

PROBABILIDAD CONDICIONAL

TEOREMA DE BAYES

Mg. Edward I. Terrones Gálvez

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Si tenemos dos eventos, A y B, la probabilidad condicional de que ocurra el evento A, dado que ha ocurrido el evento B, se representa como $P(A|B)$, y se calcula de la siguiente manera

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

donde $P(B) > 0$ Ej.:

$$P(B)$$

$$n(B)$$

- En una universidad la probabilidad de que un alumno apruebe matemática es de 65%, la probabilidad de que apruebe estadística es de 70% y la probabilidad de que apruebe matemática y estadística es de 55%. Calcular la probabilidad de que un alumno apruebe matemática dado que aprobó estadística?

I. Se encuentra en una facultad que del 70% de los alumnos matriculados son mujeres y el 18%, mujeres estudiantes de contabilidad. Si elegimos un estudiante al azar y resulta que es mujer, ¿Cuál es la probabilidad de que este estudiando contabilidad?

Sol:

2. El 18% de las familias de un barrio tienen vehículo propio, el 20% tiene vivienda de su propiedad y el 12% tiene vivienda y vehículo. ¿Cuál es la probabilidad?

- a) Tener vivienda, si se tiene vehículo
- b) No tener vehículo, si se tiene vivienda
- c) Si es que no tiene vivienda, que tenga vehículo
- d) No tener vehículo, dado que no tiene vivienda

Sol:

3. En un taller, se elaboran 1000 camisetas de fútbol. A partir de la siguiente tabla, calcular:

Equipo	Buenas	Defectuosas
Universitario	508	92
Alianza Lima	315	85

- a) La probabilidad de que una camiseta seleccionada al azar, esté defectuosa
- b) La probabilidad de que una camiseta seleccionada al azar, sea de Universitario
- c) Si un hincha compra una camiseta de Universitario, ¿cuál es la probabilidad de que esté defectuosa?
- d) Si un hincha compra una camiseta y se da cuenta de que está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea del Alianza Lima?

4. En una oficina hay 100 máquinas calculadoras, algunas de ellas son eléctricas(E) mientras que otras son manuales (M). De ellas unas son nuevas (N) y otras usadas (U). El número de máquinas por categoría está dada en la siguiente tabla.

Una persona entra a la oficina y escoge una maquina al azar, descubre que es nueva.
Cual es la probabilidad que sea eléctrica.

	E	M	
N	40	30	
U	20	10	

5. Un grupo de 500 ejecutivos es clasificado de acuerdo a las características de peso y a la incidencia del peso en la hipertensión. Se da la sgte tabla:

- a) Cual es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea Hipertensa.
b) Una persona elegida al azar tiene sobrepeso.

	Sobre peso	Peso normal	Bajo peso
Hipertenso	50	40	10
No hipertenso	75	225	100

- Cual es la probabilidad que también sea hipertensa?
c) Una persona elegida al azar no es hipertensa. Cual es la probabilidad que tenga peso normal?

La probabilidad de que un automóvil al que se le llena el tanque de gasolina necesite también un cambio de aceite es de 0,25 ; la de que requiera un nuevo filtro de aceite es de 0,40 y de que le haga falta tanto cambio de aceite como de filtro es de 0,14.

a) Si se debe cambiar el aceite, ¿cuál es la probabilidad de que necesite un filtro nuevo?

b) Si se necesita un filtro nuevo, ¿cuál es la probabilidad de que requiera un cambio de aceite?.

Una pareja de casados que viven en una cierta ciudad de los suburbios., la probabilidad de que el esposo vote en alguna elección es de 0,21, la de que su esposa lo haga, de 0,28 y la de que ambos voten, de 0,15. ¿Cuál es la probabilidad de

a) al menos un miembro de la pareja de casados vote?.

b) vote la esposa, dado que su esposo lo hace?.

c) vote un esposo, dado que su esposa no lo hace?.

SUCESOS INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTES

Sucesos Independientes: Dos o mas sucesos son independientes si el resultado de un suceso no afecta al otro; caso contrario son dependientes, es decir:

$$P(A \text{y} B \text{y} C \dots) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \dots$$

Ej.:

- ❑ Al lanzar dos dados, cual es la probabilidad de sacar dos cincos.
- ❑ Supongamos que se dispone de tres barajas de 52 cartas cada una. Se desea extraer tres cartas, una de cada baraja, ¿Cuál es la probabilidad de obtener un as, un rey de diamante y un cinco trébol?

Sucesos Dependientes: Si la ocurrencia o no ocurrencia de un evento en cualquier prueba afecta la probabilidad de otros eventos en otras pruebas, es decir que la probabilidad del segundo suceso depende del primer suceso, el del tercero de lo que haya sucedido en el primero y segundo y así sucesivamente, es decir.

$$P(A \cap B \cap C \dots) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \dots = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B) \dots \quad \text{Ej.}$$

- Probabilidad de obtener 3 ases, sacando sucesivamente tres cartas de una baraja de 52 carta sin reposición.

Sol.

- Suponga que se tiene una urna con veinte bolas, de las cuales, cinco son amarillas, ocho negras y siete rojas; se extrae 3 bolas sin reposicion, ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea amarilla, la segunda negra y la tercera roja?

Sol.

TEOREMA O REGLA DE BAYES

Teorema: Suponga que los eventos A_1, A_2, \dots, A_k , forma una partición del Ω ; es decir $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \Omega$; $A_i \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Entonces para cualquier evento B se tiene:

$$P(B) = \sum P(A_i) \cdot P(B/A_i) \quad \text{Probabilidad Total}$$

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_k) \cdot P(B/A_k)}$$

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum P(A_i) \cdot P(B/A_i)} \quad \text{Teorema de Bayes}$$

$P(A_i)$: Probabilidades a priori

$P(B/A_i)$: Probabilidad a posteriori

Ej: Un ensamblador de computadoras usa partes que provienen de 3 proveedores P1,P2 y P3. De 2000 partes recibidas 1000 provienen de P1, 600 de P2 y el resto de P3. De experiencias pasadas, el ensamblador sabe que las partes defectuosas que provienen de P1, P2 y P3 son respectivamente 3%, 4% y 5%. Si se elige una computadora al azar:

- a)Cual es la probabilidad de que contenga una parte defectuosa?
- b)Si contiene una parte defectuosa, Cual es la probabilidad de que haya sido del proveedor P2?

Sol:

Sea A_i : Parte proviene del proveedor P_i $i=1,2,3$

B: Parte defectuosa

$1000/2000$	A_1	0.03	$P(B/A_1)$	$= 0.15$	a) $P(B) = 0.037$
$600/2000$	A_2	0.04	$P(B/A_2)$	$= 0.12$	b) $P(A_2/B) = 0.12/0.037$ $= 0.3243$
$400/2000$	A_3	0.05	$P(B/A_3)$	$= 0.10$	$P(B) = 0.037$

EJERCICIOS

1. Se estima que la probabilidad de que una compañía B tenga éxito al comercializar un producto es de 0.95 si su competidora la compañía A no interviene en el mercado, y es de 0.15 si la Cía. A interviene en el mercado. Si se estima que A intervendría en el mercado con probabilidad de 0.7 .

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la Cía. B tenga éxito?

b) Si la compañía B no tuviera éxito, ¿en cuánto se estima la probabilidad de que A intervenga en el mercado?

2. La probabilidad de que Alicia estudie para su examen final de Estadística es 0.2 . Si estudia la probabilidad de que apruebe el examen es 0.8, en tanto que si no estudia la probabilidad es 0.5.

a) ¿Cuál es la probabilidad que Alicia apruebe estadística?.

b) Dado que Alicia aprobó su examen. ¿Cuál es la probabilidad de que haya estudiado?.

3. En una asignatura universitaria asisten a clase 100 de los 150 alumnos matriculados. Se sabe que aprueban el 90% de alumnos que asisten a clase y el 30% de los que no asisten. Se elige un alumno al azar. Calcular

a) La probabilidad de que haya aprobado

b) Se sabe que el alumno ha desaprobado, probabilidad que haya asistido a clase.

Gracias

