

Pruebas No Paramétricas: Chi Cuadrado

¿Qué es la Prueba Chi Cuadrado?

La **prueba Chi cuadrado** (χ^2) es una prueba no paramétrica que se utiliza para analizar datos categóricos. Evalúa si existe asociación entre variables categóricas o si las frecuencias observadas difieren significativamente de las frecuencias esperadas bajo una hipótesis específica.

Tipos de Prueba Chi Cuadrado

Chi Cuadrado de Bondad de Ajuste

Compara las frecuencias observadas en una sola variable categórica con las frecuencias esperadas según una distribución teórica o hipótesis.

Pregunta típica: "¿Los datos se ajustan a la distribución esperada?"

Chi Cuadrado de Independencia

Evalúa si dos variables categóricas están relacionadas o son independientes mediante una tabla de contingencia.

Pregunta típica: "¿Existe relación entre estas dos variables?"

Fórmula General del Estadístico χ^2

El estadístico de prueba se calcula como:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Donde:

O_i = Frecuencia observada en la categoría i

E_i = Frecuencia esperada en la categoría i

Características:

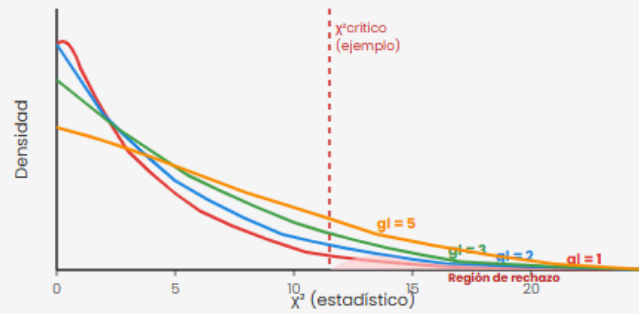
$\chi^2 \geq 0$ siempre (nunca negativo)

$\chi^2 = 0$ cuando $O_i = E_i$ perfectamente

Valores grandes de χ^2 indican gran discrepancia entre observado y esperado

Visualización de la Distribución Chi Cuadrado

Distribución χ^2 para diferentes grados de libertad:



Observaciones clave:

A mayor gl, la distribución se desplaza hacia la derecha y se hace más simétrica

Con gl=1 o gl=2, la curva es muy asimétrica (sesgada a la derecha)

La prueba siempre rechaza en la cola derecha (valores grandes de χ^2)

El valor crítico separa la región de no rechazo (izquierda) de la región de rechazo (derecha)

Grados de Libertad

Para Bondad de Ajuste:

$$gl = k - 1 - p$$

k = número de categorías

p = número de parámetros estimados de los datos

Usualmente: gl = k - 1

Para Independencia (Tabla de Contingencia):

$$gl = (r - 1)(c - 1)$$

r = número de filas

c = número de columnas

Hipótesis y Criterio de Decisión

Hipótesis:

H₀: Las variables son independientes / Los datos se ajustan a la distribución esperada

H₁: Las variables están relacionadas / Los datos NO se ajustan a la distribución esperada

Criterio de Decisión:

Rechazar H₀ si: $\chi^2_{\text{calculado}} > \chi^2_{\text{crítico}}$ (o si $p\text{-valor} < \alpha$)

No rechazar H₀ si: $\chi^2_{\text{calculado}} \leq \chi^2_{\text{crítico}}$ (o si $p\text{-valor} \geq \alpha$)

Nota: La prueba χ^2 es siempre de cola derecha (unilateral a la derecha) porque solo valores grandes de χ^2 indican desajuste o dependencia.

Condiciones de Validez

Requisitos para usar la prueba χ^2 :

Frecuencias esperadas: TODAS las E_i deben ser ≥ 5 (regla estricta) o al menos ≥ 1 con la mayoría ≥ 5

Independencia: Las observaciones deben ser independientes entre sí

Muestra aleatoria: Los datos deben provenir de una muestra aleatoria

Datos categóricos: Las variables deben ser categóricas (nominales u ordinales)

Frecuencias, no proporciones: Trabajar con conteos, no porcentajes


 **Si $E_i < 5$:** Considerar combinar categorías adyacentes o usar la Corrección de Yates (para tablas 2×2), o usar la prueba exacta de Fisher.

Tabla de Valores Críticos χ^2 (selección)

gl	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
1	2.706	3.841	6.635
2	4.605	5.991	9.210
3	6.251	7.815	11.345
4	7.779	9.488	13.277
5	9.236	11.070	15.086

Chi Cuadrado de Bondad de Ajuste

Pasos para realizar la prueba:

Plantear hipótesis:

H_0 : Los datos se ajustan a la distribución especificada

H_1 : Los datos NO se ajustan a la distribución

Calcular frecuencias esperadas según la distribución teórica

Verificar condición: Todas las $E_i \geq 5$

Calcular el estadístico: $\chi^2 = \sum [(O_i - E_i)^2 / E_i]$

Determinar gl = k - 1 (k = número de categorías)

Comparar χ^2_{calc} con $\chi^2_{\text{crítico}}$ o usar p-valor

Conclusión

Ejemplo 1: Bondad de ajuste – Distribución uniforme

Enunciado:

Una empresa cree que la preferencia por sus 4 productos es igual (distribución uniforme). Se encuestan 100 clientes y se obtienen los siguientes resultados:

Producto A: 20

Producto B: 30

Producto C: 25

Producto D: 25

¿Hay evidencia de que la preferencia NO es uniforme? ($\alpha = 0.05$)

Paso 1: Hipótesis

H_0 : La preferencia es uniforme (25% cada producto)

H_1 : La preferencia NO es uniforme

$\alpha = 0.05$

Paso 2: Frecuencias Esperadas

Si es uniforme: $E_i = 100/4 = 25$ para cada producto

Producto	Observado (o)	Esperado (E)
A	20	25
B	30	25
C	25	25
D	25	25

✓ Todas las $E_i \geq 5$: Condición cumplida

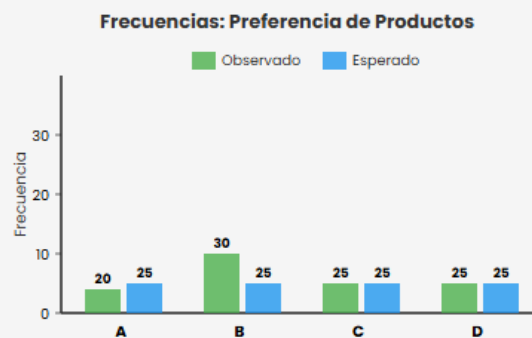
Paso 3: Cálculo del estadístico χ^2

$$\chi^2 = \frac{(20 - 25)^2}{25} + \frac{(30 - 25)^2}{25} + \frac{(25 - 25)^2}{25} + \frac{(25 - 25)^2}{25}$$

$$\chi^2 = \frac{25}{25} + \frac{25}{25} + 0 + 0 = 1 + 1 = 2$$

Visualización del Ejemplo 1:

Comparación: Observado vs Esperado



Las diferencias entre observado (verde) y esperado (azul) son pequeñas $\rightarrow \chi^2 = 2$ es bajo \rightarrow No rechazamos H_0


Paso 4: Valor crítico

$$gl = k - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\chi^2_{\text{crítico}}(3, 0.05) = 7.815$$

Paso 5: Decisión

Como $\chi^2_{\text{calc}} = 2 < 7.815 = \chi^2_{\text{crítico}}$, NO rechazamos H_0

 **Conclusión:** Con $\alpha = 0.05$, no hay evidencia suficiente para rechazar que la preferencia esté distribuida uniformemente entre los cuatro productos. Las diferencias observadas pueden atribuirse al azar.

Enunciado:

Un dado se lanza 120 veces. Queremos probar si el dado es justo (cada cara con probabilidad $1/6$). Resultados:

Cara	1	2	3	4	5	6
Observado	15	18	22	17	25	23

Solución:

Frecuencia esperada: $E = 120/6 = 20$ para cada cara

$$\chi^2 = \frac{(15 - 20)^2}{20} + \frac{(18 - 20)^2}{20} + \frac{(22 - 20)^2}{20} + \frac{(17 - 20)^2}{20} + \frac{(25 - 20)^2}{20} + \frac{(23 - 20)^2}{20}$$

$$\chi^2 = \frac{25}{20} + \frac{4}{20} + \frac{4}{20} + \frac{9}{20} + \frac{25}{20} + \frac{9}{20} = \frac{76}{20} = 3.8$$

gl = 6 - 1 = 5, $\chi^2_{\text{crítico}}(5, 0.05) = 11.070$

Como $3.8 < 11.070$, NO rechazamos H_0

✓ Conclusión: No hay evidencia suficiente para afirmar que el dado no es justo. Los datos son consistentes con un dado balanceado.

Chi Cuadrado de Independencia**Pasos para la prueba de independencia:****Plantear hipótesis:**

H_0 : Las dos variables son independientes

H_1 : Las dos variables están relacionadas

Construir tabla de contingencia con totales marginales

Calcular frecuencias esperadas:

$$E_{ij} = \frac{(\text{Total fila}_i)(\text{Total columna}_j)}{\text{Total general}}$$

Verificar: Todas las $E_{ij} \geq 5$

Calcular χ^2 : Sumar sobre todas las celdas

gl = $(r - 1)(c - 1)$

Decisión y conclusión

Enunciado:

Se quiere analizar si existe relación entre género (Hombre/Mujer) y preferencia por dos marcas (X/Y). Se encuestan 100 personas con los siguientes resultados:

	Marca X	Marca Y	Total
Hombres	30	20	50
Mujeres	10	40	50
Total	40	60	100

¿Existe relación entre género y preferencia de marca? ($\alpha = 0.05$)

Paso 1: Hipótesis

H₀: Género y preferencia de marca son independientes

H₁: Género y preferencia de marca están relacionados

$\alpha = 0.05$

Paso 2: Cálculo de Frecuencias Esperadas

Fórmula: $E_{ij} = (\text{Total fila} \times \text{Total columna}) / \text{Total general}$

$$E_{\text{Hombres},X} = \frac{50 \times 40}{100} = 20$$

$$E_{\text{Hombres},Y} = \frac{50 \times 60}{100} = 30$$

$$E_{\text{Mujeres},X} = \frac{50 \times 40}{100} = 20$$

$$E_{\text{Mujeres},Y} = \frac{50 \times 60}{100} = 30$$

	Marca X	Marca Y
Hombres	O=30, E=20	O=20, E=30
Mujeres	O=10, E=20	O=40, E=30

✓ Todas las $E_{ij} \geq 5$: Condición cumplida

Paso 3: Cálculo del estadístico χ^2

$$\chi^2 = \frac{(30 - 20)^2}{20} + \frac{(20 - 30)^2}{30} + \frac{(10 - 20)^2}{20} + \frac{(40 - 30)^2}{30}$$

$$\chi^2 = \frac{100}{20} + \frac{100}{30} + \frac{100}{20} + \frac{100}{30}$$

$$\chi^2 = 5 + 3.33 + 5 + 3.33 = 16.66$$

Visualización del Ejemplo 3:

Mapa de Calor: Frecuencias Observadas vs Esperadas

Género × Marca

	Marca X	Marca Y
Hombres	O = 30 E = 20 +10 ↑	O = 20 E = 30 -10 ↓
Mujeres	O = 10 E = 20 -10 ↓	O = 40 E = 30 +10 ↑

Exceso Déficit

$$\chi^2 = 16.66 \text{ (ALTO)} \rightarrow \text{Rechazamos } H_0$$

Rojo = más observados que esperados | **Azul** = menos observados que esperados
Patrón claro: Hombres prefieren X, Mujeres prefieren Y → HAY ASOCIACIÓN

Paso 4: Valor crítico

$$gl = (r - 1)(c - 1) = (2 - 1)(2 - 1) = 1$$

$$\chi^2_{\text{crítico}}(1, 0.05) = 3.841$$

Paso 5: Decisión

Como $\chi^2_{\text{calc}} = 16.66 > 3.841 = \chi^2_{\text{crítico}}$, RECHAZAMOS H_0

✅ **Conclusión:** Con $\alpha = 0.05$, existe evidencia significativa de que hay relación entre el género y la preferencia de marca. Los hombres tienden a preferir la marca X mientras que las mujeres prefieren la marca Y.

Ejemplo 4: Independencia – Educación y satisfacción laboral

Enunciado:

Se investiga si existe relación entre el nivel educativo y la satisfacción laboral. Datos de 200 personas:

Educación	Baja Satisf.	Media Satisf.	Alta Satisf.	Total
Secundaria	20	24	16	60
Universidad	30	40	30	100
Posgrado	10	16	14	40
Total	60	80	60	200

Solución (resumen):

Ejemplo de frecuencia esperada:

$$E_{\text{Secundaria Baja}} = \frac{60 \times 60}{200} = 18$$

Calculando todas las frecuencias esperadas y el estadístico:

$$\chi^2 \approx 1.38$$

$$gl = (3-1)(3-1) = 4$$

$$\chi^2_{\text{crítico}}(4, 0.05) = 9.488$$

Como $1.38 < 9.488$, NO rechazamos H_0

✅ **Conclusión:** No hay evidencia suficiente para afirmar que existe relación entre el nivel educativo y la satisfacción laboral.

🔑 Medidas de Asociación (cuando se rechaza H_0)

Cuando encontramos evidencia de asociación, podemos medir su fuerza:

Coeficiente de Contingencia (C):

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

Varía entre 0 (independencia total) y un máximo que depende del tamaño de la tabla.

V de Cramér (para tablas $r \times c$):

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \times \min(r - 1, c - 1)}}$$

Varía entre 0 (independencia) y 1 (asociación perfecta).

Phi (ϕ) para tablas 2×2 :

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

Interpretación general de V de Cramér:

- 0.00 - 0.10: Asociación muy débil
- 0.10 - 0.30: Asociación débil
- 0.30 - 0.50: Asociación moderada
- 0.50+: Asociación fuerte

⚙️ Corrección de Yates (tablas 2×2)

Para tablas 2×2 con frecuencias esperadas pequeñas (entre 5 y 10), se puede aplicar la corrección de Yates:

$$\chi^2_{\text{Yates}} = \sum \frac{(|O_i - E_i| - 0.5)^2}{E_i}$$

Esta corrección reduce ligeramente el valor de χ^2 , haciendo la prueba más conservadora.

Nota: Si alguna $E_i < 5$ en una tabla 2×2 , considerar usar la Prueba Exacta de Fisher en lugar de χ^2 .

💡 Consideraciones Importantes

Ventajas de la prueba χ^2 :

No paramétrica: No requiere supuestos de normalidad

Versátil: Funciona con cualquier número de categorías

Fácil interpretación: Respuestas claras sobre independencia o ajuste

Aplicable a datos nominales: Funciona con variables categóricas puras

Limitaciones:

Sensible al tamaño de muestra: Con n muy grande, diferencias pequeñas pueden ser significativas

No indica dirección: Solo dice si hay relación, no cuál categoría es mayor

No es causalidad: Asociación \neq causa-efecto

Requiere $E_i \geq 5$: Puede necesitar combinar categorías

⚠ Errores Comunes

Usar χ^2 con frecuencias esperadas menores a 5: La prueba no es válida. Combinar categorías o usar prueba exacta de Fisher.

Interpretar χ^2 como medida de fuerza de relación: χ^2 solo indica si hay significancia estadística, no qué tan fuerte es la asociación. Usar V de Cramér o coeficiente de contingencia.

Confundir independencia con causalidad: Rechazar H_0 significa que hay asociación, NO que una variable causa la otra.

Usar proporciones en lugar de frecuencias: χ^2 requiere conteos absolutos, no porcentajes.

No verificar supuestos: Olvidar comprobar que todas las $E_i \geq 5$ antes de realizar la prueba.

Calcular mal los grados de libertad: Para independencia es $(r-1)(c-1)$, NO $r \times c$.

Olvidar que es prueba de cola derecha: Solo valores grandes de χ^2 llevan a rechazar H_0 .

Usar χ^2 con datos ordinales con orden importante: Considerar pruebas que aprovechen el orden (como correlación de Spearman).

📄 Guía de Decisión Rápida

Situación	Tipo de Prueba	gl	Pregunta
Una variable categórica	Bondad de ajuste	$k - 1$	¿Se ajusta a la distribución esperada?
Dos variables categóricas	Independencia	$(r-1)(c-1)$	¿Las variables están relacionadas?
Tabla 2x2 con $E_i < 5$	Fisher Exacta	N/A	¿Las proporciones difieren?