Relación de problemas reducciones

Serafín Moral García y Cristina Zuheros Montes

22 de abril de 2015

1. Sabemos que $UC \leq HALT$, esto es, que UC se reduce a HALT. La funcion UC trabaja del siguiente modo:

$$UC = \begin{cases} 0 & \text{si} M_s(s) = 1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Construimos un algoritmo que nos permita calcular UC usando $HALT$ del siguiente modo:

```
M_uc(s)
  {
      if HALT(s,s) == 0 {
        return 1;
      }
      else {
           if (M_u(s,s) == 1)
             return 0;
           else
             return 1;
           }
  }
```

   En este algoritmo M_u es la Máquina de Turing universal. Como la llamamos solo cuando sabemos que el algoritmo termina nunca cicla de forma indefinida.

   Como UC no es computable, dicho algoritmo M_uc no puede dar el resultado correcto, luego ha de fallar en la función HALT, es decir, el problema de la parada tampoco es computable.

2. Supongamos que tenemos grafo y dos vértices s y t de ese grafo y queremos ver si exiten k caminos disjuntos de s a t. Vamos a construir un caso del problema de flujo máximo del siguiente modo:

   Suponemos que el grafo es dirigido. Construiremos un problema del flujo máximo del siguiente modo. El nuevo grafo tendrá tantos vértices como nuestro grafo original y por cada arista de nuestro grafo de partida asignamos una arista al nuevo grafo, de tal manera que ambos grafos tengan la misma topología. En el caso del problema del flujo máximo que queremos construir le asignamos una capacidad de 1 a cada arista. El origen del problema del flujo máximo será s y el destino t. De esta manera, el número máximo de caminos disjuntos entre s y t en el grafo original es el mismo que el flujo máximo entre los correspondientes vértices del segundo grafo. Así pues, habrá k caminos disjuntos de s a t si, y sólo si, el flujo máximo de s a t es mayor o igual que k.

Si el grafo fuese no dirigido construiriamos uno dirigido del siguiente modo: si hay una arista entre x e y entonces ponemos un enlace de x a y y otro de y a x. En el flujo máximo se usa un arco y su inverso, ya que eso es equivalente a no usar ninguno de los dos.

3. Partimos de un grafo inicial GI con nodos i y en cada arista de una fuerza $J_{ij} \geq 0$. Además en cada nodo actúa un campo externo h_i.

   Vamos a construir un grafo ponderado GP a partir de GI, haciendo uso de los valores J_{ij} y h_i, de manera que sean análogos. De este modo podremos resolver el problema de minimizar la energía del grafo inicial, obteniendo el corte mínimo del grafo ponderado. Veamos cómo construimos GP:

   Hacemos una copia del grafo inicial y asignamos a cada arista las fuerzas J_{ij}. Añadiremos un par de nodos (nodo inicial s y nodo final t). Conectamos s y t con los nodos que teníamos del siguiente modo:

   - Si el nodo i tiene $h_i > 0$, se conecta con s con peso h_i
   - Si el nodo i tiene $h_i < 0$, se conecta con t con peso $-h_i$

   De esta manera, tenemos un grafo ponderado. En este grafo se calcula el corte mínimo que separa los nodos s y t. Esto particiona los nodos en dos conjuntos A y B de tal manera que la suma de los pesos de las aristas que cruzan de A a B es mínima y del tal forma que $s \in A$ y $t \in B$.

   Entonces la solución del Spin Glass se construye asignando un valor $s_i = -1$ para los nodos del problema original que están en A y un valor $s_i = 1$ para los nodos que están en B.

   Se comprueba que el valor de la energía para cada solución de Spin-Glass es:

   $\sum_{ij} -J_{ij} - \sum_i |h_i| + 2 * CUTVALUE$

   Como los primeros sumandos son constantes, la energía mínima corresponde al corte mínimo.

4. *a*) Llamamos $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

   Veamos en primer lugar que Integer Partitioning se puede reducir a Subset Sum:

Si podemos encontrar un subconjunto de A de $\{1, 2, , , , k\}$ tal que $\sum_{i \in A} x_i = \sum_{i \notin A} x_i$, entonces es claro que $\sum_{i \in A} x_i = s/2$. Recíprocamente, si podemos encontrar un subconjunto A de $\{1, 2, , , , k\}$ tal que $\sum_{i \in A} x_i = s/2$ entonces la suma de los x_i tales que $i \notin A$ ha de ser $s/2 = \sum_{i \in A} x_i$. Queda probado que encontrar una partición de S en dos subconjuntos que sumen lo mismo es equivalente a encontrar un subconjunto cuyos elementos sumen $s/2$.

Ahora veamos que Subset Sum se puede reducir a Integer Partitioning.

Queremos ver si se puede encontrar un subconjunto A de $\{1, 2, , , , k\}$ tal que $\sum_{i \in A} x_i = t$. Calculamos $s = \sum_{i=1}^{k} x_i$ y consideramos $S' = \{x_1, x_2, , , x_k, t + s, 2s - t\}$. Si podemos encontrar un subconjunto A de S cuyos elementos sumen t. Entonces considerando los conjuntos $A \cup \{2s - t\}$ y $(S \cap \overline{A}) \cup \{t + s\}$ verifican ambos que la suma de sus elementos vale $2s$, y forman una partición de S'. Recíprocamente, si podemos particionar S' en dos conjuntos A y B tales que $A \cap B = \emptyset$ y $\sum_{i \in A} x_i = \sum_{i \in B} x_i$, como $(s + t) + (2s - t) = 3s$ y tanto los elementos de A como los de B suman $2s$, $(s+t)$ y $2s-t$ pertenecen a diferentes conjuntos de la partición de S'. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $2s - t \in A$. Por el razonamiento anterior, el resto de los elementos de S' pertenecen a A y suman t. Con esto hemos demostrado que poder encontrar un conjunto $A \subset \{1, 2, , , k\}$ tal que $\sum_{i \in A} x_i = t$ es equivalente a poder particionar S' en dos conjuntos cuyos elementos sumen lo mismo

b) Veamos en primer lugar que Independent Set se reduce a Clique. En efecto, dado un grafo G y un entero k, considerando el grafo complementario, esto es, un grafo con los mismos vértices en el cual hay una artista que va de un vértice a otro si y sólo si no la hay en el grafo original, se tiene que en el grafo original hay un conjunto independiente de tamaño k o mayor si y solo si en el complementario hay un clique de este tamaño. De hecho, el conjunto de vértices sería el mismo en ambos grafos.

Del mismo modo, dado un grafo G, se tiene que un clique es equivalente a un conjunto independiente de vértices en el grafo complementario. Por lo que existe un clique de tamaño mayor o igual que k si y sólo si, existe un conjunto independiente de vértices en el grafo complementario (el conjunto de vértices sería el mismo). Por consiguiente, Clique se reduce a Independent Set.

Con esto queda probado que los problemas Clique e Independent Set son equivalentes.

Ahora, dado un grafo G y un entero k, el hecho de que exista un conjunto independiente de vértices de tamaño mayor o igual que k es lo mismo que decir que existe una cobertura de tamaño menor o igual a $n - k$, siendo n el número de vértices del grafo. Del mismo modo, que exita una cobertura de tamaño k es lo mismo que decir que existe un conjunto independiente de vértices de tamaño $n - k$. Por lo tanto, Independent Set se reduce a Vertex Cover y viceversa, lo que demuestra que son equivalentes.

Se ha probado que Clique es equivalente a Independet Set y que este problema es equivalente a Vertex Cover, lo que concluye que los tres problemas son equivalentes.