Enunţuri:

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinaţi dimensiunea subspaţiului $L = \left\{x \in \mathbb{R}^4 | Ax = 0\right\}$ şi o bază a acestuia;
   (b) Determinaţi o descompunere $\mathbb{R}^4 = L \oplus L_0$;
   (c) Descompuneţi vectorul $x = (1,2,1,2)$ ca suma dintre un vector din L şi unul din L_0.

2. Fie $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$ şi $\mathcal{B}' = \{u_1 = (1,2,1), u_2 = (1,-1,0), u_3 = (3,1,-2)\}$. Să se determine matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$ şi coordonatele lui $v = (2,3,-5)$ în raport cu baza $\mathcal{B}'$.

3. Fie $L = Span(x_1, x_2, x_3)$, unde $x_1 = (1,1,1,1)$, $x_2 = (3,2,1,3)$, $x_3 = (2,1,0,2)$. Determinaţi un sistem de ecuaţii pentru care mulţimea soluţiilor este L.

4. Fie aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
   $$T(x,y,z) = (-7x + 2y + 2z, -8x + 3y + 2z, -32x + 8y + 9z).$$
   (a) Determinaţi matricea lui T în raport cu baza canonică;
   (b) Fie baza $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, unde $v_1 = (1,1,4), v_2 = (1,0,4), v_3 = (0,1,-1)$. Determinaţi matricea lui T în raport cu baza $\mathcal{B}$.

5. Fie aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,
   $$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 2x_2 - 2x_4).$$
   Determinaţi cîte o bază în $Ker(T)$ şi în $Im(T)$.

Indicaţii:

1. (a) Rezolvaţi sistemul şi găsiţi un sistem fundamental de soluţii;
   (b) Completaţi baza lui L la o bază a lui $\mathbb{R}^4$. Spaţiul L_0 este generat de vectorii adăugaţi.
   (c) Orice $x \in \mathbb{R}^4$ trebuie să se scrie ca $x = x_0 + x_1$ cu $x_0 \in L_0$ şi $x_1 \in L$. Observaţi că dacă aţi determinat unul dintre aceşti vectori (să zicem x_1 atunci $x_0 = x - x_1$). O metodă ar fi pornind de la observaţia că $Ax = Ax_0 + Ax_1$.

2. Matricea de trecere se obţine aplicînd definiţia.

3. Determinaţi mai întîi dimensiunea lui L. Sistemul căutat este $A \cdot x = 0$, cu $Rang(A) = 4 - dim(L)$.

4. Aplicaţi definiţia în ambele cazuri. Sau la punctul b) folosiţi formula de schimbare a bazei pentru aplicaţii liniare. Se poate aplica şi metoda Gauss!

5. $Ker(T)$ se calculează cu definiţia. Pentru $Im(T)$ folosiţi faptul că un sistem de generatori in acesta este format de imaginea unui sistem de generatori din $\mathbb{R}^4$.

Dacă trimiteţi rezolvările pe e-mail veţi primi feed-back. Pentru întrebări folosiţi Zulip, stream-urile Algebra si Geometrie/143 şi Algebra si Geometrie/144 (va trebui să faceţi un cont în prealabil).