Desigualtats isoperimètriques i valors propis del Laplacià

Cristina Camacho Rivas i Maria Claramunt Clotet

Juny 2025

Introducció

Problema isoperimètric

El **problema isoperimètric** consisteix en determinar, per cada $\nu \in (0, V(M))$, la regió de volum ν tal que l'àrea de la seva frontera és mínima.

Problema isoperimètric

El **problema isoperimètric** consisteix en determinar, per cada $\nu \in (0, V(M))$, la regió de volum ν tal que l'àrea de la seva frontera és mínima.

Perfil isoperimètric

$$I_M(\nu) = \inf_{\Omega \in \mathcal{S}}\{A(\Omega) \,|\, V(\Omega) = \nu \text{ amb } \overline{\Omega} \subset M \text{ i } \overline{\Omega} \text{ compacte}\}$$

Problema isoperimètric

El **problema isoperimètric** consisteix en determinar, per cada $\nu \in (0, V(M))$, la regió de volum ν tal que l'àrea de la seva frontera és mínima.

Perfil isoperimètric

$I_M(\nu) = \inf_{\Omega \in \mathcal{S}} \{A(\Omega) \,|\, V(\Omega) = \nu$ amb $\overline{\Omega} \subset M$ i $\overline{\Omega}$ compacte$\}$

Regió isoperimètrica o minimitzador

Un minimitzador és una regió $\Omega \in \mathcal{S}$ amb $V(\Omega) = \nu$ i $A(\Omega) = I_M(\nu)$.

Problema isoperimètric

El **problema isoperimètric** consisteix en determinar, per cada $\nu \in (0, V(M))$, la regió de volum ν tal que l'àrea de la seva frontera és mínima.

Perfil isoperimètric

$I_M(\nu) = \inf_{\Omega \in \mathcal{S}}\{A(\Omega) \,|\, V(\Omega) = \nu \text{ amb } \overline{\Omega} \subset M \text{ i } \overline{\Omega} \text{ compacte}\}$

Regió isoperimètrica o minimitzador

Un minimitzador és una regió $\Omega \in \mathcal{S}$ amb $V(\Omega) = \nu$ i $A(\Omega) = I_M(\nu)$.

Si M és una varietat compacta, per tot $\nu \in (0, V(M))$ existeix una regió isoperimètrica amb frontera suau.

Versió més feble del problema

Donar una cota inferior per $I_M(\nu)$. Això dona lloc a les **desigualtats isoperimètriques**:

$$A(\Omega) \geq \phi(V(\Omega))$$

per totes les regions suaus relativament compactes $\Omega \in S$.

Desigualtat isoperimètrica clàssica

Desigualtat de Brunn-Minkowski

Considerem $M = \mathbb{M}_k$ un espai de dimensió $n \geq 1$ simplement connex amb curvatura seccional k constant.

Àrea de Minkowski

Sigui K un subconjunt compacte de $\mathbb{M}_k$. Definim l'**àrea de Minkowski**, $\mathrm{Mink}(K)$ com

$$\mathrm{Mink}(K) = \lim_{h \to 0} \frac{V([K]_h) - V(K)}{h}.$$

$[K]_h = \{x \in \mathbb{M}_k : d(x, K) \leq h\} = K + h\mathbb{B}^n$

$X + Y = \{x + y \in \mathbb{R}^n | x \in X, y \in Y\}$ és la suma de Minkowski.

Desigualtat de Brunn-Minkowski

Considerem $M = \mathbb{M}_k$ un espai de dimensió $n \geq 1$ simplement connex amb curvatura seccional k constant.

Àrea de Minkowski

Sigui K un subconjunt compacte de $\mathbb{M}_k$. Definim l'**àrea de Minkowski**, $\mathrm{Mink}(K)$ com

$$\mathrm{Mink}(K) = \lim_{h \to 0} \frac{V([K]_h) - V(K)}{h}.$$

$[K]_h = \{x \in \mathbb{M}_k : d(x, K) \leq h\} = K + h\mathbb{B}^n$

$X + Y = \{x + y \in \mathbb{R}^n | x \in X, y \in Y\}$ és la suma de Minkowski.

Si $\partial K \in C^1$, $A(K) = \mathrm{Mink}(K)$

Desigualtat de Brunn-Minkowski

Teorema (Desigualtat de Brunn-Minkowski)

Siguin X i Y subconjunts mesurables i acotats de $\mathbb{R}^n$. Llavors,

$$V(X+Y)^{1/n} \geq V(X)^{1/n} + V(Y)^{1/n}.$$

La igualtat es dona si i només si X, Y estan continguts en hiperplans paral·lels o són homotètics.

Desigualtat de Brunn-Minkowski

Demostració:

X i Y consisteixen cadascun en una sola caixa i $X \cap Y = \emptyset$.

$$V(X) = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j, \quad V(Y) = \prod_{j=1}^{n} \beta_j, \quad V(X+Y) = \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j)$$

Desigualtat de Brunn-Minkowski

Demostració:
X i Y consisteixen cadascun en una sola caixa i $X \cap Y = \emptyset$.

$$V(X) = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j, \quad V(Y) = \prod_{j=1}^{n} \beta_j, \quad V(X+Y) = \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j)$$

Desigualtat de les mitjanes aritmètica i geomètrica:

$$\left(\frac{\prod_{j=1}^{n} \alpha_j}{\prod_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j)} \right)^{1/n} + \left(\frac{\prod_{j=1}^{n} \beta_j}{\prod_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j)} \right)^{1/n}$$
$$\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j} = 1,$$

Desigualtat de Brunn-Minkowski

Demostració:

<u>X i Y consisteixen cadascun en una sola caixa i $X \cap Y = \emptyset$.</u>

$$V(X) = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j, \quad V(Y) = \prod_{j=1}^{n} \beta_j, \quad V(X+Y) = \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j)$$

Desigualtat de les mitjanes aritmètica i geomètrica:

$$\left(\frac{\prod_{j=1}^{n} \alpha_j}{\prod_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j)} \right)^{1/n} + \left(\frac{\prod_{j=1}^{n} \beta_j}{\prod_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j)} \right)^{1/n}$$
$$\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j} = 1,$$

$$V(X+Y)^{1/n} \geq V(X)^{1/n} + V(Y)^{1/n}$$

Desigualtat de Brunn-Minkowski

Inducció pel cas en que X i Y són la unió de $k = l + 1$ caixes.

Desigualtat de Brunn-Minkowski

Inducció pel cas en que X i Y són la unió de $k = l + 1$ caixes.

Existeix un hiperplà P en $\mathbb{R}^n$ que divideix $\mathbb{R}^n$ en dos semiespais tancats H^+ i H^-, de manera que

$$\frac{V(Y^-)}{V(X^-)} = \frac{V(Y)}{V(X)} = \frac{V(Y^+)}{V(X^+)}.$$

Desigualtat de Brunn-Minkowski

Inducció pel cas en que X i Y són la unió de $k = l + 1$ caixes.

Existeix un hiperplà P en $\mathbb{R}^n$ que divideix $\mathbb{R}^n$ en dos semiespais tancats H^+ i H^-, de manera que

$$\frac{V(Y^-)}{V(X^-)} = \frac{V(Y)}{V(X)} = \frac{V(Y^+)}{V(X^+)}.$$

Llavors

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &\geq V(X^+ + Y^+) + V(X^- + Y^-) \\
&\geq \left[V(X^+)^{1/n} + V(Y^+)^{1/n}\right]^n + \left[V(X^-)^{1/n} + V(Y^-)^{1/n}\right]^n \\
&= V(X^+)\left(1 + \left(\frac{V(Y^+)}{V(X^+)}\right)^{1/n}\right)^n + V(X^-)\left(1 + \left(\frac{V(Y^-)}{V(X^-)}\right)^{1/n}\right)^n \\
&= \left(V(X)^{1/n} + V(Y)^{1/n}\right)^n,
\end{aligned}$$

Desigualtat de Brunn-Minkowski

X i Y conjunts oberts i acotats
Es poden aproximar des de dins per unions finites de caixes:
$X_k \subset X$, $Y_k \subset Y$ amb $V(X \setminus X_k) < \frac{1}{k}, \quad V(Y \setminus Y_k) < \frac{1}{k}$.

$$V(X+Y)^{1/n} \geq V(X_k+Y_k)^{1/n} \geq V(X_k)^{1/n} + V(Y_k)^{1/n}$$

Desigualtat de Brunn-Minkowski

X i Y conjunts oberts i acotats

Es poden aproximar des de dins per unions finites de caixes:
$X_k \subset X$, $Y_k \subset Y$ amb $V(X \setminus X_k) < \frac{1}{k}$, $\quad V(Y \setminus Y_k) < \frac{1}{k}$.

$$V(X+Y)^{1/n} \geq V(X_k+Y_k)^{1/n} \geq V(X_k)^{1/n} + V(Y_k)^{1/n}$$

X i Y conjunts compactes

$V([X+Y]_{2\varepsilon})^{1/n} = V([X]_\varepsilon + [Y]_\varepsilon)^{1/n} \geq V([X]_\varepsilon)^{1/n} + V([Y]_\varepsilon)^{1/n}$

Desigualtat de Brunn-Minkowski

X i Y conjunts oberts i acotats

Es poden aproximar des de dins per unions finites de caixes: $X_k \subset X$, $Y_k \subset Y$ amb $V(X \setminus X_k) < \frac{1}{k}$, $\quad V(Y \setminus Y_k) < \frac{1}{k}$.

$$V(X+Y)^{1/n} \geq V(X_k+Y_k)^{1/n} \geq V(X_k)^{1/n} + V(Y_k)^{1/n}$$

X i Y conjunts compactes

$V([X+Y]_{2\varepsilon})^{1/n} = V([X]_\varepsilon + [Y]_\varepsilon)^{1/n} \geq V([X]_\varepsilon)^{1/n} + V([Y]_\varepsilon)^{1/n}$

X i Y conjunts mesurables acotats

Es poden aproximar per conjunts compactes $X_k \subset X$, $Y_k \subset Y$ amb $V(X \setminus X_k) < \frac{1}{k}$, $\quad V(Y \setminus Y_k) < \frac{1}{k}$.

Desigualtat isoperimètrica per Mink

Desigualtat isoperimètrica per l'àrea de Minkowski

Sigui $X \subset \mathbb{M}_k$ compacte i mesurable, llavors

$$\begin{aligned}\mathrm{Mink}(X) &\geq nV(\mathbb{B}^n)^{1/n}V(X)^{(n-1)/n}\\ &= \frac{A(\mathbb{B}^n)}{V(\mathbb{B}^n)^{(n-1)/n}}V(X)^{(n-1)/n}\end{aligned}$$

Desigualtat isoperimètrica per Mink

Desigualtat isoperimètrica per l'àrea de Minkowski

Sigui $X \subset \mathbb{M}_k$ compacte i mesurable, llavors

$$\begin{aligned}\mathrm{Mink}(X) &\geq nV(\mathbb{B}^n)^{1/n}V(X)^{(n-1)/n}\\ &= \frac{A(\mathbb{B}^n)}{V(\mathbb{B}^n)^{(n-1)/n}}V(X)^{(n-1)/n}\end{aligned}$$

Demostració:

$$\begin{aligned}\mathrm{Mink}(X) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{V(X+\varepsilon\mathbb{B}^n)-V(X)}{\varepsilon}\\ &\geq \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(V(X)^{1/n}+\varepsilon V(\mathbb{B}^n)^{1/n})^n - V(X)}{\varepsilon}\\ &= nV(X)^{\frac{n-1}{n}}V(\mathbb{B}^n)^{\frac{1}{n}}\\ &= \frac{A(\mathbb{B}^n)}{V(\mathbb{B}^n)^{(n-1)/n}}V(X)^{(n-1)/n}\end{aligned}$$

Desigualtat Isoperimètrica Clàssica

Desigualtat isoperimètrica clàssica

Sigui $X \subset \mathbb{M}_k$ compacte, mesurable i amb frontera C^1, llavors

$$A(X) \geq nV(\mathbb{B}^n)^{1/n}V(X)^{(n-1)/n}$$

on $\mathbb{B}^n$ és la bola unitat de dimensió n.

Desigualtat Isoperimètrica Clàssica

Desigualtat isoperimètrica clàssica

Sigui $X \subset \mathbb{M}_k$ compacte, mesurable i amb frontera C^1, llavors

$$A(X) \geq nV(\mathbb{B}^n)^{1/n} V(X)^{(n-1)/n}$$

on $\mathbb{B}^n$ és la bola unitat de dimensió n.

$$\frac{A(X)}{V(X)^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{A(\mathbb{B}^n)}{V(\mathbb{B}^n)^{\frac{n-1}{n}}}$$

Desigualtat Isoperimètrica Clàssica

Desigualtat isoperimètrica clàssica

Sigui $X \subset \mathbb{M}_k$ compacte, mesurable i amb frontera C^1, llavors

$$A(X) \geq nV(\mathbb{B}^n)^{1/n}V(X)^{(n-1)/n}$$

on $\mathbb{B}^n$ és la bola unitat de dimensió n.

$$\frac{A(X)}{V(X)^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{A(\mathbb{B}^n)}{V(\mathbb{B}^n)^{\frac{n-1}{n}}}$$

Exemple al pla:

$$L^2 \geq 4\pi A$$

Reordenació

Reordenació esfèrica

Considerem f acotada i mesurable definida en un conjunt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotat i mesurable.

Funció de distribució de f

$\mu_f(t) : [0, \infty) \to [0, |\Omega|]$ amb $\mu_f(t) = |\{x \in \Omega \, : \, |f(x)| > t\}|$

$\mu_f(t)$ és no-creixent.

Reordenació esfèrica

Considerem f acotada i mesurable definida en un conjunt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotat i mesurable.

Funció de distribució de f

$\mu_f(t) : [0, \infty) \to [0, |\Omega|]$ amb $\mu_f(t) = |\{x \in \Omega \,:\, |f(x)| > t\}|$

$\mu_f(t)$ és no-creixent.

Reordenació decreixent de f

$f^\star : [0, |\Omega|] \to [0, \infty))$ amb $f^\star(s) = \inf\{t \geq 0 \,|\, \mu_f(t) < s\}$.

$f^\star$ es pot entendre com una inversa de $\mu_f(t)$ i és no-creixent.

Reordenació esfèrica

Considerem f acotada i mesurable definida en un conjunt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotat i mesurable.

Funció de distribució de f

$\mu_f(t) : [0, \infty) \to [0, |\Omega|]$ amb $\mu_f(t) = |\{x \in \Omega \; : \; |f(x)| > t\}|$

$\mu_f(t)$ és no-creixent.

Reordenació decreixent de f

$f^\star : [0, |\Omega|] \to [0, \infty))$ amb $f^\star(s) = \inf\{t \geq 0 \,|\, \mu_f(t) < s\}$.

$f^\star$ es pot entendre com una inversa de $\mu_f(t)$ i és no-creixent.

Reordenació esfèrica de Ω

Bola (Ω^*) centrada a l'origen amb la mateixa mesura que Ω: $|\Omega^*| = |\Omega|$.

Reordenació esfèrica

Reordenació esfèrica decreixent de f

És la funció $f^* = \Omega^* \to \mathbb{R}$ donada per

$$f^*(x) = f^\star(C_n|x|^n)$$

on $C_n|x|^n$ és el volum de la bola de radi $|x|$ en $\mathbb{R}^n$.

Reordenació esfèrica

Reordenació esfèrica decreixent de f

És la funció $f^* = \Omega^* \to \mathbb{R}$ donada per

$$f^*(x) = f^\star(C_n|x|^n)$$

on $C_n|x|^n$ és el volum de la bola de radi $|x|$ en $\mathbb{R}^n$.

Propietats de f^* :

- Simetria esfèrica
- No-creixent respecte el radi
- Equimesurable amb f (tenen la mateixa funció de distribució)

Desigualtat de Pólya - Szegő

Desigualtat de Pólya - Szegő

Sigui $f \in H_0^1(\Omega)$, llavors $f^* \in H_0^1(\Omega^*)$ i

$$\int_{\Omega^*} |\nabla f^*|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla f|^2.$$

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \overline{H^1(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)} \\ &= \overline{\left\{ f \in L^2 \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \right\} \cap C_0^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

Desigualtat de Pólya - Szegő

Demostració:

$$C_\varepsilon = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \,|\, \varepsilon f(x) > t\} \quad C_{\varepsilon,t} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \varepsilon f(x) > t\}$$

$$C_\varepsilon^* = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \,|\, \varepsilon f^*(x) > t\} \quad C_{\varepsilon,t}^* = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \varepsilon f^*(x) > t\}$$

$$A(C_{\varepsilon,t}^*) \leq A(C_{\varepsilon,t}) \implies A(C_\varepsilon^*) \leq A(C_\varepsilon)$$

$$\int_{f^{*-1}(\mathbb{R}^+)} \left(1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\nabla f^*|^2}\right) \leq \int_{f^{-1}(\mathbb{R}^+)} \left(1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\nabla f|^2}\right)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{f^{*-1}(\mathbb{R}^+)} \left(\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\nabla f^*|^2} - 1\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{f^{-1}(\mathbb{R}^+)} \left(\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\nabla f|^2} - 1\right)$$

$$\int_{\Omega^*} |\nabla f^*|^2 \leq \int_\Omega |\nabla f|^2$$

Desigualtats isoperimètriques pels valors propis

Problemes dels valors propis

Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{a } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu v & \text{a } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

Clamped plate:

$$\begin{cases} \Delta^2 w = \Gamma w & \text{a } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ w = 0 = \frac{\partial w}{\partial n} & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

Desigualtat de Faber-Krahn

Desigualtat de Faber-Krahn

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*) \quad \text{per } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

on $\lambda_1(\Omega)$ $(\lambda_1(\Omega^*))$ és el primer valor propi del Laplacià pel problema de Dirichlet sobre Ω (Ω^*).

La igualtat s'assoleix si i només si Ω és una bola i.e. $\Omega = \Omega^*$.

Faber-Krahn

Demostració:

$$-\Delta u_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega) u_1(\Omega)$$

Faber-Krahn

Demostració:

$$-\Delta u_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega) u_1(\Omega)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\Omega) \int_\Omega u_1^2(\Omega)\, dx &= -\int_\Omega u_1(\Omega) \Delta u_1(\Omega)\, dx \\
&= -\left[(\nabla u_1(\Omega)) u_1(\Omega)\,|_\Omega - \int_\Omega |\nabla u_1(\Omega)|^2 dx \right] \\
&= \int_\Omega |\nabla u_1(\Omega)|^2 dx
\end{aligned}$$

Faber-Krahn

Demostració:

$$-\Delta u_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega) u_1(\Omega)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\Omega) \int_\Omega u_1^2(\Omega)\, dx &= -\int_\Omega u_1(\Omega) \Delta u_1(\Omega)\, dx \\
&= -\left[(\nabla u_1(\Omega)) u_1(\Omega) \,|_{\Omega} - \int_\Omega |\nabla u_1(\Omega)|^2 dx \right] \\
&= \int_\Omega |\nabla u_1(\Omega)|^2 dx
\end{aligned}$$

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx}{\int_\Omega u_1^2(\Omega)\, dx}$$

Desigualtat de Faber-Krahn

Desigualtat de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\varphi \in D(-\Delta)} \frac{\int_\Omega \varphi(-\Delta\varphi)}{\int_\Omega \varphi^2}$$

on φ és una funció de prova real en el domini de $-\Delta$.

Desigualtat de Faber-Krahn

Desigualtat de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\varphi \in D(-\Delta)} \frac{\int_\Omega \varphi(-\Delta\varphi)}{\int_\Omega \varphi^2}$$

on φ és una funció de prova real en el domini de $-\Delta$.

$u_1^* \in H_0^1(\Omega^*)$ és una funció de prova vàlida:

$$\lambda_1(\Omega^*) \leq \frac{\int_{\Omega^*} u_1^*(-\Delta u_1^*)dx}{\int_{\Omega^*}(u_1^*(\Omega^*))^2\, dx} = \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*|^2 dx}{\int_{\Omega^*}(u_1^*(\Omega^*))^2\, dx}$$

Desigualtat de Faber-Krahn

Desigualtat de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\varphi \in D(-\Delta)} \frac{\int_\Omega \varphi(-\Delta\varphi)}{\int_\Omega \varphi^2}$$

on φ és una funció de prova real en el domini de $-\Delta$.

$u_1^* \in H_0^1(\Omega^*)$ és una funció de prova vàlida:

$$\lambda_1(\Omega^*) \leq \frac{\int_{\Omega^*} u_1^*(-\Delta u_1^*)dx}{\int_{\Omega^*}(u_1^*(\Omega^*))^2\,dx} = \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*|^2 dx}{\int_{\Omega^*}(u_1^*(\Omega^*))^2\,dx}$$

Per l'equimesurabilitat de $u_1(\Omega)$ i $u_1^*(\Omega^*)$ i Pólya - Szegő:

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx}{\int_\Omega u_1^2(\Omega)\,dx} \geq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*|^2 dx}{\int_{\Omega^*}(u_1^*(\Omega^*))^2\,dx} \geq \lambda_1(\Omega^*).$$

Desigualtat de Szegő-Weinberger

Desigualtat de Szegő-Weinberger

$$\mu_1(\Omega) \leq \mu_1(\Omega^*) \qquad \text{per } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

on $\mu_1(\Omega)$ ($\mu_1(\Omega^*)$) és el primer valor propi del Laplacià pel problema de Neumann sobre Ω (Ω^*).

La igualtat s'assoleix si i només si Ω és una bola.

Altres desigualtats de valors propis

Conjectura de Payne–Pólya–Weinberger:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq \frac{j_{n/2,1}^2}{j_{n/2-1,1}^2}$$

Altres desigualtats de valors propis

Conjectura de Payne–Pólya–Weinberger:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq \frac{j_{n/2,1}^2}{j_{n/2-1,1}^2}$$

Conjectura de Rayleigh pel problema del *clamped plate*:

$$\Gamma_1(\Omega) \geq \Gamma_1(\Omega^*) \qquad \text{per } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

amb igualtat si i només si Ω és un disc.