

Pruebas No Paramétricas: Chi Cuadrado

📊 ¿Qué es la Prueba Chi Cuadrado?

La **prueba Chi cuadrado (χ^2)** es una prueba no paramétrica que se utiliza para analizar datos categóricos. Evalúa si existe asociación entre variables categóricas o si las frecuencias observadas difieren significativamente de las frecuencias esperadas bajo una hipótesis específica.

⌚ Tipos de Prueba Chi Cuadrado

Chi Cuadrado de Bondad de Ajuste

Compara las frecuencias observadas en una sola variable categórica con las frecuencias esperadas según una distribución teórica o hipótesis.

Pregunta típica: "¿Los datos se ajustan a la distribución esperada?"

Chi Cuadrado de Independencia

Evalúa si dos variables categóricas están relacionadas o son independientes mediante una tabla de contingencia.

Pregunta típica: "¿Existe relación entre estas dos variables?"

⚠️ Fórmula General del Estadístico χ^2

El estadístico de prueba se calcula como:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Donde:

O_i = Frecuencia observada en la categoría i

E_i = Frecuencia esperada en la categoría i

Características:

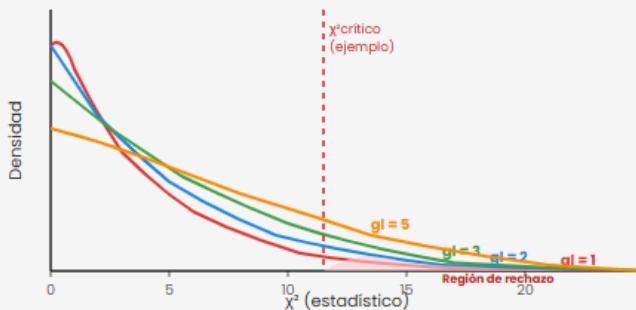
$\chi^2 \geq 0$ siempre (nunca negativo)

$\chi^2 = 0$ cuando $O_i = E_i$ perfectamente

Valores grandes de χ^2 indican gran discrepancia entre observado y esperado

Visualización de la Distribución Chi Cuadrado

Distribución χ^2 para diferentes grados de libertad:



Observaciones clave:

A mayor gl , la distribución se desplaza hacia la derecha y se hace más simétrica

Con $gl=1$ o $gl=2$, la curva es muy asimétrica (sesgada a la derecha)

La prueba siempre rechaza en la cola derecha (valores grandes de χ^2)

El valor crítico separa la región de no rechazo (izquierda) de la región de rechazo (derecha)

Grados de Libertad

Para Bondad de Ajuste:

$$gl = k - 1 - p$$

k = número de categorías

p = número de parámetros estimados de los datos

Usualmente: $gl = k - 1$

Para Independencia (Tabla de Contingencia):

$$gl = (r - 1)(c - 1)$$

r = número de filas

c = número de columnas

Hipótesis y Criterio de Decisión

Hipótesis:

H_0 : Las variables son independientes / Los datos se ajustan a la distribución esperada

H_1 : Las variables están relacionadas / Los datos NO se ajustan a la distribución esperada

Criterio de Decisión:

Rechazar H_0 si: $\chi^2_{\text{calculado}} > \chi^2_{\text{crítico}}$ (o si $p\text{-valor} < \alpha$)

No rechazar H_0 si: $\chi^2_{\text{calculado}} \leq \chi^2_{\text{crítico}}$ (o si $p\text{-valor} \geq \alpha$)

Nota: La prueba χ^2 es siempre de cola derecha (unilateral a la derecha) porque solo valores grandes de χ^2 indican desajuste o dependencia.

Condiciones de Validez

Requisitos para usar la prueba χ^2 :

Frecuencias esperadas: TODAS las E_i deben ser ≥ 5 (regla estricta) o al menos ≥ 1 con la mayoría ≥ 5

Independencia: Las observaciones deben ser independientes entre sí

Muestra aleatoria: Los datos deben provenir de una muestra aleatoria

Datos categóricos: Las variables deben ser categóricas (nominales u ordinales)

Frecuencias, no proporciones: Trabajar con conteos, no porcentajes

⚠ Si $E_i < 5$: Considerar combinar categorías adyacentes o usar la Corrección de Yates (para tablas 2×2), o usar la prueba exacta de Fisher.

Tabla de Valores Críticos χ^2 (selección)

gl	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
1	2.706	3.841	6.635
2	4.605	5.991	9.210
3	6.251	7.815	11.345
4	7.779	9.488	13.277
5	9.236	11.070	15.086

Chi Cuadrado de Bondad de Ajuste

Pasos para realizar la prueba:

Plantear hipótesis:

H_0 : Los datos se ajustan a la distribución especificada

H_1 : Los datos NO se ajustan a la distribución

Calcular frecuencias esperadas según la distribución teórica

Verificar condición: Todas las $E_j \geq 5$

Calcular el estadístico: $\chi^2 = \sum [(O_i - E_i)^2 / E_i]$

Determinar gl = k - 1 (k = número de categorías)

Comparar χ^2_{calc} con $\chi^2_{\text{crítico}}$ o usar p-valor

Conclusión

Ejemplo I: Bondad de ajuste - Distribución uniforme

Enunciado:

Una empresa cree que la preferencia por sus 4 productos es igual (distribución uniforme). Se encuestan 100 clientes y se obtienen los siguientes resultados:

Producto A: 20

Producto B: 30

Producto C: 25

Producto D: 25

¿Hay evidencia de que la preferencia NO es uniforme? ($\alpha = 0.05$)

Paso 1: Hipótesis

H_0 : La preferencia es uniforme (25% cada producto)

H_1 : La preferencia NO es uniforme

$\alpha = 0.05$

Paso 2: Frecuencias Esperadas

Si es uniforme: $E_j = 100/4 = 25$ para cada producto

Producto	Observado (O)	Esperado (E)
A	20	25
B	30	25
C	25	25
D	25	25

✓ Todas las $E_j \geq 5$: Condición cumplida

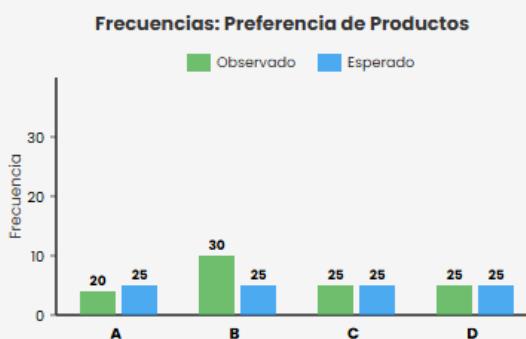
Paso 3: Cálculo del estadístico χ^2

$$\chi^2 = \frac{(20 - 25)^2}{25} + \frac{(30 - 25)^2}{25} + \frac{(25 - 25)^2}{25} + \frac{(25 - 25)^2}{25}$$

$$\chi^2 = \frac{25}{25} + \frac{25}{25} + 0 + 0 = 1 + 1 = 2$$

Visualización del Ejemplo 1:

Comparación: Observado vs Esperado



Las diferencias entre observado (verde) y esperado (azul) son pequeñas → $\chi^2 = 2$ es bajo → No rechazamos H_0

Paso 4: Valor crítico

$$gl = k - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\chi^2_{\text{crítico}}(3, 0.05) = 7.815$$

Paso 5: Decisión

Como $\chi^2_{\text{calc}} = 2 < 7.815 = \chi^2_{\text{crítico}}$, NO rechazamos H_0

Conclusión: Con $\alpha = 0.05$, no hay evidencia suficiente para rechazar que la preferencia esté distribuida uniformemente entre los cuatro productos. Las diferencias observadas pueden atribuirse al azar.

Ejemplo 2: Bondad de ajuste - Distribución específica

▲

Enunciado:

Un dado se lanza 120 veces. Queremos probar si el dado es justo (cada cara con probabilidad 1/6). Resultados:

Cara	1	2	3	4	5	6
Observado	15	18	22	17	25	23

Solución:

Frecuencia esperada: $E = 120/6 = 20$ para cada cara

$$\chi^2 = \frac{(15 - 20)^2}{20} + \frac{(18 - 20)^2}{20} + \frac{(22 - 20)^2}{20} + \frac{(17 - 20)^2}{20} + \frac{(25 - 20)^2}{20} + \dots$$

$$\chi^2 = \frac{25}{20} + \frac{4}{20} + \frac{4}{20} + \frac{9}{20} + \frac{25}{20} + \frac{9}{20} = \frac{76}{20} = 3.8$$

$$gl = 6 - 1 = 5, \chi^2_{\text{crítico}}(5, 0.05) = 11.070$$

Como $3.8 < 11.070$, NO rechazamos H_0

Conclusión: No hay evidencia suficiente para afirmar que el dado no es justo. Los datos son consistentes con un dado balanceado.

Chi Cuadrado de Independencia

Pasos para la prueba de independencia:

Plantear hipótesis:

H_0 : Las dos variables son independientes

H_1 : Las dos variables están relacionadas

Construir tabla de contingencia con totales marginales

Calcular frecuencias esperadas:

$$E_{ij} = \frac{(\text{Total fila}_i)(\text{Total columna}_j)}{\text{Total general}}$$

Verificar: Todas las $E_{ij} \geq 5$

Calcular χ^2 : Sumar sobre todas las celdas

$$gl = (r - 1)(c - 1)$$

Decisión y conclusión

Ejemplo 3: Independencia - Género y preferencia de marca

Enunciado:

Se quiere analizar si existe relación entre género (Hombre/Mujer) y preferencia por dos marcas (X/Y). Se encuestan 100 personas con los siguientes resultados:

	Marca X	Marca Y	Total
Hombres	30	20	50
Mujeres	10	40	50
Total	40	60	100

¿Existe relación entre género y preferencia de marca? ($\alpha = 0.05$)

Paso 1: Hipótesis

H_0 : Género y preferencia de marca son independientes

H_1 : Género y preferencia de marca están relacionados

$\alpha = 0.05$

Paso 2: Cálculo de Frecuencias Esperadas

Fórmula: $E_{ij} = (\text{Total fila} \times \text{Total columna}) / \text{Total general}$

$$E_{\text{Hombres},X} = \frac{50 \times 40}{100} = 20$$

$$E_{\text{Hombres},Y} = \frac{50 \times 60}{100} = 30$$

$$E_{\text{Mujeres},X} = \frac{50 \times 40}{100} = 20$$

$$E_{\text{Mujeres},Y} = \frac{50 \times 60}{100} = 30$$

	Marca X	Marca Y
Hombres	O=30, E=20	O=20, E=30
Mujeres	O=10, E=20	O=40, E=30

✓ Todas las $E_{ij} \geq 5$: Condición cumplida

Paso 3: Cálculo del estadístico χ^2

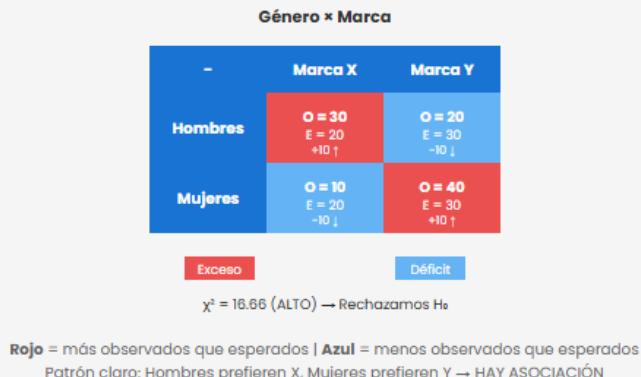
$$\chi^2 = \frac{(30 - 20)^2}{20} + \frac{(20 - 30)^2}{30} + \frac{(10 - 20)^2}{20} + \frac{(40 - 30)^2}{30}$$

$$\chi^2 = \frac{100}{20} + \frac{100}{30} + \frac{100}{20} + \frac{100}{30}$$

$$\chi^2 = 5 + 3.33 + 5 + 3.33 = 16.66$$

Visualización del Ejemplo 3:

Mapa de Calor: Frecuencias Observadas vs Esperadas



Paso 4: Valor crítico

$$gl = (r - 1)(c - 1) = (2 - 1)(2 - 1) = 1$$

$$\chi^2_{\text{crítico}}(1, 0.05) = 3.841$$

Paso 5: Decisión

Como $\chi^2_{\text{calc}} = 16.66 > 3.841 = \chi^2_{\text{crítico}}$, RECHAZAMOS H_0

Conclusión: Con $\alpha = 0.05$, existe evidencia significativa de que hay relación entre el género y la preferencia de marca. Los hombres tienden a preferir la marca X mientras que las mujeres prefieren la marca Y.

Ejemplo 4: Independencia - Educación y satisfacción laboral

Enunciado:

Se investiga si existe relación entre el nivel educativo y la satisfacción laboral. Datos de 200 personas:

Educación	Baja Satisf.	Media Satisf.	Alta Satisf.	Total
Secundaria	20	24	16	60
Universidad	30	40	30	100
Posgrado	10	16	14	40
Total	60	80	60	200

Solución (resumen):

Ejemplo de frecuencia esperada:

$$E_{\text{Secundaria}|\text{Baja}} = \frac{60 \times 60}{200} = 18$$

Calculando todas las frecuencias esperadas y el estadístico:

$$\chi^2 \approx 1.38$$

$$gl = (3-1)(3-1) = 4$$

$$\chi^2_{\text{crítico}}(4, 0.05) = 9.488$$

Como $1.38 < 9.488$, NO rechazamos H_0

Conclusión: No hay evidencia suficiente para afirmar que existe relación entre el nivel educativo y la satisfacción laboral.

Medidas de Asociación (cuando se rechaza H₀)

Cuando encontramos evidencia de asociación, podemos medir su fuerza:

Coeficiente de Contingencia (C):

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

Varía entre 0 (independencia total) y un máximo que depende del tamaño de la tabla.

V de Cramér (para tablas r×c):

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \times \min(r - 1, c - 1)}}$$

Varía entre 0 (independencia) y 1 (asociación perfecta).

Phi (ϕ) para tablas 2×2:

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

Interpretación general de V de Cramér:

0.00 – 0.10: Asociación muy débil

0.10 – 0.30: Asociación débil

0.30 – 0.50: Asociación moderada

0.50+: Asociación fuerte

Corrección de Yates (tablas 2×2)

Para tablas 2×2 con frecuencias esperadas pequeñas (entre 5 y 10), se puede aplicar la corrección de Yates:

$$\chi^2_{Yates} = \sum \frac{(|O_i - E_i| - 0.5)^2}{E_i}$$

Esta corrección reduce ligeramente el valor de χ^2 , haciendo la prueba más conservadora.

Nota: Si alguna $E_j < 5$ en una tabla 2×2, considerar usar la Prueba Exacta de Fisher en lugar de χ^2 .

Consideraciones Importantes

Ventajas de la prueba χ^2 :

- No paramétrica:** No requiere supuestos de normalidad
- Versátil:** Funciona con cualquier número de categorías
- Fácil interpretación:** Respuestas claras sobre independencia o ajuste
- Aplicable a datos nominales:** Funciona con variables categóricas puras

Limitaciones:

- Sensible al tamaño de muestra:** Con n muy grande, diferencias pequeñas pueden ser significativas
- No indica dirección:** Solo dice si hay relación, no cuál categoría es mayor
- No es causalidad:** Asociación \neq causa-efecto
- Requiere $E_j \geq 5$:** Puede necesitar combinar categorías

Errores Comunes

- Usar χ^2 con frecuencias esperadas menores a 5:** La prueba no es válida. Combinar categorías o usar prueba exacta de Fisher.
- Interpretar χ^2 como medida de fuerza de relación:** χ^2 solo indica si hay significancia estadística, no qué tan fuerte es la asociación. Usar V de Cramér o coeficiente de contingencia.
- Confundir independencia con causalidad:** Rechazar H_0 significa que hay asociación, NO que una variable causa la otra.
- Usar proporciones en lugar de frecuencias:** χ^2 requiere conteos absolutos, no porcentajes.
- No verificar supuestos:** Olvidar comprobar que todas las $E_j \geq 5$ antes de realizar la prueba.
- Calcular mal los grados de libertad:** Para independencia es $(r-1)(c-1)$, NO $r \times c$.
- Olvidar que es prueba de cola derecha:** Solo valores grandes de χ^2 llevan a rechazar H_0 .
- Usar χ^2 con datos ordinales con orden importante:** Considerar pruebas que aprovechen el orden (como correlación de Spearman).

Guía de Decisión Rápida

Situación	Tipo de Prueba	gl	Pregunta
Una variable categórica	Bondad de ajuste	$k - 1$	¿Se ajusta a la distribución esperada?
Dos variables categóricas	Independencia	$(r-1)(c-1)$	¿Las variables están relacionadas?
Tabla 2×2 con $E_j < 5$	Fisher Exacta	N/A	¿Las proporciones difieren?