Logică Matematică şi Computaţională
Cursul IX

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2019–2020, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Conectorii logici derivați și axiomele

Notație

$E :=$ mulțimea enunțurilor.

Notație (conectorii logici derivați)

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$:

- $\varphi \vee \psi := \neg\,\varphi \to \psi$
- $\varphi \wedge \psi := \neg\,(\varphi \to \neg\,\psi)$
- $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

((schemele de) axiome)

Pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$:

$$\begin{array}{ll} (A_1) & \varphi \to (\psi \to \varphi) \\ (A_2) & (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \\ (A_3) & (\neg\,\varphi \to \neg\,\psi) \to (\psi \to \varphi) \end{array}$$

Notație

$Ax :=$ mulțimea axiomelor, i. e.: $Ax := \{\varphi \to (\psi \to \varphi), (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)), (\neg\,\varphi \to \neg\,\psi) \to (\psi \to \varphi) \mid \varphi, \psi, \chi \in E\}$.

Deducția sintactică: pornind de la axiome și, eventual, ipoteze, pe baza regulii de deducție **modus ponens** (MP)

Notație

$T :=$ mulțimea teoremelor formale (i. e. a adevărurilor sintactice).

Fie $\varphi, \psi, \chi \in E$, $\Sigma \subseteq E$ și $\Delta \subseteq E$, arbitrare.

Notație

- $\vdash \varphi$: φ este teoremă formală.
- $\Sigma \vdash \varphi$: φ este consecință sintactică a mulțimii Σ de ipoteze.

(regula de deducție **modus ponens** (MP))

$$\frac{\psi, \psi \rightarrow \varphi}{\varphi}$$

Remarcă

- $Ax \subseteq T$
- $\vdash \varphi \iff \emptyset \vdash \varphi \implies \Sigma \vdash \varphi$
- $(\forall \sigma \in \Sigma)\,(\Sigma \vdash \sigma)$

Propoziție $(\star)$

1. $\Sigma \subseteq \Delta$ *și* $\Sigma \vdash \varphi \Longrightarrow \Delta \vdash \varphi$
2. $\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow (\exists \Gamma \subseteq \Sigma)\,(|\Gamma| < \aleph_0, \Gamma \vdash \varphi)$
3. $(\forall \psi \in \Delta)\,(\Sigma \vdash \psi)$ *și* $\Delta \vdash \varphi \Longrightarrow \Sigma \vdash \varphi$

Propoziție

- **principiul identității** *(PI)*: $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$
- **principiul terțului exclus** *(PTE)*: $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$

Teoremă (Teorema deducției (TD))

$$\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Propoziție

Au loc următoarele teoreme formale și reguli de deducție:

- **tranzitivitatea implicației**: $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi}{\varphi \rightarrow \chi}$
- **falsul implică orice**: $\vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \psi$
- **orice implică adevărul**: $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$

- **slăbirea**:
  - $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ și $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
  - $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ și $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$
  - $\dfrac{\varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi}{(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi}$
- **slăbirea conjuncției**:
  - $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ și $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
  - $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ și $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$
  - $\dfrac{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi}{\chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$
  - caz particular: $\dfrac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$
  - **comutativitatea echivalenței**: $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \leftrightarrow \varphi}$
  - **negarea termenilor unei echivalențe**: $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\neg\,\varphi \leftrightarrow \neg\,\psi}$
  - **distributivitatea disjuncției față de conjuncție**: $\vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$

Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice

- Această secțiune a cursului expune construcția unei algebre Boole care este asociată în mod canonic sistemului formal $\mathcal{L}$.
- Prin această asociere, proprietățile sintactice ale lui $\mathcal{L}$ se reflectă în proprietăți booleene, și invers.

- Pe tot parcursul acestei secțiuni, $\Sigma \subseteq E$ va fi o mulțime arbitrară fixată de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$.
- Σ va reprezenta o mulțime de ipoteze, ceea ce este adesea numită o *teorie* a lui $\mathcal{L}$.

O relație de echivalență pe mulțimea enunțurilor

Lemă

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, are loc echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \wedge \psi.$$

Demonstrație: "$\Rightarrow$": Conform regulii de deducție **slăbirea conjuncției**, cazul particular.
"$\Leftarrow$": Conform regulilor de deducție **slăbirea conjuncției** și (MP).

Definiție

Definim o relație binară $\sim_\Sigma$ pe mulțimea E a enunțurilor lui $\mathcal{L}$, astfel: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \text{ ddacă } \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Remarcă

Conform lemei anterioare, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi,$$

pentru că $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Lemă

$\sim_\Sigma$ *este o relație de echivalență pe* E.

Demonstrație: Conform (PI), pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$, deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$, așadar $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$ conform remarcii anterioare, i. e. $\varphi \sim_\Sigma \varphi$, prin urmare $\sim_\Sigma$ este reflexivă.
Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, conform regulii de deducție **comutativitatea echivalenței**, $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$, așadar $\varphi \sim_\Sigma \psi$ ddacă $\psi \sim_\Sigma \varphi$, deci $\sim_\Sigma$ este simetrică.
Fie $\varphi, \psi, \chi \in E$ a. î. $\varphi \sim_\Sigma \psi$ și $\psi \sim_\Sigma \chi$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \chi$, ceea ce este echivalent, conform remarcii anterioare, cu $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Atunci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ și $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi$, conform regulii de deducție **tranzitivitatea implicației**. Din remarca anterioară, rezultă că $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$, i. e. $\varphi \sim_\Sigma \chi$, așadar $\sim_\Sigma$ este tranzitivă.
Deci $\sim_\Sigma$ este o relație de echivalență pe E.

Notație

Să notăm, pentru fiecare $\varphi \in E$, cu $\hat{\varphi}^\Sigma := \{\psi \in E \mid \varphi \sim_\Sigma \psi\}$ clasa de echivalență a lui φ raportat la relația de echivalență $\sim_\Sigma$, și să considerăm mulțimea factor $E/_{\sim_\Sigma} = \{\hat{\varphi}^\Sigma \mid \varphi \in E\}$.

O relație de ordine pe mulțimea factor

Definiție

Pe mulțimea factor $E/_{\sim_\Sigma}$, definim relația binară $\leq_\Sigma$, prin: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Propoziție

$\leq_\Sigma$ este bine definită.

Demonstrație: Fie $\varphi, \psi, \varphi', \psi' \in E$ a. î. $\varphi \sim_\Sigma \varphi'$ și $\psi \sim_\Sigma \psi'$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ și $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$, adică $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \varphi'$, $\Sigma \vdash \varphi' \rightarrow \varphi$, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \psi'$ și $\Sigma \vdash \psi' \rightarrow \psi$, conform remarcii anterioare.
Avem de demonstrat că $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\hat{\varphi'}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi'}^\Sigma$, i. e. că $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi' \rightarrow \psi'$.
Să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Această relație și faptul că $\Sigma \vdash \varphi' \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \psi'$, împreună cu regula de deducție **tranzitivitatea implicației**, implică $\Sigma \vdash \varphi' \rightarrow \psi'$. Implicația reciprocă se demonstrează în mod similar.
Așadar, $\leq_\Sigma$ este bine definită.

Posetul astfel obținut este latice distributivă

Lemă

$\leq_\Sigma$ este o relație de ordine parțială pe $E/_{\sim_\Sigma}$.

Demonstrație: Conform (PI), pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \to \varphi$, deci $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$, i. e. $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\varphi}^\Sigma$, așadar $\leq_\Sigma$ este reflexivă.
Din remarca precedentă, pentru orice $\varphi, \psi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$, rezultă că $\varphi \sim_\Sigma \psi$, i. e. $\hat{\varphi}^\Sigma = \hat{\psi}^\Sigma$, deci $\leq_\Sigma$ este antisimetrică.
Regula de deducție **tranzitivitatea implicației** ne asigură de faptul că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ a. î. $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \to \chi$, rezultă că $\Sigma \vdash \varphi \to \chi$, i. e. $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$, ceea ce înseamnă că $\leq_\Sigma$ este tranzitivă.
Deci $\leq_\Sigma$ este o relație de ordine pe $E/_{\sim_\Sigma}$.

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ *este o latice distributivă, în care, pentru orice* $\varphi, \psi \in E$, $\inf\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ *și* $\sup\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.
Vom nota, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ *și* $\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.

Demonstrație: Conform lemei precedente, $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ este un poset.
Fie $\varphi, \psi \in E$, arbitrare, fixate.

Demonstrăm că, în posetul $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$, $\widehat{\varphi \wedge \psi}^{\Sigma} = \inf\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\}$, i. e. $\widehat{\varphi \wedge \psi}^{\Sigma}$ este cel mai mare minorant al elementelor $\hat{\varphi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma$, i. e.:
(a) $\widehat{\varphi \wedge \psi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \hat{\varphi}^\Sigma$ și $\widehat{\varphi \wedge \psi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \hat{\varphi}^\Sigma$, i. e. $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$;
(b) pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\hat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\varphi}^\Sigma$ și $\hat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$, rezultă că $\hat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \wedge \psi}^{\Sigma}$, i. e., pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi$, rezultă că
$\Sigma \vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$.
Condiția (a) rezultă din teoremele formale **slăbirea conjuncției**, iar (b) din regula de deducție **slăbirea conjuncției**.

Acum demonstrăm că, în posetul $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$, $\widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma} = \sup\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\}$, i. e.
$\widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma}$ este cel mai mic majorant al elementelor $\hat{\varphi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma$, i. e.:
(c) $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma}$ și $\hat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma}$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$;
(d) pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$, rezultă că $\widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$, i. e., pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, rezultă că
$\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$.
Condiția (c) rezultă din teoremele formale **slăbirea**, iar (d) din regula de deducție **slăbirea**.

Așadar, am demonstrat că $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ este o latice, în care, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, conjuncția este $\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$, iar disjuncția este $\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$. Unicitatea infimumului și a supremumului într–un poset demonstrează că $\vee_\Sigma$ și $\wedge_\Sigma$ sunt bine definite.

Teorema formală **distributivitatea disjuncției față de conjuncție** implică faptul că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$, $\Sigma \vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$, deci $(\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma) \vee_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma = (\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma) \wedge_\Sigma (\hat{\psi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma)$, prin urmare laticea $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma)$ este distributivă (amintim că, în orice latice, fiecare dintre legile de distributivitate o implică pe cealaltă).

Remarcă

Conform teoremelor formale **falsul implică orice** și **orice implică adevărul:**, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)$, așadar, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}^\Sigma$. Aceasta înseamnă că, indiferent cine este $\varphi \in E$, $\widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}^\Sigma$ și $\widehat{\varphi \vee \neg\varphi}^\Sigma$ sunt, respectiv, primul element și ultimul element al laticii $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma)$. Vom nota $0_\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}^\Sigma$ și $1_\Sigma := \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}^\Sigma$, pentru un $\varphi \in E$, arbitrar. Unicitatea minimului și a maximului unui poset arată că această definiție nu depinde de alegerea lui $\varphi \in E$, adică 0_Σ și 1_Σ sunt bine definite.

Posetul astfel obținut este algebră Boole

- Am obținut:

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ *este o latice distributivă mărginită.*

Definiție

Pentru orice $\varphi \in E$, definim: $\overline{\widehat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma := \widehat{\neg\varphi}^\Sigma$.

Remarcă

Conform regulii de deducție **negarea termenilor unei echivalențe**, definiția de mai sus pentru operația unară $\bar{\ }^\Sigma : E/_{\sim_\Sigma} \to E/_{\sim_\Sigma}$ este corectă, pentru că nu depinde de reprezentanții claselor din $E/_{\sim_\Sigma}$, ceea ce rezultă și din demonstrația următoare și unicitatea complementului în latici distributive mărginite.

Algebra Lindenbaum–Tarski a lui Σ asociată lui $\mathcal{L}$

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ *este o algebră Boole.*

Demonstrație: Rezultatele anterioare arată că $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o latice distributivă mărginită în care, pentru orice $\varphi \in E$, au loc egalitățile:

- $\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \overline{\hat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma = \hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \widehat{\neg\varphi}^\Sigma = \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}^\Sigma = 0_\Sigma$ și
- $\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \overline{\hat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma = \hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\neg\varphi}^\Sigma = \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$,

prin urmare $\overline{\hat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma$ este complementul lui $\hat{\varphi}^\Sigma$.
Aceasta înseamnă că $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o algebră Boole.

Definiție

Algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ se numește *algebra Lindenbaum–Tarski a lui Σ asociată sistemului formal $\mathcal{L}$.*

Remarcă (surjecția canonica transformă conectorii logici în operații booleene: nu e morfism boolean, pentru că E nu e algebră Boole)

Dacă notăm cu $p_\Sigma : E \to E/_{\sim_\Sigma}$ surjecția canonică ($p_\Sigma(\varphi) := \hat{\varphi}^\Sigma$ pentru orice $\varphi \in E$), atunci, oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele identități (unde $\to_\Sigma$ și $\leftrightarrow_\Sigma$ sunt, respectiv, implicația și echivalența booleană în algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$):

- (a) $p_\Sigma(\varphi \vee \psi) = p_\Sigma(\varphi) \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (b) $p_\Sigma(\varphi \wedge \psi) = p_\Sigma(\varphi) \wedge_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (c) $p_\Sigma(\neg\varphi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma$;
- (d) $p_\Sigma(\varphi \to \psi) = p_\Sigma(\varphi) \to_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (e) $p_\Sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = p_\Sigma(\varphi) \leftrightarrow_\Sigma p_\Sigma(\psi)$.

Într–adevăr, identitățile (a), (b) și (c) sunt chiar definițiile operațiilor algebrei Boole $E/_{\sim_\Sigma}$. Definiția implicației booleene, (a) și (c) arată că $p_\Sigma(\varphi) \to_\Sigma p_\Sigma(\psi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi) = p_\Sigma(\neg\varphi \vee \psi)$, ceea ce arată că (d) este echivalent cu faptul că $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$, care rezultă din (15), (16) și prima remarcă din această secțiune. (e) se obține, direct, din (b) și (d).

Cele cinci identități de mai sus arată cum conectorii logici sunt convertiți în operații booleene.

Enunțurile deductibile din Σ sunt în 1_Σ

Lemă

Pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \varphi$ *ddacă* $\hat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$.

Demonstrație: Fie $\varphi \in E$, arbitrar, fixat.

Au loc echivalențele: $\hat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$ ddacă $\hat{\varphi}^\Sigma = \widehat{\varphi \vee \neg \varphi}^\Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$.
Așadar, avem de demonstrat că: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$.
Să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi$. Conform (A_1), $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \vee \neg \varphi) \rightarrow \varphi)$, deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \vee \neg \varphi) \rightarrow \varphi)$. Prin (MP), obținem: $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg \varphi) \rightarrow \varphi$. Conform teoremei formale **orice implică adevărul**, $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$. Așadar, $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$, după cum ne asigură prima remarcă din această secțiune.
Reciproc, să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$, sau, echivalent, $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg \varphi) \leftrightarrow \varphi$, așadar $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg \varphi) \rightarrow \varphi$, conform aceleiași prime remarci din această secțiune. Dar (PTE) afirmă că $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$, și deci $\Sigma \vdash \varphi \vee \neg \varphi$. Prin (MP), obținem $\Sigma \vdash \varphi$.

Remarcă

Lema anterioară ne oferă o metodă algebrică pentru a verifica dacă un enunț este o consecință sintactică a lui Σ.

Pentru $\Sigma = \emptyset$, avem teoremele formale

Notație

În cazul în care $\Sigma = \emptyset$:

- relația de echivalență $\sim_\emptyset$ se notează, simplu, $\sim$, și are următoarea definiție: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim \psi \quad \text{ddacă} \quad \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\,;$$

- clasele de echivalență ale lui $\sim$, $\hat{\varphi}^\emptyset$ ($\varphi \in E$), se notează $\hat{\varphi}$;
- relația de ordine $\leq_\emptyset$ se notează $\leq$;
- operațiile $\vee_\emptyset$, $\wedge_\emptyset$, $\bar{\ }^\emptyset$, $0_\emptyset$ și $1_\emptyset$ se notează, respectiv, $\vee$, $\wedge$, $\bar{\ }$, 0 și 1.

Definiție

$\sim$ se numește *echivalența logică* sau *echivalența semantică* între enunțuri. Algebra Boole $(E/_\sim, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ se numește *algebra Lindenbaum-Tarski asociată sistemului formal $\mathcal{L}$*.

Lema anterioară devine, în acest caz, o caracterizare a teoremelor formale:

Lemă

Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$.

Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice

Notă

- A se vedea la seminar exemple de **demonstrații algebrice** în logica propozițională clasică (realizate prin calcul boolean, folosind lema anterioară).
- În mod tipic, pentru a folosi lema anterioară în cadrul unei demonstrații algebrice pentru o deducție formală din ipoteze: $\Sigma \vdash \varphi$, cu $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$, se folosește faptul că, pentru orice ipoteză $\sigma \in \Sigma$, are loc $\Sigma \vdash \sigma$, așadar $\hat{\sigma}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$.

Notă

A se vedea, în cărțile de G. Georgescu din bibliografia cursului, construcția algebrei Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim}$, efectuată prin raționamentul de mai sus scris în cazul particular $\Sigma = \emptyset$.
Am considerat că tratarea directă a cazului general nu crește dificultatea parcursului anterior, și, din acest motiv, am ales să prezint acest caz general, a cărui particularizare la situația $\Sigma = \emptyset$ este imediată.

Semantica Logicii Propoziționale Clasice

Definiție

O *interpretare* (*evaluare*, *semantică*) a lui $\mathcal{L}$ este o funcție oarecare $h : V \to \mathcal{L}_2$.

Propoziție

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, există o unică funcție $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ care satisface următoarele proprietăți:

- (a) $\tilde{h}(u) = h(u)$, *pentru orice* $u \in V$;
- (b) $\tilde{h}(\neg\,\varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)}$, *pentru orice* $\varphi \in E$;
- (c) $\tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)$, *pentru orice* $\varphi, \psi \in E$.

Observație

Condiția (a) din propoziția anterioară spune că $\tilde{h}\mid_V = h$, adică funcția $\tilde{h}$ prelungește pe h la E.
În condițiile (b) și (c), în membrii stângi, în argumentele lui $\tilde{h}$, $\neg$ și $\to$ sunt conectorii logici primitivi, pe când, în membrii drepți, $\bar{}$ și $\to$ sunt operațiile de complementare și, respectiv, implicație ale algebrei Boole $\mathcal{L}_2$. Așadar, putem spune că funcția $\tilde{h}$ transformă conectorii logici în operații booleene în algebra Boole standard.
Vom păstra notația $\tilde{h}$ pentru această unică funcție depinzând de interpretarea h.

Demonstrația propoziției anterioare: Demonstrăm existența și unicitatea lui $\tilde{h}$ prin inducție după conceptul de enunț.

Fie $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$.

Orice enunț φ se află în una **și numai una** dintre situațiile următoare (**numai una** pentru că, dacă nu se folosesc conectorii logici derivați, atunci două enunțuri coincid ddacă sunt **literal identice** ca șiruri de simboluri peste alfabetul lui $\mathcal{L}$, exceptând, eventual, folosiri diferite ale parantezelor, care nu influențează regulile de mai jos):

- (E_1) $\quad \varphi \in V$ (φ este variabilă propozițională)
- (E_2) $\quad$ există $\psi \in E$, a. î. $\varphi = \neg\, \psi$
- (E_3) $\quad$ există $\psi, \chi \in E$, a. î. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$

și φ se obține într–un număr finit de pași pornind de la variabile propoziționale și aplicând cele trei reguli de mai sus.

Fiecărui $\varphi \in E$ îi asociem un element al lui $\mathcal{L}_2$, pe care îl notăm cu $\tilde{h}(\varphi)$, astfel:

1. dacă $\varphi \in V$, atunci $\tilde{h}(\varphi) := h(\varphi)$
2. dacă $\varphi = \neg\, \psi$ pentru un $\psi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi)$ a fost definită, atunci $\tilde{h}(\varphi) := \overline{\tilde{h}(\psi)}$
3. dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ pentru două enunțuri $\psi, \chi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi)$ și $\tilde{h}(\chi)$ au fost definite, atunci $\tilde{h}(\varphi) := \tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\chi)$

Semantica Logicii Propoziționale Clasice

Principiul inducției după conceptul de enunț ne asigură că, urmând cele trei reguli anterioare, se definesc, recursiv, valorile $\tilde{h}(\varphi)$, pentru toate $\varphi \in E$.

Faptul că orice $\varphi \in E$ se află în una **și numai una** dintre cele trei situații de mai sus arată că lui φ nu i se pot asocia două valori distincte prin această recursie, i. e. valoarea $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$ este unic determinată de φ.

Aceste două proprietăți (existența și unicitatea lui $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$, pentru orice $\varphi \in E$) arată că am obținut o funcție $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ complet și corect definită, care asociază fiecărui $\varphi \in E$ valoarea $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$.

De asemenea, $\tilde{h}$ satisface condițiile (a), (b) și (c) din enunț, prin chiar definiția ei.

Am încheiat demonstrația existenței unei funcții $\tilde{h}$ care satisface cerințele din enunț, și fixăm această funcție pentru cele ce urmează, anume demonstrația unicității ei.

Fie $g : E \to \mathcal{L}_2$ o funcție care satisface aceste trei condiții:

- (a_g) $\quad g(u) = h(u)$, pentru orice $u \in V$;
- (b_g) $\quad g(\neg\varphi) = \overline{g(\varphi)}$, pentru orice $\varphi \in E$;
- (c_g) $\quad g(\varphi \to \psi) = g(\varphi) \to g(\psi)$, pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Acum fie $\varphi \in E$, arbitrar, fixat. Vom demonstra prin inducție după conceptul de enunț că $\tilde{h}(\varphi) = g(\varphi)$.

Semantica Logicii Propoziționale Clasice

Definiția unui enunț arată că ne situăm în unul dintre aceste trei cazuri:

- (E_1) $\varphi \in V$; atunci (a) și (a_g) ne dau: $\tilde{h}(\varphi) = h(\varphi) = g(\varphi)$;
- (E_2) $\varphi = \neg\,\psi$ pentru un $\psi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi) = g(\psi)$; atunci (b) și (b_g) implică: $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\neg\,\psi) = \overline{\tilde{h}(\psi)} = \overline{g(\psi)} = g(\neg\,\psi) = g(\varphi)$;
- (E_3) $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ pentru două enunțuri $\psi, \chi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi) = g(\psi)$ și $\tilde{h}(\chi) = g(\chi)$; atunci (c) și (c_g) arată că: $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi \rightarrow \chi) = \tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\chi) = g(\psi) \rightarrow g(\chi) = g(\psi \rightarrow \chi) = g(\varphi)$.

Am demonstrat că $\tilde{h}(\varphi) = g(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$, i. e. $\tilde{h} = g$, așadar $\tilde{h}$ este unic cu proprietățile din enunț.

Corolar

Pentru orice interpretare h și orice $\varphi, \psi \in E$, au loc:

- (d) $\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$
- (e) $\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$
- (f) $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$

Demonstrație: Imediat, din definițiile conectorilor logici derivați și proprietățile operațiilor într–o algebră Boole.

Semantica Logicii Propoziționale Clasice

Definiție

- Spunem că un enunț φ este *adevărat într–o interpretare h* sau că *h satisface* φ ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$; φ se zice *fals în interpretarea h* ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 0$. Faptul că enunțul φ este adevărat într–o interpretare h se notează cu: $h \vDash \varphi$.
- Un enunț φ se zice *universal adevărat* ddacă φ este adevărat în orice interpretare; faptul că φ este universal adevărat se notează cu: $\vDash \varphi$. Enunțurile universal adevărate se mai numesc *adevărurile semantice* sau *tautologiile lui* $\mathcal{L}$.
- Faptul că o mulțime Σ de enunțuri are proprietatea că toate elementele sale sunt adevărate într–o interpretare h se notează cu: $h \vDash \Sigma$; în acest caz, spunem că *h satisface* Σ sau că h este un *model pentru* Σ.
- Dacă Σ este o mulțime de enunțuri cu proprietatea că există un model pentru Σ, atunci spunem că Σ *admite un model*.
- Date un enunț φ și o mulțime de enunțuri Σ, spunem că φ *se deduce semantic din* Σ sau că φ *este o consecință semantică a lui* Σ ddacă φ este adevărat în orice interpretare h a. î. $h \vDash \Sigma$; acest lucru se notează cu: $\Sigma \vDash \varphi$.

Semantica Logicii Propoziționale Clasice

Remarcă

Uneori, funcția $\tilde{h}$ asociată unei interpretări h este numită tot *interpretare*. Valoarea unei interpretări într–un anumit enunț, uneori numită interpretarea acelui enunț, este valoarea de adevăr 0 sau 1 care se obține atunci când se atribuie, prin acea interpretare, valori de adevăr din $\mathcal{L}_2$ tuturor variabilelor propoziționale care apar în acel enunț. Un enunț universal adevărat, i. e. un adevăr semantic, o tautologie, este un enunț a cărui valoare de adevăr este 1 pentru orice valori de adevăr atribuite variabilelor propoziționale care apar în acel enunț.

În cele ce urmează, vom vedea două rezultate deosebit de importante privind sistemul formal $\mathcal{L}$: **Teorema de completitudine** și o generalizare a ei, **Teorema de completitudine tare**, numită și **Teorema de completitudine extinsă**. **Teorema de completitudine a lui** $\mathcal{L}$ afirmă că adevărurile sintactice ale lui $\mathcal{L}$ coincid cu adevărurile semantice ale lui $\mathcal{L}$, i. e. teoremele formale ale lui $\mathcal{L}$ sunt exact enunțurile universal adevărate, tautologiile lui $\mathcal{L}$. **Teorema de completitudine tare pentru** $\mathcal{L}$ afirmă că, în $\mathcal{L}$, consecințele sintactice ale unei mulțimi Σ de enunțuri coincid cu consecințele semantice ale lui Σ, i. e. enunțurile care se deduc sintactic din Σ sunt exact enunțurile care se deduc semantic din Σ.

Teoremă (Teorema de completitudine tare (extinsă) pentru $\mathcal{L}$ (TCT))

Pentru orice enunț φ și orice mulțime de enunțuri Σ,

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \vDash \varphi.$$

Demonstrație: "$\Rightarrow$:" Presupunem că $\Sigma \vdash \varphi$. Demonstrăm că $\Sigma \vDash \varphi$.
Fie $h : V \to \mathcal{L}_2$, a. î. $h \vDash \Sigma$, arbitrară. Avem de demonstrat că $\tilde{h}(\varphi) = 1$ în $\mathcal{L}_2$.
Procedăm prin inducție după conceptul de consecință sintactică a mulțimii de ipoteze Σ.
$\Sigma \vdash \varphi$ înseamnă că φ se găsește în una dintre următoarele situații:

- (CS_1) φ este o axiomă; aici avem subcazurile:
  axioma (A_1): există $\psi, \chi \in E$ a. î. $\varphi = \psi \to (\chi \to \psi)$;
  atunci $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) \to (\tilde{h}(\chi) \to \tilde{h}(\psi)) = \overline{\tilde{h}(\psi)} \vee \overline{\tilde{h}(\chi)} \vee \tilde{h}(\psi) = 1 \vee \overline{\tilde{h}(\chi)} = 1$;

axioma (A_2): există $\alpha, \beta, \gamma \in E$ a. î.
$\varphi = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$;
dacă notăm $a := \tilde{h}(\alpha)$, $b := \tilde{h}(\beta)$ și $c := \tilde{h}(\gamma)$, atunci
$\tilde{h}(\varphi) = (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$ în $\mathcal{L}_2$,
unde $1 \rightarrow 0 = 0$, iar celelalte trei implicații au valoarea 1;
așadar, dacă $a = 0$, atunci $\tilde{h}(\varphi) = 1 \rightarrow (1 \rightarrow 1) = 1 \rightarrow 1 = 1$;
dacă $a = 1$ și $b \rightarrow c = 0$, atunci
$\tilde{h}(\varphi) = 0 \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$;
dacă $b \rightarrow c = 1$, atunci $b \leq c$, și deci
$a \rightarrow b = \overline{a} \vee b \leq \overline{a} \vee c = a \rightarrow c$,
prin urmare $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) = 1$, deci
$\tilde{h}(\varphi) = (a \rightarrow 1) \rightarrow 1 = 1$;

axioma (A_3): există $\alpha, \beta \in E$ a. î. $\varphi = (\neg\, \alpha \rightarrow \neg\, \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$;
dacă notăm $a := \tilde{h}(\alpha)$ și $b := \tilde{h}(\beta)$, atunci
$\tilde{h}(\varphi) = (\overline{a} \rightarrow \overline{b}) \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$,
pentru că $[b \leq a$ ddacă $\overline{a} \leq \overline{b}]$,
și deci $[b \rightarrow a = 1$ ddacă $\overline{a} \rightarrow \overline{b} = 1]$,
iar în caz contrar ambele implicații sunt 0,
pentru că ne situăm în $\mathcal{L}_2$,

deci $\bar{a} \to \bar{b} = b \to a$, prin urmare $(\bar{a} \to \bar{b}) \to (b \to a) = 1$;

- (CS_0) $\varphi \in \Sigma$; atunci $\tilde{h}(\varphi) = 1$, pentru că $h \vDash \Sigma$;
- (CS_2) există $\psi \in E$, a. î. $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$, $\tilde{h}(\psi) = 1$ și $\tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$ (aceste două egalități pentru valori ale lui $\tilde{h}$ reprezintă **ipoteza de inducție**); atunci $\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$, așadar $1 = \tilde{h}(\psi) \leq \tilde{h}(\varphi)$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

Demonstrația implicației directe este încheiată.

"$\Leftarrow$:" Ipoteza acestei implicații este că $\Sigma \vDash \varphi$.
Presupunem prin absurd că $\Sigma \nvdash \varphi$. Atunci $\hat{\varphi}^{\Sigma} \neq 1_{\Sigma}$ în algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$, prin urmare $\hat{\varphi}^{\Sigma} \in E/_{\sim_\Sigma} \setminus \{1_\Sigma\}$, așadar $|E/_{\sim_\Sigma}| > 1$, deci algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$ este netrivială. Aplicând **Teorema de reprezentare a lui Stone** algebrei Boole netriviale $E/_{\sim_\Sigma}$, obținem că există o mulțime $X \neq \emptyset$ și există un morfism boolean injectiv $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X = \{f \mid f : X \to \mathcal{L}_2\}$.
$\hat{\varphi}^{\Sigma} \neq 1_\Sigma$ în $E/_{\sim_\Sigma}$ și $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X$ este injectiv, prin urmare $d(\hat{\varphi}^{\Sigma}) \neq d(1) = \mathbf{1}$, deci $d(\hat{\varphi}^{\Sigma}) \neq \mathbf{1}$($=$ funcția constantă 1) în $\mathcal{L}_2^X = \{f \mid f : X \to \mathcal{L}_2\}$, așadar există un element $x \in X$ cu $d(\hat{\varphi}^{\Sigma})(x) \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$.
Fie $\pi : \mathcal{L}_2^X \to \mathcal{L}_2$, definită prin: pentru orice $f \in \mathcal{L}_2^X$, $\pi(f) := f(x) \in \mathcal{L}_2$.

Se arată ușor că π este un morfism boolean. De exemplu, să verificăm comutarea lui π cu $\vee$, iar comutările lui π cu celelalte operații de algebre Boole se demonstrează analog: pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_2^X$,
$\pi(f \vee g) = (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x) = \pi(f) \vee \pi(g)$ în $\mathcal{L}_2$.
Considerăm următoarele funcții: incluziunea $i : V \to E$ ($i(u) := u$ pentru fiecare $u \in V$), surjecția canonică $p_\Sigma : E \to E/_{\sim_\Sigma}$, morfismul boolean injectiv $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X$ considerat mai sus și morfismul boolean $\pi : \mathcal{L}_2^X \to \mathcal{L}_2$ considerat mai sus. Să notăm compunerea acestor funcții cu h: $h := \pi \circ d \circ p_\Sigma \circ i$;
$h : V \to \mathcal{L}_2$ este o interpretare.
Demonstrăm, prin inducție după conceptul de enunț, că, pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$. Folosim definiția lui $\tilde{h}$.

- (E_1) dacă $\alpha \in V$, atunci $\tilde{h}(\alpha) = h(\alpha) = \pi(d(p_\Sigma(i(\alpha)))) = \pi(d(p_\Sigma(\alpha))) = \pi(d(\hat{\alpha}^\Sigma)) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$;
- (E_2) dacă $\alpha = \neg\,\beta$, pentru un $\beta \in E$ cu $\tilde{h}(\beta) = d(\hat{\beta}^\Sigma)(x)$ (**ipoteza de inducție**), atunci $\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\neg\,\beta) = \overline{\tilde{h}(\beta)} = \overline{d(\hat{\beta}^\Sigma)(x)} = (\overline{d(\hat{\beta}^\Sigma)})(x) = d(\overline{\hat{\beta}^\Sigma}^{\Sigma})(x) = d(\widehat{\neg\,\beta}^{\Sigma})(x) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$;

- (E_3) dacă $\alpha = \beta \to \gamma$, pentru $\beta, \gamma \in E$ cu $\tilde{h}(\beta) = d(\hat{\beta}^\Sigma)(x)$ și $\tilde{h}(\gamma) = d(\hat{\gamma}^\Sigma)(x)$ (**ipoteza de inducție**), atunci $\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\beta \to \gamma) = \tilde{h}(\beta) \to \tilde{h}(\gamma) = d(\hat{\beta}^\Sigma)(x) \to d(\hat{\gamma}^\Sigma)(x) = (d(\hat{\beta}^\Sigma) \to d(\hat{\gamma}^\Sigma))(x) = d(\hat{\beta}^\Sigma \to_\Sigma \hat{\gamma}^\Sigma)(x) = d(\widehat{\beta \to \gamma}^\Sigma)(x) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$.

Demonstrația prin inducție este încheiată. Așadar, pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$.
În particular, pentru $\alpha := \varphi$, $\tilde{h}(\varphi) = d(\hat{\varphi}^\Sigma)(x) \neq 1$.
Demonstrăm că $h \vDash \Sigma$.
Fie $\sigma \in \Sigma$, arbitrar, fixat.
Conform identității stabilite mai sus, $\tilde{h}(\sigma) = d(\hat{\sigma}^\Sigma)(x)$.
Cine este $\hat{\sigma}^\Sigma$ (clasa lui σ în algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$)?
Conform definiției claselor echivalenței $\sim_\Sigma$, unei proprietăți a consecințelor sintactice, **Teoremei deducției**, faptului că $\sigma \in \Sigma$, și deci și $\Sigma \vdash \sigma$, $\hat{\sigma}^\Sigma = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \sigma \leftrightarrow \tau\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \sigma \to \tau$ și $\Sigma \vdash \tau \to \sigma\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \tau$ și $\Sigma \cup \{\tau\} \vdash \sigma\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \tau\} = \widehat{\gamma \vee \neg\gamma}^\Sigma = 1_\Sigma$, oricare ar fi $\gamma \in E$, pentru că, în conformitate cu **Principiul terțului exclus**, $\vdash \gamma \vee \neg\gamma$, prin urmare $\Sigma \vdash \gamma \vee \neg\gamma$, așadar $\gamma \vee \neg\gamma \in \hat{\sigma}^\Sigma$ conform egalității de mulțimi pe care tocmai am stabilit–o, i. e. $\gamma \vee \neg\gamma \sim_\Sigma \sigma$, deci $\hat{\sigma}^\Sigma = \widehat{\gamma \vee \neg\gamma}^\Sigma = 1_\Sigma$.

Așadar, $\tilde{h}(\sigma) = d(\hat{\sigma}^{\Sigma})(x) = d(1_{\Sigma})(x) = 1(x) = 1$ (funcția constantă 1 aplicată în x).
Deci $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$, adică $h \vDash \Sigma$.
Am găsit o interpretare h cu proprietățile: $h \vDash \Sigma$ și $\tilde{h}(\varphi) \neq 1$, ceea ce înseamnă că $\Sigma \nvDash \varphi$. Am obținut o contradicție cu ipoteza acestei implicații. Așadar, $\Sigma \vdash \varphi$, ceea ce încheie demonstrația teoremei.

Teoremă (Teorema de completitudine pentru $\mathcal{L}$ (TC))

Pentru orice enunț φ,

$$\vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Demonstrație: Se aplică **Teorema de completitudine tare** pentru $\Sigma = \emptyset$.

Remarcă

Uneori,

- implicația $\vdash \varphi \Rightarrow \vDash \varphi$ este numită *corectitudinea lui $\mathcal{L}$*,
- iar implicația $\vdash \varphi \Leftarrow \vDash \varphi$ este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Dar, cel mai adesea, **echivalența** din teorema anterioară este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Corolar (noncontradicția lui $\mathcal{L}$ (principiul noncontradicției))

Niciun enunț φ nu satisface și $\vdash \varphi$, și $\vdash \neg\varphi$.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că există un enunț φ a. î. $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\varphi$. Atunci, conform **Teoremei de completitudine**, $\vDash \varphi$ și $\vDash \neg\varphi$, i. e., pentru orice interpretare h, avem: $\tilde{h}(\varphi) = 1$ și $1 = \tilde{h}(\neg\varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)} = \overline{1} = 0$, deci $0 = 1$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este o contradicție.

Propoziție

Algebra Lindenbaum–Tarski, $E/_\sim$, a logicii propoziționale clasice este netrivială.

Demonstrație: $\sim = \sim_\emptyset$. Presupunem prin absurd că $0 = 1$ în algebra Boole $E/_\sim$. Fie $\psi \in E$ și $\varphi = \psi \vee \neg\psi \in E$. Atunci $\hat{\varphi} = 1$, așadar $\vdash \varphi$, conform unei leme de mai sus privind caracterizarea teoremelor formale. Corolarul anterior arată că $\nvdash \neg\varphi$, așadar, conform aceleiași leme, $1 \neq \widehat{\neg\varphi} = \overline{\hat{\varphi}} = \overline{1} = 0$, prin urmare $|E/_\sim| \geq 2$, adică algebra Boole $E/_\sim$ este netrivială.

Notă

A se vedea la seminar exemple de **demonstrații semantice** în logica propozițională clasică, realizate atât prin calcul boolean obișnuit în $\mathcal{L}_2$, cât și prin intermediul **tabelelor de adevăr (tabelelor semantice)**.

Notă

A se vedea, în cărțile de G. Georgescu din bibliografia cursului, obținerea **Teoremei de completitudine** prin raționamentul de mai sus efectuat pe cazul particular $\Sigma = \emptyset$, folosind algebra Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim}$ asociată lui $\mathcal{L}$, din care, apoi, se obține **Teorema de completitudine tare**. A se vedea, în aceleași materiale bibliografice, și rezultatele următoare scrise în cazul particular $\Sigma = \emptyset$. Mai mult despre legătura dintre aceste teoreme în lecția despre **sisteme deductive** și **mulțimi consistente** de mai jos.

Propoziție

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ *și orice* $\Sigma \subseteq E$ *a. î.* $h \vDash \Sigma$, *există un unic morfism boolean* $\overline{h}^{\Sigma} : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2$ *care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice* $\varphi \in E$, $\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p_\Sigma"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/_{\sim_\Sigma} \arrow[dl, "\overline{h}^{\Sigma}"] \\ & \mathcal{L}_2 & \end{tikzcd}$$

Demonstrație: Unicitatea lui $\overline{h}^{\Sigma}$ rezultă din condiția ca $\overline{h}^{\Sigma}$ să închidă comutativ această diagramă, care face ca singura definiție posibilă pentru $\overline{h}^{\Sigma}$ să fie: pentru orice $\varphi \in E$, $\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) = \overline{h}^{\Sigma}(p_\Sigma(\varphi)) := \tilde{h}(\varphi)$.

Cu această definiție, $\overline{h}^{\Sigma}$ devine morfism Boolean. De exemplu, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,
$\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma} \vee_\Sigma \hat{\psi}^{\Sigma}) = \overline{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma}) = \tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi) = \overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) \vee \overline{h}^{\Sigma}(\hat{\psi}^{\Sigma})$. La fel se demonstrează comutarea lui $\overline{h}^{\Sigma}$ cu celelalte operații de algebră Boole.

Semantica Logicii Propoziționale Clasice

Rămâne de demonstrat buna definire a lui $\overline{h}^{\Sigma}$, i. e. independența sa de reprezentanții claselor din $E/_{\sim_{\Sigma}}$. Fie $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\hat{\varphi}^{\Sigma} = \hat{\psi}^{\Sigma}$, ceea ce este echivalent cu $\varphi \sim_{\Sigma} \psi$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, ceea ce este echivalent cu $\Sigma \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$, conform **Teoremei de completitudine tare**. Dar $h \vDash \Sigma$, așadar $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$, adică $\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este echivalent cu $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi)$, i. e. $\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) = \overline{h}^{\Sigma}(\hat{\psi}^{\Sigma})$. Așadar $\overline{h}^{\Sigma}$ este bine definit.

Corolar

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, există un unic morfism boolean $\overline{h} : E/_{\sim} \to \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\overline{h}(\hat{\varphi}) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/_{\sim} \arrow[dl, "\overline{h}"] \\
& \mathcal{L}_2 &
\end{tikzcd}$$

Demonstrație: Se aplică propoziția precedentă pentru $\Sigma = \emptyset$.

Sisteme deductive

Definiție

O mulțime Σ de enunțuri se numește *sistem deductiv* ddacă este închisă la deducții, i. e., pentru orice $\varphi \in E$, are loc:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \Sigma.$$

Remarcă

Implicația reciprocă în definiția anterioară este valabilă, conform definiției deducției sintactice, prin urmare o mulțime Σ de enunțuri este sistem deductiv ddacă $\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} = \Sigma$.

Exemplu

În mod trivial, mulțimea E a tuturor enunțurilor este sistem deductiv.

Exemplu

Mulțimea T a teoremelor formale este sistem deductiv, deoarece se demonstrează că, oricare ar fi $\varphi \in E$:

$$T \vdash \varphi \text{ ddacă } \vdash \varphi$$

(amintim că $\vdash \varphi$ este notația pentru: $\varphi \in T$).

Sisteme deductive

Remarcă

Mai mult, se demonstrează că T este cel mai mic sistem deductiv, deci orice sistem deductiv include pe T.

Mai precis:

Propoziție

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, sunt echivalente:

1. *Σ este sistem deductiv;*
2. *$T \subseteq \Sigma$ și, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in \Sigma$, atunci $\varphi \in \Sigma$ (i. e. Σ include mulțimea teoremelor formale și este închisă la* **MP***).*

Exemplu

Conform propoziției anterioare, o submulțime a lui E care nu include pe T nu este sistem deductiv.
De exemplu, $\emptyset$ nu este sistem deductiv, ceea ce se observă și din faptul că, oricare ar fi $\varphi \in E$, avem:

$$\emptyset \vdash \varphi \text{ ddacă } \vdash \varphi \text{ ddacă } \varphi \in T,$$

iar $\emptyset \subsetneq T$.

Sisteme deductive

Exercițiu (temă)

Intersecția oricărei familii de sisteme deductive este sistem deductiv (i. e. mulțimea sistemelor deductive este un **sistem de închidere**).

Remarcă

Afirmația din exercițiul anterior arată că, pentru orice $\Sigma \subseteq E$, există cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ, și acesta este egal cu intersecția tuturor sistemelor deductive care includ pe Σ.

Definiție

Fie Σ o mulțime de enunțuri. Se notează cu $D(\Sigma)$, și se numește *sistemul deductiv generat de* Σ, intersecția tuturor sistemelor deductive care includ pe Σ.

Sisteme deductive

Remarcă

Cele de mai sus arată că:

- pentru orice $\Sigma \subseteq E$, $D(\Sigma)$ este cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ;
- $D : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ este un **operator de închidere**, adică, pentru orice $\Sigma, \Delta \subseteq E$:
  1. $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$ (D este **extensiv**);
  2. $\Sigma \subseteq \Delta$ implică $D(\Sigma) \subseteq D(\Delta)$ (D este **crescător**);
  3. $D(D(\Sigma)) = D(\Sigma)$ (D este **idempotent**);

În plus:

Exercițiu (temă)

Operatorul de închidere D este *finitar*, adică, oricare ar fi $\Sigma \subseteq E$, are loc:

$$D(\Sigma) = \bigcup_{\substack{\Gamma \subseteq \Sigma, \\ |\Gamma| < \infty}} D(\Gamma).$$

Mulțimi consistente

Definiție

Fie Σ o mulțime de enunțuri.

- Σ se zice *inconsistentă* ddacă $\Sigma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in E$ (i. e. ddacă orice enunț este consecință sintactică a lui Σ);
- Σ se zice *consistentă* ddacă Σ nu este inconsistentă.

Următorul rezultat arată că mulțimile consistente sunt mulțimile de enunțuri din care nu se deduc contradicții.

Propoziție

Fie $\Sigma \subseteq E$. Atunci sunt echivalente:

1. *Σ este inconsistentă;*
2. *există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg \varphi$;*
3. *există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg \varphi$;*
4. *există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \neg (\varphi \rightarrow \varphi)$;*
5. *pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \neg (\varphi \rightarrow \varphi)$.*

Mulțimi consistente

Corolar

Fie $\Sigma \subseteq E$ *și* $\varphi \in E$. *Atunci:*

1. $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *este inconsistentă ddacă* $\Sigma \vdash \neg\varphi$;
2. $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ *este inconsistentă ddacă* $\Sigma \vdash \varphi$.

Exemplu (temă pentru seminar)

- $\emptyset$ este consistentă (conform propoziției anterioare și **principiului noncontradicției:** nu există $\varphi \in E$, astfel încât $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\varphi$);
- E este inconsistentă, în mod trivial;
- A (mulțimea axiomelor) este consistentă;
- T (mulțimea teoremelor formale) este consistentă.

Exercițiu (temă)

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalența: Σ e consistentă ddacă algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$ e netrivială.

Mulțimi consistente

Definiție

Un element maximal al mulțimii mulțimilor consistente raportat la incluziune se numește *mulțime consistentă maximală*.

Propoziție

Orice mulțime consistentă este inclusă într–o mulțime consistentă maximală.

Demonstrația acestei propoziții folosește **Lema lui Zorn**.

Sisteme deductive versus mulțimi consistente

Remarcă

Dacă Σ este o mulțime consistentă, atunci sistemul deductiv $D(\Sigma)$ este o mulțime consistentă.

Propoziție

Dacă Σ este o mulțime consistentă maximală, atunci:

1. *Σ este sistem deductiv;*
2. *dacă $\varphi, \psi \in E$, astfel încât $\varphi \vee \psi \in \Sigma$, atunci $\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$; mai precis: pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem: $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ ddacă [$\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$];*
3. *oricare ar fi $\varphi \in E$, avem: $\varphi \in \Sigma$ sau $\neg\varphi \in \Sigma$; mai precis, oricare ar fi $\varphi \in E$, au loc:*
   - *$\varphi \in \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \notin \Sigma$;*
   - *$\varphi \notin \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \in \Sigma$;*
4. *pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem: $\varphi \to \psi \in \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \vee \psi \in \Sigma$ ddacă [$\neg\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$].*

Sisteme deductive versus mulțimi consistente

Definiție

Fie $\Sigma \subseteq E$. Spunem că Σ *admite un model* ddacă există o interpretare h cu $h \vDash \Sigma$. O astfel de interpretare se numește *model pentru* Σ.

Propoziție

1. *Orice mulțime consistentă admite un model.*
2. *Orice mulțime care admite un model este consistentă (***temă***).*

Corolar

Mulțimile consistente coincid cu mulțimile care admit modele.

Exemplu

T (și, așadar, orice submulțime a lui T) admite ca model orice interpretare.

Notă

A se vedea, în cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia cursului, cum se obține **Teorema de completitudine tare** din **Teorema de completitudine**, folosind faptul că orice mulțime consistentă admite un model. De asemenea, a se vedea, în această carte, demonstrațiile pentru toate rezultatele de mai sus.

Pentru această secțiune a cursului, se poate consulta cartea următoare:

- G. Metakides, A. Nerode, *Principles of Logic and Logic Programming*
- traducere de A. Florea, B. Boldur: *Principii de Logică și Programare Logică*, Editura Tehnică, București, 1998.

Opțional, se poate studia, din cartea aceasta, rezoluția pentru calculul cu predicate, care stă la baza implementării limbajului Prolog.

FNC și FND

Definiție

- Un *literal* este o variabilă propozițională sau negația unei variabile propoziționale:
$$p \text{ sau } \neg p, \text{ cu } p \in V.$$
- Un enunț $\varphi(\in E)$ *este în formă normală conjunctivă* (sau *este o formă normală conjunctivă*) (*FNC*) ddacă φ este o conjuncție de disjuncții de literali.
- Un enunț $\varphi(\in E)$ *este în formă normală disjunctivă* (sau *este o formă normală disjunctivă*) (*FND*) ddacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Observație

Întrucât toate enunțurile au lungime finită (i. e. sunt șiruri finite de simboluri primitive), conjuncțiile și disjuncțiile la care face referire definiția de mai sus sunt finite.

Existența FNC și FND pentru orice enunț

Amintesc definiția relației de echivalență $\sim = \sim_{\emptyset}$ pe E, relație care servește la construirea algebrei Lindenbaum–Tarski a logicii propoziționale clasice: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim \psi \text{ ddacă } \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Folosind definiția lui $\sim$, **Teorema de completitudine**, definiția adevărurilor semantice, compatibilitatea oricărei interpretări cu conectorii logici și o proprietate valabilă în orice algebră Boole, obținem:

Remarcă (două enunțuri sunt echivalente semantic ddacă au aceeași valoare în orice interpretare)

Oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele echivalențe:
$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \vDash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\forall\, h : V \to L_2)\, (\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1) \Leftrightarrow (\forall\, h : V \to L_2)\, (\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1) \Leftrightarrow (\forall\, h : V \to L_2)\, (\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi))$.

Propoziție

Oricare ar fi $\varphi \in E$, există o FNC $\psi \in E$ și o FND $\chi \in E$ (care nu sunt unice), astfel încât $\varphi \sim \psi \sim \chi$.

Punerea unui enunț în FNC

Remarcă

Oricare ar fi $\varphi \in E$, putem determina o FNC (sau FND) $\psi \in E$ cu $\varphi \sim \gamma$, folosind un tabel semantic pentru φ, sau folosind următoarele proprietăți imediate (a se vedea seminarul), valabile pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in E$:

- **înlocuirea implicațiilor și echivalențelor:**

$$\alpha \to \beta \sim \neg\,\alpha \vee \beta \text{ și } \alpha \leftrightarrow \beta \sim (\neg\,\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\,\beta \vee \alpha)$$

- **idempotența lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$\alpha \vee \alpha \sim \alpha \wedge \alpha \sim \alpha$$

- **comutativitatea lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$\alpha \vee \beta \sim \beta \vee \alpha \text{ și } \alpha \wedge \beta \sim \beta \wedge \alpha$$

- **asociativitatea lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \sim \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \text{ și } (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \sim \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

Punerea unui enunț în FNC

Remarcă (continuare)

- **principiul dublei negații:**
$$\neg\neg\alpha \sim \alpha$$
- **legile lui de Morgan:**
$$\neg(\alpha \vee \beta) \sim \neg\alpha \wedge \neg\beta \text{ și } \neg(\alpha \wedge \beta) \sim \neg\alpha \vee \neg\beta$$
- **absorbția:**
$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \sim \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \sim \alpha$$
- **legile de distributivitate:**
$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \sim (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \text{ și } \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \sim (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$
- **proprietățile:**
$$\alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta) \sim \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta \wedge \gamma) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta \vee \gamma) \sim \alpha$$

Referitor la tabele semantice

Observație (echivalența semantică ($\sim$) versus egalitatea de enunțuri)

Fie $\varphi \in E$. Atunci $\varphi \sim \neg\neg\varphi$, dar $\varphi \neq \neg\neg\varphi$. De exemplu, enunțurile *"Plouă."* și *"Nu e adevărat că nu plouă."* sunt echivalente semantic (adică au același sens, același înțeles), dar nu coincid (sunt fraze diferite, nici nu sunt compuse din același număr de cuvinte).

- Următoarea notație este definită, recursiv, pe întreaga E:

Notație

Pentru orice $p \in V$ și orice $\varphi, \psi \in E$, notăm:

1. $V(p) = \{p\}$
2. $V(\neg\varphi) = V(\varphi)$
3. $V(\varphi \rightarrow \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$

- Amintesc că, într–un tabel semantic pentru un enunț φ, ne interesează variabilele propoziționale care apar în φ, adică elementele lui $V(\varphi)$.

A se vedea, la seminar, metoda prin care un enunț φ poate fi pus în FNC folosind un tabel semantic pentru φ.

Satisfiabilitate

Definiție

Fie $M \subseteq E$ și $\varphi \in E$.

- Un *model pentru* M este o interpretare care satisface pe M (i. e. o $h : V \to L_2$ cu $h \vDash M$).
- M se zice *satisfiabilă* ddacă admite un model (i. e. ddacă există $h : V \to L_2$ cu $h \vDash M$).
- φ se zice *satisfiabil* ddacă $\{\varphi\}$ este satisfiabilă (i. e. ddacă există $h : V \to L_2$ cu $h \vDash \varphi$).

Să ne amintim următoarea:

Propoziție

O mulțime de enunțuri este satisfiabilă ddacă este consistentă.

Remarcă

Este imediat, din caracterizarea pentru $\sim$ de mai sus, că, dacă $\varphi, \psi \in E$ astfel încât $\varphi \sim \psi$, atunci: φ e satisfiabilă ddacă ψ e satisfiabilă.

Formă clauzală

Definiție

Fie $\varphi \in E$ și $M \subseteq E$, astfel încât M este finită.

- O *formă clauzală* pentru φ este o FNC (i. e. o mulțime de clauze) ψ cu $\psi \sim \varphi$.
- O *formă clauzală* pentru M este o reuniune de forme clauzale pentru elementele lui M.

Corolar

Orice mulțime finită de enunțuri poate fi pusă într–o formă clauzală.

Lemă

O mulțime de enunțuri e satisfiabilă ddacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Deducție semantică versus satisfiabilitate

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi \in E$ *și* $\Gamma \subseteq E$.

(a) Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \psi$
2. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$ *nu e satisfiabilă*
3. $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ *nu e satisfiabil*

(b) În plus, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\vDash \psi$
2. $\neg\psi$ *nu e satisfiabil*

(c) Mai mult, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\Gamma \vDash \psi$
2. $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *nu e satisfiabilă*
3. $\neg\psi$ *nu e satisfiabil, sau există* $k \in \mathbb{N}^*$ *și* $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Gamma$ *astfel încât* $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k \wedge \neg\psi$ *nu e satisfiabil.*

Demonstrație: Folosim definiția deducției semantice și a adevărurilor semantice, proprietatea interpretărilor de a transforma conectorii logici în operații booleene în $\mathcal{L}_2$, precum și faptul că $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, cu $0 \neq 1$.

(a) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vDash \psi$ ddacă, pentru orice $h : V \to \mathcal{L}_2$, $\tilde{h}(\varphi_1) = \dots = \tilde{h}(\varphi_n) = 1 \Rightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $\tilde{h}(\varphi_1) = \dots = \tilde{h}(\varphi_n) = \tilde{h}(\neg\psi) = 1$ ddacă $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi\}$ nu e satisfiabilă ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $\tilde{h}(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi) = 1$ ddacă $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ nu e satisfiabil.

(b) $\vDash \psi$ ddacă, pentru orice $h : V \to \mathcal{L}_2$, $\tilde{h}(\psi) = 1$ ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $\tilde{h}(\neg\psi) = 1$ ddacă $\neg\psi$ nu e satisfiabil.

(c) $\Gamma \vDash \psi$ ddacă, pentru orice $h : V \to \mathcal{L}_2$, $h \vDash \Gamma \Rightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $h \vDash \Gamma \cup \{\neg\psi\}$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ nu e satisfiabilă ddacă $\neg\psi$ nu e satisfiabil, sau există $k \in \mathbb{N}^*$ și $\psi_1, \dots, \psi_k \in \Gamma$ astfel încât $\{\psi_1, \dots, \psi_k, \neg\psi\}$ nu e satisfiabilă, conform lemei anterioare, ddacă $\neg\psi$ nu e satisfiabil, sau există $k \in \mathbb{N}^*$ și $\psi_1, \dots, \psi_k \in \Gamma$ astfel încât $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k \wedge \neg\psi$ nu e satisfiabil, conform punctului (a).

Problema satisfiabilității

Problemă

Fiind dat un enunț φ în FNC, să se determine dacă φ e satisfiabil.

- O soluție computațională pentru problema de mai sus este **algoritmul Davis–Putnam**, bazat pe **rezoluție**.
- **Rezoluția propozițională** poate fi privită ca o regulă de deducție pentru calculul propozițional clasic.
- Utilizând **rezoluția**, se poate construi un demonstrator automat corect și complet pentru calculul propozițional clasic, fără alte teoreme formale și reguli de deducție.
- Limbajul de programare logică PROLOG este fundamentat pe rezoluția pentru calculul cu predicate clasic (care înglobează rezoluția propozițională).

Clauze și mulțimi de clauze

Definiție

- O *clauză* este o mulțime finită de literali ($\{L_1, \ldots, L_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $L_1, \ldots, L_n \in V \cup \{\neg\, p \mid p \in V\}$).
- **Clauza vidă** (i. e. clauza fără literali, clauza fără elemente) se notează cu $\square$ (pentru a o deosebi de **mulțimea vidă de clauze**, $\emptyset$, în cele ce urmează).
- O clauză C se zice *trivială* ddacă există $p \in V$ cu $p, \neg\, p \in C$.
- Orice clauză nevidă $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ (cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $L_1, \ldots, L_n \in V \cup \{\neg\, p \mid p \in V\}$) se identifică cu enunțul în FND $\varphi = L_1 \vee \ldots \vee L_n$. Clauza C se zice *satisfiabilă* ddacă enunțul φ e satisfiabil.
- Clauza vidă ($\square$) e considerată **nesatisfiabilă** (**justificare:** $\square$ se identifică cu $\bigvee\limits_{i \in \emptyset} L_i$; pentru orice $h : V \to L_2$, $\tilde{h}(\bigvee\limits_{i \in \emptyset} L_i) = \bigvee\limits_{i \in \emptyset} \tilde{h}(L_i) = 0 \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$).
- Orice mulțime finită de clauze $M = \{C_1, \ldots, C_k\}$ (cu $k \in \mathbb{N}$ și $C_1, \ldots, C_k$ clauze) se identifică cu $C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$, deci cu o FNC.
- O mulțime finită de clauze se zice *satisfiabilă* ddacă toate clauzele din componența ei sunt satisfăcute de o aceeași interpretare (au un același model, au un model comun).

Satisfiabilitate pentru (mulțimi de) clauze

Remarcă

Sunt imediate următoarele proprietăți:

- o mulțime finită de clauze este satisfiabilă ddacă FNC asociată ei e satisfiabilă;
- $\emptyset$ (mulțimea vidă de clauze) este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice clauză trivială e satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice mulțime finită de clauze triviale este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare.

Rezoluția

Propoziție

Fie C și D clauze, iar S, T și U mulțimi finite de clauze. Atunci:

1. *dacă C e satisfiabilă și $C \subseteq D$, atunci D e satisfiabilă; prin urmare, dacă D e nesatisfiabilă și $C \subseteq D$, atunci C e nesatisfiabilă;*
2. *$C \cup D$ e satisfiabilă ddacă C e satisfiabilă sau D e satisfiabilă;*
3. *dacă $p \in V \setminus V(C)$, atunci $C \cup \{p\}$ și $C \cup \{\neg p\}$ sunt satisfiabile;*
4. *dacă S e nesatisfiabilă și $S \subseteq T$, atunci T e nesatisfiabilă; prin urmare, dacă T e satisfiabilă și $S \subseteq T$, atunci S e satisfiabilă;*
5. *dacă U e satisfiabilă și există $p \in V \setminus V(U)$, $G \in S$ și $H \in T$ astfel încât $p \in G \setminus H$ și $\neg p \in H \setminus G$, atunci $U \cup S$ și $U \cup T$ sunt satisfiabile;*
6. *dacă $p \in V$ astfel încât $p, \neg p \notin C$ și $p, \neg p \notin D$, iar mulțimea de clauze $\{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg p\}\}$ e satisfiabilă, atunci $C \cup D$ e satisfiabilă (***regula rezoluției***):*

$$\frac{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg p\}}{C \cup D}$$

Demonstrații prin rezoluție

Notă

Aplicarea regulii rezoluției simultan pentru două variabile diferite este **greșită**.

Notă

Rezoluția este o metodă de verificare a satisfiabilității pentru mulțimi (finite) de enunțuri în formă clauzală.

Remarcă

- Dacă într–o derivare prin rezoluție a unei mulțimi finite M de enunțuri în **formă clauzală** apare $\square$, atunci M nu e satisfiabilă.
- În schimb, o derivare prin rezoluție a lui M în care nu apare $\square$ **nu arată** că M ar fi satisfiabilă.

- Pentru a arăta că o mulțime finită M de enunțuri (în formă clauzală) este satisfiabilă, putem găsi un model pentru M sau putem aplica **algoritmul Davis–Putnam**.

Algoritmul Davis–Putnam (abreviat *DP*)

INPUT: mulțime finită și nevidă S de clauze netriviale;

$S_1 := S$; $i := 1$;

PASUL 1: luăm o $v_i \in V(S_i)$;
$T_i^0 := \{C \in S_i \mid \neg\, v_i \in C\}$;
$T_i^1 := \{C \in S_i \mid v_i \in C\}$;
$T_i := T_i^0 \cup T_i^1$;
$U_i := \emptyset$;

PASUL 2: dacă $T_i^0 \neq \emptyset$ și $T_i^0 \neq \emptyset$,
atunci $U_i := \{(C_0 \setminus \{\neg\, v_i\}) \cup (C_1 \setminus \{v_i\}) \mid C_0 \in T_i^0, C_1 \in T_i^1\}$;

PASUL 3: $S_{i+1} := (S_i \setminus T_i) \cup U_i$;
$S_{i+1} := S_{i+1} \setminus \{C \in S_{i+1} \mid (\exists\, p \in V)\,(p, \neg\, p \in C)\}$
(eliminăm din S_{i+1} clauzele triviale);

PASUL 4: dacă $S_{i+1} = \emptyset$,
atunci OUTPUT: S *e satisfiabilă*;
altfel, dacă $\square \in S_{i+1}$,
atunci OUTPUT: S *nu e satisfiabilă*;
altfel $i := i + 1$ și mergi la PASUL 1.

Teorema Davis–Putnam

Propoziție

Cu notațiile din algoritmul DP, au loc:

1. *pentru fiecare* i, $V(S_{i+1}) \subsetneq V(S_i)$, *așadar algoritmul DP se termină după cel mult* $|V(S)|$ *execuții ale pașilor* $1-4$, *cu* $S_{i+1} = \emptyset$ *sau* $\square \in S_{i+1}$;
2. *pentru fiecare* i, S_i *e satisfiabilă ddacă* S_{i+1} *e satisfiabilă, așadar OUTPUT–ul algoritmului DP este corect.*

Corolar (Teorema Davis–Putnam)

Algoritmul DP este corect și complet.

Teoremă

Fie S *o mulțime finită și nevidă de clauze. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. S *nu e satisfiabilă;*
2. *există o derivare prin rezoluție a lui* $\square$ *din* S.

Corectitudinea regulii rezoluției

Notație

Dacă $\Gamma \subseteq E$ și $\varphi \in E$, atunci notăm cu $\Gamma \vdash_R \varphi$ faptul că există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ dintr–o formă clauzală a lui $\Gamma \cup \{\neg\,\varphi\}$.

Corolar

Pentru orice $\Gamma \subseteq E$ și orice $\varphi \in E$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\Gamma \vDash \varphi$;
2. $\Gamma \vdash_R \varphi$.

Remarcă

În concluzie, regula rezoluției este corectă și completă pentru calculul propozițional clasic.