Aprendizaje automático: Bonus 2.

Cristina Zuheros Montes.

27/04/2016.

1 MATRICES Y OPTIMIZACIÓN.

Lagrange propuso una técnica para resolver el siguiente problema de optimización

$$\max_{x,y} g(x,y)$$
$$\text{Sujeto a } f(x,y) = 0$$

Es decir, buscar el máximo de la función g en un recinto del plano $x-y$ definido por los valores nulos de la función f. La solución es transformar este problema de optimización con restricciones en un problema de optimizacíon sin restricciones y resolver este último derivando e igualando a cero. Para ello construye una nueva función denominada Lagrangiana que se define como

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = g(x,y) - \lambda f(x,y)$$

siendo *lambda* una constante y prueba que la solución de óptimo de $\mathcal{L}$ es la misma que la del problema inicial. Por ello para obtener dicha solución solo hay que calcular la solución del sistema de ecuaciones dado por $\nabla_{x,y,\lambda}\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$. En el caso de que exista más de una restricción en igualdad cada una de ellas se añade a la Lagrangiana de la misma manera pero con un λ diferente.

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda_1,\cdots,\lambda_n) = g(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x,y)$$

Resolver el siguiente problema:

1. La distancia entre dos curvas en el plano está dada por el mínimo de la expresión $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ donde (x_1,y_1) está sobre una de las curvas y (x_2,y_2) está sobre la otra. Calcular la distancia entre la línea $x+y=4$ y la elipse $x^2+2y^2=1$.

   Solución
   En primer lugar, notamos que la distancia entre la recta $ax+by+c$ y el punto $p=(x,y)$ viene dada por:

$$dis(x,y) := \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

En nuestro caso, disponemos de la recta $x + y = 4$, luego tendremos:

$$dis(x, y) := \frac{|x + y - 4|}{\sqrt{2}}$$

Es claro que estamos trabajando en el semiplano definido por la inecuación $x + y - 4 < 0$, luego podemos trabajar con:

$$dis(x, y) := \frac{-x - y + 4}{\sqrt{2}} =: g(x, y)$$

Para terminar de plantear el problema, sólo falta decir que estaría sujeto a:

$$f(x, y) := x^2 + 2y^2 = 1$$

Ahora ya estamos en disposición de resolver el problema usando los multiplicadores de Lagrange. Para ello defino la siguiente función:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \frac{-x - y + 4}{\sqrt{2}} - \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$$

Derivamos e igualamos a 0:

$$\nabla_{x,y,\lambda}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (\frac{-1}{\sqrt{2}} - 2\lambda x, \frac{-1}{\sqrt{2}} - 4\lambda y, -x^2 - 2y^2 + 1) = 0$$

Luego tendremos que resolver el sistema:

$$(1) \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} = 2\lambda x$$

$$(2) \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} = 4\lambda y$$

$$(3) \quad x^2 + 2y^2 = 1$$

De (1) y (2) obtenemos que $x = 2y$. Haciendo uso de ello en (3) tenemos $4y^2 + 2y^2 = 1$, luego $y = \frac{1}{\sqrt{6}}$ o bien $y = -\frac{1}{\sqrt{6}}$. Por tanto, $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ o bien $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Resumiendo, tenemos los siguientes valores para calcular el mínimo y máximo, respectivamente:

$$(x, y) = (\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

$$(x, y) = (-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$$

Finalmente, calculamos la distancia mínima que vendría dada por:

$$g(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{4 - \frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = 1.9624$$