Prova di Matematica Applicata - 14 gennaio 2005

- Completare subito questa pagina con cognome, nome, matricola, corso di laurea e docente.
- Scrivere nome, cognome e matricola su ogni foglio.
- Scrivere solamente su questi fogli, *anche dietro* se occorre.
- Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli.
- *Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione*

Cognome	Nome	Matricola	Corso di Laurea	Docente

Tavole della funzione di ripartizione della legge $N(0, 1)$.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56750	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76731	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84850	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92786	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95819	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97933	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99745	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861

Esercizio 1:

Sia $0 \leq p \leq 1$, e si consideri l'esperimento consistente nel lanciare una moneta scelta a caso tra $N+1$, delle quali N sono eque, mentre una ha testa su entrambe le facce.

- Determinare i valori di N per i quali la probabilità di ottenere testa sia almeno pari a p.
- Utilizzare il risultato precedente per determinare N quando $p = \frac{5}{8}$ e quando $p = \frac{5}{6}$.

Esercizio 2:
Siano $0 \leq p \leq 1$ e $0 \leq q \leq 1$, e sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto bidimensionale con la seguente funzione di probabilità congiunta:

X Y	-1	0	1
-1	p	0	1-p-q
0	0	q	0

- Determinare per quali valori di p e di q le due variabili aleatorie siano non correlate.
- Determinare per quali valori di p e di q le due variabili aleatorie siano indipendenti.

Esercizio 3:
Sia (X, Y) un vettore aleatorio continuo bidimensionale con funzione di densità congiunta $f_{XY}(x, y)$.

- Si dimostri che la densità di $Z = \frac{X}{Y}$ è

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |w| f_{XY}(zw, w) \, \mathrm{d}w$$

- Utilizzando il risultato precedente, si determini $f_Z(z)$ nel caso in cui X e Y siano due v. a. normali standardizzate indipendenti.

Esercizio 4:

Sia X una v. a. uniforme su $(0, 1)$, e sia $H_X(t)$ la sua funzione caratteristica. Si determini il valore di $H_X^{'}(0)$.

Esercizio 5:

Sia $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di v. a. indipendenti con distribuzione geometrica di parametro q. Posto $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{n}$, determinare (se esiste) un numero α tale che, per ogni $m > 0$, la probabilità che Y_n cada nell'intervallo $[\alpha - m, \alpha + m]$ tenda a 1 al tendere di n all'infinito.