó 6 sea más alta que el valor regular "1/3"

Establezca las hipótesis H_o y H_1 apropiadas

. ¿Cómo decidimos cuál teoría sustentar?

Tenemos dos teorías o ideas que compiten sobre una población de interés.
Para aprender cuál de estas dos teorías parece más razonable, juntamos información (*datos*) los miramos y nos preguntamos:

¿son estos datos más probables de ser observados si la 1º teoría es cierta o si la 2º teoría es cierta?

Si los datos son poco probables de ocurrir cuando la primer teoría es cierta

Rechazo esta teoría (y sustentamos la otra)

!!!!!!

…el **no rechazo** de la H_o

no implica necesariamente que la Teoría sea cierta.

La lógica detrás de la toma de decisión esta basada en el concepto de ***suceso raro***. Dado que la H_o es en general, el *status quo*, comenzamos **suponiendo que la H_o es cierta.**

Observación: Los diarios y artículos a menudo afirman frases:

"Los resultados no fueron estadísticamente significativos", o bien,

"No hay diferencias estadísticamente significativas entre los dos grupos"

Los datos observados son **estadísticamente significativos** si ellos son poco probables de ser observados bajo el supuesto de que H_o es cierta.
Si rechazamos H_o, decimos que los datos son estadísticamente significativos

✓RESUELVE !!! 1.3

Queja sobre el peso de las papas fritas

Suponga que el último mes, una cadena de supermercados recibió quejas de los clientes sobre el contenido de papas fritas en las bolsas de 250grs.

Con el propósito de no perder clientes, la cadena decidió ensayar las siguientes hipótesis sobre el verdadero peso promedio de papas (en grs.) en bolsas de 250 grs. en el próximo cargamento recibido de sus abastecedores.

H_0) Peso promedio de papas contenidas en las bolsas es de por lo menos 250 grs.($\geq$ 250 grs)
H_1) Peso promedio es $<$ que 250 grs.

Si hay evidencia a favor de la alternativa H1 $\Rightarrow$ el cargamento será rechazado.
Para ello se seleccionan algunas bolsas de papas fritas del próximo cargamento y se pesan. El estadístico contratado afirma que los datos son estadísticamente significativos.
? ¿Qué hipótesis fue rechazada?
? ¿El supermercado presentó una queja al abastecedor?
? ¿Podría haberse cometido un error? ¿Cuáles son sus consecuencias? Descríbalo.

.¿**Qué errores podemos cometer?**

Un principio del sistema de la justicia es que

"El acusado será considerado inocente hasta que se pruebe su culpabilidad"

En el contexto de un juicio criminal ¿cómo juegan las hipótesis nula y alternativa?

La H_o es el *status quo* que el acusado es inocente.
Se deberán presentar las evidencias y se evaluarán.
Si hay suficientes dudas **acerca** de la inocencia del acusado entonces será declarado "culpable"

Si se dictamina un veredicto "culpable" y el acusado es "inocente" ocurrirá un **ERROR.**
Si se dictamina un veredicto "inocente" y el acusado es "culpable" ocurrirá un **ERROR**.

En términos estadísticos:

Error tipo I: error que se comete cuando se rechaza H_o siendo cierta (e_I).

Error tipo **II:** error que se comete cuando no se rechaza H_o y es cierta la H_1.(e_{II})

Decisión Basada en los datos	Ho es verdadera	H_1 es verdadera
Sustentar H_o	No hay error	$\mathbf{e}_{II}$
Sustentar H_1	$\mathbf{e}_I$	No hay error

Rain Rain, Go Away!

Supongamos que planeamos ir a una fiesta esta noche. Al escuchar el informe meteorológico observamos que hay un 70% de chance de lluvia esta noche.

¿Qué hacemos? ¿llevaremos paraguas? ; por supuesto ¡no queremos mojarnos!

H_o: *Esta noche lloverá*

H_1: *Esta noche no lloverá*

Los errores que podemos cometer cuando decidimos entre estas dos hipótesis son:

e_I : decidimos que esta noche no lloverá, cuando en realidad lloverá.

e_{II}: decidimos que esta noche lloverá cuando en realidad no lloverá

¿Cuáles serán las consecuencias?

Piensa!!!!

Si el error tipo I es considerado **muy serio** *¿por qué no tratamos de que la chance de cometer e_I sea 0?*

Para lograr un valor 0 en la chance de cometer e_I, nunca rechazaríamos la H_o, **nunca** sustentaríamos una teoría nueva o alternativa. Por lo tanto debemos aceptar una pequeña chance de cometer un error.

$P(e_I)$: es la chance *de rechazar Ho siendo ella cierta (es la probabilidad de cometer un e_I)*

$P(e_{II})$: es la chance de cometer un e_{II}. (es la probabilidad de no rechazar H_o, cuando en realidad es cierta H_1)

Dado que ambos $P(e_I)$ y $P(e_{II})$ representan chances de cometer error, idealmente deseamos que sean lo más pequeños posible.

Se desea encontrar un test de manera tal que las $P(e_I)$ y $P(e_{II})$ sean mínimas.

Desafortunadamente cuando el número de observaciones ***está dado*** no podemos controlar ambas probabilidades.

Por lo tanto se acostumbra asignar un límite a la P(rechazar H0/H0 es cierta) y minimizar la otra probabilidad. Es decir seleccionamos un número $0 < \alpha < 1$, llamado nivel de significación e imponemos la condición

$$P(\text{rechazar } H_0/H_0 \text{ es cierta}) \leq \alpha$$

Definiciones:

- Una **región de rechazo o crítica**: es el conjunto de valores para los cuales rechazaríamos H_o. Tales valores son contradictorios a la H_o y favorables a la H_1.

- Una **región de aceptación** : comprende un conjunto de valores para los cuales aceptaríamos la H_o.

- Un **valor crítico** : es aquel valor que marca el "punto inicial" del conjunto de valores que comprenden la región de rechazo o crítica

Gráfico de frecuencias de la bolsa A:

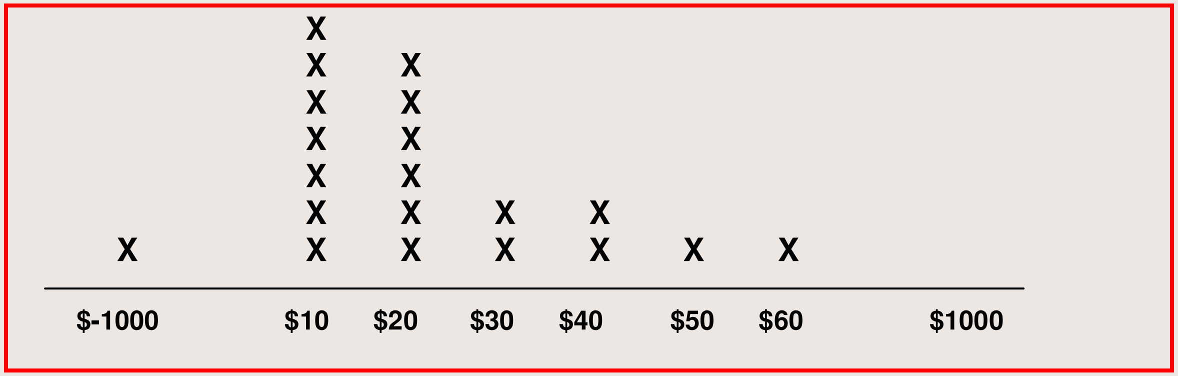
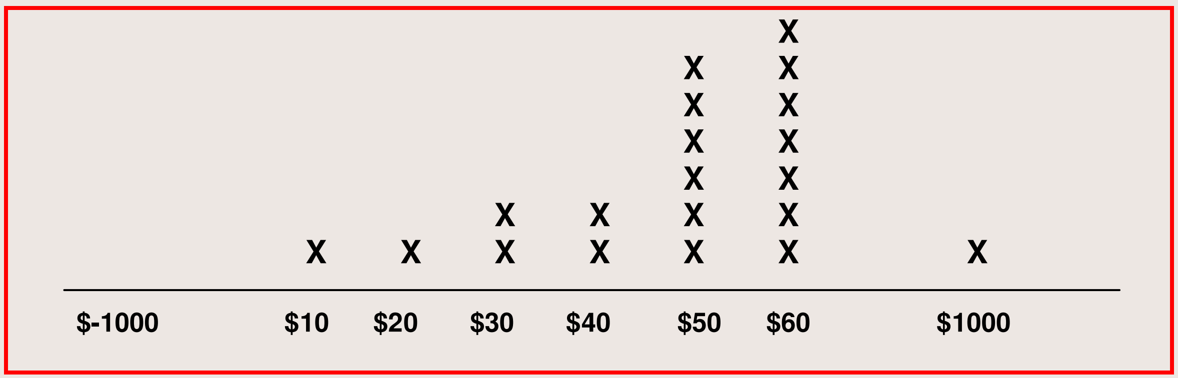


Gráfico de frecuencias de la bolsa B:



La bolsa A ➔ tiene un total de -560$

La bolsa B ➔ tiene un total de 1890$

Se nos pide que elijamos una bolsa. Si la bolsa seleccionada es la A, perdemos $560. Si la bolsa seleccionada es la B, ganamos $1890.

La forma de selección depende del experimento que se describe a continuación.

El experimento consiste en recibir una bolsa, extraer un billete y decidir si el mismo proviene de la bolsa A o B . Obviamente no deseamos la bolsa A.

De modo que si concluimos, a través de la información suministrada por el billete, que la bolsa recibida es la A cambiaremos la bolsa. Si concluimos que se trata de la bolsa B, no la cambiamos.

En este caso decimos que se ***extrae una muestra de n=1***.

Basados en una sola observación, debemos decidir entre las dos hipótesis:

Ho : bolsa mostrada es la A

H1: bolsa mostrada es la B

¿Cuáles son los dos tipos de errores que se pueden cometer en este caso?

¿Cuáles son los dos tipos de errores que se pueden cometer en este caso?

e_I.: decido por la B cuando en realidad la mostrada es la A

e_{II}: decido por la A cuando en realidad la bolsa mostrada es la B.

¿Cómo establecemos la regla de decisión basada en n=1 observación?

Consideremos dos casos *obvios:*

Si el billete seleccionado en –1000$, luego "sé que la bolsa mostrada es A" y por lo tanto ***decido aceptar Ho***

Análogamente si el billete seleccionado es 1000$, luego "sé que la bolsa mostrada es la B y por lo tanto ***decido rechazar Ho***

En cada uno de estos casos **no cometemos errores.**

💣 ***Piensa acerca de esto!!***

- ✓ ¿Qué pasa si el billete es de 60$?
- ✓ ¿Me conduce esta observación a pensar que la bolsa mostrada es la A o la B?
- ✓ ¿Por qué?
- ✓ ¿Cuál será su respuesta si el billete seleccionado es de 10$?

Una **regla de decisión** es una regla formal que nos dice cuando rechazar la Ho, en base a los datos obtenidos.

Para ello examinaremos la chance que tiene cada billete de ser seleccionado de cada uno de las dos bolsas posibles.

Valor de los billetes	Chance si la bolsa es A	Chance si la bolsa es B
-1000	1/20	0
10	7/20	1/20
20	6/20	1/20
30	2/20	2/20
40	2/20	2/20
50	1/20	6/20
60	1/20	7/20
1000	0	1/20

Usaremos el concepto de determinar valores que son más extremos que otros para la regla de decisión entre H_o y H_1.

Valor más extremo:

Consideremos dos valores (de billetes) **x** y **z .**
Sea $ch_0(x)$ la chance que tiene x bajo H_o.
Sea $ch_1(x)$ la chance que tiene x bajo H_1.

De forma análoga se define $ch_0(z)$ y $ch_1(z)$

*El valor **x** se dirá **más extremo** que **z** si:*

$$\frac{ch_0(x)}{ch_1(x)} < \frac{ch_0(z)}{ch_1(z)}$$

En el ejemplo de la bolsa:

	Cociente de chances
-1000	∞
10	7
20	6
30	1
40	1
50	1/6
60	1/7
1000	0

Vemos aquí que para cualquier valor de billete si $x > z$, x es un valor más extremo que z

decimos que la dirección de los casos extremos es hacia la derecha ***(un test unilateral por derecha estará dado por la posición de los valores que son más probables bajo H1 que bajo H0).***

Regla de decisión	**Región de rechazo**	**Decimos que…**	$P(e_{I})$	$P(e_{II})$
#1: rechazo H_o si el valor elegido es ≥$60	$60 ó más	…el valor crítico es $60 y los valores más grandes son aún más extremos.	0.05	0.60
#2: rechazo H_o si el valor elegido es ≥$50	$50 ó más	. …el valor crítico es $50 y los valores más grandes son aún más extremos..	0.10	0.30
#3: rechazo H_o si el valor elegido es ≥$40	$40 ó más	…el valor crítico es $40 y los valores más grandes son aún más extremos	0.20	0.20

Dada una regla de decisión, podemos hallar los niveles de $P(e_I)$ y β exactamente. También podemos ir al revés:

Fijar el nivel de significación α y a partir de él, determinar la regla de decisión.

¿Existe alguna manera o camino para disminuir ambos errores simultáneamente?

¿Cuán raros son los datos?

Definición:
El valor de p-asociado a un resultado es la chance de obtener el resultado observado más la chance de observar valores más extremos que el observado, computada asumiendo que la H_o es la verdadera.

Cuanto menor es el p-value, mayor es la evidencia provista por los datos en contra de Ho.

¿Cuán pequeño deberá ser el p-value para rechazar Ho?

El p-value es el ***nivel de significación observado***, basado en los datos; de allí que es comparado con el nivel de significación α requerido para la toma de decisiones.

Relación entre p-value y el nivel de significación α

Si el p-value $\leq \alpha \Rightarrow$ rechazar Ho y los datos son estadísticamente significativos.

Si el p-value $> \alpha \Rightarrow$ No rechazar Ho y los datos no son estadísticamente significativos

💣 *Pensemos!!*

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$. La correspondiente regla de decisión es: *Rechazamos Ho si el billete seleccionado es de $60 o más.*

Se selecciona un billete y resulta ser de $60. Su decisión es *RECHAZAR* la hipótesis nula y concluir que los datos son estadísticamente significativos al 5% de nivel de significación.

Rechazó la Ho

¿Cometió un error? Si No

¿Qué tipo de error pudo haber cometido? e_I e_{II}

¿Cuál es la chance de haber cometido ese error?

Es importante distinguir entre establecer una regla de decisión: ″***antes de observar los datos″*** y tomar una decisión “***luego de observar los datos″***

Una vez que se ha tomado una decisión, será correcta o errónea y tendrá una chance de cometer una equivocación es igual a **0** ó **1.**

✓ *Resuelve.!!. Tres estudios.*

La siguiente tabla resume los resultados de tres estudios diferentes.

	H_0	H_1	p-value
A	La verdadera duración de vida promedio es ≥54 meses	La verdadera duración de vida promedio es < 54 meses	0.0251
B	El tiempo promedio de supervivencia con el T_I es igual al tiempo promedio con el T_{II}	El tiempo promedio de supervivencia con el T_I es distinto al tiempo promedio con el T_{II}	0.0018
C	La verdadera proporción de personas que tienen dos empleos es ≤0.33	La verdadera proporción de personas que tiene dos empleos es >0.33	0.3590

Responde…

- Para cuál estudio, los resultados muestran mayor soporte para la Ho?.Explique
- Suponga que en el estudio A se concluyó que los datos sustentan la H1 de que la verdadera vida promedio es menor 54 meses, pero en realidad, la vida promedio es ≥ 54 meses. En el lenguaje estadístico,¿es éste un error tipo I o un error tipo II?.
- Si los resultados del "estudio C" no son estadísticamente significativos,¿Cuál es la hipótesis sustentada?

Si el **tamaño muestral n se incrementa** aportamos mayor información, y las probabilidades **$P(e_I)$ y $P(e_{II})$ disminuyen**.

Para un **nivel de significación** α **dado**, si el **tamaño de la muestra aumenta,** el β **disminuirá**.

Más sobre la dirección del extremo……

En el ejemplo de las bolsas A y B la dirección de los valores extremos fue a la derecha

Unilateral por derecha

¿en qué casos plantearía una región crítica hacia la izquierda?

Gráfico de frecuencias **Bolsa A:**

Bolsa A		
Valor	*frecuencia*	*Chance*
1	1	1/15
2	2	2/15
3	3	3/15
4	4	4/15
5	5	5/15

Gráfico de frecuencias **Bolsa B:**

Bolsa B		
Valor	*frecuencia*	*Chance*
1	5	5/15
2	4	4/15
3	3	3/15
4	2	2/15
5	1	1/15

Unilateral por izquierda

Gráfico de frecuencias **Bolsa A:**

				X	X				
			X	X	X	X			
		X	X	X	X	X	X		
	X	X	X	X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
$1	**$2**	**$3**	**$4**	**$5**	**$6**	**$7**	**$8**	**$9**	**$10**

Gráfico de frecuencias **Bolsa B:**

X									X
X	X							X	X
X	X	X					X	X	X
X	X	X	X			X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
$1	**$2**	**$3**	**$4**	**$5**	**$6**	**$7**	**$8**	**$9**	**$10**

bilateral

Regla de decisión #1: *rechazar Ho si el billete seleccionado es de $\leq$ \$1 ó bien $\geq$ \$10.*

En este caso la regla de rechazo incluye valores extremos en ambas direcciones y los valores críticos para cada uno de las direcciones serán \$1 y \$10.

- ✓ Halle los valores de α y β para esta regla de decisión #1.
- ✓ Aumentando la región crítica, establezca una segunda regla de decisión #2.
- ✓ Halle los niveles de α y β para esta regla de decisión #2.