Campi Elettromagnetici

Cristiano Cuffaro

3 novembre 2019

1 Definizioni e relazioni fondamentali

Spostamento dielettrico $\rightarrow \mathbf{D} = \epsilon\,\mathbf{E} = \epsilon_0\,\epsilon_r\,\mathbf{E}$

Campo magnetico $\rightarrow \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0\,\mu_r}$

Equazioni di Maxwell:

- $\oint_s \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = -\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}_0\,dS \Rightarrow \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ (vortici di $\mathbf{E}$)
- $\oint_s \mathbf{H}\cdot\mathbf{ds} = \frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}_0\,dS + \iint_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_0\,dS \Rightarrow \nabla\times\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$ (vortici di $\mathbf{H}$)
- $\oiint_S \mathbf{n}_0\cdot\mathbf{D}\,dS = q \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$ (sorgenti di $\mathbf{D}$)
- $\oiint_S \mathbf{n}_0\cdot\mathbf{B}\,dS = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ (sorgenti di $\mathbf{B}$ nulle)

Corrente di conduzione

Densità di corrente $\mathbf{J}$ e corrispondente quantità integrale $\mathbf{I}_S$ associata a densità di carica ρ in moto con velocità media $\mathbf{u}$.

$\mathbf{J} = \rho\,\mathbf{u}$; $\qquad I_S = \iint_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_0\,dS$

Equazione di continuità: $\oiint_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_0\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{J}\,dV = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\,dV$

in forma differenziale $\rightarrow \nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

Cariche mosse dal campo elettrico, secondo la conducibilità g ($S\cdot m^{-1}$) del materiale:

$\mathbf{J} = g\,\mathbf{E} \qquad$ (per un conduttore ideale $g \rightarrow \infty$)

Parametri del mezzo

Il mezzo è caratterizzato magneticamente da:

- costante dielettrica ϵ;
- permittività magnetica μ;
- conducibilità elettrica g;

Il mezzo si dice:

- **omogeneo** se i parametri non variano al variare della posizione (NON omogeneo $\Rightarrow$ il contrario);
- **lineare** se ciascun parametro è indipendente dall'intensità dei campi;
- **isotropo** se si comporta allo stesso modo in tutte le direzioni;

  Oss: Un mezzo **anisotropo** è invece caratterizzato da un'espressione tensoriale del parametro. Ad esempio:

  per il parametro $\epsilon \rightarrow \quad [\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$
  In un mezzo *anisotropo* i vettori della coppia corrispondente ($\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$; $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$; $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$) possono non essere paralleli tra loro. Trasformazioni lineari:

$$\mathbf{D} = [\epsilon]\,\mathbf{E}\ ; \quad \mathbf{B} = [\mu]\,\mathbf{H}\ ; \quad \mathbf{D} = [g]\,\mathbf{E}\ ;$$

- **chirale** quando i vettori elettrici e magnetici dipendono dai corrispondenti vettori di entrambi i tipi.

Grandezze impresse

Se $\mathbf{J} = g\,\mathbf{E}$:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

sono equazioni omogenee

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + g\mathbf{E}$$

Chi ha generato il campo magnetico?
$\Rightarrow$ É generato dai processi che trasformano energia di "altro tipo" in energia elettromagnetica.
Si parla quindi di *corrente impressa*: $\quad \mathbf{J}_i \neq g\mathbf{E}$
le sorgenti impresse non derivano dalla presenza dei campi MA li generano.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + g\mathbf{E} + \mathbf{J}_i$$

Nella pratica la corrente impressa non descrive l'effettiva sorgente del campo ma una sorgente *equivalente* fissata a priori per poter determinare il campo. Invece, la *corrente magnetica impressa*: $\mathbf{J}_{im}$ non è "fisica" ma "matematica".

Con le correnti di sorgente

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m - \mathbf{J}_{im}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_i$$

N.B. $\mathbf{J}_m$ è nulla e si scrive solo per motivi di simmetria.

Possiamo osservare che esistono queste *dualità*:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E} \to \mathbf{H} & & \mathbf{H} \to -\mathbf{E} \\ \mathbf{J} \to \mathbf{J}_m & & \mathbf{J}_m \to -\mathbf{J} \\ & \epsilon \longleftrightarrow \mu & \end{array}$$

(Le trasformazioni NON alterano le soluzioni!!)

Condizioni al contorno

Relazioni differenziali che costituiscono un vincolo lasco per le soluzioni, che sono classi di funizoni. La soluzione si trova imponendo le condizioni al contorno. Vincoli compatibili con le proprietà fisiche e vincoli in corrispondenza di superfici di separazione tra mezzi differenti.

Componenti normali	Componenti tangenziali
$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{E}_2 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\mathbf{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_2}$	$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$
$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma$	$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{D}_2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\mathbf{D}_1) = 0$
$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{H}_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\mathbf{H}_1) = 0$	$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$
$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$	$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{B}_2 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\mathbf{B}_1) = \mu_2\mathbf{K}$

dove $\mathbf{K}$ è la corrente superficiale di densità lineare $(Am^{-}1)$ finita.

2 Bilancio energetico e unicità

Il teorema di Poynting

$$\oiint_S \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}_0\, dS + \iiint_V (\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t})\, dV + \iiint_V g\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\, dV = \iiint_V (-\mathbf{J}_i\cdot\mathbf{E} - \mathbf{J}_{im}\cdot\mathbf{H})\, dV$$

Il termine $\iiint_V (-\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{E} - \mathbf{J}_{im} \cdot \mathbf{H})\, dV$ rappresenta la potenza che le correnti impresse (*sorgenti*) creano all'interno del volume V.

Oss: l'integrando è $\neq 0$ solo nei punti in cui $\mathbf{J}_i \neq 0$ e $\mathbf{J}_{im} \neq 0$; tali punti individuano il *volume di sorgente*, che in generale non coincide con il volume, arbitrario, V.

Il teorema di Poynting mostra che la potenza creata dalle sorgenti si divide in tre parti, corrispondenti ai termini a primo membro:

1. $\iiint_V g\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\,dV = \iiint_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,dV$
   è la potenza che il campo cede alle correnti di conduzione e che viene trasformata in calore (dissipata) per effetto Joule;

2. $\iiint_V (\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t})\,dV = \frac{\partial W_m}{\partial t} + \frac{\partial W_e}{\partial t}$
   è la potenza che va a variare l'energia immagazzinata nel campo elettromagnetico;

3. $\oiint_S \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}_0\,dS$
   è la potenza che fluisce attraverso la superficie S che racchiude il volume V.

$\mathbf{E}\times\mathbf{H} \rightarrow$ *vettore di Poynting*, rappresenta la densità superficiale di potenza associata al campo elettromagnetico.

Applicazione a sorgenti armoniche

Osserviamo il caso in cui le sorgenti, e di conseguenza i campi, variano sinusoidalmente nel tempo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_i &= J_i \sin(\omega t)\,\mathbf{i}_0 \\
\mathbf{E} &= E \sin(\omega t + \psi_e)\,\mathbf{e}_0 \\
\mathbf{H} &= H \sin(\omega t + \psi_h)\,\mathbf{h}_0
\end{aligned}$$

Consideriamo il teorema di Poynting e osserviamo che quando le grandezze hanno andamento periodico, più che i valori istantanei sono significativi i valori medi in un periodo T.

Mezzo non dissipativo

$$-\frac{1}{2}\iiint_V J_i E\,\mathbf{i}_0\cdot\mathbf{e}_0\,\cos\psi_e\,dV = \frac{1}{T}\int_0^T \oiint_S \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}_0\,dS\,dt$$

I termini corrispondenti a variazioni di energia immagazzinata sono a media nulla. Ipotizzando $\mathbf{i}_0\cdot\mathbf{e}_0 > 0$ si osserva che il segno del valore medio della potenza creata dipende dallo sfasamento ψ_e:

- se $\frac{\pi}{2} < \psi_e < \frac{3\pi}{2}$, la potenza creata è positiva (fuoriesce dalla superficie);
- se $\psi_e = \frac{\pi}{2}$ o $\psi_e = \frac{3\pi}{2}$ ("quadratura"), la sorgente non eroga potenza, ma crea potenza periodica a media nulla;
- se $0 < \psi_e < \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2} < \psi_e < 2\pi$, la potenza creata risulta negativa $\Rightarrow$ non c'è una sorgente MA un elemento dissipativo.

Involucro metallico

Consideriamo ora la sorgente racchiusa in un involucro conduttore ideale, all'interno del quale il mezzo è, in generale, dissipativo ($g \neq 0$).
Il campo elettrico su S è normale alla superficie $\Rightarrow$ il flusso del vettore di Poynting attraverso S è nullo.

Considerando le quantità medie su un periodo e assumendo $\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \neq 0$ si ha:

$$-\frac{1}{2} \iiint_V J_i E\, \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \, \cos\psi_e \, dV = \iiint_V g \frac{E^2}{2} \, dV$$

tutta la potenza erogata dalla sorgente si dissipa nel materiale.

N.B. se il materiale fosse privo di dissipazioni ($g \neq 0$) la fase verrebbe modificata in modo tale da avere sfasamento $\psi_e = \frac{\pi}{2}$ ("quadratura") e quindi potenza media nulla.

3 Campi nel dominio della frequenza

Notazioni complesse

Campo elettromagnetico sinusoidale con pulsazione ω:

$$\mathbf{E}(t) = E_x(t)\, \mathbf{x}_0 + E_y(t)\, \mathbf{y}_0 + E_z(t)\, \mathbf{z}_0 \qquad \text{con} \qquad E_x(t) = E_{0_x} \cos(\omega t + \phi_x)$$

def Vettore campo complesso:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{E}} &= E_{0_x}\, e^{j\phi_x}\, \mathbf{x}_0 + E_{0_y}\, e^{j\phi_y}\, \mathbf{y}_0 + E_{0_z}\, e^{j\phi_z}\, \mathbf{z}_0 \\
&= E_{0_x} (\cos\phi_x + j \sin\phi_x)\, \mathbf{x}_0 + \cdots + E_{0_z} (\cos\phi_z + j \sin\phi_z)\, \mathbf{z}_0 \\
&= (E_{x_r} + jE_{x_j})\, \mathbf{x}_0 + (E_{y_r} + jE_{y_j})\, \mathbf{y}_0 + (E_{z_r} + jE_{z_j})\, \mathbf{z}_0 \\
&= \mathbf{E}_r + j\, \mathbf{E}_j
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\mathbf{E}(t) = Re[\, \hat{\mathbf{E}}\, e^{j\omega t}\,] = \mathbf{E}_r \cos\omega t - \mathbf{E}_j \sin\omega t$$

Polarizzazione

L'estremo libero di $\mathbf{E}(t)$ descrive in generale un'ellisse nel piano individuato da $\mathbf{E}_r$ e $\mathbf{E}_j$: il vettore $\mathbf{E}(t)$ è polarizzato ellitticamente. In casi particolari l'ellisse degenera in

- circonferenza (quando $\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{E}_j = 0$ e $|\mathbf{E}_r| = |\mathbf{E}_j|$): il vettore è polarizzato circolarmente;
- segmento di retta (quando $\mathbf{E}_r \times \mathbf{E}_j = 0$): il vettore ha polarizzazione lineare (o rettilinea);

Parametri di polarizzazione:

→ angolo di inclinazione ϕ: angolo tra l'asse maggiore dell'ellisse di polarizzazione e una direzione (in genere ori4zzontale) nel piano dell'ellisse.
→ angolo di ellitticità $\chi = \pm \arctan \frac{E_{min}}{E_{max}}$

N.B. posso sempre esprimere qualunque polarizzazione come somma di polarizzazioni lineari (non $\|$).

Costante dielettrica nel dominio della frequenza

In riferimento a mezzi rarefatti non polari (gas), studiamo ϵ in funzione del momento di dipolo elettrico P indotto per unità di volume:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) = \epsilon_0 \left[1 + \frac{P}{\epsilon_0 E}\right]$$

Allora poiché $\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(t) + \mathbf{P}(t)$, nel dominio della frequenza:

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\omega) + \mathbf{P}(\omega) = \epsilon \mathbf{E}(\omega)$$

$$\Rightarrow \ \epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left[1 + \frac{P(\omega)}{\epsilon_0 E(\omega)}\right]$$

Mezzi non polari con cariche vincolate

$$\mathbf{P} = P\,\mathbf{p}_0 = q\ell\,\mathbf{p}_0$$

Il moto del sistema di cariche si ottiene dall'equilibrio delle forze, assunte parallele ad $\mathbf{E}$:

$$F_i + F_s + F_r = q\,E(t)$$

dove

- $F_i = m\frac{d^2\ell}{dt^2}$ è la forza di inerzia;
- $F_s = s\frac{d\ell}{dt}$ è la forza di smorzamento;
- $F_r = c\,\ell$ è la forza di richiamo;
- $q\,E(t) = q\,E_0 \cos \omega t$ è la forza esercitata dal campo elettrico.

Dal bilancio delle forze si ricava l'equazione differenziale

$$m\frac{d^2\ell}{dt^2} + s\frac{d\ell}{dt} + c\,\ell = q\,E_0 \cos \omega t$$

passando alla notazione complessa si ottiene l'equazione algebrica

$$-\omega^2 \hat{\ell} + j\omega \frac{s}{m}\hat{\ell} + \frac{c}{m}\hat{\ell} = \frac{q}{m}\hat{E}$$

definendo $\alpha = \frac{s}{2m}$ (coefficiente di smorzamento) e $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ (pulsazione di risonanza), l'equazione diventa

$$(-\omega^2 + 2j\omega\alpha + \omega_0^2)\,q\hat{\ell} = \frac{q^2}{m}\hat{E}$$

e fornisce il fasore $\hat{P} = q\hat{ell}$ del momento di dipolo indotto

$$\hat{P} = \frac{q^2}{m}\frac{\hat{E}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\alpha\omega}$$

per cui

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \frac{\hat{P}}{\epsilon_0\hat{E}}) = \epsilon_0(\epsilon' + j\epsilon'')$$

La costante dielettrica relativa è

$$\epsilon' + j\epsilon'' = 1 + \frac{q^2}{\epsilon_0 m}\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2j\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$$

Rispetto alla pulsazione di risonanza ω_0 si individuano tre campi di frequenza caratteristici:

1. "basse" ($\omega \ll \omega_0$) frequenze

   $$\epsilon' \simeq 1 + \frac{q^2}{\epsilon_0 m\omega_0^2}; \qquad -\epsilon'' \simeq \frac{q^2}{\epsilon_0 m}\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^4} \ll \epsilon'$$

   ϵ è circa reale e indipendente da ω;

2. "alte" ($\omega \gg \omega_0$) frequenze

   $$\epsilon' \simeq 1 - \frac{q^2}{\epsilon_0 m\omega^2}; \qquad -\epsilon'' \simeq \frac{q^2}{\epsilon_0 m}\frac{2\alpha}{\omega^3} \ll \epsilon'$$

   ϵ è ancora prevalentemente reale e ha una debole dipendenza dalla frequenza;

3. frequenze nell'intorno della risonanza $\omega \simeq \omega_0$

   $$\epsilon' + j\epsilon'' \simeq 1 + \frac{q^2}{2\epsilon_0 m\omega_0}\left[\frac{\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + \alpha^2} - j\frac{\alpha}{(\Delta\omega)^2 + \alpha^2}\right]$$

   con $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$.

Oss: $\epsilon'' < 0$ e $\alpha > 0$ sempre!

Mezzi compositi: atmosfera

L'atmosfera è composta prevalentemente da azoto (poco polarizzabile) e da ossigeno e vapore acqueo.
N_{O_2} singoli modi di polarizzazione:

$$\epsilon'(\omega) = \sum_{i=1}^{N_{H_2O}} [S'F'(\omega)]_i + \sum_{i=1}^{N_{O_2}} [S'F'(\omega)]_i + \overline{\epsilon'}$$

$$\epsilon''(\omega) = \sum_{i=1}^{N_{H_2O}} [S''F''(\omega)]_i + \sum_{i=1}^{N_{O_2}} [S''F''(\omega)]_i + \overline{\epsilon''}$$

Osserviamo che la parte immaginaria della costante dielettrica nasce quando siamo in presenza di dissipazioni, come in questo caso.

Mezzi conduttori

Qui vi sono delle cariche libere di muoversi (corrente di conduzione) e c'è dissipazione.
La costante dielettrica relativa nel dominio della frequenza è data da

$$\epsilon' + j\epsilon'' = 1 - \frac{q^2}{\epsilon_0 m}\frac{1}{\omega^2 + 4\alpha^2} - j\frac{q^2}{\epsilon_0 m}\frac{2\alpha}{\omega(\omega^2 + 4\alpha^2)}$$

mentre invece la conducibilità complessa nel dominio della frequenza risulta

$$g(\omega) = \frac{q^2}{m(2\alpha + j\omega)} = \frac{q^2}{m}\frac{2\alpha}{4\alpha^2 + \omega^2} - j\frac{q^2}{m}\frac{\omega}{4\alpha^2 + \omega^2}$$

a "bassa" ($\omega \ll \alpha$) frequenza

$$g(\omega) \simeq \frac{q^2}{m}\frac{1}{2\alpha} - j\frac{q^2}{m}\frac{\omega}{4\alpha^2}$$

$|\mathrm{Im}[g]| \ll \mathrm{Re}[g]$.
Per un conduttore la parte immaginaria della costante dielettrica del mezzo dissipativo è pari a

$$\epsilon'' = -\frac{\mathrm{Re}[g]}{\omega\epsilon_0}$$

descrive lo stesso processo che descrive la parte reale di g, per cui

$$\epsilon'' \leftrightarrow \mathrm{Re}[g]$$

per mezzi di tipo diverso (non conduttori) come i mezzi condensati è comunque utile considerare questo tipo di relazioni:

$$\epsilon'' \simeq -\frac{g}{\omega\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad g_e = -\omega\epsilon_0\epsilon''$$

dove g_e è la conducibilità equivalente del mezzo.

4 Relazioni nel dominio della frequenza

Teorema di Poynting

$$\iiint_V (-\frac{\mathbf{J}_i^* \cdot \mathbf{E}}{2} - \frac{\mathbf{J}_{im} \cdot \mathbf{H}^*}{2})\, dV$$
$$= \iiint_V g\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{2}\, dV + j\omega \iiint_V (\mu\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}*}{2} - \epsilon^*\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{2})\, dV + \frac{1}{2}\oiint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot\mathbf{n}\, dS$$

Identifichiamo il significato dei vari termini:

- termine di sorgente

$$\iiint_V (-\frac{\mathbf{J}_i^* \cdot \mathbf{E}}{2} - \frac{\mathbf{J}_{im} \cdot \mathbf{H}^*}{2})\, dV$$

assumendo polarizzazioni lineari nel dominio della frequenza e quindi, assunti $\mathbf{J}_i$ ed $\mathbf{E}$ concordi, $\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{\mathbf{J}_i^* \cdot \mathbf{E}}{2} = -\frac{1}{2}J_0 E_0\, \cos\psi_e - j\frac{1}{2}J_0 E_0\, \sin\psi_e$$

- parte reale: potenza media erogata nell'unità di volume dalle sorgenti elettriche;
- parte immaginaria: potenza reattiva che rappresenta la misura della potenza a media nulla, fornita e recuperata dalle sorgenti.

- Il termine
$$\iiint_V g\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{2}\,dV$$
è una quantità reale che coincide con la potenza media dissipata in un periodo per effetto della conducibilità.

- L'integrando del termine
$$j\omega\iiint_V (\mu\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}*}{2}-\epsilon^*\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{2})\,dV$$
si può riscrivere individuando
  - parte reale
  $$\frac{1}{2}\omega\iiint_V (\mu_0|\mu''|\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*+\epsilon_0|\epsilon''|\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*)\,dV$$
  rappresenta la potenza media in un periodo dissipata per polarizzazione dielettrica e magnetica;
  - parte immaginaria
  $$\frac{1}{2}\omega\iiint_V (\mu_0\mu'\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*+\epsilon_0\epsilon'\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*)\,dV$$
  misura l'ampiezza della variazione di energia immagazzinata nel campo elettrico e magnetico.

- Il termine
$$\frac{1}{2}\oiint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot\mathbf{n}\,dS$$
è in generale complesso
  - parte reale: potenza media su un periodo che fluisce attraverso la superficie S;
  - parte immaginaria: potenza reattiva sulla superficie S.

  Oss: $\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*$ è il vettore di Poynting complesso, densità superficiale di potenza (Wm^{-2} o VAm^{-2}).

Bilancio energetico

Parte della potenza erogata dal generatore si perde per dissipazione e in parte esce (fluisce fuori) $\Rightarrow$ il totale è uguale alla potenza erogata, detta *potenza irradiata.*
Parte della potenza ceduta dalle correnti torna alle sorgenti bilanciando le variazioni periodiche di energia immagazzinata nei campi e l'eventuale rientro

periodico di potenza attraverso S.

Oss: se il mezzo è privo di dissipazioni ($g = 0$ e ϵ, μ reali) $\Rightarrow$ la potenza media erogata dalle sorgenti viene tutta irradiata attraverso S.

5 Propagazione in mezzi non dissipativi

Mezzo privo di dissipazioni, vale:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} + \nabla \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) = 0$$

$$\text{con } k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon$$

Mezzo debolmente disomogeneo $|\nabla \epsilon| \to 0$ si riduce ad una equazione delle onde omogenea a coefficiente non costante

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2(\mathbf{r}) \mathbf{E} = 0$$

L'equazione vale in modo approssimato per qualsiasi coppia $\nabla \epsilon$ e ω tali che

$$\left| \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right| \ll k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon$$

Definizioni

- $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ costante relativa al vuoto;
- $n(\mathbf{r}) = \sqrt{\epsilon'(\mathbf{r})}$ indice di rifrazione;
- $k(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) k_0$

Riscriviamo l'equazione delle onde in questa forma

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E} = 0$$

ipotizzando che abbia soluzione

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-jk_0 \phi(\mathbf{r})}$$

possiamo ricavare la *equazione eiconale*

$$n^2 - |\nabla \phi|^2 = 0$$

L'onda elettromagnetica

- $\mathbf{E}_0$ è il fattore determina ampiezza e polarizzazione;
- $e^{-jk_0 \phi(\mathbf{r})}$ è il fattore di fase.

Campo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = Re \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right] = Re \left[\mathbf{E}_0 e^{-j[k_0 \phi(\mathbf{r}) - \omega t]} \right]$$

$$\Rightarrow E_{0_i}(r, t) = E_{0_i} \cos(k_0 \phi(r) - \omega t) \qquad i = x, y, z$$

Se il tempo varia di dt, lo spostamento dr lungo $\mathbf{r}_0$ che annulla il differenziale è

$$k_0(\nabla\phi)\cdot\mathbf{r}_0 dr - \omega dt = 0$$

velocità di propagazione nella direzione $\mathbf{r}_0$:

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{\mathbf{r}_0} = \frac{\omega}{k_0\nabla\phi\cdot\mathbf{r}_0} = u\big|_{\mathbf{r}_0}$$

La velocità u dipede da $\mathbf{r}_0$

- se $\mathbf{r}_0 \parallel \nabla\phi$
$$u = \frac{\omega}{k_0|\nabla\phi|} = \frac{\omega}{k_0 n} = \frac{c_0}{n}$$
con $c_0 \simeq 3\cdot 10^8\ m\cdot s^{-1}$
u_{min} è la velocità di propagazione;

- se $\mathbf{r}_0 \perp \nabla\phi$, $u \to \infty$ (non è velocità di trasporto).

Relazioni tra campi e direzione di propagazione

Se $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-jk_0\phi(\mathbf{r})}$, anche $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-jk_0\phi(\mathbf{r})}$

Posto

- $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ *impedenza intrinseca del vuoto*;

- $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}$ *impedenza intrinseca del mezzo*;

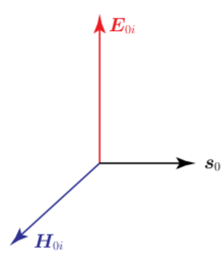
Dalle prime due equazioni di Maxwell

$$\mathbf{E}_0 = -\eta\mathbf{s}_0\times\mathbf{H}_0$$

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\eta}\mathbf{s}_0\times\mathbf{E}_0$$

componenti reali e immaginari di $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{H}_0$ sono ortogonali rispettivamente e alla direzione di propagazione $\mathbf{s}_0$ e formano una terna trirettangola destra

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{s}_0\times\mathbf{e}_0\,; \qquad\qquad \mathbf{e}_0 = -\mathbf{s}_0\times\mathbf{h}_0$$



Raggi elettromagnetici

Vettore di Poynting

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2}\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* = \frac{1}{2}\mathbf{E}_0 \times \frac{\mathbf{s}_0 \times \mathbf{E}_0^*}{\eta} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*}{\eta}\,\mathbf{s}_0$$

ha direzione e verso di $\mathbf{s}_0$, versore ortogonale alle superfici d'onda $\phi(\mathbf{r}) = cost$, indicando che il trasporto di potenza avviene ortogonalmente alle $\phi(\mathbf{r}) = cost$. Curve ortogonali in ogni punto alle superfici d'onda sono traiettorie dell'energia elettromagnetica, denominate *raggi elettromagnetici*.

L'uso dei raggi elettromagnetici riduce il problema della propagazione da tridimensionale a monodimensionale.
Va determinato il raggio (linea che congiunge la sorgente con il punto di ricezione) e inoltre vanno determinate ampiezza, fase e polarizzazione del campo lungo il raggio.

Oss: la traiettoria elettromagnetica dipende dalla distribuzione spaziale dell'indice di rifrazione e dalla direzione iniziale di propagazione.

Dall'equazione eiconale si ricava:

$$\frac{d}{ds}(n\mathbf{s}_0) = \mathbf{s}_0\frac{dn}{ds} + n\frac{d\mathbf{s}_0}{ds} = \nabla n$$

Per definizione, la curvatura di un raggio ρ è data da $\frac{1}{\rho}$. Per quanto riguarda la curvatura del raggio elettromagnetico, è data da

$$\frac{\mathbf{n}_0}{\rho} = \frac{d\mathbf{s}_0}{ds}$$

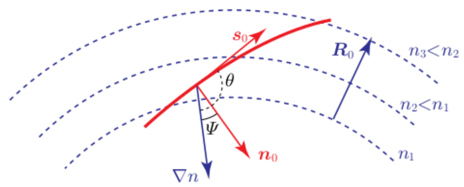
con $\mathbf{n}_0$ normale principale della curva

$$\frac{1}{\rho} = \mathbf{n}_0 \cdot \frac{\nabla n}{n}$$

la curvatura aumenta con $|\nabla n|$;
il raggio elettromagnetico rimane localmente rettilineo se $\mathbf{s}_0 \parallel \nabla n$.

Raggi in mezzi stratificati radialmente

Consideriamo un mezzo il cui indice di rifrazione abbia simmetria sferica, ovvero vari solo con la coordinata radiale (è il caso della troposfera).



Dato che
$$\nabla n = -|\nabla n|\mathbf{R}_0$$
segue che
$$\frac{1}{\rho} = \mathbf{n}_0 \cdot \frac{\nabla n}{n} = \frac{|\nabla n|}{n}\cos\psi = \frac{|\nabla n|}{n}\sin\theta$$

Principio di Fermat e lunghezza di percorso

Un raggio elettromagnetico che passa per due punti P_1 e P_2 è tale che la lunghezza L del percorso elettromagnetico
$$L = \int_{P_1}^{P_2} n(\mathbf{r})ds$$
funzionale della traiettoria seguita tra P_1 e P_2, è stazionaria.
Considerata una qualunque curva che congiunge i due punti, quella (o quelle) che rendono stazionario (generalmente minimo) il valore dell'integrale di linea dell'indice di rifrazione è (sono) la/le traiettoria/e dell'energia elettromagnetica.

Misura distanza
$$R = \frac{\tau \cdot c_0}{2}$$
τ tempo che l'energia elettromagnetica impiega tra 2 punti, la sua misura dà la distanza tra trasmettitore e ricevitore.

6 Onde piane

Onde piane in mezzi uniformi

Nel caso di un mezzo uniforme e non dissipativo,
$$\nabla\phi = n\mathbf{s}_0 = cost$$
e l'energia elettromagnetica si propaga lungo traiettorie rettilinee.
In un mezzo omogeneo la funzione eiconale vale
$$\phi = n\int_{s_i}^{s} ds = ns + cost$$
Per superfici d'onda $\phi = cost$ che siano dei piani (onde piane)
$$\phi = \gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z$$
L'onda piana è
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$
con $\mathbf{k} = k_0\boldsymbol{\gamma} = k_0\nabla\phi$
i parametri del mezzo, la posizione delle sorgenti determinano posizione e verso.

Il *vettore di propagazione* è in generale complesso
$$\mathbf{k} = \boldsymbol{\beta} - j\boldsymbol{\alpha}$$
e, più in generale, si distinguono due casi:

- mezzo senza dissipazioni,
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \omega^2 \mu \epsilon$$
e quindi necessariamente $-\alpha = 0$ oppure $-\alpha \perp \beta$ e, inoltre, $\beta > \alpha$;
- mezzo con dissipazioni (parametri complessi),

$$\alpha \neq 0 \; ; \qquad \alpha \not\perp \beta$$

L'espressione generale di un'onda piana è dunque

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{-j(\boldsymbol{\beta}-j\boldsymbol{\alpha})\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{r}} \cdot e^{-j\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r}}$$

in cui sono messi in evidenza

- *fattore di ampiezza* $e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{r}}$;
- *fattore di fase* $e^{-j\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r}}$;

dove

- $\boldsymbol{\alpha}$ individua i piani equiampiezza $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{r} = cost$ ad esso ortogonali;
- $\boldsymbol{\beta}$ individua i piani equifase $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{r} = cost$ ad esso ortogonali.

Un'onda piana è *uniforme* quando i piani equifase coincidono con quelli equiampiezza, cioè quando

$$\boldsymbol{\alpha} = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}$$

- *velocità di fase* nella direzione $\mathbf{r}_0$ ad angolo θ con $\boldsymbol{\beta}$
$$u\Big|_{\boldsymbol{r}_0} = \frac{\omega}{\boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}} = \frac{\omega}{\beta \cos\theta}$$
- *velocità di propagazione* nella direzione $\boldsymbol{\beta}$ (ha valore minimo), dipende dall'uniformità dell'onda:
  - per un'onda uniforme
  $$u\Big|_{\boldsymbol{\beta}_0} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c$$
  - per un'onda non uniforme
  $$u\Big|_{\boldsymbol{\beta}_0} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon + \alpha^2}} < c$$