CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

curs 1
07. 10. 2019

Examinare

- 4 puncte teorie
- 4 puncte exerciții (avem voie cu materiale)
- 1 punct oficiu
- \+ seminar (0 - 2 puncte)

Bibliografie: „Note de curs" – Radu Miculescu

Limite de șiruri

Def: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{R}$

1) Spunem că șirul x_n converge la a (are limita a) și not:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ sau $x_n \to a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

2) $x_n \to \infty$ dacă $(\forall)\, M\ \exists n_M$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_M \Rightarrow x_n \geq M$

Exemplu $x_n = \dfrac{2n+1}{3n+1} \to \dfrac{2}{3}$

$$|x_n - a| = \left|\frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{\cancel{6n}+3-\cancel{6n}-2}{9n+3}\right| = \left|\frac{1}{9n+3}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{9n+3} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 3 < 9n \Leftrightarrow n > \frac{1}{9\varepsilon} - \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n_\varepsilon = \left[\frac{1}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}\right] + 1}$$

- Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ 2 șiruri de numere reale a.î. $x_n \to a$ și $y_n \to b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Atunci:

1) $(x_n)_n$ este mărginit
2) $x_n + y_n \to a+b$ și $x_n y_n \to ab$
3) $|x_n| \ldots$
4) Dacă $x_n \leq y_n \Rightarrow a \leq b$
5) Dacă $x_n \neq 0\ (\forall)\, n$ și $a \neq 0 \Rightarrow$

Demonstrație

1) $x_n \to a \Rightarrow (\forall)\, \varepsilon > 0, (\exists)\, n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| \leq |a| + \varepsilon$

$\varepsilon = 1 \Rightarrow \forall\, n \geq n_1 \Rightarrow |x_n| \leq 1 + |a| \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{M = \max\left(1 + |a|, \max_{i=1}^{n} |x_i|\right) + 1}$

2) I. $x_n \to a, (\forall)\, \varepsilon > 0, (\exists)\, n'_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\, n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$y_n \to b, (\forall)\, \varepsilon > 0, (\exists)\, n''_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\, n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_n + y_n - (a+b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$

$(\forall)\, n \geq \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) = n_\varepsilon$

II. $|x_n - a| < \varepsilon$ și $|y_n - b| < \varepsilon$

$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \leq |x_n|\,|y_n - b| + |b|\,|x_n - a|$

$(\exists)\, M > 0$ a.î. $|x_n| \leq M, (\forall)\, n \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall)\, n \geq n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) \Rightarrow |x_n y_n - ab| < (M + |b|) \cdot \varepsilon$

3) $x_n \to a \Rightarrow |x_n| \to |a|$

$x_n \to a \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon, |x_n - a| < \varepsilon$

$||x| - |y|| \leq |x - y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R} \;\Big|\; \Rightarrow$

$\Rightarrow ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon$

5) $x_n \to a \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{|x_n| \cdot |a|}$

$x_n \to a \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{|a|}{2}, (\forall)\, n \geq n_{\frac{|a|}{2}} = n_0 \Rightarrow |x_n| = |x_n - a + a| \geq |a| - |x_n - a| \geq$

$\geq |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$

$\left|\frac{1}{x_n}\right| \leq \frac{2}{|a|}$

$n_\varepsilon = \max(n_0, n_\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| \leq \frac{2\varepsilon}{|a|^2}$ q.e.d

Teoremă: $\boxed{\text{Orice şir monoton şi mărginit este convergent}}$

Demonstraţie: Presupunem că $(x_n)_n$ este un şir crescător şi $x_n \leq M$, $(\forall)$ $n \geq 1$

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n+1} \leq \ldots \leq M$$

Fie $a = \sup_{n\geq 1} x_n$

$(\forall)$ $\varepsilon > 0 \Rightarrow a - \varepsilon$ nu este majorant pt $(x_n)_n \Rightarrow \exists n_\varepsilon$ a.î. $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$

Fie $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Def: Fie X o mulţime nevidă. O funcţie $d : X \times X \to [0, \infty)$ se numeşte distanţă dacă:

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$, $(\forall)$ $x, y \in X$

3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$, $(\forall)$ $x, y, z \in X$

(X, d) s.n. spaţiu metric

$a \in X$, $r > 0 \Rightarrow B(a,r) = \{x \mid d(a,x) < r\}$

$M \subset X$ s.n. mărginită dacă $\exists B(a,r)$ a.î. $M \subset B(a,r)$

$B(a,r) \to$ bila de centru a şi rază r

Definiţie: Fie (X, d) un spaţiu metric, $(x_n)_n \subset X$, $a \in X$. Spunem că $(x_n)_n$ converge la a şi notăm $x_n \to a$ sau $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ dacă $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ n_ε a.î. $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$

Exemple

1. $(\mathbb{R}, d)$, $d(x,y) = |x-y|$, $B(a,r) = (a-r, a+r)$

2. $(\mathbb{C}, d)$, $d(z,w) = |z-w|$

3. (X, d), $X \neq \emptyset$, $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

a) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

b) $d(x,y)=d(y,x)$

c) $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$

Cazul I: $x=z \Rightarrow d(x,z)=0$

$\left.d(x,y)\geq 0,\ d(y,z)\geq 0 \right\} \Rightarrow d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$

Cazul II: $x\neq z \Rightarrow d(x,z)=1$

Presupunem că $y\neq x$: $d(x,y)+d(y,z)\geq 1 = d(x,z)$

$$B(a,r)=\begin{cases} X, & r>1 \\ \{a\}, & r\leq 1 \end{cases}$$

$x_n \to a$, $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\, n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\, n\geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,a)<\varepsilon$

$\varepsilon=\frac{1}{2} \Rightarrow d(x_n,a)<\frac{1}{2}$, $(\forall)\, n>n_{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x_n=a$, $(\forall)\, n\geq \frac{1}{2}$

(4) $\mathbb{R}^n=\bigtimes_{i=1}^{n}$ $\quad \mathbb{R}\ni x=(x_1,x_2,\dots x_n)$

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

$$d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

$$d_\infty(x,y)=\max_{1}^{n}|x_i-y_i|$$

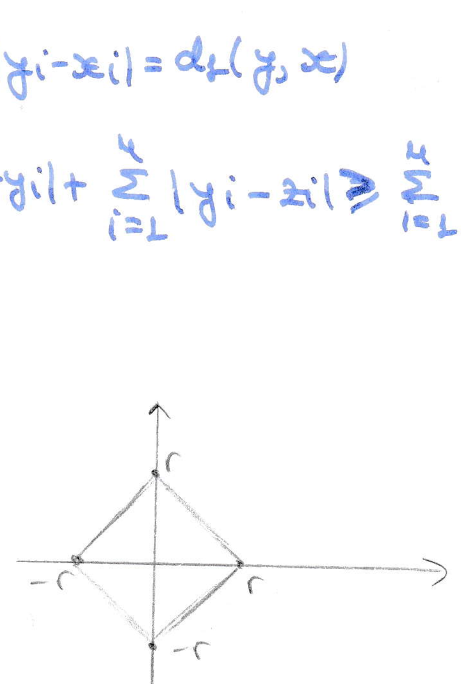
1) $d_1(x,y)=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=0 \Leftrightarrow x_i=y_i, (\forall)\, i=\overline{1..n} \Leftrightarrow x=y$

2) $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|=d_1(y,x)$

3) $d_1(x,y)+d_1(y,z)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|\geq \sum_{i=1}^{n}|x_i\cancel{-y_i}+\cancel{y_i}-z_i|=$

$=\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|=d_1(x,z)$

$B((0,0),r)$ $\quad |x|+|y|=r$



Definiție: Fie (X,d) spațiu metric. Un șir $(x_n)_n \subset X$ s.n Cauchy dacă $(\forall)\,\varepsilon>0,\ \exists\, n_\varepsilon$ aî $(\forall)\, n,m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,x_m)<\varepsilon$

Proprietăți: Fie (X,d) spațiu metric și $(x_n)_n \subset X$

1. Dacă $(x_n)_n$ convergent $\Rightarrow (x_n)_n$ CAUCHY
2. Dacă $(x_n)_n$ Cauchy $\Rightarrow (x_n)_n$ mărginit
3. Orice șir convergent este mărginit
4. Dacă $(x_n)_n$ este Cauchy și $\exists\, x_{n_k} \to a \in X \Rightarrow x_n \to a$

Demonstrație

1. $x_n \to a \Rightarrow (\forall)\,\varepsilon>0, (\exists)\, n_\varepsilon$ aî $(\forall)\, n > n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,a) < \frac{\varepsilon}{2}$

$(\forall)\, n,m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,x_m) \leq d(x_n,a)+d(a,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2. $(x_n)_n$ Cauchy $\Rightarrow (\forall)\,\varepsilon>0, (\exists)\, n_\varepsilon$ aî $(\forall)\, n,m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,x_m)<\varepsilon$

$\varepsilon = 1 \Rightarrow \forall n \geq n_1 \Rightarrow d(x_n, x_{n_1}) < 1 \Leftrightarrow x_n \in B(x_{n_1}, 1)$

$r = 1 + \max\limits_{i=1}^{n} d(x_i, x_{n_1})$

$(\forall)\, i,\ x_i \in B(x_{n_1}, r)$

4. $(x_n)_n$ Cauchy, $(\forall)\,\varepsilon>0 (\exists)\, n_\varepsilon$ aî $(\forall)\, n,m > n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,x_m)<\varepsilon$

$x_{n_k} \to a$, $(\forall)\,\varepsilon>0, (\exists)\, k_\varepsilon$ aî $(\forall)\, k \geq k_\varepsilon \Rightarrow d(x_{n_k},a)<\varepsilon$

$n_k \nearrow \infty \Rightarrow \exists\, k_0$ aî $n_{k_0} \geq n_\varepsilon$

Fie $k > \max(k_\varepsilon, k_0) \Rightarrow n_k \geq n_{k_0} \geq n_\varepsilon$ și $d(x_{n_k},a)<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall)\, n \geq n_\varepsilon\ \ d(x_n,a) \leq d(x_n,x_{n_k}) + d(x_{n_k},a) < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$

Proprietăți: În (X,d) limita este unică

$x_n \to a, (\forall)\,\varepsilon>0, (\exists)\, n'_\varepsilon$ aî $(\forall)\, n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,a)<\varepsilon$

$x_n \to b, (\forall)\,\varepsilon>0, (\exists)\, n''_\varepsilon$ aî $(\forall)\, n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,b)<\varepsilon$

$n \geq n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) \Rightarrow d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) \leq \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon,$
$(\forall)\,\varepsilon>0$

$\mathbb{R}^n = \bigtimes_{i=1}^{n} \mathbb{R} \ni x = (x_1, x_2 \dots \ x_n)$

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2 \dots , x_n+y_n)$

$(\mathbb{R}^n, +)$ grup comutativ

$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad ax = (ax_1, ax_2 \dots , ax_n)$

<u>Proprietăți</u>: 1 $(a+b)x = ax + bx$

2 $a(x+y) = ax + ay$

3 $a(bx) = (ab)x$

4 $1x = x$

$\mathbb{R}^n$ formează un spațiu vectorial peste corpul nr. reale

$(\mathbb{R}^2, d_1) \qquad (z_n)_{n \geq 1} \qquad z_n = (x_n, y_n) \qquad c = (a, b)$

$z_n \to c$, $(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon$ a.î. $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d_1(z_n, c) < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \to a$
$y_n \to b$

$x_n \to a$ și $y_n \to b$, $(\forall)\ \varepsilon > 0, \exists\ n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ și $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_1(z_n, c) = |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\left(\frac{2n+1}{3n+2}, \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \to \left(\frac{2}{3}, 0\right)$

$(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d_2(z_n, c) < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \to a$ și $y_n \to b$

$x_n \to a$ și $y_n \to b \Rightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0, \exists\ n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\ n > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ și $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_2(z_n, c) = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$

$\max_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq n \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq n\, d_\infty$

$x_n \in \mathbb{R}^n \quad d_\infty(x_n, a) \le d_2(x_n, a) < d_1(x_n, a) \le n\, d_\infty(x_n, a)$

$\downarrow$

a

$x_n \to a \Rightarrow x_n \xrightarrow{d_2} a$

$d_1(x+z, y+z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i + \cancel{z_i} - y_i - \cancel{z_i}| = d_1(x, y)$

$d_1(ax, ay) = \sum_{i=1}^{n} |ax_i - ay_i| = |a|\, d_1(x, y)$

$d_1(x, y) = d_1(x-y, 0)$

<u>Definiție</u> O funcție $\| \ \| \ \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ s.n normă dacă:

$$\boxed{\begin{array}{l} ① \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ ② \ \|ax\| = |a| \cdot \|x\|, (\forall) a \in \mathbb{R} \text{ și } x \in \mathbb{R}^n \\ ③ \ \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|, (\forall) x, y \in \mathbb{R}^n \end{array}}$$

Unei norme i se asociază o distanță: $d_{\| \|}(x, y) = \|x - y\|$

① $d_{\| \|}(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

② $d_{\| \|}(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\| = d_{\| \|}(y, x)$

③ $d_{\| \|}(x, y) + d_{\| \|}(y, z) = \|x - y\| + \|y - z\| \ge \|x \cancel{-y} + \cancel{y} - z\| =$
$= \|x - z\| = d_{\| \|}(x, z)$

<u>Teoremă</u> În $\mathbb{R}^n$ orice două norme sunt echivalente

(Adică: $\exists\, \alpha, \beta > 0$ a.î. $\alpha \|x\| \le |||x||| \le \beta \|x\|$)

$d_2 \leftarrow \| \ \|_2 \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}}$

<u>ex.</u> $x_n = \frac{1}{n} + \sin n \frac{\pi}{2}$

$x_{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$

$x_{4n+1} = \frac{1}{4n+1} + 1 \to 1$ (limita superioară)

$x_{4n+3} = \frac{1}{4n+3} - 1 \to -1$ (limita inferioară)

Definiție: Fie (X, d) un spațiu metric. Un element $a \in X$ s.n. punct limită pt. șirul $(x_n)_n \subset X$ dacă $\exists\, x_{n_k} \to a$.

Definiție: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Notăm cu $U_n = \sup\limits_{k \geq n} x_k$ și $v_n = \inf\limits_{k \geq n} x_k$

Atunci $v_n \leq v_{n+1} \leq U_{n+1} \leq U_n$

Se numește limita superioară a șirului x_n și se not. cu

$$\limsup_{n \to \infty} x_n = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n = \overline{l} = \lim_{n \to \infty} U_n = \inf_{n \geq 1} U_n = \inf_{n \geq 1} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right)$$

$$\underline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n = \sup_{n \geq 1} v_n = \lim_{n \to \infty} v_n$$

Observație: $\overline{\lim}\, x_n \geq \underline{\lim}\, x_n$

Dacă $m \geq n$ $\quad v_n \leq v_m \leq U_m \leq U_n \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} v_n \leq U_m, (\forall)\, m \geq 1$

$$\underbrace{\lim_{n \to \infty} v_n}_{\underline{\lim}\, x_n} \leq \underbrace{\lim_{m \to \infty} U_m}_{\overline{\lim}\, x_n}$$

Proprietăți

1. $\overline{\lim}\,(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$
2. $\overline{\lim}\, a x_n = a\, \overline{\lim}\, x_n,\ a > 0$
3. $\overline{\lim}\,(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$
4. $\overline{\lim}\,(x_n + y_n) \geq \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$
5. $\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \geq \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$
6. $\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$
7. $x_n > 0$, $\overline{\lim}\, \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\underline{\lim}\, x_n}$
8. $\overline{\lim}\, x_n \cdot y_n \leq \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$

   $x_n \geq 0,\ y_n \geq 0$