(10) Se considera el polinomio $x^3-4x^2+5x+k \in \mathbb{Q}[x]$ hallar $k \in \mathbb{Z}$ para que el polinomio admita una raíz doble, y en ese caso resolver la ecuación $x^3-4x^2+5x+k=0$.

Sea el polinomio $g(x)=x^3-4x^2+5x+k$ $k\in\mathbb{Z}$.
Si queremos que $g(x)$ admita una raíz doble x_1, necesitamos que x_1 sea solución de $g'(x)=3x^2-8x+5=p(x)$. Por lo tanto, tenemos que estudiar las raíces comunes de ambos polinomios.
Para ello usaremos la resultante.
Sabemos que $g(x)$ y $p(x)$ tienen un m.c.d no constante sii su resultante es igual a 0.

$$R(p(x),g(x))=\begin{vmatrix} 3 & -8 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & -4 & 5 & k & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & k \end{vmatrix}$$

Vamos a simplificar las operaciones usando el siguiente lema:

Sean $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ $\quad a_n\neq 0,\ n\geq 1$

$q(x)=b_0+b_1x+\dots+b_mx^m$ $\quad b_m\neq 0,\ m\geq 1$

tales que $q(x)=p(x)c(x)+r(x)$ con $\text{grad}(r(x))<\text{grad}(p(x))$

$[p(x), q(x), r(x), c(x)\in\mathbb{Q}[x]]$ entonces:

$$R(p(x),q(x))=a_n^{\,m-\text{grad}(r(x))}R(p(x),r(x)).$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3-4x^2+5x+k & 3x^2-8x+5 \\
\underline{-x^3+8/3x^2-5/3x} & 1/3x-4/9=c(x) \\
\quad -4/3x^2+10/3x+k & \\
\quad \underline{4/3x^2-\frac{32}{9}x+20/9} & \\
\qquad -2/9x+\frac{20}{9}+k=r(x) &
\end{array}$$

$$\Rightarrow R(p(x),q(x))=3^{3-1}R(p(x),r(x))$$

$$R(p(x),r(x))=\begin{vmatrix} 3 & -8 & 5 \\ -2/9 & 20/9+k & 0 \\ 0 & -2/9 & 20/9+k \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{400}{81}+\frac{40}{9}k+k^2\right)\cdot 3+\frac{20}{81}-\left(\frac{16}{9}\right)\left(\frac{20}{9}+k\right)=\frac{400}{27}+\frac{40}{3}k+3k^2+$$

$$+\frac{20}{81}-\frac{320}{81}-\frac{16}{9}k=3k^2+\frac{104}{9}k+\frac{100}{9}.$$

Necesitamos que $R(p,q)=0$, es decir, $R(p,r)=0$,

luego ha de ser $3k^2+\frac{104}{9}k+\frac{100}{9}=0$.

$$27k^2+104k+100=0 \Leftrightarrow k=\frac{-104\pm\sqrt{10816-10800}}{54}=\frac{-104\pm 4}{54} \begin{array}{l}\nearrow -\frac{50}{27} \\ \searrow -2\end{array}$$

Como $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $k=-2$.

Luego $q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Resolvemos $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -4 & 5 & -2 \\
1 & & 1 & -3 & 2 \\
\hline
 & 1 & -3 & 2 & 0 \\
1 & & 1 & -2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow q(x) = (x-1)^2(x-2)$.

(15) Hallar el discriminante de $x^n + ax^{n-1} + b \in \mathbb{Z}[x]$

Sea $p(x) = x^n + ax^{n-1} + b$.

Para calcular el discriminante vamos a usar las raíces. Sea $p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)$, es decir, α_i $\forall i = 1, n$ son las raíces del polinomio.

Sabemos que $\mathrm{Discr}(p(x)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n R(p(x), Dp(x)) =$

$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(p(x), p'(x))$.

Calculemos $R(p(x), p'(x)) = a_n^{n-1} \prod_{i=1}^{n} Dp(\alpha_i) = \prod_{i=1}^{n} p'(\alpha_i)$

$p'(x) = nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} = x^{n-2}(nx + (n-1)a) \Rightarrow$

$p'(\alpha_i) = \alpha_i^{n-2} \underbrace{(n\alpha_i + (n-1)a)}_{\beta_i}$, luego $\alpha_i = \dfrac{\beta_i - (n-1)a}{n}$.

De este modo tenemos que los β_i son raíces de $\left(\dfrac{x-(n-1)a}{n}\right)^n + a\left(\dfrac{x-(n-1)a}{n}\right)^{n-1} + b$. Teniendo en cuenta que $a_0/a_n = (-1)^n \sum \alpha_1 \ldots \alpha_n$ donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son las raíces de $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ se tiene que:

$\prod_{i=1}^{n} \beta_i = (-1)^n n^n \left[\left(\dfrac{-(n-1)a}{n}\right)^n + a\left(\dfrac{-(n-1)a}{n}\right)^{n-1} + b \right] =$

$= -(n-1)^{n-1} a^n + (-1)^n n^n b$.

Retomando $R(p(x), p'(x)) = \prod_{i=1}^{n} p'(\alpha_i) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{n-2} \prod_{i=1}^{n} \beta_i =$

$= (-b)^{n-2}(-(n-1)^{n-1}a^n + (-1)^n n^n b)$

Luego $\operatorname{Discr}(p(x)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(p(x), p'(x)) =$

$= (-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}} b^{n-2}((n-1)^{n-1}a^n + (-1)^{n-1} n^n b)$