

# Desigualtats isoperimètriques i valors propis del Laplacà

Cristina Camacho Rivas i Maria Claramunt Clotet

Juny 2025

# Introducció

# Problema isoperimètric

El **problema isoperimètric** consisteix en determinar, per cada  $\nu \in (0, V(M))$ , la regió de volum  $\nu$  tal que l'àrea de la seva frontera és mínima.

# Problema isoperimètric

El **problema isoperimètric** consisteix en determinar, per cada  $\nu \in (0, V(M))$ , la regió de volum  $\nu$  tal que l'àrea de la seva frontera és mínima.

## Perfil isoperimètric

$$I_M(\nu) = \inf_{\Omega \in \mathcal{S}} \{A(\Omega) \mid V(\Omega) = \nu \text{ amb } \overline{\Omega} \subset M \text{ i } \overline{\Omega} \text{ compacte}\}$$

# Problema isoperimètric

El **problema isoperimètric** consisteix en determinar, per cada  $\nu \in (0, V(M))$ , la regió de volum  $\nu$  tal que l'àrea de la seva frontera és mínima.

## Perfil isoperimètric

$$I_M(\nu) = \inf_{\Omega \in \mathcal{S}} \{A(\Omega) \mid V(\Omega) = \nu \text{ amb } \overline{\Omega} \subset M \text{ i } \overline{\Omega} \text{ compacte}\}$$

## Regió isoperimètrica o minimitzador

Un minimitzador és una regió  $\Omega \in \mathcal{S}$  amb  $V(\Omega) = \nu$  i  $A(\Omega) = I_M(\nu)$ .

# Problema isoperimètric

El **problema isoperimètric** consisteix en determinar, per cada  $\nu \in (0, V(M))$ , la regió de volum  $\nu$  tal que l'àrea de la seva frontera és mínima.

## Perfil isoperimètric

$$I_M(\nu) = \inf_{\Omega \in \mathcal{S}} \{A(\Omega) \mid V(\Omega) = \nu \text{ amb } \overline{\Omega} \subset M \text{ i } \overline{\Omega} \text{ compacte}\}$$

## Regió isoperimètrica o minimitzador

Un minimitzador és una regió  $\Omega \in \mathcal{S}$  amb  $V(\Omega) = \nu$  i  $A(\Omega) = I_M(\nu)$ .

Si  $M$  és una varietat compacta, per tot  $\nu \in (0, V(M))$  existeix una regió isoperimètrica amb frontera suau.

## Versió més feble del problema

Donar una cota inferior per  $I_M(\nu)$ . Això dona lloc a les **desigualtats isoperimètriques**:

$$A(\Omega) \geq \phi(V(\Omega))$$

per totes les regions suaus relativament compactes  $\Omega \in S$ .

# Desigualtat isoperimètrica clàssica



# Desigualtat de Brunn-Minkowski

Considerem  $M = \mathbb{M}_k$  un espai de dimensió  $n \geq 1$  simplement connex amb curvatura seccional  $k$  constant.

## Àrea de Minkowski

Sigui  $K$  un subconjunt compacte de  $\mathbb{M}_k$ . Definim l'**àrea de Minkowski**,  $\text{Mink}(K)$  com

$$\text{Mink}(K) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V([K]_h) - V(K)}{h}.$$

$$[K]_h = \{x \in \mathbb{M}_k : d(x, K) \leq h\} = K + h\mathbb{B}^n$$

$X + Y = \{x + y \in \mathbb{R}^n | x \in X, y \in Y\}$  és la suma de Minkowski.

# Desigualtat de Brunn-Minkowski

Considerem  $M = \mathbb{M}_k$  un espai de dimensió  $n \geq 1$  simplement connex amb curvatura seccional  $k$  constant.

## Àrea de Minkowski

Sigui  $K$  un subconjunt compacte de  $\mathbb{M}_k$ . Definim l'**àrea de Minkowski**,  $\text{Mink}(K)$  com

$$\text{Mink}(K) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V([K]_h) - V(K)}{h}.$$

$$[K]_h = \{x \in \mathbb{M}_k : d(x, K) \leq h\} = K + h\mathbb{B}^n$$

$X + Y = \{x + y \in \mathbb{R}^n | x \in X, y \in Y\}$  és la suma de Minkowski.

Si  $\partial K \in C^1$ ,  $A(K) = \text{Mink}(K)$

# Desigualtat de Brunn-Minkowski

## Teorema (Desigualtat de Brunn-Minkowski)

Siguin  $X$  i  $Y$  subconjunts mesurables i acotats de  $\mathbb{R}^n$ . Llavors,

$$V(X + Y)^{1/n} \geq V(X)^{1/n} + V(Y)^{1/n}.$$

La igualtat es dona si i només si  $X, Y$  estan continguts en hiperplans paral·lels o són homotètics.

# Desigualtat de Brunn-Minkowski

## Demostració:

$X$  i  $Y$  consisteixen cadascun en una sola caixa i  $X \cap Y = \emptyset$ .

$$V(X) = \prod_{j=1}^n \alpha_j, \quad V(Y) = \prod_{j=1}^n \beta_j, \quad V(X + Y) = \prod_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j)$$

# Desigualtat de Brunn-Minkowski

## Demostració:

$X$  i  $Y$  consisteixen cadascun en una sola caixa i  $X \cap Y = \emptyset$ .

$$V(X) = \prod_{j=1}^n \alpha_j, \quad V(Y) = \prod_{j=1}^n \beta_j, \quad V(X + Y) = \prod_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j)$$

Desigualtat de les mitjanes aritmètica i geomètrica:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\prod_{j=1}^n \alpha_j}{\prod_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j)} \right)^{1/n} + \left( \frac{\prod_{j=1}^n \beta_j}{\prod_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j)} \right)^{1/n} \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j} = 1, \end{aligned}$$

# Desigualtat de Brunn-Minkowski

## Demostració:

$X$  i  $Y$  consisteixen cadascun en una sola caixa i  $X \cap Y = \emptyset$ .

$$V(X) = \prod_{j=1}^n \alpha_j, \quad V(Y) = \prod_{j=1}^n \beta_j, \quad V(X + Y) = \prod_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j)$$

Desigualtat de les mitjanes aritmètica i geomètrica:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\prod_{j=1}^n \alpha_j}{\prod_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j)} \right)^{1/n} + \left( \frac{\prod_{j=1}^n \beta_j}{\prod_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j)} \right)^{1/n} \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j} = 1, \end{aligned}$$

$$V(X + Y)^{1/n} \geq V(X)^{1/n} + V(Y)^{1/n}$$

# Desigualtat de Brunn-Minkowski

Inducció pel cas en que  $X$  i  $Y$  són la unió de  $k = l + 1$  caixes.

# Desigualtat de Brunn-Minkowski

Inducció pel cas en que  $X$  i  $Y$  són la unió de  $k = l + 1$  caixes.

Existeix un hiperplà  $P$  en  $\mathbb{R}^n$  que divideix  $\mathbb{R}^n$  en dos semiespais tancats  $H^+$  i  $H^-$ , de manera que

$$\frac{V(Y^-)}{V(X^-)} = \frac{V(Y)}{V(X)} = \frac{V(Y^+)}{V(X^+)}.$$



# Desigualtat de Brunn-Minkowski

Inducció pel cas en que  $X$  i  $Y$  són la unió de  $k = l + 1$  caixes.

Existeix un hiperplà  $P$  en  $\mathbb{R}^n$  que divideix  $\mathbb{R}^n$  en dos semiespais tancats  $H^+$  i  $H^-$ , de manera que

$$\frac{V(Y^-)}{V(X^-)} = \frac{V(Y)}{V(X)} = \frac{V(Y^+)}{V(X^+)}.$$

Llavors

$$\begin{aligned} V(X + Y) &\geq V(X^+ + Y^+) + V(X^- + Y^-) \\ &\geq \left[ V(X^+)^{1/n} + V(Y^+)^{1/n} \right]^n + \left[ V(X^-)^{1/n} + V(Y^-)^{1/n} \right]^n \\ &= V(X^+) \left( 1 + \left( \frac{V(Y^+)}{V(X^+)} \right)^{1/n} \right)^n + V(X^-) \left( 1 + \left( \frac{V(Y^-)}{V(X^-)} \right)^{1/n} \right)^n \\ &= \left( V(X)^{1/n} + V(Y)^{1/n} \right)^n, \end{aligned}$$

# Desigualtat de Brunn-Minkowski

$X$  i  $Y$  conjunts oberts i acotats

Es poden aproximar des de dins per unions finites de caixes:

$X_k \subset X$ ,  $Y_k \subset Y$  amb  $V(X \setminus X_k) < \frac{1}{k}$ ,  $V(Y \setminus Y_k) < \frac{1}{k}$ .

$$V(X + Y)^{1/n} \geq V(X_k + Y_k)^{1/n} \geq V(X_k)^{1/n} + V(Y_k)^{1/n}$$

# Desigualtat de Brunn-Minkowski

$X$  i  $Y$  conjunts oberts i acotats

Es poden aproximar des de dins per unions finites de caixes:

$X_k \subset X$ ,  $Y_k \subset Y$  amb  $V(X \setminus X_k) < \frac{1}{k}$ ,  $V(Y \setminus Y_k) < \frac{1}{k}$ .

$$V(X + Y)^{1/n} \geq V(X_k + Y_k)^{1/n} \geq V(X_k)^{1/n} + V(Y_k)^{1/n}$$

$X$  i  $Y$  conjunts compactes

$$V([X + Y]_{2\varepsilon})^{1/n} = V([X]_\varepsilon + [Y]_\varepsilon)^{1/n} \geq V([X]_\varepsilon)^{1/n} + V([Y]_\varepsilon)^{1/n}$$

# Desigualtat de Brunn-Minkowski

$X$  i  $Y$  conjunts oberts i acotats

Es poden aproximar des de dins per unions finites de caixes:

$X_k \subset X$ ,  $Y_k \subset Y$  amb  $V(X \setminus X_k) < \frac{1}{k}$ ,  $V(Y \setminus Y_k) < \frac{1}{k}$ .

$$V(X + Y)^{1/n} \geq V(X_k + Y_k)^{1/n} \geq V(X_k)^{1/n} + V(Y_k)^{1/n}$$

$X$  i  $Y$  conjunts compactes

$$V([X + Y]_{2\varepsilon})^{1/n} = V([X]_\varepsilon + [Y]_\varepsilon)^{1/n} \geq V([X]_\varepsilon)^{1/n} + V([Y]_\varepsilon)^{1/n}$$

$X$  i  $Y$  conjunts mesurables acotats

Es poden aproximar per conjunts compactes  $X_k \subset X$ ,  $Y_k \subset Y$  amb  $V(X \setminus X_k) < \frac{1}{k}$ ,  $V(Y \setminus Y_k) < \frac{1}{k}$ .

# Desigualtat isoperimètrica per Mink

## Desigualtat isoperimètrica per l'àrea de Minkowski

Sigui  $X \subset \mathbb{M}_k$  compacte i mesurable, llavors

$$\begin{aligned} \text{Mink}(X) &\geq nV(\mathbb{B}^n)^{1/n}V(X)^{(n-1)/n} \\ &= \frac{A(\mathbb{B}^n)}{V(\mathbb{B}^n)^{(n-1)/n}}V(X)^{(n-1)/n} \end{aligned}$$

# Desigualtat isoperimètrica per Mink

## Desigualtat isoperimètrica per l'àrea de Minkowski

Sigui  $X \subset \mathbb{M}_k$  compacte i mesurable, llavors

$$\begin{aligned}\text{Mink}(X) &\geq nV(\mathbb{B}^n)^{1/n}V(X)^{(n-1)/n} \\ &= \frac{A(\mathbb{B}^n)}{V(\mathbb{B}^n)^{(n-1)/n}}V(X)^{(n-1)/n}\end{aligned}$$

**Demostració:**

$$\begin{aligned}\text{Mink}(X) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(X + \varepsilon \mathbb{B}^n) - V(X)}{\varepsilon} \\ &\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(V(X)^{1/n} + \varepsilon V(\mathbb{B}^n)^{1/n})^n - V(X)}{\varepsilon} \\ &= nV(X)^{\frac{n-1}{n}}V(\mathbb{B}^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{A(\mathbb{B}^n)}{V(\mathbb{B}^n)^{(n-1)/n}}V(X)^{(n-1)/n}\end{aligned}$$

# Desigualtat Isoperimètrica Clàssica

## Desigualtat isoperimètrica clàssica

Sigui  $X \subset \mathbb{M}_k$  compacte, mesurable i amb frontera  $C^1$ , llavors

$$A(X) \geq nV(\mathbb{B}^n)^{1/n}V(X)^{(n-1)/n}$$

on  $\mathbb{B}^n$  és la bola unitat de dimensió  $n$ .

# Desigualtat Isoperimètrica Clàssica

## Desigualtat isoperimètrica clàssica

Sigui  $X \subset \mathbb{M}_k$  compacte, mesurable i amb frontera  $C^1$ , llavors

$$A(X) \geq nV(\mathbb{B}^n)^{1/n}V(X)^{(n-1)/n}$$

on  $\mathbb{B}^n$  és la bola unitat de dimensió  $n$ .

$$\frac{A(X)}{V(X)^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{A(\mathbb{B}^n)}{V(\mathbb{B}^n)^{\frac{n-1}{n}}}$$



# Desigualtat Isoperimètrica Clàssica

## Desigualtat isoperimètrica clàssica

Sigui  $X \subset \mathbb{M}_k$  compacte, mesurable i amb frontera  $C^1$ , llavors

$$A(X) \geq nV(\mathbb{B}^n)^{1/n}V(X)^{(n-1)/n}$$

on  $\mathbb{B}^n$  és la bola unitat de dimensió  $n$ .

$$\frac{A(X)}{V(X)^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{A(\mathbb{B}^n)}{V(\mathbb{B}^n)^{\frac{n-1}{n}}}$$

Exemple al pla:

$$L^2 \geq 4\pi A$$

# Reordenació

# Reordenació esfèrica

Considerem  $f$  acotada i mesurable definida en un conjunt  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  acotat i mesurable.

Funció de distribució de  $f$

$\mu_f(t) : [0, \infty) \rightarrow [0, |\Omega|]$  amb  $\mu_f(t) = |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}|$

$\mu_f(t)$  és no-creixent.

# Reordenació esfèrica

Considerem  $f$  acotada i mesurable definida en un conjunt  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  acotat i mesurable.

## Funció de distribució de $f$

$\mu_f(t) : [0, \infty) \rightarrow [0, |\Omega|]$  amb  $\mu_f(t) = |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}|$

$\mu_f(t)$  és no-creixent.

## Reordenació decreixent de $f$

$f^* : [0, |\Omega|] \rightarrow [0, \infty)$  amb  $f^*(s) = \inf\{t \geq 0 \mid \mu_f(t) < s\}$ .

$f^*$  es pot entendre com una inversa de  $\mu_f(t)$  i és no-creixent.

# Reordenació esfèrica

Considerem  $f$  acotada i mesurable definida en un conjunt  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  acotat i mesurable.

## Funció de distribució de $f$

$\mu_f(t) : [0, \infty) \rightarrow [0, |\Omega|]$  amb  $\mu_f(t) = |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}|$

$\mu_f(t)$  és no-creixent.

## Reordenació decreixent de $f$

$f^* : [0, |\Omega|] \rightarrow [0, \infty)$  amb  $f^*(s) = \inf\{t \geq 0 \mid \mu_f(t) < s\}$ .

$f^*$  es pot entendre com una inversa de  $\mu_f(t)$  i és no-creixent.

## Reordenació esfèrica de $\Omega$

Bola  $(\Omega^*)$  centrada a l'origen amb la mateixa mesura que  $\Omega$ :  
 $|\Omega^*| = |\Omega|$ .

# Reordenació esfèrica

## Reordenació esfèrica decreixent de $f$

És la funció  $f^* = \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$  donada per

$$f^*(x) = f^*(C_n|x|^n)$$

on  $C_n|x|^n$  és el volum de la bola de radi  $|x|$  en  $\mathbb{R}^n$ .

# Reordenació esfèrica

## Reordenació esfèrica decreixent de $f$

És la funció  $f^* = \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$  donada per

$$f^*(x) = f^*(C_n|x|^n)$$

on  $C_n|x|^n$  és el volum de la bola de radi  $|x|$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Propietats de  $f^*$  :

- Simetria esfèrica
- No-creixent respecte el radi
- Equimesurable amb  $f$  (tenen la mateixa funció de distribució)

# Desigualtat de Pólya - Szegő

## Desigualtat de Pólya - Szegő

Sigui  $f \in H_0^1(\Omega)$ , llavors  $f^* \in H_0^1(\Omega^*)$  i

$$\int_{\Omega^*} |\nabla f^*|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla f|^2.$$

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \overline{H^1(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)} \\ &= \overline{\left\{ f \in L^2 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2 \forall i \in \{1, \dots, n\} \right. \right\} \cap C_0^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$



# Desigualtat de Pólya - Szegő

## Demostració:

$$C_\varepsilon = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \mid \varepsilon f(x) > t\} \quad C_{\varepsilon, t} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon f(x) > t\}$$
$$C_\varepsilon^* = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \mid \varepsilon f^*(x) > t\} \quad C_{\varepsilon, t}^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon f^*(x) > t\}$$

$$A(C_{\varepsilon, t}^*) \leq A(C_{\varepsilon, t}) \implies A(C_\varepsilon^*) \leq A(C_\varepsilon)$$

$$\int_{f^{*-1}(\mathbb{R}^+)} \left(1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\nabla f^*|^2}\right) \leq \int_{f^{-1}(\mathbb{R}^+)} \left(1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\nabla f|^2}\right)$$
$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{f^{*-1}(\mathbb{R}^+)} \left(\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\nabla f^*|^2} - 1\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{f^{-1}(\mathbb{R}^+)} \left(\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\nabla f|^2} - 1\right)$$
$$\int_{\Omega^*} |\nabla f^*|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla f|^2$$

# Desigualtats isoperimètriques pels valors propis

# Problemes dels valors propis

**Dirichlet:**

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{a } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

**Neumann:**

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu v & \text{a } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

***Clamped plate:***

$$\begin{cases} \Delta^2 w = \Gamma w & \text{a } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ w = 0 = \frac{\partial w}{\partial n} & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

# Desigualtat de Faber-Krahn

## Desigualtat de Faber-Krahn

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*) \quad \text{per } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

on  $\lambda_1(\Omega)$  ( $\lambda_1(\Omega^*)$ ) és el primer valor propi del Laplaciana pel problema de Dirichlet sobre  $\Omega$  ( $\Omega^*$ ).

La igualtat s'assoleix si i només si  $\Omega$  és una bola i.e.  $\Omega = \Omega^*$ .

# Faber-Krahn

**Demostració:**

$$-\Delta u_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega)u_1(\Omega)$$

# Faber-Krahn

**Demostració:**

$$-\Delta u_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega)u_1(\Omega)$$

$$\begin{aligned}\lambda_1(\Omega) \int_{\Omega} u_1^2(\Omega) \, dx &= - \int_{\Omega} u_1(\Omega) \Delta u_1(\Omega) \, dx \\ &= - \left[ (\nabla u_1) u_1 \mid_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \, dx \right] \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \, dx\end{aligned}$$

# Faber-Krahn

**Demostració:**

$$-\Delta u_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega)u_1(\Omega)$$

$$\begin{aligned}\lambda_1(\Omega) \int_{\Omega} u_1^2(\Omega) \, dx &= - \int_{\Omega} u_1(\Omega) \Delta u_1(\Omega) \, dx \\ &= - \left[ (\nabla u_1) u_1 \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \, dx \right] \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \, dx\end{aligned}$$

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \, dx}{\int_{\Omega} u_1^2 \, dx}$$

# Desigualtat de Faber-Krahn

## Desigualtat de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\varphi \in D(-\Delta)} \frac{\int_{\Omega} \varphi(-\Delta\varphi)}{\int_{\Omega} \varphi^2}$$

on  $\varphi$  és una funció de prova real en el domini de  $-\Delta$ .



# Desigualtat de Faber-Krahn

## Desigualtat de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\varphi \in D(-\Delta)} \frac{\int_{\Omega} \varphi(-\Delta\varphi)}{\int_{\Omega} \varphi^2}$$

on  $\varphi$  és una funció de prova real en el domini de  $-\Delta$ .

$u_1^* \in H_0^1(\Omega^*)$  és una funció de prova vàlida:

$$\lambda_1(\Omega^*) \leq \frac{\int_{\Omega^*} u_1^*(-\Delta u_1^*) dx}{\int_{\Omega^*} (u_1^*)^2 dx} = \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*|^2 dx}{\int_{\Omega^*} (u_1^*)^2 dx}$$

# Desigualtat de Faber-Krahn

## Desigualtat de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\varphi \in D(-\Delta)} \frac{\int_{\Omega} \varphi(-\Delta\varphi)}{\int_{\Omega} \varphi^2}$$

on  $\varphi$  és una funció de prova real en el domini de  $-\Delta$ .

$u_1^* \in H_0^1(\Omega^*)$  és una funció de prova vàlida:

$$\lambda_1(\Omega^*) \leq \frac{\int_{\Omega^*} u_1^*(-\Delta u_1^*) dx}{\int_{\Omega^*} (u_1^*)^2 dx} = \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*|^2 dx}{\int_{\Omega^*} (u_1^*)^2 dx}$$

Per l'equimesurabilitat de  $u_1(\Omega)$  i  $u_1^*(\Omega^*)$  i Pólya - Szegő:

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx}{\int_{\Omega} u_1^2 dx} \geq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*|^2 dx}{\int_{\Omega^*} (u_1^*)^2 dx} \geq \lambda_1(\Omega^*).$$

# Desigualtat de Szegő-Weinberger

## Desigualtat de Szegő-Weinberger

$$\mu_1(\Omega) \leq \mu_1(\Omega^*) \quad \text{per } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

on  $\mu_1(\Omega)$  ( $\mu_1(\Omega^*)$ ) és el primer valor propi del Laplaciana pel problema de Neumann sobre  $\Omega$  ( $\Omega^*$ ).

La igualtat s'assoleix si i només si  $\Omega$  és una bola.

# Altres desigualtats de valors propis

**Conjectura de Payne–Pólya–Weinberger:**

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq \frac{j_{n/2,1}^2}{j_{n/2-1,1}^2}$$

# Altres desigualtats de valors propis

Conjectura de Payne–Pólya–Weinberger:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq \frac{j_{n/2,1}^2}{j_{n/2-1,1}^2}$$

Conjectura de Rayleigh pel problema del *clamped plate*:

$$\Gamma_1(\Omega) \geq \Gamma_1(\Omega^*) \quad \text{per } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

amb igualtat si i només si  $\Omega$  és un disc.

