

Unidad III.

Estructura a gran escala

Colapso esférico de estructuras¹

Sea una sobredensidad δ (un “halo”) en un espacio homogéneo, con

$$\delta \equiv \left(\frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right) \quad (3.1)$$

Esta sobredensidad se expande con el Universo hasta un radio máximo, luego del cual se contrae y eventualmente colapsa en una estructura auto-gravitante. Este instante de radio máximo se conoce típicamente como “turn-around time”. Definamos

$$x(t) \equiv \frac{a(t)}{a_{\text{turn}}} \quad y(t) \equiv \frac{r(t)}{r_{\text{turn}}} \quad (3.2)$$

Es decir, $x(t)$ es el factor de escala del Universo e $y(t)$ el tamaño de esta sobredensidad, ambos en unidades de sus respectivos valores al momento de giro. (He traducido “turn-around” como *giro* en castellano.)

Por simplicidad, desarrollaremos este modelo de colapso en un Universo Einstein-de Sitter con $\Omega = \Omega_{\text{m}} = 1$. En este modelo,

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = H_0 a^{-3/2} \quad (3.3)$$

¹Material adaptado del [curso de Cosmología](#) por Matthias Bartelmann (Heidelberg)

y la ecuación de Friedmann, que describe la expansión del Universo, se transforma en:

$$x' \equiv \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{H_{\text{turn}}} \frac{\dot{a}}{a_{\text{turn}}} = \frac{1}{H_{\text{turn}}} \frac{\dot{a}}{a} \frac{a}{a_{\text{turn}}} = \frac{H}{H_{\text{turn}}} x = x^{-1/2} \quad (3.4)$$

donde introdujimos el tiempo escalado $\tau = H_{\text{turn}} t$. Por su parte, el tamaño del halo sigue una evolución Newtoniana:

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{4\pi G}{3r^2} \rho_{\text{turn}} r_{\text{turn}}^3 \quad (3.5)$$

con

$$\rho_{\text{turn}} \equiv \bar{\rho}_{\text{turn}} (1 + \delta_{\text{turn}}) = \frac{3H_{\text{turn}}^2}{8\pi G} (1 + \delta_{\text{turn}}) \quad (3.6)$$

la densidad del halo al momento de giro. Entonces,

$$r'' \equiv \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{d^2 r}{(H_{\text{turn}} dt)^2} = -\frac{r_{\text{turn}}^3}{2r^2} (1 + \delta_{\text{turn}}) \quad (3.7)$$

y

$$y'' \equiv \frac{d^2 y}{d\tau^2} = \frac{d^2 r}{r_{\text{turn}} d\tau^2} = -\frac{1}{r_{\text{turn}}} \frac{r_{\text{turn}}^3}{2r^2} (1 + \delta_{\text{turn}}) = -\frac{1}{2} \frac{r_{\text{turn}}^2}{r^2} (1 + \delta_{\text{turn}}) = -\frac{(1 + \delta_{\text{turn}})}{2y^2} \quad (3.8)$$

Por definición, el halo tiene tamaño cero en $a=0$, y tamaño máximo en $a=a_{\text{turn}}$, es decir

$$y'|_{x=1} = 0, \quad y|_{x=0} = 0 \quad (3.9)$$

Con estas condiciones de borde, las soluciones a (3.4) y (3.8) son

$$\tau = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad y' = \pm \sqrt{1 + \delta_{\text{turn}}} \sqrt{\frac{1}{y} - 1} \quad (3.10)$$

lo que implica

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{\text{turn}}}} \left[\frac{1}{2} \arcsin(2y - 1) - \sqrt{y - y^2} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (3.11)$$

Al momento de giro, $x=y=1$, por lo que

$$1 + \delta_{\text{turn}} = \left(\frac{3\pi}{4} \right)^2 \quad (3.12)$$

Por simetría, el halo se toma el doble de tiempo en colapsar hasta $r = 0$, cuando $\tau = 4/3$ y su tamaño es

$$x_c \equiv x(t_c) = 4^{1/3} \quad (3.13)$$

La sobredensidad en el halo, relativa al Universo (homogéneo), es

$$\Delta \equiv \frac{\rho_{\text{halo}}}{\bar{\rho}} = \left(\frac{x}{y} \right)^3 (1 + \delta_{\text{turn}}) \quad (3.14)$$

Expandiendo (3.11):

$$\tau \approx \frac{8}{9\pi} y^{3/2} \left[1 + \frac{3y}{10} \right] \quad (3.15)$$

de manera que el **contraste lineal de densidad** dentro del halo, cuando éste tiene un radio y , es

$$\delta = \Delta - 1 = \frac{3y}{5} \quad (3.16)$$

Así que

$$\delta_{\text{turn}} = \frac{a_{\text{turn}}}{a} \delta = \frac{\delta}{x} = \frac{3y}{5x} \quad (3.17)$$

y a partir de (3.15) se obtiene

$$\delta_{\text{turn}} = \frac{3}{5} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{2/3} \approx 1.06 \quad (3.18)$$

Finalmente, cuando el halo colapsa a $x_c = 4^{1/3} = 2^{2/3}$, el contraste lineal de densidad en el halo es

$$\delta_c = 2^{2/3} \delta_{\text{turn}} = 1.686 \quad (3.19)$$

Se considera colapsado un halo cuya sobredensidad de acuerdo a la teoría lineal alcanza este valor, que depende muy levemente en los parámetros cosmológicos.

El halo alcanza equilibrio virial cuando $\langle K \rangle + 2\langle V \rangle = 0$, y al momento de giro la energía cinética es $V = 0$, por lo que, usando también conservación de energía,

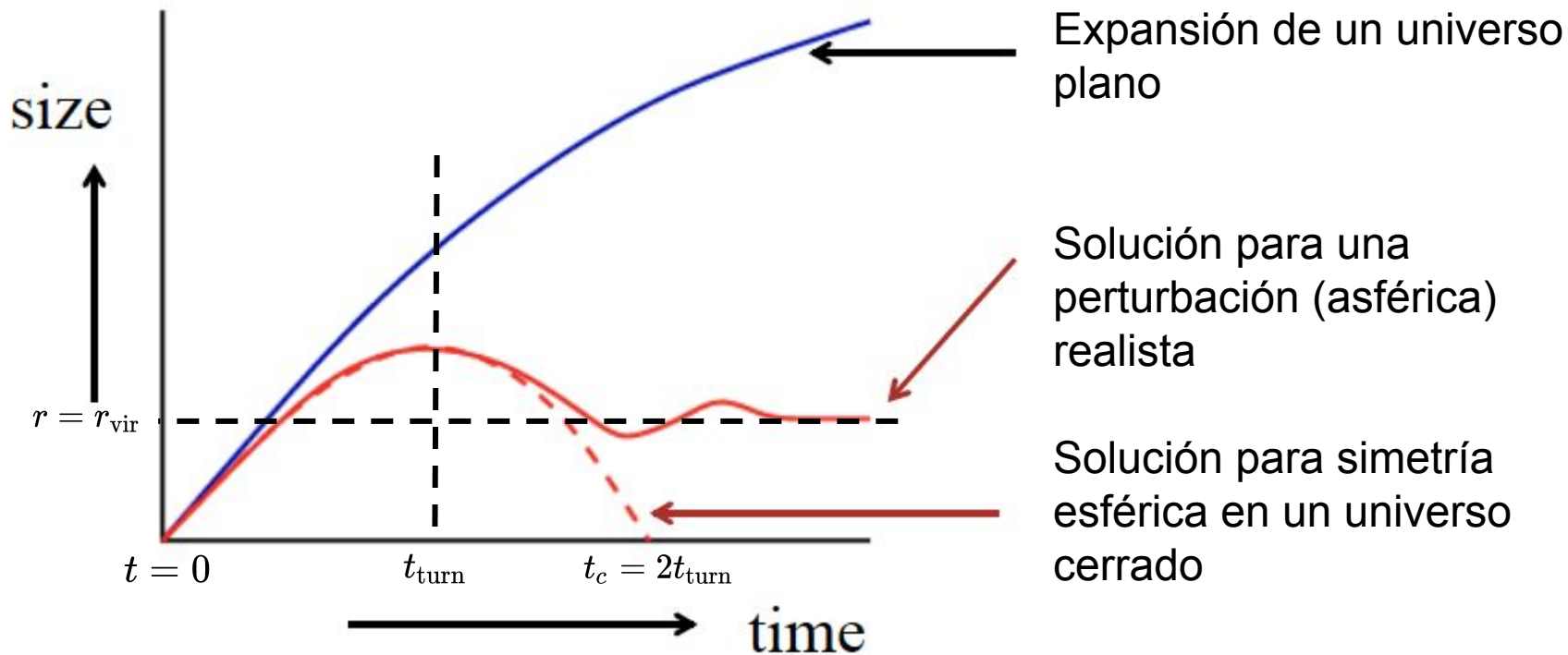
$$K_{\text{turn}} = \frac{1}{2} K_{\text{vir}} \quad \rightarrow \quad r_{\text{vir}} = \frac{1}{2} r_{\text{turn}} \quad \rightarrow \quad y_{\text{vir}} = \frac{1}{2}$$

Si asumimos que esto ocurre cuando $x=x_c$, entonces

$$\Delta_{\text{vir}} = \left(\frac{x_c}{y_{\text{vir}}} \right)^3 (1 + \delta_{\text{turn}}) = \left(\frac{4^{1/3}}{1/2} \right)^3 (1 + \delta_{\text{turn}}) = 18\pi^2 \approx 178$$

Los parámetros δ_c y Δ_{vir} son usados comúnmente para describir halos en cosmología observacional y numérica, aunque por simplicidad la mayoría de las veces se reemplaza Δ_{vir} por $\Delta = 200$. Más de esto más adelante.

Esquema de colapso



Aglomeración de materia

Definimos la **función de correlación** (de dos puntos) del campo de densidad,

$$\xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \rangle$$

Muchas veces resulta conveniente trabajar en espacio de Fourier. Así,

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_{12}) P(k_1)$$

La función de correlación es la transformada de Fourier del **espectro de potencias**,

$$\xi_2(r) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} P(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

También se definen análogamente el biespectro B, el triespectro T, etc. Por ejemplo,

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3) \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_{123}) B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$$

Para fluctuaciones Gaussianas, el espectro de potencias describe completamente la aglomeración de materia, y todas las correlaciones de mayor orden son iguales a cero.

La varianza del espectro de potencias es

$$\sigma_R^2 = 4\pi \int \frac{k^3 dk}{(2\pi)^3} P(k) \hat{W}_R^2(k)$$

donde introducimos una ventana W_R para filtrar escalas $r > R$. Es común normalizar el espectro de potencias a $z = 0$ usando la varianza en una escala $R = 8 h^{-1} \text{ Mpc}$, σ_8 (usando una ventana rectangular), ya que la varianza en el número de galaxias es aproximadamente 1 a esta escala. σ_8 es uno de los parámetros mejor determinados por la estructura a gran escala, y lo veremos aparecer varias veces en esta unidad.

Qué forma tiene el espectro de potencias?

Espectro de potencias de materia

El espectro inicial sigue una ley de potencias, ya que no existe una escala característica:

$$P_{\text{init}}(k) = Ak^{n_s}$$

Éste es el espectro de Harrison-Zel'dovich (Harrison70,Zel'dovich72). En el régimen de crecimiento lineal, a medida que el Universo se expande podemos asumir que

$$P(k, t) = D_+^2(t)P_{\text{init}}(k)$$

donde D_+ es el factor de crecimiento (independiente de la escala k).

Consideremos un universo plano y homogéneo con densidad promedio ρ_0 y otro con una densidad ρ_1 levemente más alta (y por lo tanto cerrado - aquí κ es la curvatura, no confundir con el número de onda, k),

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0, \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_1 - \frac{\kappa}{a^2}$$

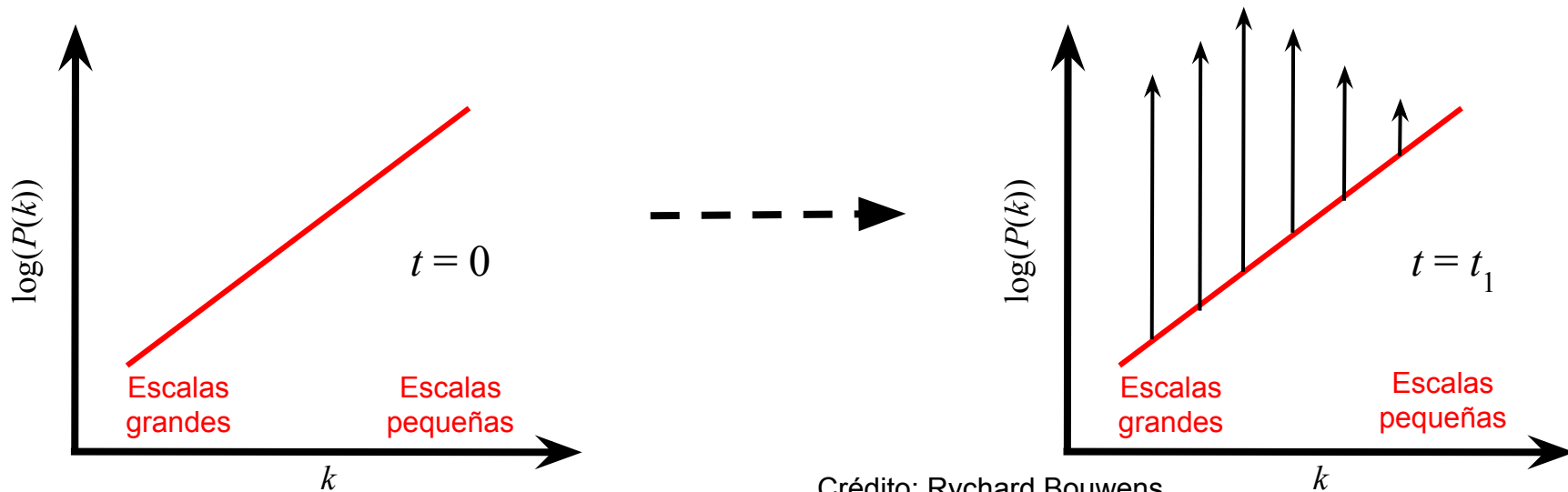
Comparando estos dos modelos vemos que

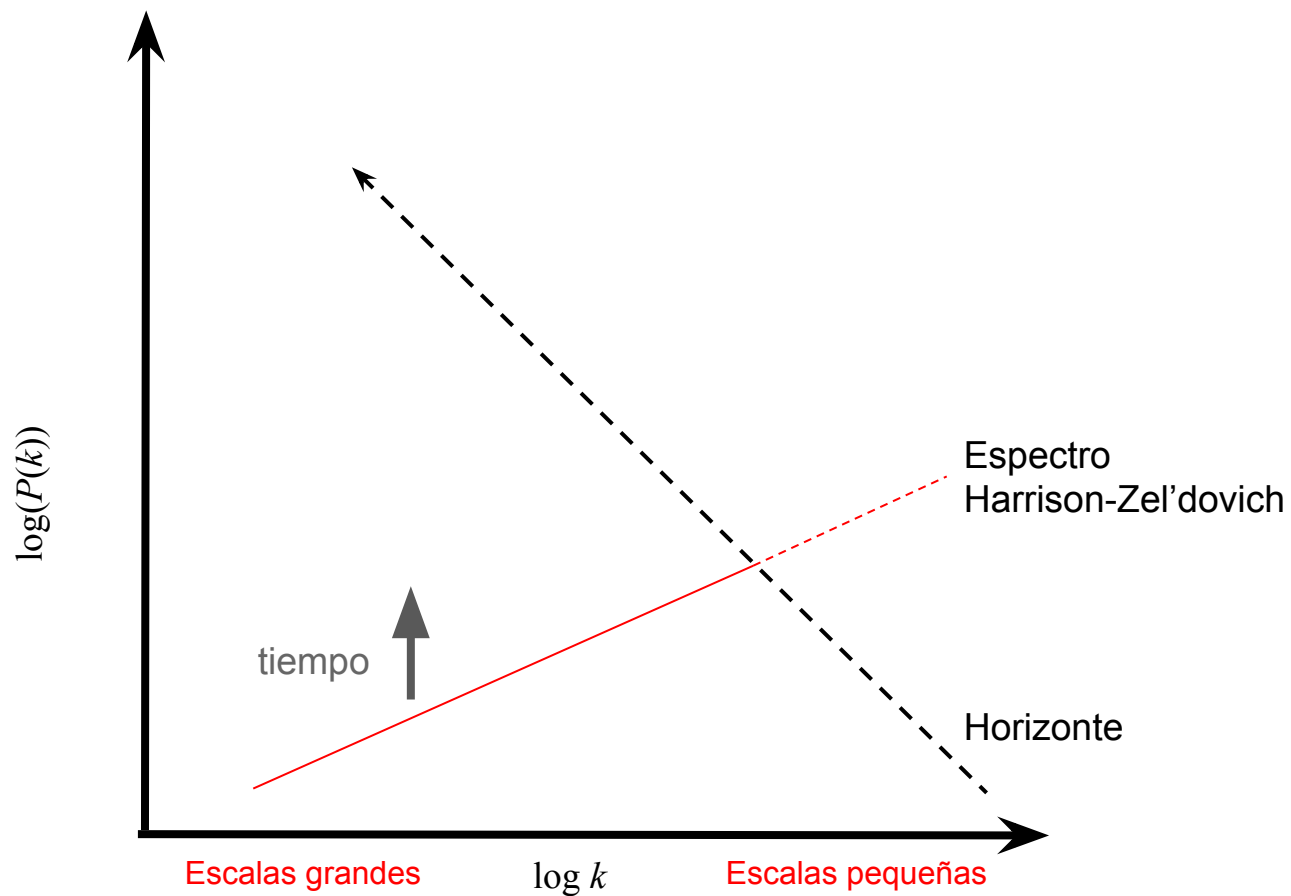
$$\delta \equiv \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\kappa/a^2}{8\pi G\rho_0/3} \propto \frac{1}{\rho_0 a^2}$$

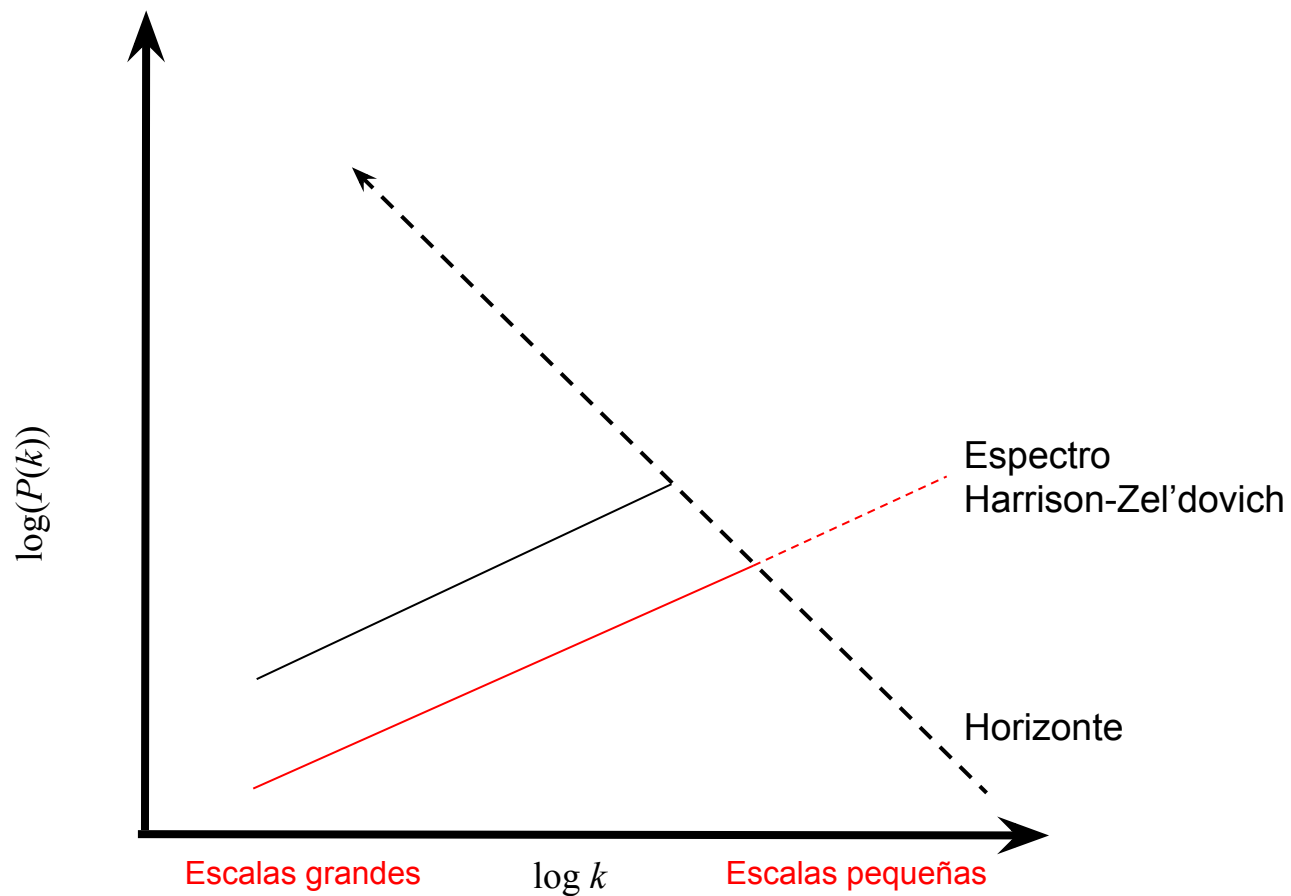
Es decir,

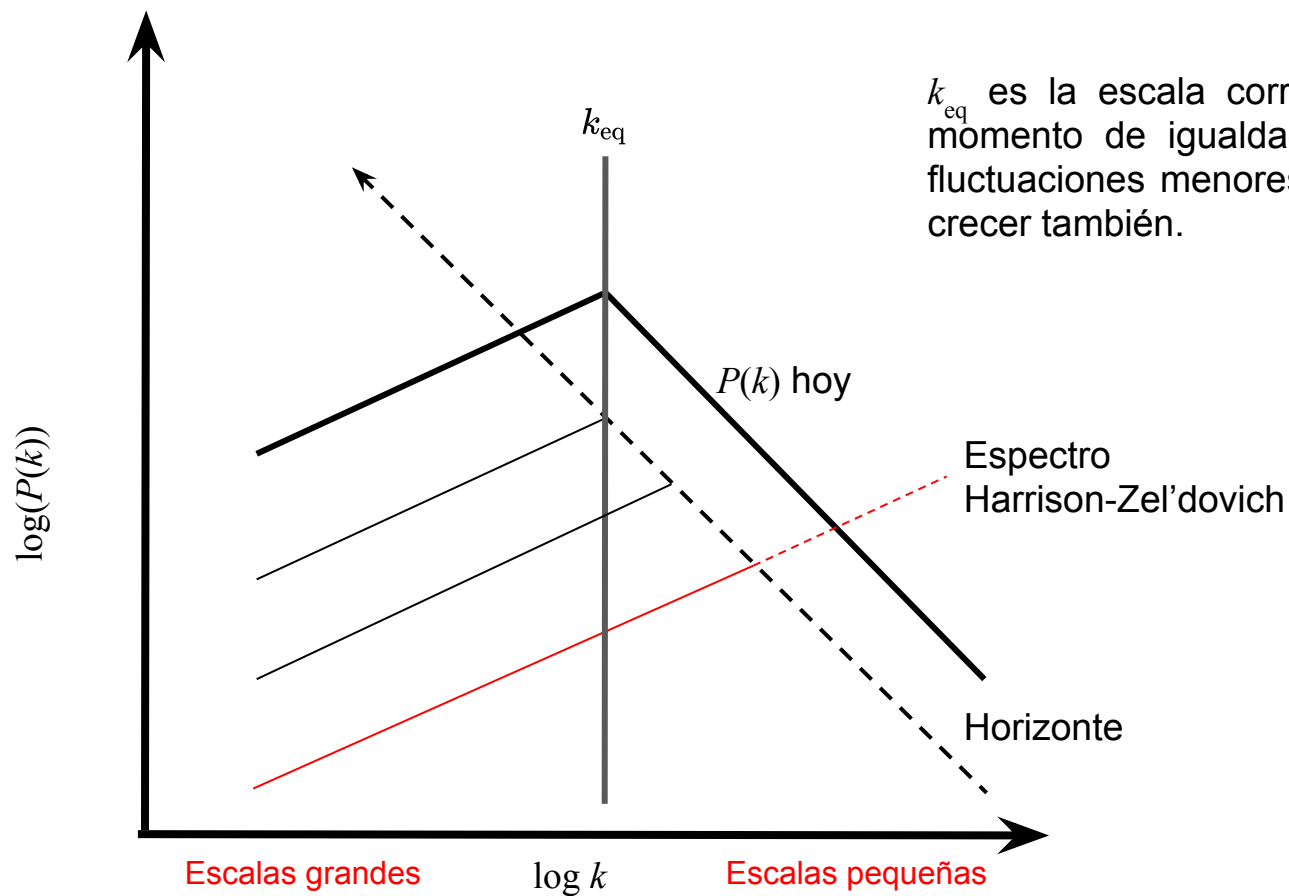
- Durante la época que domina la radiación ($z > 3500$, $\rho \sim a^{-4}$), no hay crecimiento a escalas menores que el horizonte. Fuera del horizonte, el crecimiento es proporcional a a^2 (a es el tamaño del Universo).
- Durante la época que domina la materia ($z < 3500$, $\rho \sim a^{-3}$), las estructuras crecen a una tasa igual a a .

En otras palabras, las estructuras más grandes (específicamente, mayores que el horizonte a $z \sim 3500$) han tenido más tiempo para crecer que las más pequeñas (y durante ese tiempo extra, crecieron más rápido)









k_{eq} es la escala correspondiente al horizonte al momento de igualdad materia-radiación, cuando fluctuaciones menores al horizonte comenzaron a crecer también.

En general, el espectro de potencias evoluciona de acuerdo a una **función de transferencia**, $T(k, t)$,

$$P(k, t) = T^2(k, t)P_{\text{init}}(k)$$

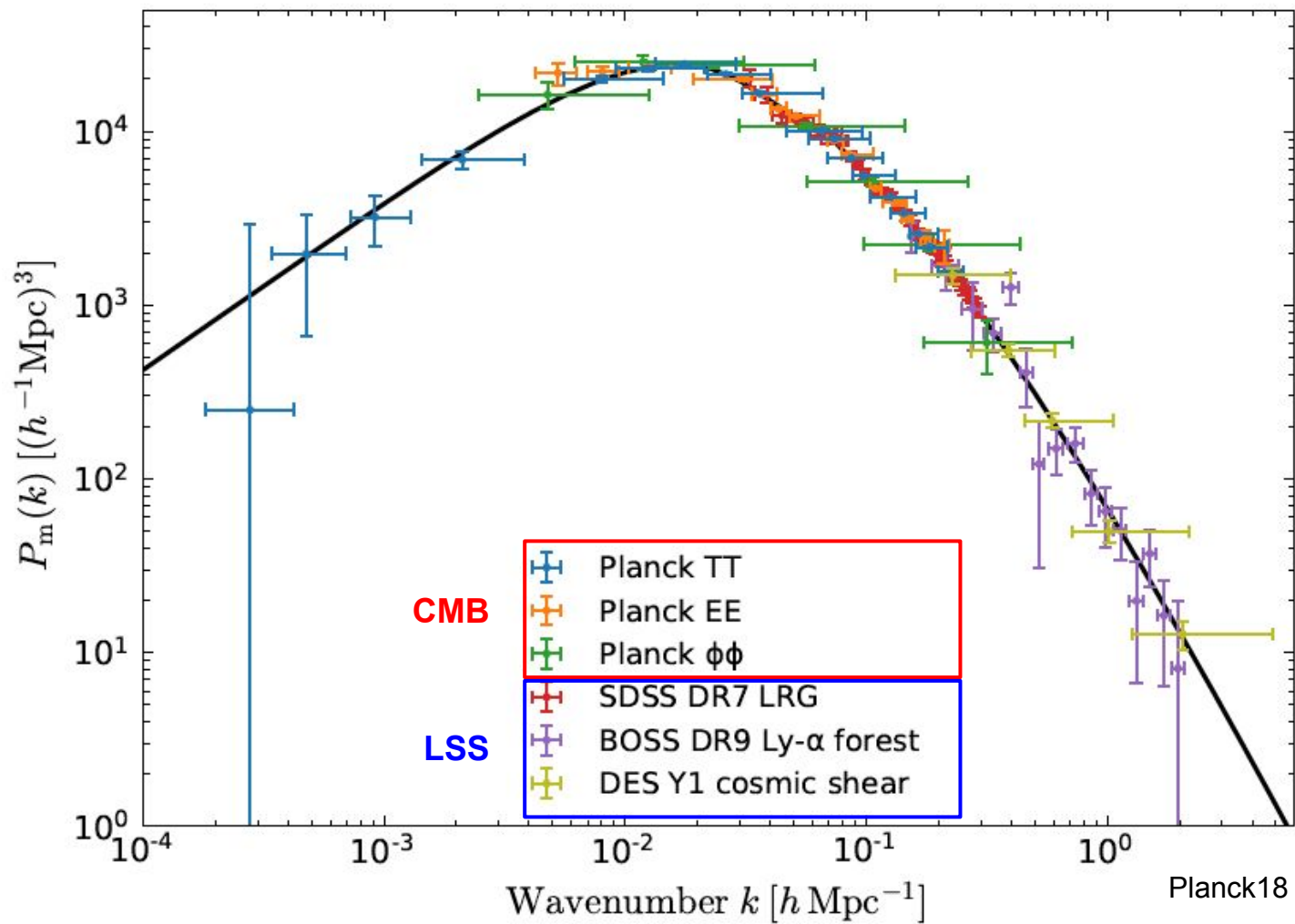
de manera que las fluctuaciones de densidad también lo hacen:

$$\delta(k, t) = T(k, t)\delta_{\text{init}}(k)$$

Siguiendo consideraciones similares a las anteriores se espera que

$$T(k, t) \propto \begin{cases} 1 & \text{para } k \ll k_{\text{eq}} \\ k^{-2} & \text{para } k \gg k_{\text{eq}} \end{cases}$$

Existen códigos que calculan funciones de transferencia considerando todos los componentes (materia oscura y bariónica, fotones, neutrinos, etc) en detalle. Los más usados en la actualidad son [CAMB](#) y [CLASS](#).



Abajo hay algunos ejemplos de cómo varía el espectro de potencias de materia para distintas cosmologías. (Las líneas verticales muestran k_{eq} .)

```
[68]: %matplotlib inline

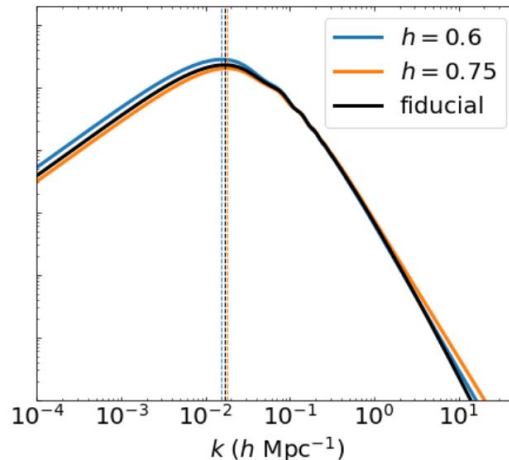
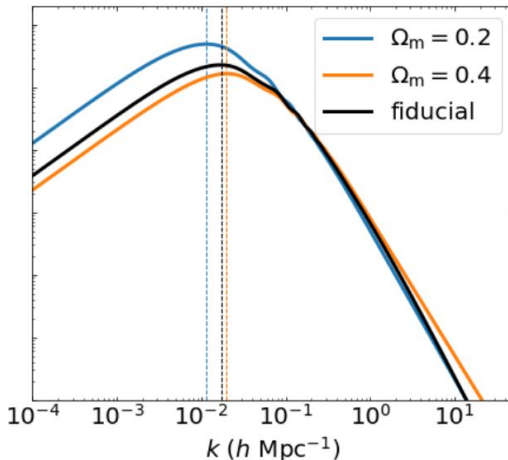
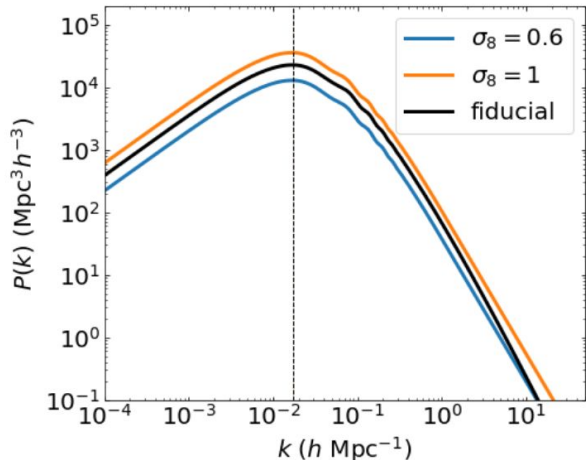
from astropy.cosmology import FlatLambdaCDM
from hmf import MassFunction
from itertools import count
from matplotlib import pyplot as plt, rcParams
import numpy as np

# parametros de Planck18
Tcmb0=2.725
h = 0.673
Om0 = 0.316
cparams_fid = dict(H0=100*h, Om0=Om0, Ob0=0.022/h**2, Tcmb0=Tcmb0)
cosmo_fid = FlatLambdaCDM(**cparams_fid)
sigma8_fid = 0.81
hmf_fiducial = MassFunction(
    cosmo_model=cosmo_fid, transfer_model='EH', sigma_8=sigma8_fid)

rcParams['font.size'] = 20
rcParams['lines.linewidth'] = 3
fig, axes = plt.subplots(figsize=(20,6), ncols=3)
# Variando amplitud de fluctuaciones
for i, s8 in enumerate((0.6, 1)):
    hmf = MassFunction(cosmo_model=cosmo_fid, sigma_8=s8)
    axes[0].plot(hmf.k, hmf.power, 'C{0}'.format(i), label=r'$\sigma_8={0}$'.format(s8))
    axes[0].axvline(hmf.k[np.argmax(hmf.power)], ls='--', color='C{0}'.format(i), lw=1)
# Variando densidad de materia (oscura)
for i, Om in enumerate((0.2, 0.4)):
    cparams = cparams_fid.copy()
```

```
cparams['Om0'] = Om
cparams['Ob0'] += (Om/Om0)
cosmo = FlatLambdaCDM(**cparams)
hmf = MassFunction(cosmo_model=cosmo, sigma_8=sigma8_fid)
axes[1].plot(hmf.k, hmf.power, 'C{0}'.format(i), label=r'$\Omega_m={0}$'.format(Om))
axes[1].axvline(hmf.k[np.argmax(hmf.power)], ls='--', color='C{0}'.format(i), lw=1)
# Variando curvatura
for i, h in enumerate((0.60, 0.75)):
    cparams = cparams_fid.copy()
    cparams['H0'] = 100*h
    cosmo = FlatLambdaCDM(**cparams)
    hmf = MassFunction(cosmo_model=cosmo, sigma_8=sigma8_fid)
    axes[2].plot(hmf.k, hmf.power, 'C{0}'.format(i), label=r'$h={0}$'.format(h))
    axes[2].axvline(hmf.k[np.argmax(hmf.power)], ls='--', color='C{0}'.format(i), lw=1)

for ax in axes:
    ax.plot(hmf_fiducial.k, hmf_fiducial.power, 'k-',
            label='fiducial')
    ax.axvline(hmf_fiducial.k[np.argmax(hmf_fiducial.power)], ls='--', color='k', lw=1)
    ax.legend()
    ax.set_xscale('log')
    ax.set_yscale('log')
    ax.set_xlim(1e-4, 50)
    ax.set_ylim(0.1, 2e5)
    ax.set_xlabel('$k$ ($h$ Mpc$^{-1}$)')
axes[0].set_ylabel('$P(k)$ (Mpc$^3 h^{-3}$)')
for ax in axes[1:]:
    ax.set_ylabel('$P(k)$ (Mpc$^3 h^{-3}$)')
    ax.set_yticklabels([])
fig.tight_layout()
```



Sesgo de galaxias

Ya definimos la función de correlación de materia,

$$\xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \rangle$$

donde δ es el campo (continuo) de densidad *de materia*. Cómo se relaciona esto con cantidades que podamos medir a partir de la distribución de *galaxias*?

Las galaxias trazan el campo de densidad, pero con un **sesgo** $b_g > 1$, de manera que

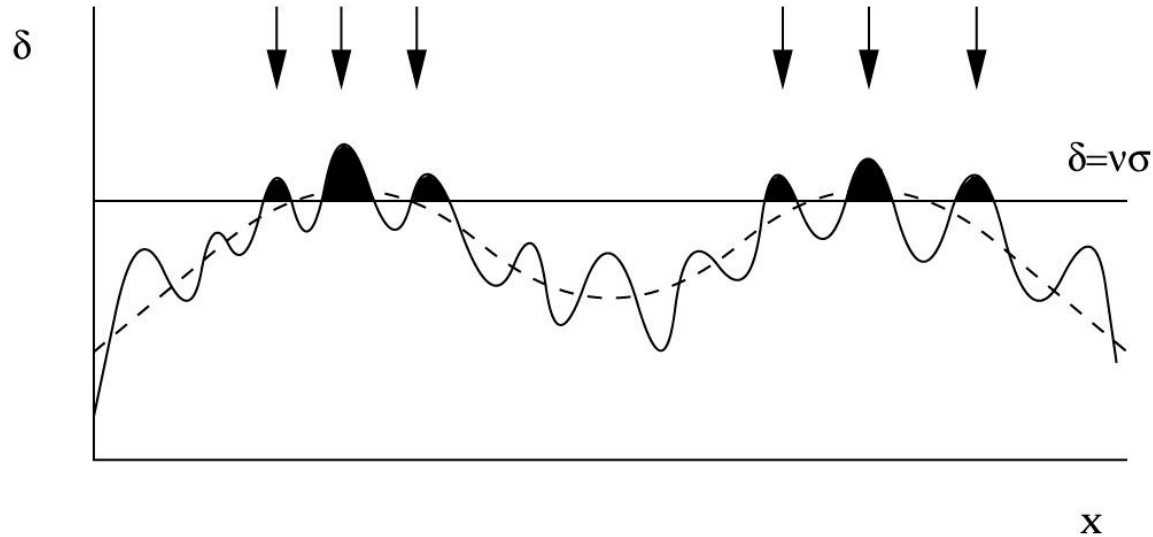
$$\delta_g = b_g \delta_m$$

lo que implica que

$$\xi_g = b_g^2 \xi_m$$

$$P_g(k) = b_g^2 P_m(k)$$

Específicamente, se formarán halos sólo en zonas donde la densidad de fondo exceda un cierto límite $\delta = \nu\sigma$, donde σ es la desviación estándar del campo de densidad, y ν es la altura del pico de densidad (Kaiser84):



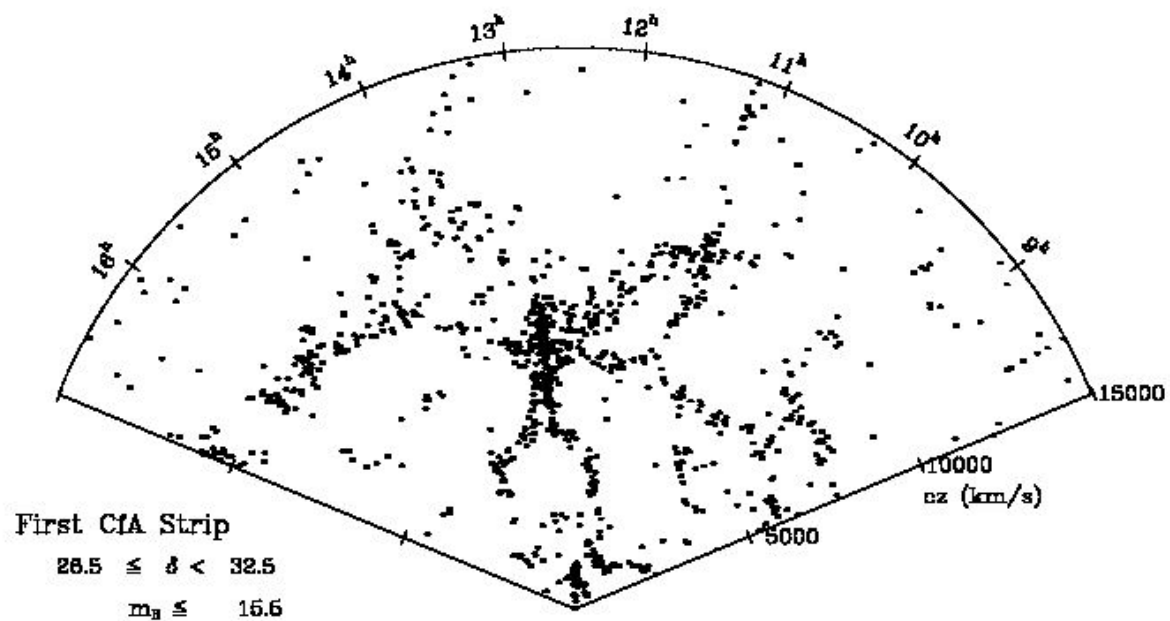
Esta condición da origen naturalmente a una red cósmica de estructuras, con halos de materia (\sim galaxias) concentrados preferentemente en los picos del campo de densidad, separados por zonas de baja densidad donde no se forman halos (ni galaxias), en cuyos límites se generan filamentos de estructuras.

Observaciones de aglomeración de galaxias

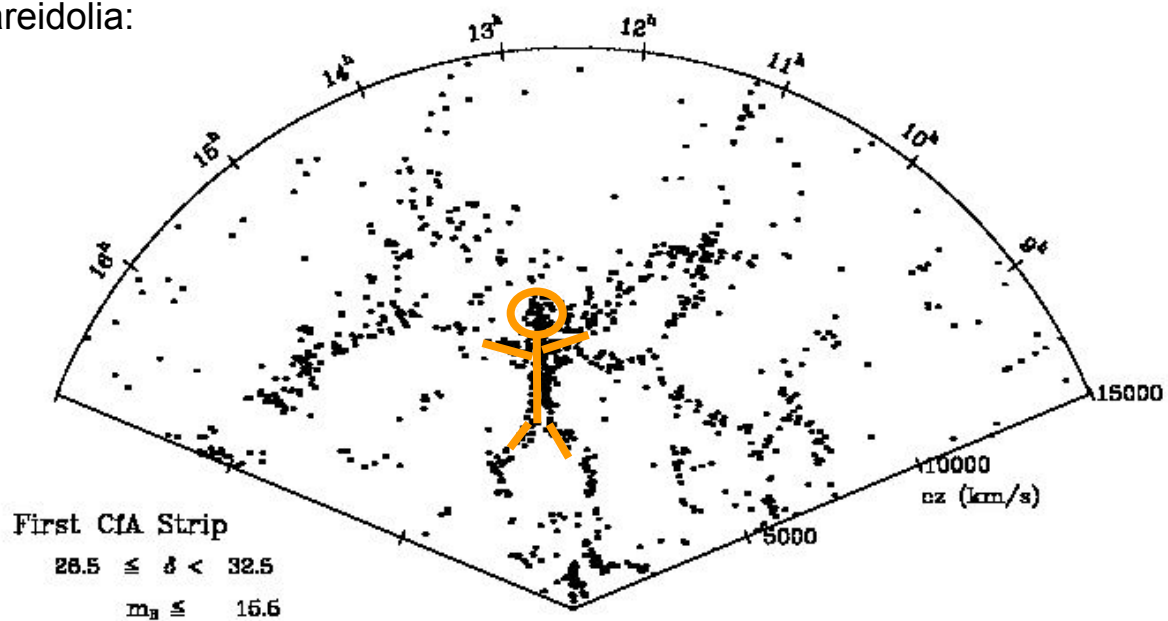
Cómo hacemos para poner a prueba observacionalmente estas consideraciones teóricas? Lo primero que necesitamos son... galaxias!

Estas se pueden observar más fácilmente en longitudes de onda ópticas o infrarrojas. Pero recuerden que estamos hablando de teoría lineal de estructuras, así que además necesitamos poder observar a escalas suficientemente grandes, mucho más grandes que el tamaño característico de halos colapsados (\gg Mpc).

El primer gran proyecto de esta naturaleza fue el **CfA Redshift Survey** (Huchra+83) que inicialmente midió redshifts para 2400 galaxias más brillantes que magnitud 14.5 en la banda B , y en su versión final incluyó redshifts para 18 000 galaxias hasta magnitud $m_B = 15.5$. Ya en la primera versión se podía identificar claramente esta red de estructuras aludida antes:



Ejercitando la pareidolia:

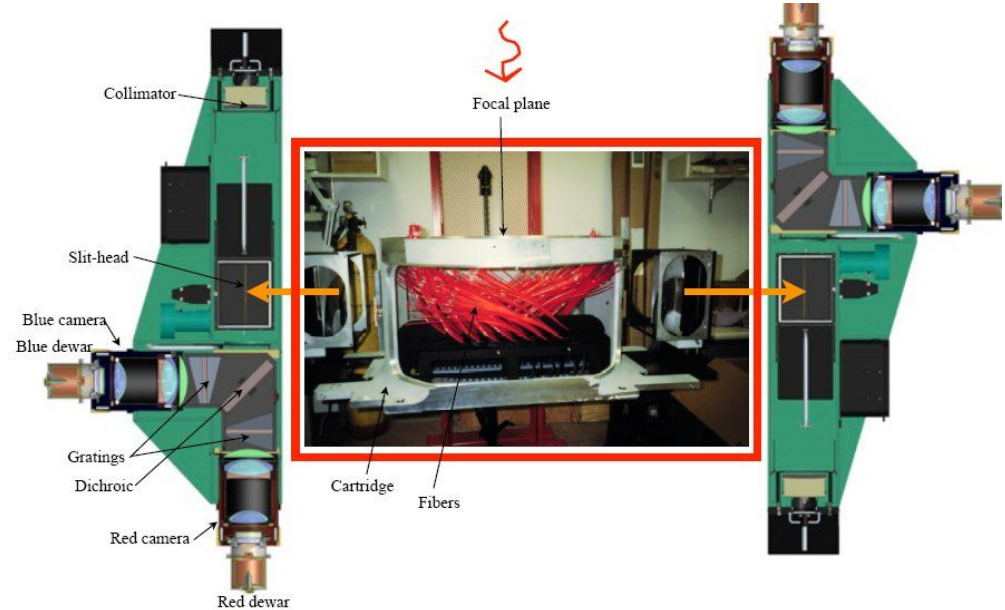
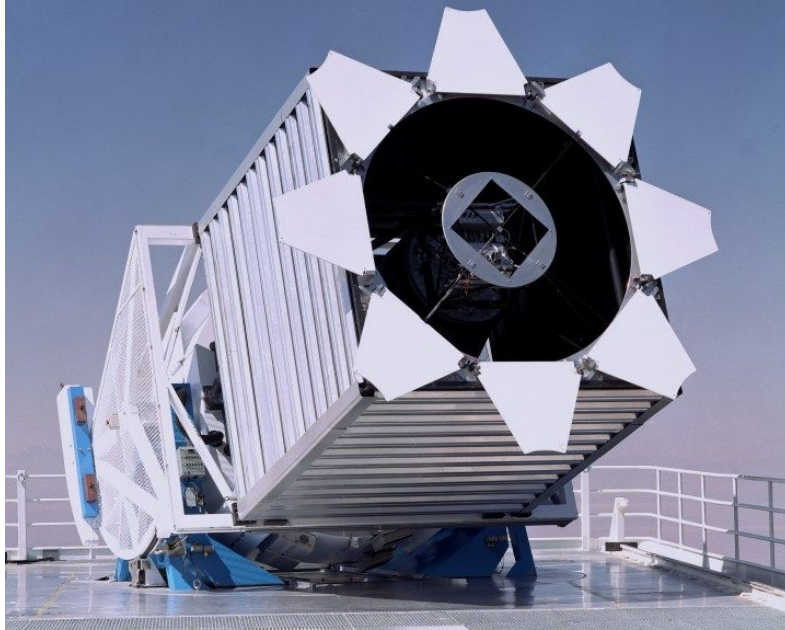


El Sloan Digital Sky Survey y más allá

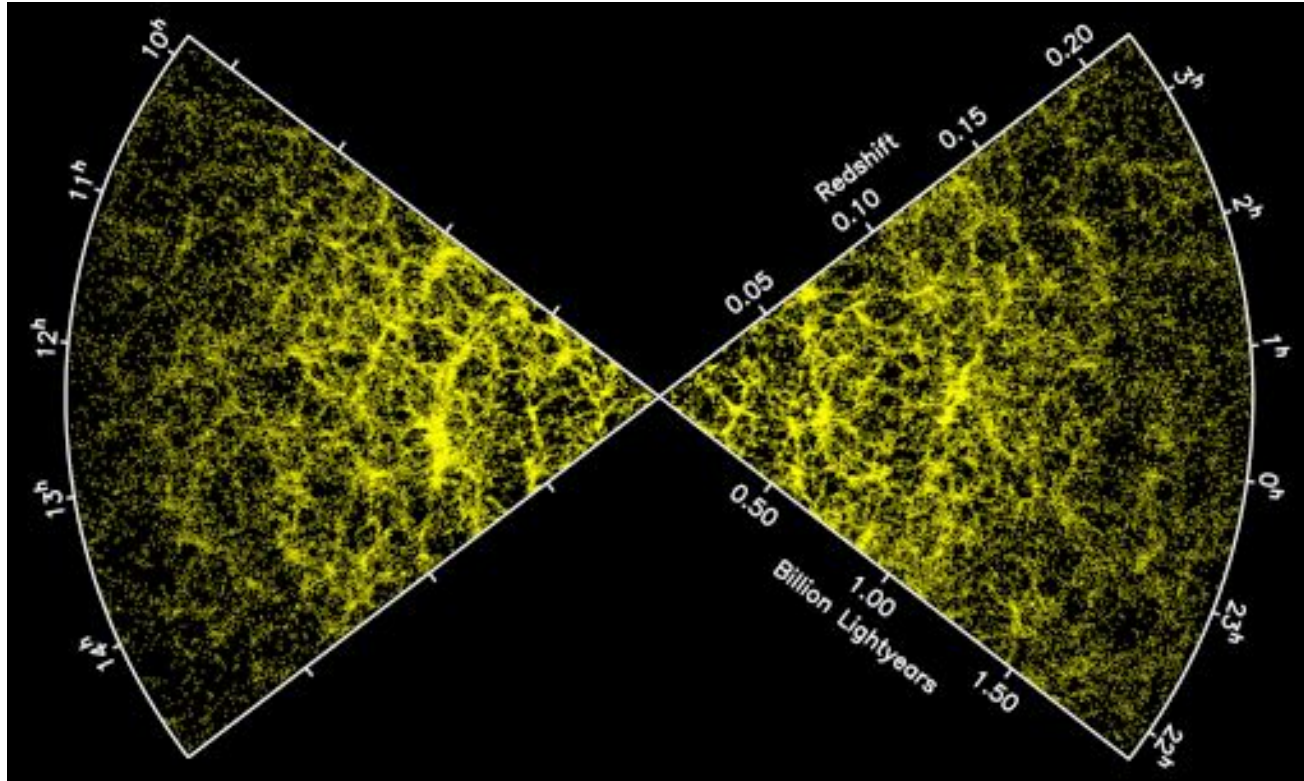
Luego del CfA survey, a comienzos del nuevo milenio se dio otro gran salto en el estudio de la estructura a gran escala, con el 2-degree Field Galaxy Redshift Survey (2dF[GRS], Colless+01) y su sucesor el 6dFGRS (Jones+09) entregando redshifts para unas 300 000 galaxias hasta $z \sim 0.1$. Pero fue el **Sloan Digital Sky Survey** (SDSS, York+00, Abazajian+03) aquél que realmente revolucionó nuestro entendimiento de la estructura a gran escala - y sigue haciéndolo, entregando catálogos fotométricos y espectroscópicos de *millones* de galaxias con una cadencia de 2 años, durante ya casi 20 años (Aguado+19).

SDSS fue el primer proyecto que combina imágenes en múltiples bandas ópticas de una fracción importante del cielo (casi la mitad!) con espectros que permiten obtener redshifts para cientos de miles (y eventualmente millones) de galaxias en la misma área. El catálogo espectroscópico principal de SDSS alcanza un redshift de 0.3, aproximadamente, complementado por un catálogo de “galaxias rojas luminosas” (LRG) hasta $z \sim 0.8$. Aunque en la mayoría de los casos veremos datos más recientes y mejores, la materia de esta unidad se debe en gran parte gracias a la visión y capacidad científica y tecnológica del equipo detrás de SDSS.

SDSS usa un telescopio dedicado de 2.5 m de diámetro en el Observatorio de Apache Point en Nuevo México, EEUU, que cuenta con dos instrumentos diseñados especialmente para este propósito: una cámara de 120 Mpixel y un campo de visión de 1.5 deg^2 , además de dos espectrógrafos alimentados por un total de 640 fibras ópticas.



Abajo vemos un mapa de la estructura a gran escala producida por el SDSS en uno de sus catálogos tempranos. La incipiente red cósmica del CfA Survey se ve claramente en este mapa.



Recursos

- https://www.astro.caltech.edu/~george/ay127/Theuns_cosmology.pdf
- <https://home.strw.leidenuniv.nl/~bouwens/obscosmo2/>
- <https://heibox.uni-heidelberg.de/f/e1e57faba9a44eb88692/>

Referencias

- Abazajian, K., 2003. The First Data Release of the Sloan Digital Sky Survey. [AJ, 126, 2081](#)
- Aguado, D., 2019. *The Fifteenth Data Release of the Sloan Digital Sky Surveys: First Release of MaNGA Derived Quantities, Data Visualization Tools and Stellar Library*. [ApJS, 240, 23](#)
- Colless, M., et al., 2001. *The 2dF Galaxy Redshift Survey: spectra and redshifts*. [MNRAS, 328, 1039](#)
- Harrison, E., 1970. *Fluctuations at the Threshold of Classical Cosmology*. [PhRvD, 1, 2726](#)
- Huchra, J., 1983. *A Survey of Galaxy Redshifts. IV. The Data*. [ApJS, 52, 89](#) (La página del abstract está incorrecta)
- Jones, H., et al., 2009. *The 6dF Galaxy Survey: final redshift release (DR3) and southern large-scale structures*. [MNRAS, 355, 747](#)
- Kaiser, N., 1984. *On the spatial correlations of Abell clusters*. [ApJ, 284, L9](#)
- Kerscher, M., et al., 2000. *A Comparison of Estimators for the Two-Point Correlation Function*. [ApJ, 535, L13](#)
- Planck Collaboration, 2018. *Planck Results 2018. I. Overview, and the cosmological legacy of Planck*. [arXiv:1807.06205](#)
- York D., et al., 2000. *The Sloan Digital Sky Survey: Technical Summary*. [AJ, 120, 1579](#)
- Zel'dovich, Ya. B., 1972, *A hypothesis, unifying the structure and the entropy of the Universe*. [MNRAS, 160, 1](#)