Taller de geometría: Ejercicios de teoría.

Cristina Zuheros Montes.

07 Mayo 2016

Índice

1. Sean D el disco de Poincaré, $p, q \in D$, y $\alpha : [0,1] \to D$ una curva diferenciable a trozos tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$ y $L(\alpha) = d(p,q)$. Probar que existe $f \in G$ tal que $f(p) = 0$ y $f \circ \alpha$ es una reparametrización monótona de $\gamma_{f(q)}$.

Solución
Vamos a usar los siguientes resultados:

Lema 1 *Sea $p \in D$ y sea $\alpha : [0,1] \to D$ una curva diferenciable a trozos tal que $\alpha(0) = 0$ y $\alpha(1) = p$. Entonces:*

$$(1) L(\alpha) \geq log(\frac{1+|p|}{1-|p|})$$

Por tanto $d(0,p) = log(\frac{1+|p|}{1-|p|})$.
Además, si α verifica la igualdad 1, entonces α es una reparametrización de γ_p.

Lema 2 *Si $f \in G$, $p, q \in D$, entonces $d(f(p), f(q)) = d(p,q)$.*

Lema 3 *Si $\gamma : [0,1] \to D$ es diferenciable a trozos y $f \in G$, entonces: $L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$.*

Ahora sí, podemos pasar a demostrar el resultado:

Por hipótesis tenemos que $L(\alpha) = d(p,q)$, siendo $p, q \in D$. Consideramos $f \in G$.
Estamos en condiciones de aplicar el lema 2, que nos lleva a que $d(p,q) = d(f(p), f(q)) = d(0, f(q))$, pues por hipótesis $f(p) = 0$.

Consideramos la función $f \circ \alpha : [0,1] \to D$ diferenciable a trozos (α es diferenciable a trozos y $f \in G$) verificando $(f \circ \alpha)(0) = f(p) = 0$ y $(f \circ \alpha)(1) = f(q) \in D$. Por el lema 1 tenemos que $d(0, f(q)) = log(\frac{1+|f(q)|}{1-|f(q)|})$. Luego tendremos la siguiente igualdad:

$$\mathcal{L}(\alpha) = log(\frac{1+|f(q)|}{1-|f(q)|})$$

Por otra parte, como $\alpha : [0,1] \to D$ es diferenciable a trozos, por el lema 3, se tiene que $L(f \circ \alpha) = log(\frac{1+|f(q)|}{1-|f(q)|})$.

Como $f \circ \alpha$ verifica la igualdad 1 vista en el lema 1, tenemos que $f \circ \alpha$ es una reparametrización de $\gamma_{f(q)}$.

2. Sean $\gamma : (a,b) \to D$ una geodésica y $f : (c,d) \to (a,b)$ una función diferenciable a trozos y monótona creciente. Probar que $\gamma \circ f : (c,d) \to D$ es una geodésica .

Solución
Vamos a usar el siguiente resultado:

Propiedad 1 *Si $f : [a,b] \to [c,d]$ es diferenciable con $f' \geq 0$, entonces $L(\gamma \circ f) = L(\gamma)$.*

Para probar que $\gamma \circ f : (c,d) \to D$ es una geodésica tenemos que ver que $\forall s, t \in R$ verificando $c < s \leq t < d$ se tiene que $d(\gamma \circ f(s), \gamma \circ f(t)) = L(\gamma \circ f|[s,t])$.

Por ser f monónota creciente se tiene que para $s, t \in [c,d]$ con $s \leq t$ se verifica $f(s) \leq f(t)$. Por tanto, tenemos $a < f(s) = s' \leq f(t) = t' < b$.
Por ser γ geodésica, se tiene que $\forall s', t' \in R$ verificando $a < s' \leq t' < b$ se verifica que $d(\gamma(s'), \gamma(t')) = L(\gamma|[s', t'])$.

Pretendemos adaptar la propiedad 1 usando el Teorema del cambio de variable, pues en nuestro caso f es diferenciable a trozos.
$L(\gamma) = \inf \{ L(\alpha) / \alpha : (a,b) \to D$ con $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$, donde α es diferenciable a trozos. $\} =$
$\inf \{ L(\alpha \circ f) / \alpha \circ f : (c,d) \to D$ con $(\alpha \circ f)(c) = p$, $(\alpha \circ f)(d) = q$, donde α es diferenciable a trozos. $\} = L(\gamma \circ f)$.
Luego tendríamos que $\gamma \circ f$ es geodésica pues $\forall s, t \in R \,/\, c < s \leq t < d$ se tiene que $d(\gamma \circ f(s), \gamma \circ f(t)) = L(\gamma \circ f|[s,t])$.