# TG01

viernes, 8 de abril de 2022 19:16

- Una barra rígida, uniforme, de masa total $m$ y longitud $L_2$, está suspendida en el punto $0$ por una cuerda de longitud $L_1$. Sobre la barra actúa una fuerza horizontal $F$ como se muestra en la Fig. 7.

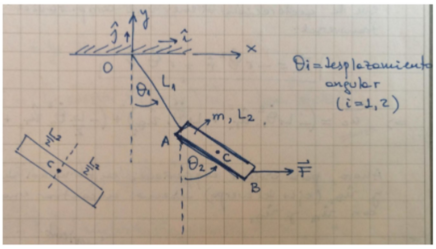
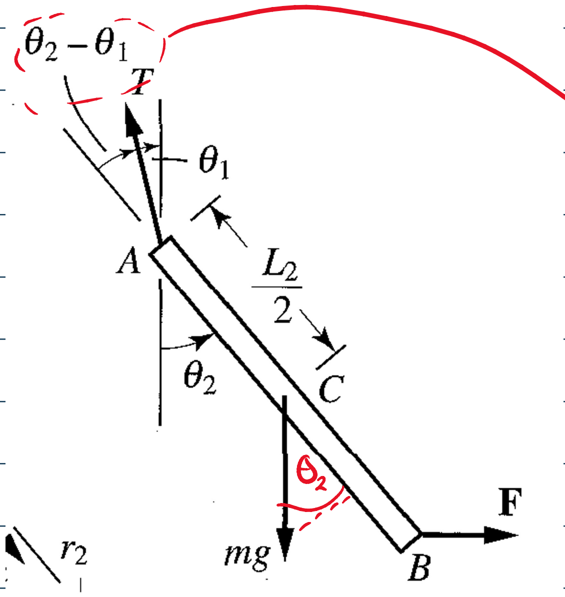


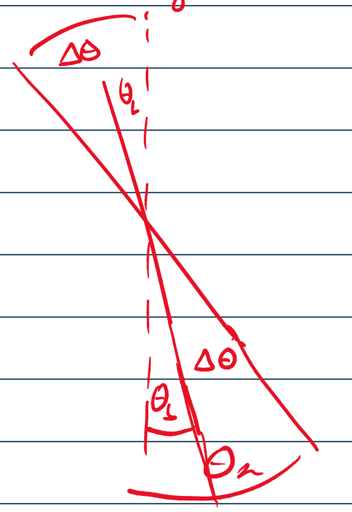

**Figura 7: Barra rígida sobre una cuerda.**

- Usar los desplazamientos angulares $\theta_1$ y $\theta_2$ para definir la posición, velocidad y aceleración del centro de masa $C$, en términos de los ejes del cuerpo $\hat{r}_2$ y $\hat{\theta}_2$

Se modela un diagrama de cuerpo libre en torno al centro de masa de la barra.




Se obtiene geométricamente




$\Rightarrow \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

Ahora podemos utilizar las leyes de Newton para hacer un análisis:

① $\sum F_{r_2} = m \cdot a_{r_2}$

② $\sum F_{\theta_2} = m \cdot a_{\theta_2}$

En el eje de $r_2$ se tiene:

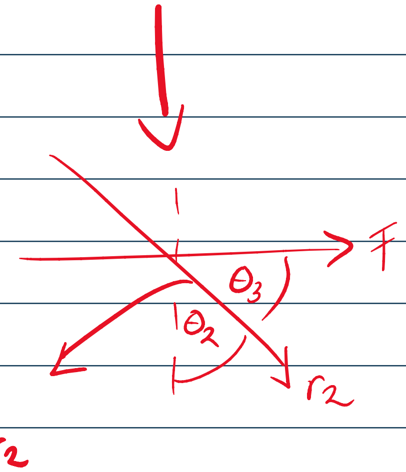
(−)

(+)

$r_2$

en el eje de $r_2$ se tiene: $\searrow_{r_2}$ (+)

③ $\sum F_{r_2} = m\cdot g\cdot \cos(\theta_2) + F\cdot \sin(\theta_2) - T\cdot \cos(\theta_2-\theta_1)$



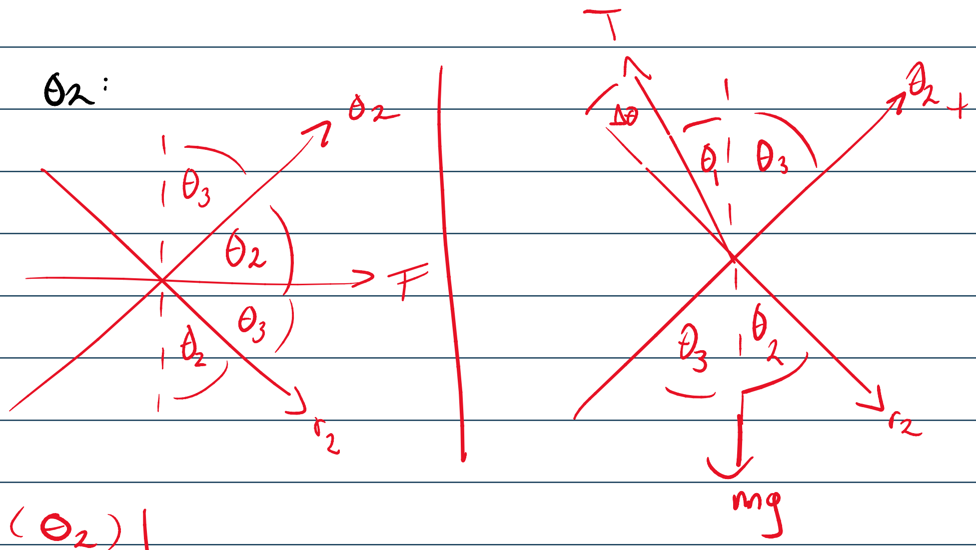

$F_{r_2} = \cos(\theta_3)$ ; con $\theta_3 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)$

$= \cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\to 0} \cdot \cos(\theta_2) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot \sin(\theta_2)$

$= \sin(\theta_2)$

y en el eje de $\theta_2$:




$\Rightarrow F_{\theta_2} = F\cdot\cos(\theta_2)$

$\Rightarrow T_{\theta_2} = T\cdot\cos(\theta_1+\theta_3) = T\cdot\cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2} - \theta_2\right)$

$= T\left[\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\to 0}\cdot\cos(\theta_1-\theta_2) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$

$$T_{\theta_2} = -T\cdot\sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$\Rightarrow mg_{\theta_2} = m\cdot g\cdot\cos(\theta_3)$$
$$= m\cdot g\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)$$
$$= m\cdot g\cdot\sin(\theta_2)$$

$$\therefore \sum F_{\theta_2} = m\cdot g\cdot\sin(\theta_2) + F\cdot\cos(\theta_2) - T\cdot\sin(\theta_1-\theta_2) \quad (4)$$

Ahora queda calcular el momento de la fuerza dado por:

$$M_c = I_o\cdot\alpha$$

respecto al centro de masa

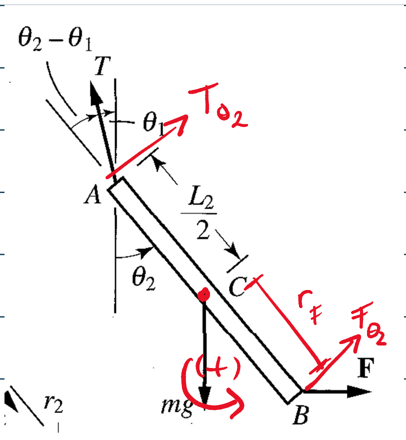
momento inercial

aceleración angular

y hay que encontrar las líneas de acción de fuerza respecto al centro de masa, donde:

$$M_i = r_i \times F_i \quad ; \quad i = F, T, m\cdot g$$

(1) $M_F = r_F \times F_F$




donde $r_F = \frac{L_2}{2} = cte.$

y $F_F = F_{\theta_2} = F\cdot\cos(\theta_2)$

$$\Rightarrow M_F = \frac{L_2}{2}\cdot F\cdot\cos(\theta_2)$$

(2) $M_{mg} = r_{mg}\times F_{mg}$ ; si: $r_{mg} = 0 \Rightarrow M_{mg} = 0$

(2) $M_{mg} = r_{mg} \times F_{mg}$ ; si $r_{mg} = 0 \Rightarrow M_{mg} = 0$

(3) $M_T = r_T \times F_T$

$$= \frac{L_2}{2} \times -T \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \frac{T}{2} \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\Rightarrow M_C = M_{mg} + M_T$$

$$= \frac{L_2}{2} \cdot F \cdot \cos(\theta_2) + \frac{L_2}{2} \cdot T \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \frac{L_2}{2} \cdot \left[ F \cdot \cos(\theta_2) + T \sin(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

Por definición se sabe que $M_c = I_o \cdot \alpha$

$$= I_o \cdot a_{\theta_2} \text{ ó } I_o \cdot \ddot{\theta}_2$$

donde $I_o = \int_{cuerpo} x^2 \, dm$ ; $dm = \frac{m}{L} \cdot dx$

$$= \frac{m}{L} \cdot \int_{-\frac{L_2}{2}}^{\frac{L_2}{2}} x^2 dx = \frac{m}{L} \cdot \left[ \frac{\left(\frac{L_2}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{L_2}{2}\right)^3}{3} \right]$$

$$= \frac{m}{L_2} \cdot \left[ \frac{L_2^3}{24} + \frac{L_2^3}{24} \right]$$

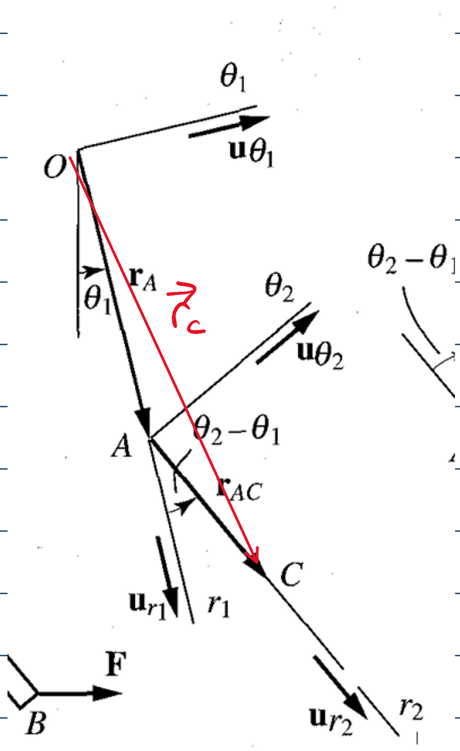
$$= \frac{m \cdot L_2^2}{12}$$

$$\Rightarrow \alpha = \ddot{\theta}_2 = \frac{M_c}{I_c}$$

$$\alpha = \frac{6}{m \cdot L_2} \cdot \left( F \cdot \cos(\theta_2) + T \sin(\theta_1 - \theta_2) \right)$$

$$\alpha = \frac{6}{m \cdot L_2} \cdot \left( F \cdot \cos(\theta_2) + T \sin(\theta_1 - \theta_2) \right)$$

Para encontrar el vector de posición se re-modela el problema:




Se define el vector de posición del centro de masa como la suma vectorial de $r_A$ y $r_{AC}$:

$$\vec{r}_C = \vec{r}_A + \vec{r}_{AC}$$

donde:

$$\vec{r}_A = L_1 \cdot \hat{r}_1$$

$$\wedge \quad \vec{r}_{AC} = \frac{L_2}{2} \cdot \hat{r}_2$$

$$\Rightarrow \vec{r}_C = L_1 \cdot \hat{r}_1 + \frac{L_2}{2} \cdot \hat{r}_2$$

por definición $\vec{v} = \dot{\vec{r}}_C = r_c \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta}$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_C = L_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_1 + \frac{L_2}{2} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \hat{\theta}_2$$

y $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -r\dot{\theta}^2 \cdot \hat{r} + r \cdot \ddot{\theta} \cdot \hat{\theta}$

$$\Rightarrow \vec{a}_C = -L_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \hat{r}_1 - \frac{L_2}{2} \dot{\theta}_2^2 \cdot \hat{r}_2 + L_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_1 + \frac{L_2}{2} \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot \hat{\theta}_2$$

Ahora queda reescribir $\hat{r}_1$ y $\hat{\theta}_1$ en función de $\hat{r}_2$ y $\hat{\theta}_2$

- Sea $\hat{r}_1 = \cos(\theta_2 - \theta_1) \cdot \hat{r}_2 - \sin(\theta_2 - \theta_1) \cdot \hat{\theta}_2$

- Sea $\hat{r}_1 = \cos(\theta_2 - \theta_1) \cdot \hat{r}_2 - \sin(\theta_2 - \theta_1) \cdot \hat{\theta}_2$

y $\hat{\theta}_1 = \cos(\theta_2 - \theta_1) \cdot \hat{\theta}_2 + \sin(\theta_2 - \theta_1) \cdot \hat{r}_2$

$$\Rightarrow \vec{a}_{c\hat{r}_2} = -L_1 \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1) \cdot \hat{r}_2 + L_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) \cdot \hat{r}_2 - \frac{L_2}{2} \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \hat{r}_2$$

$$\wedge \ \vec{a}_{c\hat{\theta}_2} = L_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) \cdot \hat{\theta}_2 + L_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1) \cdot \hat{\theta}_2 + \frac{L_2}{2} \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot \hat{\theta}_2$$