Ejercicio. 5.1.
Sean α y β raíces de un polinomio irreducible $p(X) \in K[X]$, siendo K un cuerpo perfoecto.

(1) *Prueba que $[K(\alpha):K] = [K(\beta):K]$.*
(2) *Prueba que $K(\alpha)/K \cong K(\beta)/K$.*
(3) *Sea E un cuerpo de descomposición de $p(X)$ sobre K tal que $\alpha, \beta \in E$. ¿Existe siempre un automorfismo $\sigma : E/K \longrightarrow E/K$ tal que $f(\alpha) = \beta$?*
(4) *¿Existe siempre $\sigma : E/K \longrightarrow E/K$ tal que $\sigma(\alpha) = \beta$ y $\sigma(\beta) = \alpha$, dejando las demás raíces fijas.*
(5) *¿Existe $\sigma : E/K \longrightarrow E/K$, $\sigma \neq id$, tal que $\sigma(\alpha) = \alpha$?*

Ejercicio. 5.2.
Sean α y β raíces de un polinomio irreducible $p(X) \in K[X]$ tal que $\alpha^n \in K$. Prueba que β verifica esta misma relación.

Ejercicio. 5.3.
Sea K un cuerpo de característica p, y $a \in K$. Prueba que si el polinomio $X^p - a$ no tiene raíces en K, entonces $X^p - a$ es irreducible sobre K.

Ejercicio. 5.4.
Se consideran $a, b, d \in \mathbb{Z}$ tales que d y $a^2 - db^2$ son libres de cuadrados. Determina el grupo de Galois de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{a + b\sqrt{d}})/\mathbb{Q}$.

Ejercicio. 6.1.
Sea K un cuerpo y $p(X) \in K[X]$ un polinomio de grado n que se expresa $p(X) = p_1(X) \cdots p_t(X)$, siendo cada $p_i(X) \in K[X]$ un polinomio irreducible de grado d_i, y $p_i(X) \nmid p_j(X)$, si $i \neq j$. Da una cota, que se alcance, del grado de la extensión $K(p(X))/K$.

Ejercicio. 6.2.
Sea K un cuerpo y $p(X) \in K[X]$ un polinomio de grado n. Prueba que si el grado del $K(p(X)/K$ es igual a $n!$, entonces $p(X)$ es irreducible.