SEMINAR 9

Vedem varianta multidimensională a ex. 1, sem. 6:

1. Fie $a_1, \ldots, a_n$ elemente dintr-un inel comutativ A. Atunci:

$$A[X_1, \ldots, X_n] \Big/ \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle \simeq A$$

Soluţie. Ca de obicei, considerăm morfismul $\varphi : A[X_1, \ldots, X_n] \to A$, $\varphi(f) \mapsto f(a_1, \ldots, a_n)$, şi e clar că $Im(\varphi) = A$, iar $\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n\rangle \subseteq Ker(\varphi)$. Treaba e să arătăm $Ker(\varphi) \subseteq \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n\rangle$. Pentru ex. 1 din seminarul 6, incluziunea aceasta nu era nimic altceva decât teorema lui Bêzout. Dar teorema aceasta e doar un caz particular al teoremei împărţirii cu rest, aşa că trebuie s-o folosim pe aceasta. Însă atenţie: teorema împărţirii cu rest, aşa cum o ştim din $\mathbb{Z}$, e o trăsătură pe care o au inelele $k[X]$, cu k un corp. Dacă k nu mai e corp, ci doar un inel A, $A[X]$ nu mai este euclidian! (aici apar idealele de forma $\langle a, f\rangle$, cu $a \in A$ neinversabil şi $f \in A[X]$, iar acestea nu sunt principale; ori faptul că toate idealele sunt principale e o trăsă tură comună tuturor inelelor ce posedă o teoremă de împărţire cu rest precum în $\mathbb{Z}$ - când toate idealele sunt principale, spunem că inelul e principal). Totuşi, are loc următorul rezultat mai slab:

Propoziţie. Fie A un inel (comutativ, unitar). Dacă $f = a_0 + \ldots + a_m X^m$, şi $g = b_0 + \ldots + b_n X^n$ sunt din $A[X]$, cu $deg(f) = m$, $deg(g) = n$, atunci există $q, r \in A[X]$ astfel încât $b_n^k f = qg + r$, cu $deg(r) < n$, unde $k = max(m - n + 1, 0)$. Mai mult, dacă b_n nu e divizor al lui zero, q şi r sunt unic determinate.

Să revenim la exerciţiu. Fie $f \in Ker(\varphi)$, *i.e.* $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Propoziţia anterioară e pentru o singură variabilă, iar noi ne aflăm în dimensiune n. Dar mai avem ceva la îndemână: construcţia inductivă a inelelor de polinoame în mai multe nedeterminate - $A[X_1, \ldots, X_n] \simeq (A[X_1, \ldots, X_{n-1}])[X_n] \overset{\text{not}}{=} B[X_n]$. (Apropo, trecerea asta, $n - 1 \to n$, are loc la polinoame pentru că acestea sunt nişte obiecte formale, fără substanţă; dacă, în schimb, am lucra cu serii convergente în n variabile peste $A = \mathbb{R}$, trecerea de la $\mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$ la $\mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ are o însemnătate profundă: se modifică dimensiunea, nu doar un număr; în prezenţa unei noţiuni de convergenţă, tratamentul pentru

acea recurenţă este teorema de preparare a lui Weierstrass).
Aşadar, vedem pe f ca fiind în $B[X_n]$. Propoziţia anterioară, aplicată lui f şi $X_n - a_n$ în $B[X_n]$, ne spune că există $q_n, r_n \in B[X_n]$ astfel încât $f = (X_n - a_n)q_n + r_n$, cu $deg_{X_n}(r_n) < 1$. Dar atunci, expresia lui r_n nu conţine X_n, adică $r_n \in A[X_1, \ldots, X_{n-1}]$, şi cum $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ rezultă că şi $r_n(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$, aşa că putem continua cu acelaşi raţionament pentru r_n în locul lui f, obţinând $r_n = (X_{n-1} - a_{n-1})q_{n-1} + r_{n-1}$, etc. Astfel, fiind vorba de un număr finit de paşi, obţinem că $f = (X_n - a_n)q_n + (X_{n-1} - a_{n-1})q_{n-1} + \ldots + (X_1 - a_1)q_1$, cu $q_i \in A[X_1, \ldots, X_n]$, *i.e.* $f \in \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$.

Dacă tot veni vorba, să justificăm şi:

2. Dacă A e un domeniu de integritate ce nu este corp, atunci $A[X]$ nu e inel principal.

Soluţie. Trebuie să găsim un ideal în $A[X]$ care nu e principal. Conform ipotezei, există un element $a \in A \setminus \{0\}$ care nu e inversabil. Atunci arătăm că idealul $I = \langle a, X \rangle$ nu e principal. Presupunem că ar exista $f \in A[X] \setminus \{0\}$ astfel încât $\langle f \rangle = I$. Atunci, în particular, am avea că $a \in I$, adică $a = fg$ pentru un $g \in A[X]$. Dar a e o constantă, aşa că $0 = deg(f) + deg(g)$ (A e integru!), de unde reiese că, de fapt, $f \in A$. Însă mai avem şi că $X \in I$, deci $X = fh$, pentru un $h \in A[X]$. Scriind $h = \alpha + X\beta$, rezultă că $\alpha f = 0$ şi $\beta f = 1$. Prima relaţie nu ne interesează (afirmă $\alpha = 0$), dar a doua ne spune că f e element inversabil în A. Astfel, $\langle a, X \rangle = I = A[X]$, şi deci există $\gamma, \delta \in A[X]$ astfel încât $\gamma a + \delta f = 1$, de unde, cu necesitate, $\delta = 0$ şi $\gamma \in A$, *i.e.* a e inversabil, contradicţie.

Vă amintiţi observaţia de pe la începutul seminarului 6: în general, un polinom nu e tot una cu funcţia polinomială asociată lui. Ei bine, problema aceasta dispare când lucrăm peste un corp infinit (vedem, astfel, încă o dificultate care apare în cadrul corpurilor finite):

3. Fie A un domeniu de integritate infinit şi $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci două polinoame din $A[X_1, \ldots, X_n]$ sunt egale dacă şi numai dacă funcţiile polinomiale asociate acestora sunt egale.

Soluţie. Observaţi că e suficient să arătăm că un polinom e nul dacă şi numai dacă funcţia asociată lui e nulă: date $f, g \in A[X_1, \ldots, X_n]$, considerăm $h = f - g$.

Fie, deci, $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ oarecare şi fie $\tilde{f} : A^n \longrightarrow A$ funcţia $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$. Necesitatea e evidentă. Presupunem că $\tilde{f}$ e funcţia nulă; deci trebuie să arătăm că dacă $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ oricare ar fi $x_i \in A$, atunci $f = 0$. Procedăm inductiv asupra lui n. În cazul $n = 1$, avem că $f \in A[X_1]$ şi ştim că un astfel de polinom are cel mult $deg(f)$ rădăcini în A dacă $deg(f) > 0$ (A e domeniu de integritate). Dar conform ipotezei, f are o infinitate de rădăcini în A, aşa că trebuie ca f să fie polinomul constant 0.
Acum presupunem afirmaţia adevărată pentru polinoamele în $n - 1$ nedeterminate şi fie $f \in A[X_1, \dots, X_n]$ cu $\tilde{f} = 0$. Din nou, pentru a folosi ipoteza inductivă, privim f ca fiind în $A[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$; deci scriem $f = \sum_{i-0}^{N} f_i X_n^i$, unde $f_i \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]$. Fie $(x_1, \dots, x_{n-1}, x) \in A^n$ un n-uplu oarecare şi fie $g = f(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n) \in A[X_n]$. Deoarece $g(x) = 0$ oricare ar fi $x \in A$, obţinem $g = 0$ conform pasului $n = 1$, *i.e.* $f_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$ oricare ar fi $1 \leq i \leq N$. Cum x_i-urile sunt arbitrare şi f_i sunt în $n - 1$ nedeterminate, rezultă că $f_i = 0$ oricare ar fi $1 \leq i \leq N$, conform ipotezei inductive, şi deci $f = 0$.

Pentru următoarele exerciţii, e bine să vă amintiţi discuţia *"geometrie vs. algebră"* de mai demult.

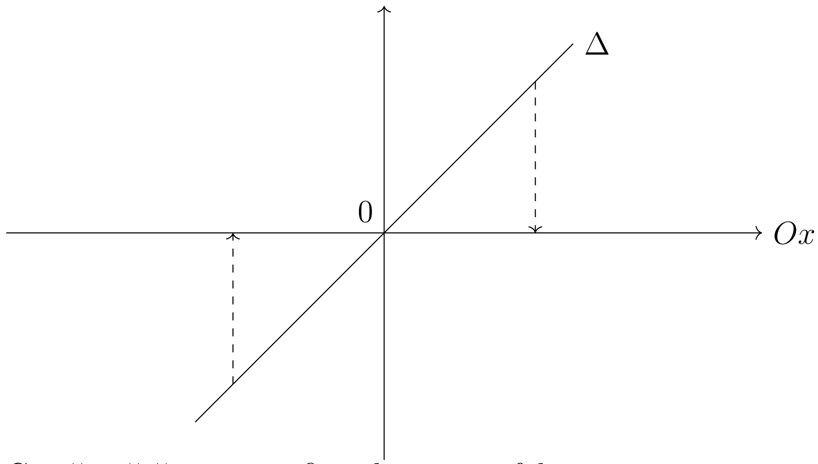
4. Dacă A e un inel comutativ, atunci

$$A[X, Y] \big/ \langle Y - X \rangle \simeq A[X]$$

Soluţie. Ca să vedem că aşa trebuie să fie, mai întâi ne gândim ce ne spune geometric acest exerciţiu. În primul rând, ne situăm în "plan", ceea ce, algebric, înseamnă $A[X, Y]$. Apoi, obiectul geometric reprezentat de $A[X]$ ar fi axa Ox: zerourile polinomului $f = Y$ oferă Ox, iar

$$A[X, Y] \big/ \langle Y \rangle \simeq (A[X])[Y] \big/ \langle Y - 0 \rangle \simeq A[X]$$

Pentru a vedea ce obiect geometric oferă inelul $A[X, Y] \big/ \langle Y - X \rangle$, ne uităm la zerourile polinomului $Y - X$: sunt punctele de coordonate (x, y) cu $x - y = 0$, *i.e.* $x = y$; deci $A[X, Y] \big/ \langle Y - X \rangle$ e diagonala principală Δ. Dar e clar că Δ şi Ox sunt obiecte geometrice izomorfe: proiectaţi diagonala pe Ox.



Ca să arătăm izomorfismul riguros, folosim ex. 1 cu $n = 1$, $A = A[X]$, $a_1 = X$:

$$A[X,Y] \big/ \langle Y - X \rangle \simeq (A[X])[Y] \big/ \langle Y - X \rangle \simeq A[X]$$

5. Pentru un alt exemplu: $A[X,Y] \big/ \langle X^2 - Y \rangle \simeq A[X]$. Geometric, cine e inelul din stânga?

6. Inelul $k[X,Y] \big/ \langle XY - 1 \rangle$ nu e izomorf cu un inel de polinoame într-o singură nedeterminată peste k.

Soluţie. Avem că

$$k[X,Y] \big/ \langle XY - 1 \rangle \simeq \{f(x,y); f \in k[X,Y] \text{ şi } xy = 1\} = k[X, X^{-1}]$$

(singura relaţie impusă lui $k[X,Y]$ e ca X să fie inversabil), iar în inelul Laurent avem elementul X care nu e constantă, dar e inversabil, fapt ce nu are loc într-un $k[Z]$. Geometric, aici avem de-a face cu hiperbola.

Să zicem că suntem peste complex, $k = \mathbb{C}$. Aţi văzut la cursul de geometrie clasificarea afină a conicelor:

- $y - x^2 = 0$ (parabola)
- $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (hiperbola)
- $x^2 - y^2 = 0$ (pereche de drepte secante)
- $x^2 - 1 = 0$ (pereche de drepte paralele)
- $x^2 = 0$ (dreaptă dublă)

Astfel, dacă $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ e un polinom ireductibil, de grad 2, atunci $\mathbb{C}[X,Y] \big/ \langle f \rangle$ e izomorf fie cu inelul de la ex. 5, fie cu cel de la ex. 6 (cazurile celelalte se exclud fiindcă am luat f să fie ireductibil, ceea ce, geometric, înseamnă că nu putem scrie conica dată de f ca şi reuniune de alte subobiecte geometrice).

7. Fie k un corp (comutativ). Inelul $k[Y,Z] \Big/ \langle Z^2 \rangle$ este izomorf cu un subinel al inelului $k[X,Y,Z] \Big/ \langle X^2, XY-Z \rangle$.

Soluţie. În primul rând, observăm că avem un drum canonic de la $k[Y,Z]$ la $k[X,Y,Z] \Big/ \langle X^2, XY-Z \rangle$: morfismul $\varphi = \pi \circ i$, unde i e incluziunea canonică $k[Y,Z] \hookrightarrow k[X,Y,Z]$, iar π e surjecţia canonică $k[X,Y,Z] \to k[X,Y,Z] \Big/ \langle X^2, XY-Z \rangle$. Arătăm că φ induce o scufundare, *i.e.* că $\overline{\varphi} : k[Y,Z] \Big/ \langle Z^2 \rangle \longrightarrow k[X,Y,Z] \Big/ \langle X^2, XY-Z \rangle$, $\overline{\varphi}(\hat{f}) = \varphi(f)$ e morfism injectiv, folosind teorema fundamentală de izomorfism. Trebuie să vedem cine e $Ker(\varphi)$. Mai întâi, avem că $Z^2 = Y^2X^2 - (XY+Z)(XY-Z) \in \langle X^2, XY-Z \rangle$, aşa că $\langle Z^2 \rangle \subseteq Ker(\varphi)$. Invers, fie $f \in Ker(\varphi)$. Asta înseamnă că $f \in k[Y,Z]$ şi $f \in \langle X^2, XY-Z \rangle$; fie $g, h \in k[X,Y,Z]$ astfel încât $f = gX^2 + h(XY-Z)$. Observaţi că putem scrie $h = u + vX + wX^2$, cu $u, v \in k[Y,Z]$ şi $w \in k[X,Y,Z]$: scriem $h = \sum_{i=0}^{n} h_i(Y,Z)X^i \in k[Y,Z][X]$ sau $h = h_0(Y,Z) + h_1(Y,Z)X + X^2(h_2(Y,Z) + h_3(Y,Z)X + \ldots + h_n(Y,Z)X^{n-2} \overset{\text{not}}{=} u + vX + wX^2$. Atunci avem $f = X^2(g + (XY-Z)w + vY) + X(uY - vZ) - uZ$ şi cum f nu conţine X, rezultă că $g + (XY-Z)w + vY = 0$ şi $uY - vZ = 0$ (privind în $k[Y,Z][X]$). Din $uY = vZ$ obţinem că $Z \mid u$ şi deci $f = -uZ \in \langle Z^2 \rangle$ ($u \in k[Y,Z]$!).
Aşadar, $Ker(\varphi) = \langle Z^2 \rangle$, iar teorema fundamentală de izomorfism ne spune că avem $\frac{k[Y,Z]}{\langle Z^2 \rangle} \simeq Im(\varphi) \subseteq \frac{k[X,Y,Z]}{\langle X^2, XY-Z \rangle}$.

8. Fie k un corp comutativ, În inelul $k[X,Y]$ se consideră idealul $I = \bigcap_{\lambda \in k} \langle X^2, Y + \lambda X \rangle$. Să se găsească nişte generatori ai lui I.

Soluţie. În general, dat un ideal într-un inel, principala speranţă pentru a-l determina este ca acesta să poată fi generat de un număr finit de elemente. În caz afirmativ, se pune apoi problema metodelor efective de găsire a generatorilor.
Dacă într-un inel se întâmplă ca orice ideal să fie finit generat, spunem că inelul este noetherian. La noi, în cazul polinoamelor, suntem asiguraţi asupra existenţei de următorul rezultat:

Teorema bazei (Hilbert) Dacă A e un inel (comutativ, unitar) noetherian, atunci şi $A[X]$ e inel noetherian.

Corolar Dacă k e un corp, atunci $k[X_1, \ldots, X_n]$ e noetherian, oricare ar fi n.

Demonstraţie. Orice corp e inel noetherian în mod trivial şi deci corolarul rezultă inductiv din teorema bazei căci $k[X_1, \ldots, X_n] = k[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$.

Noetherianitatea e o condiţie de finitudine care s-a dovedit că domină, la nivel teoretic fundamental, un tărâm matematic imens (viziunea lui Emmy Noether).

Să revenim. Ştim, aşadar, sigur că I poate fi generat de un număr finit de polinoame. Cum le găsim? Pornim cu un $f \in I$. Aceasta înseamnă că pentru orice $\lambda \in k$, $f \in \langle X^2, Y + \lambda X\rangle$, *i.e.* există $g_\lambda, h_\lambda \in k[X, Y]$ astfel încât $f = g_\lambda X^2 + h_\lambda(Y + \lambda X)$. Acum, fiind peste un corp, ştim sigur că avem la dispoziţie două elemente: 0 şi 1. Atunci alegem valorile $\lambda = 0$ şi $\lambda = 1$ şi obţinem $f = g_0X^2 + h_0Y = g_1X^2 + h_1(X + Y)$. A doua egalitate ne spune că h_1 nu are termen liber (convingeţi-vă), şi deci $f = g_1X^2 + h_1Y + h_1X$ se află sigur în $\langle X^2, XY, Y^2\rangle$. Astfel, $I \subseteq \langle X^2, XY, Y^2\rangle$. Încercăm, atunci, să arătăm şi incluziunea inversă. Fie $f \in \langle X^2, XY, Y^2\rangle$. Există, deci, $u, v, w \in k[X, Y]$ astfel încât $f = uX^2 + vXY + wY^2$. Vrem să arătăm că, oricare ar fi $\lambda \in k$, $f \in \langle X^2, Y + \lambda X\rangle$. Fie, deci, $\lambda \in k$ oarecare fixat. Partea uX^2 din expresia lui f nu ne deranjează, aşa că trebuie să ne ocupăm doar de termenii vXY şi wY^2. Având în vedere concluzia, putem încerca să folosim schimbarea de variabile $X \mapsto X$, $Y \mapsto Y + \lambda X$. Dar nu vrem să pierdem egalitatea, aşa că dacă înlocuim în expresia lui f pe Y cu $Y + \lambda X$, trebuie să scadem automat surplusul; mai mult, ne prefacem că u, v şi w sunt nişte constante. Avem

$$
\begin{aligned}
f &= uX^2 + vXY + wY^2 = \\
&= uX^2 + vX(Y + \lambda X) - \lambda vX^2 + w(Y + \lambda X)^2 - 2\lambda wYX - \lambda^2 w^2 X^2 \\
&= (u - \lambda v - \lambda^2 w^2)X^2 + (w(Y + \lambda X) + vX)(Y + \lambda X) - 2\lambda wYX
\end{aligned}
$$

Încă nu suntem gata: ne-a mai rămas $2\lambda wYX$. Atunci mai aplicăm raţionamentul încă o dată pentru acest termen:

$$f = (u - \lambda v - \lambda^2 w^2)X^2 + (w(Y + \lambda X) + vX)(Y + \lambda X) - 2\lambda w X(Y + \lambda X) + 2\lambda^2 w X^2$$
$$= (u - \lambda v - \lambda^2 w^2 + 2\lambda^2 w)X^2 + (wY - \lambda w X + vX)(Y + \lambda X) \in \langle X^2, Y + \lambda X\rangle$$

Aşadar, I e generat de elementele X^2, XY şi Y^2.