Prueba de Hipótesis para la Media y la Proporción

📊 ¿Qué es una Prueba de Hipótesis?

Una **prueba de hipótesis** es un procedimiento estadístico que permite decidir, con base en datos muestrales, si una afirmación sobre un parámetro poblacional es razonable o debe rechazarse. Es una herramienta fundamental para la **inferencia estadística** y toma de decisiones bajo incertidumbre.

🎯 Conceptos Fundamentales

Hipótesis Nula (H_0)

Afirmación inicial que se somete a prueba. Representa el status quo o la afirmación a contradecir.

Ejemplos:

$$H_0 : \mu = 70 \text{ kg}$$

$$H_0 : p = 0.40$$

$$H_0 : \mu \leq 100$$

Hipótesis Alternativa (H_1 o H_a)

Afirmación que contradice a H_0. Es lo que queremos probar o la afirmación del investigador.

Ejemplos:

$$H_1 : \mu \neq 70 \text{ kg (bilateral)}$$

$$H_1 : p > 0.40 \quad \text{(unilateral derecha)}$$

$$H_1 : \mu < 100 \quad \text{(unilateral izquierda)}$$

Otros conceptos clave:

Nivel de significancia (α): Probabilidad máxima de rechazar H_0 cuando es verdadera (error tipo I). Valores comunes: 0.05, 0.01, 0.10

Estadístico de prueba: Valor calculado a partir de los datos muestrales (Z, t, etc.)

Valor crítico: Punto que divide la región de rechazo de la región de no rechazo

p-valor: Probabilidad de obtener un resultado tan extremo o más extremo que el observado, **asumiendo que H_0 es verdadera**

Región crítica: Conjunto de valores del estadístico que llevan a rechazar H_0

⚠️ Tipos de Errores

	H_0 es Verdadera	H_0 es Falsa
No rechazamos H_0	✅ Decisión correcta (Confianza: 1-α)	❌ **Error Tipo II (β)** No detectar diferencia cuando existe
Rechazamos H_0	❌ **Error Tipo I (α)** Falsa alarma	✅ Decisión correcta (Potencia: 1-β)

📌 **Interpretación:**

Error Tipo I (α): Rechazar H_0 siendo verdadera. "Falso positivo". Lo controlamos con el nivel de significancia.

Error Tipo II (β): No rechazar H_0 siendo falsa. "Falso negativo". Depende del tamaño de muestra y la diferencia real.

Potencia (1-β): Probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa. Capacidad de detectar diferencias reales.

🔄 Tipos de Pruebas de Hipótesis

Bilateral (dos colas)

Hipótesis:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Región crítica: Ambos extremos

Usar cuando: Buscamos diferencia en cualquier dirección

Unilateral Derecha

Hipótesis:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Región crítica: Cola derecha

Usar cuando: Queremos probar si es mayor

Unilateral Izquierda

Hipótesis:

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

Región crítica: Cola izquierda

Usar cuando: Queremos probar si es menor

📋 Procedimiento de Prueba de Hipótesis (7 Pasos)

Plantear las hipótesis: Definir H_0 y H_1 claramente

Establecer el nivel de significancia: Elegir α (usualmente 0.05)

Identificar el tipo de prueba: Bilateral, unilateral derecha o izquierda

Seleccionar el estadístico de prueba: Z, t, etc., según el caso

Calcular el valor del estadístico: Usar los datos de la muestra

Tomar decisión:
- **Método del valor crítico:** Comparar estadístico con valor crítico
- **Método del p-valor:** Si p-valor < α, rechazar H_0

Interpretar en contexto: Conclusión en términos del problema original

📐 Prueba de Hipótesis para la Media

Caso 1: σ conocida (Prueba Z)

Condiciones:

Población normal o n ≥ 30 (Teorema Central del Límite)

Desviación estándar poblacional (σ) conocida

Muestra aleatoria e independiente

Estadístico de prueba:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Sigue distribución Normal(0,1)

Caso 2: σ desconocida (Prueba t de Student)

Condiciones:

Población aproximadamente normal (más crítico con n pequeño)

Desviación estándar poblacional (σ) desconocida, usamos s

Muestra aleatoria e independiente

Estadístico de prueba:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Sigue distribución t con (n-1) grados de libertad

💡 **Regla práctica:** Si n ≥ 30 y σ desconocida, la distribución t se aproxima a Z, pero es mejor usar t para ser más conservador.

📊 Valores Críticos y Regiones de Rechazo

Tipo de Prueba	α = 0.05	α = 0.01	Decisión
Bilateral (Z)	±1.96	±2.576	Rechazar si |Z| > valor crítico
Unilateral derecha (Z)	1.645	2.326	Rechazar si Z > valor crítico
Unilateral izquierda (Z)	-1.645	-2.326	Rechazar si Z < valor crítico
Nota: Para prueba t, los valores críticos dependen de los grados de libertad (n-1). Se consultan en tabla t-Student.			

Ejemplo 1: Prueba Bilateral para la Media (t-Student)

Enunciado:

Una empresa afirma que el peso promedio de sus productos es 70 kg. Para verificar esto, se toma una muestra aleatoria de 25 productos con los siguientes resultados:

- Media muestral: $\bar{x}$ = 72 kg
- Desviación estándar muestral: s = 8 kg
- Tamaño de muestra: n = 25

¿Hay evidencia suficiente para afirmar que el peso promedio difiere de 70 kg? Use α = 0.05.

Paso 1: Plantear hipótesis

$$H_0 : \mu = 70\,\text{kg}\,(\text{el peso promedio es } 70\,\text{kg})$$

$$H_1 : \mu \neq 70\,\text{kg}\,(\text{el peso promedio difiere de } 70\,\text{kg})$$

Tipo de prueba: Bilateral (porque buscamos diferencia en cualquier dirección)

Paso 2: Nivel de significancia

α = 0.05

Para prueba bilateral: α/2 = 0.025 en cada cola

Paso 3: Seleccionar estadístico de prueba

Usamos **t de Student** porque:

- σ (desviación poblacional) es desconocida
- n = 25 < 30 (muestra pequeña)
- Asumimos población aproximadamente normal

Grados de libertad: gl = n - 1 = 25 - 1 = 24

Paso 4: Calcular el estadístico

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{72 - 70}{8/\sqrt{25}} = \frac{2}{8/5} = \frac{2}{1.6} = 1.25$$

Paso 5: Decisión - Método del Valor Crítico

Valor crítico: t(0.025, 24) = ±2.064 (de tabla t-Student)

Regla de decisión: Rechazar H_0 si |t| > 2.064

Resultado: |1.25| = 1.25 < 2.064

✅ **NO rechazamos H_0**

📋 Paso 6: Decisión - Método del p-valor

Cálculo del p-valor:

Para $t = 1.25$ con 24 gl en prueba bilateral:

p-valor $= 2 \times P(t > 1.25) \approx 2 \times 0.1115 \approx 0.223$

Regla de decisión: Rechazar H_0 si p-valor $< \alpha$

Resultado: $0.223 > 0.05$

✅ **NO rechazamos H_0**

📋 Paso 7: Interpretación

✅ **Conclusión:**

Con un nivel de significancia del 5%, **no hay evidencia estadística suficiente** para afirmar que el peso promedio de los productos difiere de 70 kg. La diferencia observada de 2 kg puede atribuirse a variación aleatoria del muestreo.

Nota importante: Esto NO significa que $\mu = 70$ kg, solo que no tenemos suficiente evidencia para rechazar esa afirmación.

📚 Ejemplo 2: Prueba Unilateral Derecha para la Media ▲

🎯 Enunciado:

Un fabricante afirma que su nuevo proceso aumenta la resistencia promedio de un material, que tradicionalmente ha sido de 500 MPa. Se prueban 40 muestras con el nuevo proceso:

- Media muestral: $\bar{x} = 515$ MPa
- Desviación estándar poblacional: $\sigma = 50$ MPa (conocida)
- $n = 40$

¿Hay evidencia de que el nuevo proceso aumenta la resistencia? Use $\alpha = 0.01$.

📋 Paso 1: Plantear hipótesis

$$H_0 : \mu \leq 500 \text{ MPa (no hay aumento)}$$

$$H_1 : \mu > 500 \text{ MPa (hay aumento en resistencia)}$$

Tipo de prueba: Unilateral derecha (queremos probar si es MAYOR)

📋 Paso 2 y 3: α y estadístico

$\alpha = 0.01$ (solo en cola derecha)

Usamos **Z** porque σ es conocida y $n \geq 30$

📋 Paso 4: Calcular estadístico

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{515 - 500}{50/\sqrt{40}} = \frac{15}{7.91} = 1.90$$

📋 Paso 5: Decisión

Valor crítico: Z(0.01) = 2.326

Resultado: 1.90 < 2.326

p-valor: P(Z > 1.90) = 0.0287

Resultado: 0.0287 > 0.01

✅ **NO rechazamos H_0**

📋 Interpretación

Conclusión: Con α = 0.01, no hay evidencia suficiente para afirmar que el nuevo proceso aumenta la resistencia promedio del material por encima de 500 MPa.

Nota: Si hubiéramos usado α = 0.05, sí rechazaríamos H_0 (porque p-valor = 0.0287 < 0.05). Esto muestra la importancia del nivel de significancia elegido.

📐 Prueba de Hipótesis para la Proporción

Condiciones para usar la aproximación normal:

$np_0 \geq 5$ y $n(1-p_0) \geq 5$ (condición de tamaño de muestra)

Muestra aleatoria

Observaciones independientes (n < 5% de la población)

Estadístico de prueba:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Donde:

$\hat{p}$ = proporción muestral = x/n

p_0 = proporción bajo H_0

n = tamaño de muestra

Ejemplo 3: Prueba Bilateral para la Proporción

Enunciado:

Una empresa afirma que el 40% de sus clientes prefieren el producto A. Un estudio de mercado encuesta a 200 clientes y encuentra que 90 prefieren el producto A. ¿Hay evidencia de que la proporción real difiere del 40%? Use $\alpha = 0.05$.

Paso 1: Verificar condiciones

$np_0 = 200(0.40) = 80 \geq 5$ ✓

$n(1-p_0) = 200(0.60) = 120 \geq 5$ ✓

✅ **Podemos usar la aproximación normal**

Paso 2: Plantear hipótesis

$$H_0 : p = 0.40$$

$$H_1 : p \neq 0.40$$

Tipo: Bilateral ($\alpha/2 = 0.025$ en cada cola)

Paso 3: Calcular proporción muestral

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{90}{200} = 0.45$$

Paso 4: Calcular el estadístico Z

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

$$Z = \frac{0.45 - 0.40}{\sqrt{\frac{0.40(0.60)}{200}}}$$

$$Z = \frac{0.05}{\sqrt{\frac{0.24}{200}}} = \frac{0.05}{\sqrt{0.0012}} = \frac{0.05}{0.0346} = 1.44$$

Paso 5: Decisión - Método del Valor Crítico

Valor crítico: $Z(0.025) = \pm 1.96$ (bilateral)

Regla de decisión: Rechazar H_0 si $|Z| > 1.96$

Resultado: $|1.44| = 1.44 < 1.96$

✅ **NO rechazamos H_0**

📋 Paso 6: Decisión - Método del p-valor

Cálculo del p-valor:

Para Z = 1.44 en prueba bilateral:

p-valor = 2 × P(Z > 1.44) = 2 × 0.0749 = 0.1498

Regla de decisión: Rechazar H_0 si p-valor < α

Resultado: 0.1498 > 0.05

✅ **NO rechazamos H_0**

📋 Paso 7: Interpretación

✅ **Conclusión:**

Con un nivel de significancia del 5%, no hay evidencia estadística suficiente para afirmar que la proporción real de clientes que prefieren el producto A difiere del 40%. La diferencia observada (45% vs 40%) puede atribuirse a variación aleatoria del muestreo.

📚 Ejemplo 4: Prueba Unilateral para la Proporción ▲

🎯 Enunciado:

Un candidato político afirma que tiene el apoyo de más del 50% de los votantes. Una encuesta aleatoria de 400 votantes muestra que 220 lo apoyan. ¿Hay evidencia suficiente para respaldar su afirmación? Use α = 0.05.

📋 Paso 1: Verificar condiciones

$np_0 = 400(0.50) = 200 \geq 5$ ✓

$n(1-p_0) = 400(0.50) = 200 \geq 5$ ✓

✅ **Podemos usar la aproximación normal**

📋 Paso 2: Plantear hipótesis

$$H_0 : p \leq 0.50 \text{ (no tiene mayoría)}$$

$$H_1 : p > 0.50 \text{ (tiene mayoría)}$$

Tipo: Unilateral derecha

📋 Paso 3: Calcular proporción y estadístico

$$\hat{p} = \frac{220}{400} = 0.55$$

$$Z = \frac{0.55 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.50(0.50)}{400}}} = \frac{0.05}{\sqrt{0.000625}} = \frac{0.05}{0.025} = 2.00$$

📋 Paso 4: Decisión

Valor crítico: $Z(0.05) = 1.645$ (unilateral derecha)

Resultado: $2.00 > 1.645$

p-valor: $P(Z > 2.00) = 0.0228$

Resultado: $0.0228 < 0.05$

❌ **RECHAZAMOS H_0**

📋 Interpretación

✅ **Conclusión:**

Con un nivel de significancia del 5%, **sí hay evidencia estadística suficiente** para respaldar la afirmación del candidato de que tiene el apoyo de más del 50% de los votantes. La proporción muestral de 55% es significativamente mayor que 50%.

📊 Tabla Resumen: ¿Qué Prueba Usar?

Parámetro	Condición	Prueba	Estadístico
Media (μ)	σ conocida $n \geq 30$ o población normal	Prueba Z	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$
	σ desconocida Población aprox. normal	Prueba t	$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$
Proporción (p)	$np_0 \geq 5$ y $n(1-p_0) \geq 5$	Prueba Z	$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

⚠️ Errores Comunes

❌ **Confundir las hipótesis:** H_0 siempre contiene la igualdad (=, ≤, ≥). H_1 es la que queremos probar.

❌ **Malinterpretar el p-valor:** NO es la probabilidad de que H_0 sea cierta. Es la probabilidad de obtener resultados tan extremos si H_0 fuera cierta.

❌ **Malinterpretar "no rechazar H_0":** NO significa que H_0 sea verdadera, solo que no hay evidencia suficiente para rechazarla.

❌ **Usar la prueba incorrecta:** Usar Z cuando σ es desconocida y $n < 30$, o no verificar condiciones para proporciones.

❌ **Olvidar verificar supuestos:** Normalidad (especialmente con n pequeño), independencia de observaciones.

❌ **Confundir prueba unilateral con bilateral:** Elegir incorrectamente según el contexto del problema.

❌ **Significancia estadística ≠ significancia práctica:** Una diferencia puede ser estadísticamente significativa pero no importante en la práctica.

❌ **Cambiar α después de ver los datos:** El nivel de significancia debe establecerse ANTES de recolectar datos.

❌ **Usar pruebas múltiples sin ajustar α:** Hacer muchas pruebas aumenta la probabilidad de error tipo I.

❌ **Confundir los errores:** Error tipo I = rechazar H_0 verdadera. Error tipo II = no rechazar H_0 falsa.

💡 Consejos Prácticos

Siempre plantea las hipótesis antes de recolectar datos para evitar sesgos.

Verifica los supuestos de la prueba que vas a usar (normalidad, tamaño de muestra, etc.).

Usa ambos métodos (valor crítico y p-valor) para fortalecer tu conclusión.

Interpreta en contexto: No solo digas "rechazamos H_0", explica qué significa en términos del problema.

Considera el tamaño del efecto: Una diferencia estadísticamente significativa puede no ser prácticamente importante.

Reporta el p-valor exacto cuando sea posible, no solo "$p < 0.05$".

Para n pequeño (< 30) con σ desconocida: Siempre usa t, no Z.

Para proporciones: Siempre verifica $np_0 \geq 5$ y $n(1-p_0) \geq 5$ antes de proceder.

🎓 Resumen del Proceso

📝 **Antes de empezar:**

- Define claramente el problema
- Identifica el parámetro de interés
- Determina qué quieres probar
- Elige α apropiado

🔍 **Durante la prueba:**

- Verifica condiciones/supuestos
- Calcula cuidadosamente
- Usa ambos métodos de decisión
- Documenta todos los pasos

✅ **Al concluir:**

- Interpreta en contexto
- Considera significancia práctica
- Reconoce limitaciones
- No sobregeneralices

⚖️ **Recuerda:**

- No rechazar ≠ Aceptar
- p-valor no es $P(H_0)$
- Correlación ≠ Causalidad
- Contexto es crucial