Aula 18

Carlos Amaral
Fonte: Cristiano Quevedo Andrea
UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná
DAELT - Departamento Acadêmico de Eletrotécnica

Curitiba, Junho de 2012

Comparação entre técnicas de controle

Técnica	**Número de Entradas**	**Número de Saídas**	**Necessidade de Integrar e derivar**	**Número de Circuitos de Controle**	**Observação**
Lugar das Raízes (Laplace)	1	1	sim	1	Incerteza do controle para plantas acima de segunda ordem
Frequência (Bode e Nyquist)	1	1	sim	1	
Tempo (Ziegler-Nichols)	1	1	sim	1	
Espaço de Estados	infinito	infinito	não	= número de variáveis	

Resumo

Considere um sistema definido por,

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

sendo $u(t)$ o sinal de entrada e $y(t)$ o sinal de saída. Esta equação pode ser escrita como,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

Levando em conta as duas expressões apresentadas anteriormente serão apresentadas as formas canônicas controlável, observável e diagonal.

Formas Canônicas

Podemos utilizar as formas canônicas para encontrar a representação em espaço de estado para uma dada função de transferência.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

Forma Canônica Controlável

Zeros

identidade

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}} \\ -a_n & \begin{matrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \mid b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \mid \cdots \mid b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Forma Canônica Observável

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Considere a seguinte função de transferência,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

A forma canônica diagonal para este sistema é dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & & & 0 \\ & -p_2 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Na forma canônica de Jordan consideramos a seguinte função de transferência,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)^3 (s+p_4)(s+p_5)\cdots(s+p_n)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

e a forma canônica de Jordan é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & -p_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Controlabilidade

- Um sistema é dito ser controlável em um instante t_0 se for possível, por meio de um vetor de controle, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado num intervalo de tempo finito.

Seja o sistema contínuo tempo dado por:

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

O estado da equação descrita acima é dito ser controlável em $t = t_0$ se for possível construir um sinal de controle não-restrito capaz de transferir o sistema do estado inicial para um estado final em um intervalo de tempo finito $t_0 < t < t_f$. Se todos os estados forem controláveis o sistema é dito ser de estados completamente controláveis.

- A condição para que o sistema descrito em (1) seja controlável é que a matriz de controlabilidade dada abaixo seja de posto completo.

$$\Phi_{Crt} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (2)$$

- Para ser de posto completo, basta a matriz Φ_{Crt} possuir todas as colunas linearmente independente.

- Verifiquem se o sistema descrito abaixo é controlável.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u$$

Resposta:

$$\Phi_{Crt} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\phi crt.) = \det \begin{bmatrix} 1 & \\ & [AB] \\ 0 & \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

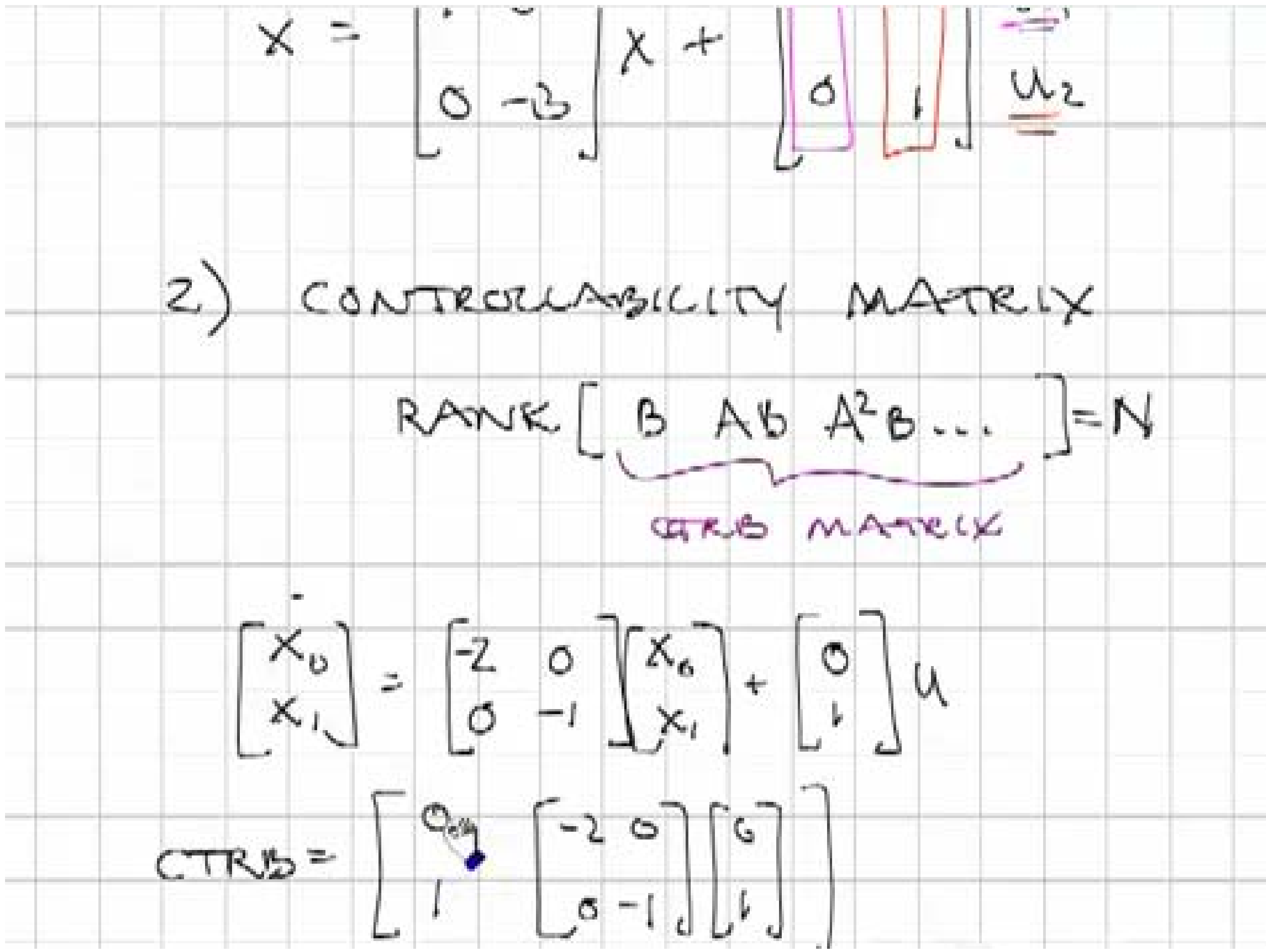
Logo o sistema não é controlável!

No Matlab utilizamos o comando **ctrb**: $CO = crtb(A, B)$

```
>> A = [1 1; 0 -1]

A =

     1     1
     0    -1

>> B = [1 ; 0]

B =

     1
     0

>> CO = crtb(A, B)
```

Exemplo

http://www.youtube.com/watch?v=NZbfNGgcluE&list=UUMTtePMuQMLsSulV4MInFYA&index=7&feature=plcp



EXERCÍCIOS

Petrobras 2012

Sabe-se que qualquer sistema linear e invariante no tempo pode ser descrito pela sua equação de estados

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = CX(t) + Du(t)$$

Então, para quais valores das matrizes A e B o sistema **NÃO** poderá ser estabilizado utilizando um controlador por realimentação de estados?

(A) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(B) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(C) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Resp. → (D) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

(E) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

```
>> A=[2 0 0;0 2 0; 0 0 -4];
>> B = [2;0;5];
>> ctrb(A,B)

ans =

    2    4    8
    0    0    0
    5  -20   80
```

EXERCÍCIOS

Verifique se os sistemas são é controláveis

(a)

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\text{Resp: } \det(\phi crt.) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

O sistema não é controlável!

(b)

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \\ d(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$\text{Resp: } \det(\phi crt.) = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -80 \\ 2 & -8 & -18 \end{bmatrix} = -580$$

, dif de 0, logo o sistema é controlável!

Observabilidade

Um sistema é dito ser observável no instante t_0 se, com o sistema num estado $x(t_0)$ qualquer, for possível determinar este estado a partir da observação da saída durante um intervalo de tempo finito.

Considere o sistema contínuo invariante no tempo descrito na forma de espaço de estado dado por,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{3}$$

O sistema é dito observável se qualquer estado $x(t_0)$ pode ser determinado a partir da observação de $y(t)$ durante um intervalo de tempo finito $t_0 < t < t_f$.

- A condição para o sistema descrito em (3) ser observável é que a matriz de observabilidade descrita abaixo possua posto completo.

$$\Phi_{Obs} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

- Para ser de posto completo, basta a matriz Φ_{Obs} possuir todas as colunas linearmente independente.

- Verifique se o sistema descrito abaixo é observável.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Resposta:

$$\Phi_{Obs} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\det(\phi_{Obs.}) = \det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = 1$$

Logo o sistema é observável!

- No Matlab utilizamos o comando **obsv**: *OB* = *obsv* (*A*, *C*)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [1 1; -2 -1]

A =

     1     1
    -2    -1

>> C = [1 0]

C =

     1     0
```

```
>> OB = obsv (A, C)

OB =

     1     0
     1     1
>> det(OB)

ans =

     1

% Sistema observável
```

http://www.youtube.com/watch?v=j5xQfH9FCMc&list=UUMTtePMuQMLsSulV4MInFYA&index=8&feature=plcp

2) OBSV MATRIX

$$\text{RANK}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{bmatrix} = N$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

$$\text{OBSV} = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \end{array}\right] & \begin{array}{l} C \\ CA \end{array} \end{array}$$

EXERCÍCIOS

Verifique se o sistema é observável

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resp: } \det(L) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = 1$$

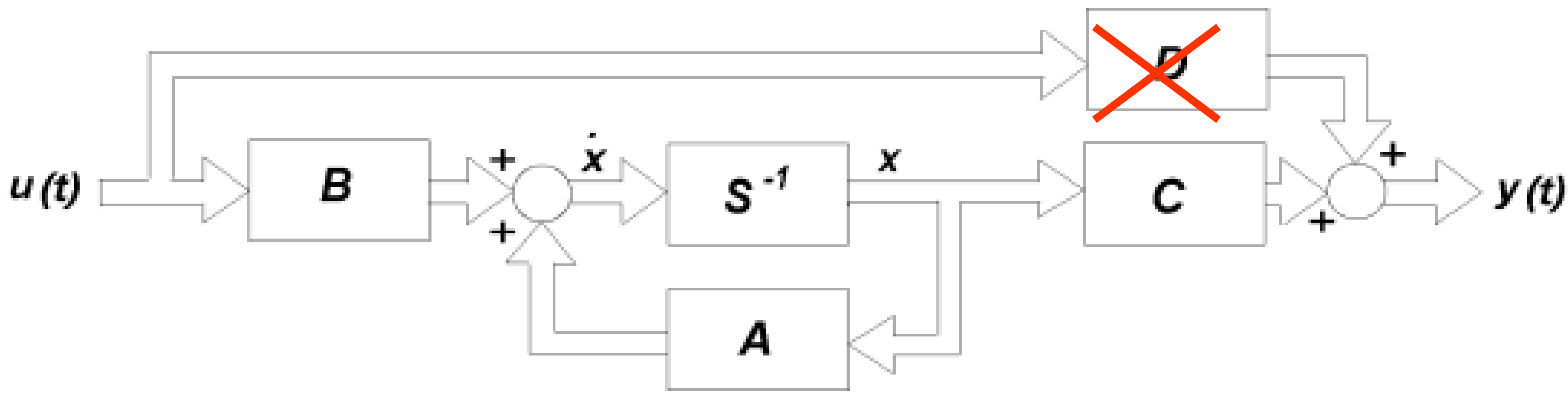
O sistema é observável!

- Dado um sistema em espaço de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

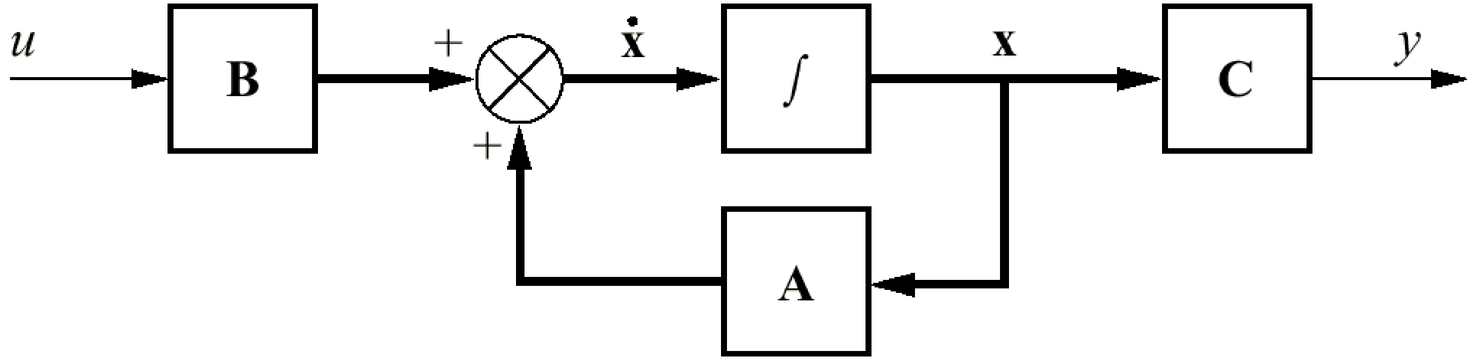
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \cancel{\mathbf{D}\mathbf{u}}$$

D = 0 (maioria das aplicações)

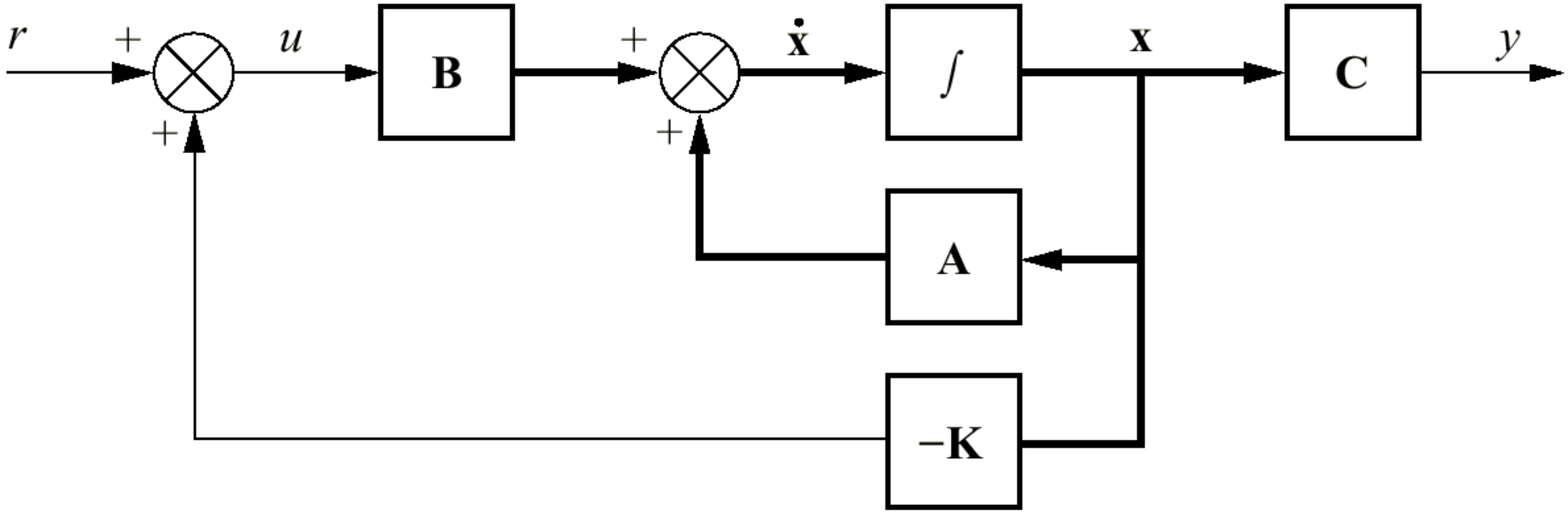


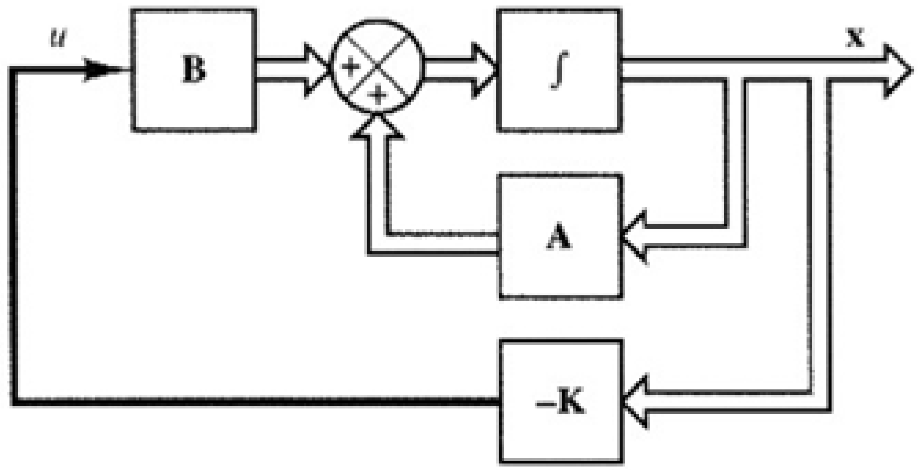
- Dado um sistema em espaço de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$



Aplicando-se um controle de malha fechada:





- A lei de controle de realimentação dos estados é dada por,

$$u(t) = -Kx(t) \tag{5}$$

Número de entradas (m)

(mxn)

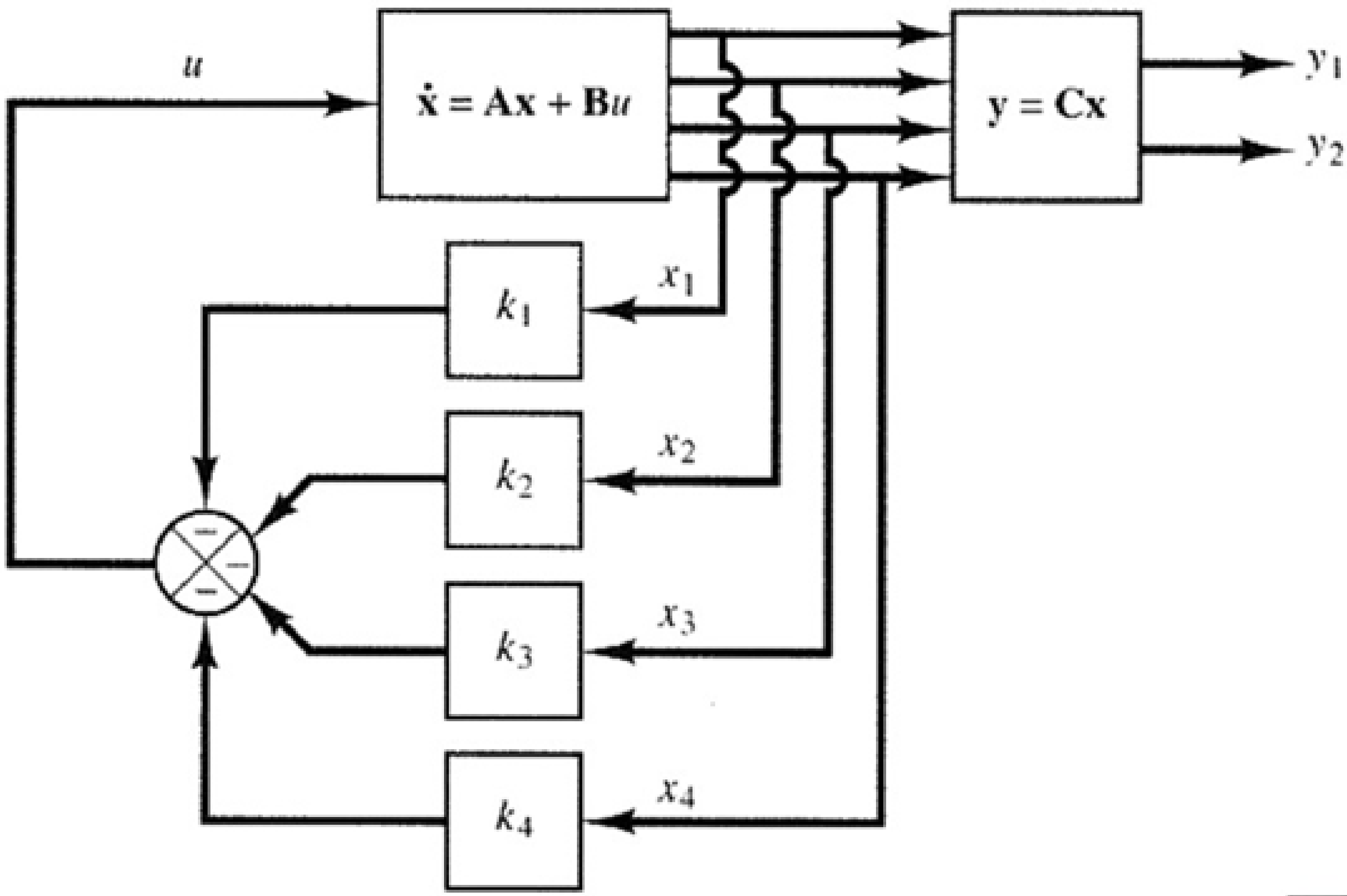
Número de estados (n)

- Então para um sistema dado em $x(t) = Ax(t) + Bu(t)$ temos,

$$x(t) = (A - BK)x(t) \tag{6}$$

DIAGRAMA DE BLOCOS

Caso o sistema seja controlável, podemos alocar os pólos de malha fechada em qualquer posição do plano complexo *s* esquerdo. Neste processo podemos obter um sistema em malha fechada estável e também garantir desempenho transitório e em regime.



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

ETAPAS PARA O PROJETO DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

(C é igual à identidade, o que significa que a saída mede diretamente todos os estados do sistema)

1- Verificar se o sistema é controlável. Se o sistema for completamente controlável seguir os próximos passos.

2- Utilizando os valores desejados para os autovalores (pólos de malha fechada desejados), escrever o polinômio característico,

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \qquad (7)$$

determinar os valores de $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

3- Igualar

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$det|sI - A + BK| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \qquad (8)$$

e encontra o valor dos ganhos *Ks* que formam o controlador *K* .

Exercício 1

(http://www.youtube.com/watch?v=9hzrYKntYG0&feature=BFa&list=UUMTtePMuQMLsSuIV4MInFYA):

Dada a função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + 4s + 1}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 5% e um tempo de pico de 0,3 s:

Exercício 1

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + 4s + 1}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

FORMA CANÔNICA CONTROLÁVEL

identidade

Zeros

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}} \\ -a_n & \begin{matrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \;\vdots\; b_{n-1} - a_{n-1}b_0 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + b_0 u$$

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Exercício 1

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + 4s + 1}$$

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Verificando a controbabilidade:

$$\Phi_{Crt} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\phi crt.) = \det \begin{bmatrix} 0 & \\ & [AB] \\ 1 & \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = -1$$

Resposta: SIM! O sistema é controlável

Exercício 1

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + 4s + 1}$$

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$u(t) = -K.x(t)$ = -[k1 k2].x(t)

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k1 & -k2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Exercício 1

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + 4s + 1}$$

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k1 & -k2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-k1 & -4-k2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + (4+k2)s + (1 + k1)}$$

Os ganhos k1 e k2 me permite colocar os polos em qualquer ligar do plano 'S'!!!

Exercício 1

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + 4s + 1}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 5% e um tempo de pico de 0,3 s:

$$\zeta = \frac{-\ln(P.O./100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(P.O./100)}} = 0.69$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \longrightarrow Wn = 14.46$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s)_{\text{desejado}} = \frac{1}{S^2 + 20s + 209}$$

Exercício 1

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + 4s + 1}$$

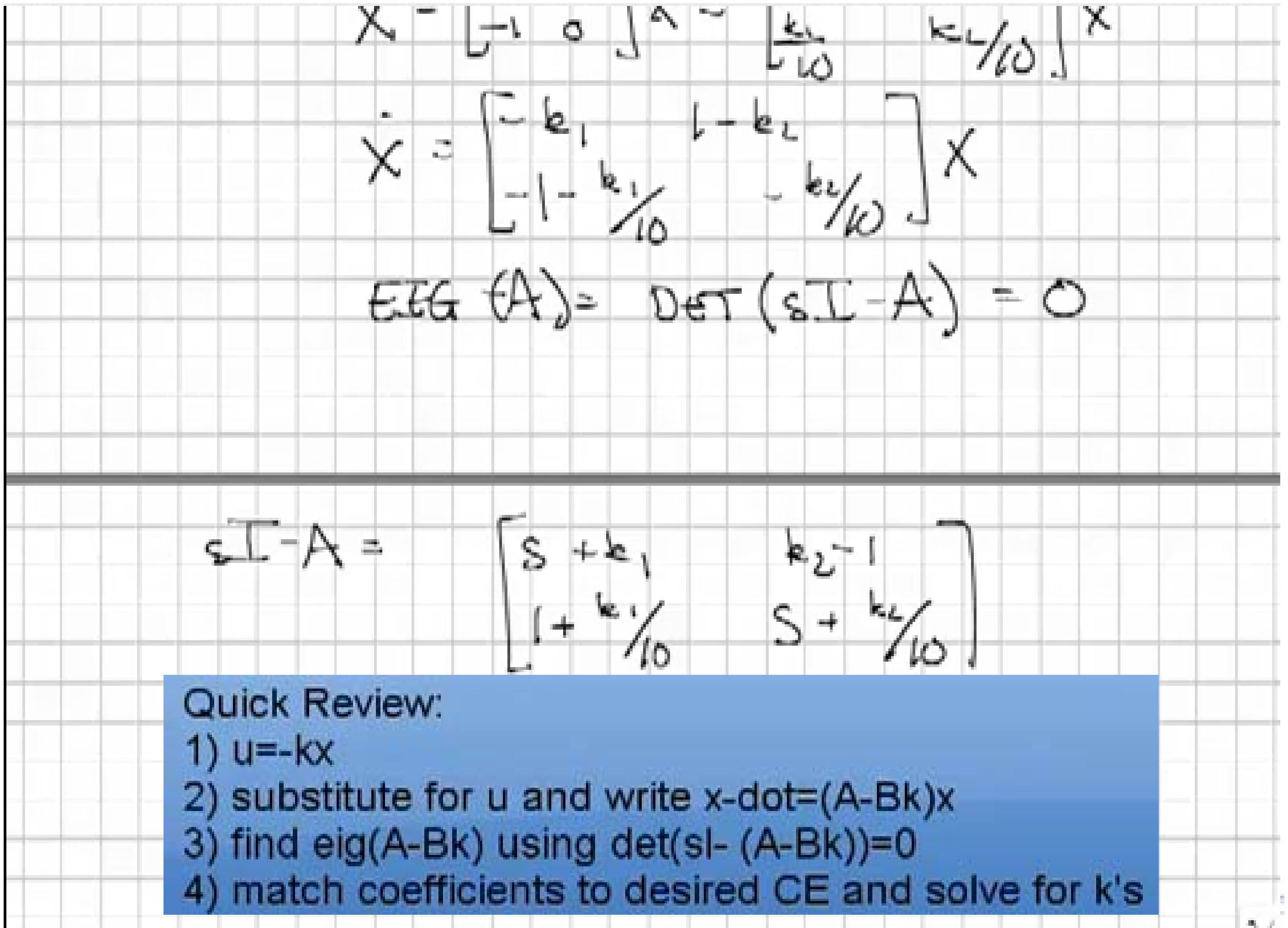
Igualando G(s) desejado com G(s) original + ganhos

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + (4+k2)s + (1 + k1)} = G(s)_{\text{desejado}} = \frac{1}{S^2 + 20s + 209}$$

Logo
K1 = 209 – 1 = 208
K2 = 20 -4 = 16

Explicação do Exercício 1

http://www.youtube.com/watch?v=9hzrYKntYG0&feature=BFa&list=UUMTtePMuQMLsSulV4MInFYA



Exercício 2

Dada a função de transferência (Nise pg: 521 Exemplo 12.1):

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 9,5% e um tempo de assentamento de 0,74 s:

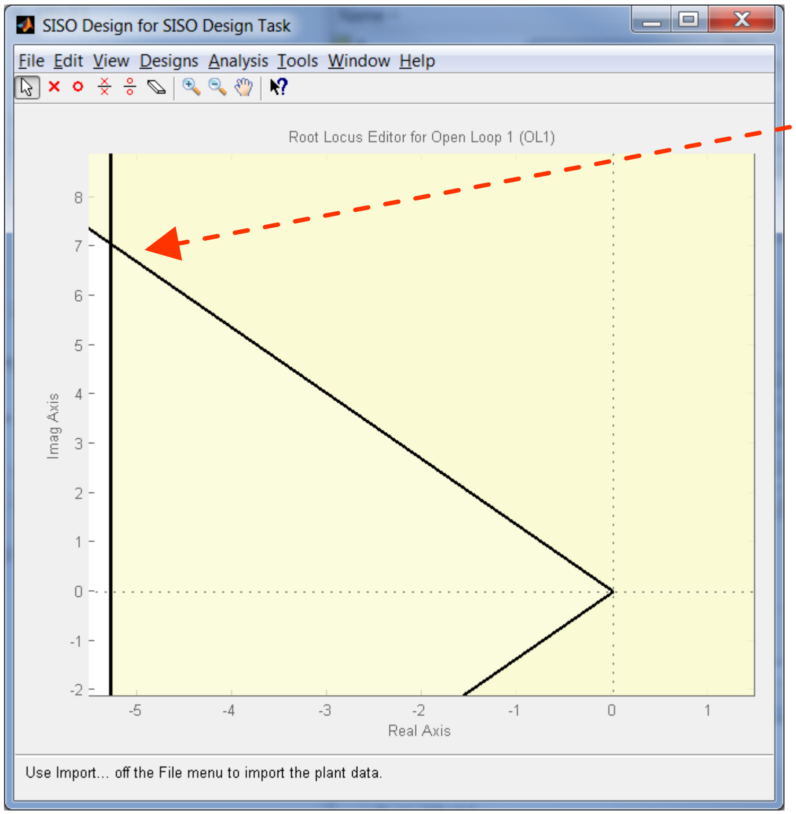
Verificar se o sistema é controlável primeiro!
Resposta: SIM!

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

Exercício 2

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 9,5% e um tempo de assentamento de 0,74 s:

Usando a função RLTOOL do MatLab



Ponto:
-5,4 -+7,2i

Logo já temos duas raízes, como o sistema é de 3ª órdem

$s(s + 1)(s + 4) = s^3 + 5 s^2 + 4 s$

Deve-se escolher outro polo.

Como existe um zero em '-5' vamos Escolher um polo também em '-5'

Exercício 2

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 9,5% e um tempo de assentamento de 0,74 s:

A equação característica final (desejada) deve ser:

$(s - (-5{,}4 + 7{,}2i)).\ (s - (-5{,}4 - 7{,}2i)).(s + 5)$

$= s^3 + 15.8\ s^2 + 135\ s + 405$

Exercício 2

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 9,5% e um tempo de assentamento de 0,74 s:

$$\frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)} = \frac{20s + 100}{s3 + 5\,s2 + 4\,s}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

FORMA CANÔNICA CONTROLÁVEL

Zeros

identidade

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \;\vdots\; b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \\ d(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 100 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exercício 2

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 9,5% e um tempo de assentamento de 0,74 s:

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \\ d(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$u(t) = -K.x(t) =$ -[k1 k2 k3].x(t)

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \\ d(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k1 & -k2 & -k3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exercício 2

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 9,5% e um tempo de assentamento de 0,74 s:

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \\ d(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k1 & -k2 & -k3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \\ d(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k1 & -k2 & -k3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \\ d(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k1 & -4-k2 & -5-k3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exercício 2

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 9,5% e um tempo de assentamento de 0,74 s:

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \\ d(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k1 & -4-k2 & -5-k3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{S^3 + S^2(5+k3) + (4+k2)s + (k1)}$$

Exercício 2

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 9,5% e um tempo de assentamento de 0,74 s:

Outra opção para o cálculo seria por força bruta:

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -(4+k_2) & -(5+k_3) \end{bmatrix}$$

$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = s^3 + (5+k_3)s^2 + (4+k_2)s + k_1 = 0$$

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

Exercício 2

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 9,5% e um tempo de assentamento de 0,74 s:

$$s^3 + s^2(5+k3) + (4+k2)s + (k1) = s^3 + 15.8\, s^2 + 135\, s + 405$$

Logo:

K1 = 405
k2 = 135 - 4 = 131
K3 = 15,8 – 5 = 10,8

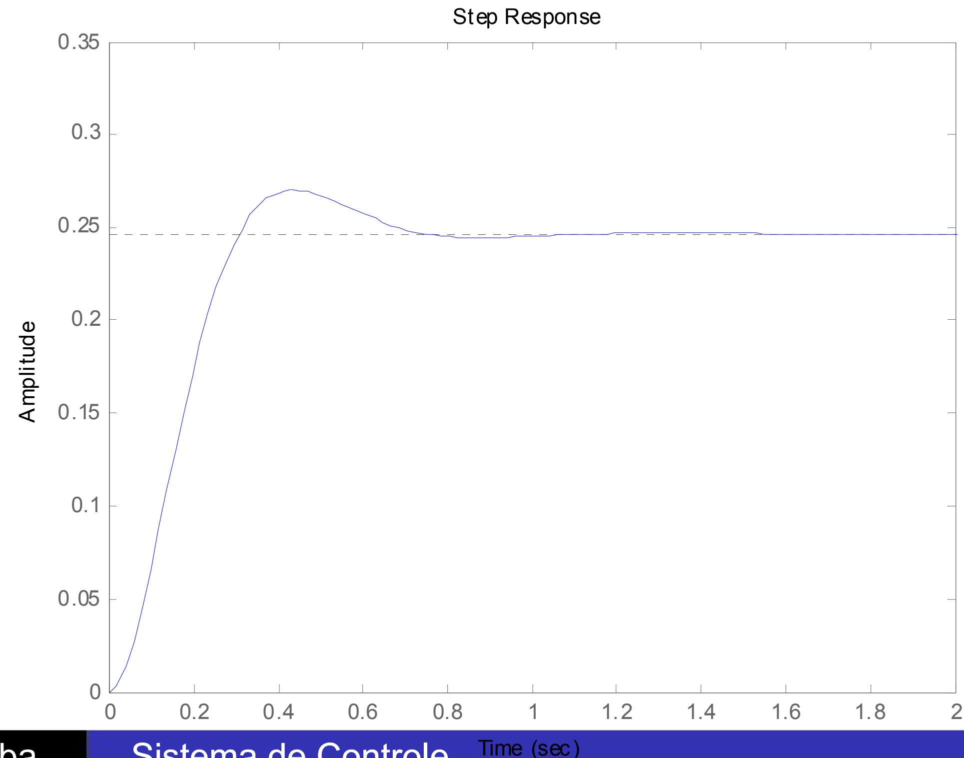
Exercício 2

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 9,5% e um tempo de assentamento de 0,74 s:

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s^3 + 15.8\, s^2 + 135\, s + 405}$$

```
>> g = 20*(s+5)/(s^3+15.8*s^2+135*s+405)

Transfer function:

        20 s + 100
---------------------------
s^3 + 15.8 s^2 + 135 s + 405

>> step(g)
```



Exercício 3

Dada a função de transferência
(Nise pg: 521 Exercício de Avaliação 12.1):

$$G(s) = \frac{100(s+10)}{s(s+3)(s+12)}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 5% e um tempo de pico de 0,3 s:

Exercício 3

$$G(s) = \frac{100(s+10)}{s(s+3)(s+12)}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 5% e um tempo de pico de 0,3 s:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

FORMA CANÔNICA CONTROLÁVEL

Zeros

identidade

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}} \\ -a_n & \begin{matrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & \vdots & b_{n-1} - a_{n-1}b_0 & \vdots & \cdots & \vdots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

```
>> s = tf('s');
>> g = 100*(s+10)/(s*((s+3)*(s+12)))
 Transfer function:
   100 s + 1000
------------------------
s^3 + 15 s^2 + 36 s
```

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \\ d(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -36 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1000 & 100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exercício 3

$$G(s) = \frac{100(s+10)}{s(s+3)(s+12)}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 5% e um tempo de pico de 0,3 s:

```
>> s = tf('s');
>> g = 100*(s+10)/(s*((s+3)*(s+12)))
 Transfer function:
   100 s + 1000
------------------------
s^3 + 15 s^2 + 36 s
```

$$5\%\ \text{requer}\ \zeta = \frac{-\log\left(\frac{\%UP}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2+\log^2\left(\frac{\%UP}{100}\right)}} = 0{,}69$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}} = 14{,}47\,\text{rad/s}$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 19{,}97s + 209{,}4$$

Exercício 3

$$G(s) = \frac{100(s+10)}{s(s+3)(s+12)}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 5% e um tempo de pico de 0,3 s:

$\mathbf{A}-\mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(k_1) & -(36+k_2) & -(15+k_3) \end{bmatrix}$. A equação característica para este sistema é $|s\mathbf{I}-(\mathbf{A}-\mathbf{BK})| = s^3+(15+k_3)s^2+(36+k_2)s+(k_1)$. Igualando os coeficientes desta equação aos coeficientes da equação desejada, resultam os ganhos $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [2094 \quad 373{,}1 \quad 14{,}97]$.

FÓRMULA DE ACKERMANN

- Outro método para o projeto do controlador K é utilizar a fórmula de Ackermann.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B| & AB| & \cdots | & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A) \tag{9}$$

sendo φ o polinômio característico do sistema em malha-fechada.

Esta técnica é bastante usada principalmente caso o sistema tenha mais de 2 variáveis!

> Projeto de Alocação de Pólos via Matlab
>
> K =*acker*(A,B,p), p é o vetor que contém a posição dos pólos de malha fechada.

Exercício 4

(Dorf pg: 512 Exemplo 11.11)

Dada a função em espaço de estado:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Calcule a matriz de ganhos (k) do sistema através da fórmula de Ackermann para a os pontos -1 +-i:

A equação característica final (desejada) deve ser:

$(s – (-1 + 1i)).\ (s - (-1 - 1i))$

$= s^2 + 2\ s + 2$

Exercício 4

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Calcular os ganhos para uma ultrapassagem de 9,5% e um tempo de assentamento de 0,74 s:

$$\frac{1}{1s^2 + 0\,s + 0}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

FORMA CANÔNICA CONTROLÁVEL

Zeros

identidade

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}} \\ -a_n & \begin{matrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Exercício 4

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{A}} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{B}} u$$

Verificar se o sistema é controlável primeiro!

$$\Phi_{Crt} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\phi crt.) = \det \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & [AB] \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

Resposta: SIM! É controlável!

Exercício 4

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B| & AB| & \cdots| & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A)$$

Substituindo S por A na equação característica final (desejada)
$s^2 + 2\,s + 2$

$$\phi(\mathrm{A}) = \mathrm{s}^2 + 2\mathrm{s} + 2 = A^2 + 2A + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Identidade

$$\phi(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 4

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$K = [\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1\ ]\,[\ B| \quad AB| \quad \cdots | \quad A^{n-1}B\ ]^{-1}\,\phi(A)$$

$$[0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
%MatLab
>> [0 1;1 0]^-1
ans =
    0     1
    1     0
```

Exercício 4

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{A}} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{B}} u$$

$$K = [\,0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1\,]\,[\,B| \quad AB| \quad \cdots | \quad A^{n-1}B\,]^{-1}\,\phi(A)$$

$$k = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [2 \quad 2]$$

Exercício 4

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

```
% Resolvendo no MatLab
>> A = [0 1; 0 0]
A =


    0     1
    0     0
>> B = [0;1]
B =
    0
    1
>> p = [-1+j*1; -1-j*1];       % Desired Pole Location
>> K =acker(A,B,p)
K =
    2     2
```

Exercício 5

http://www.youtube.com/watch?v=efcoTYiC95o&list=UUMTtePMuQMLsSuIV4MInFYA&index=5&feature=plcp

Dada a função em espaço de estado:

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

Calcule a matriz de ganhos (k) do sistema através da fórmula de Ackermann para a um tempo de estabelecimento de 2 segundos (Ts) e um amortecimento de 0.707:

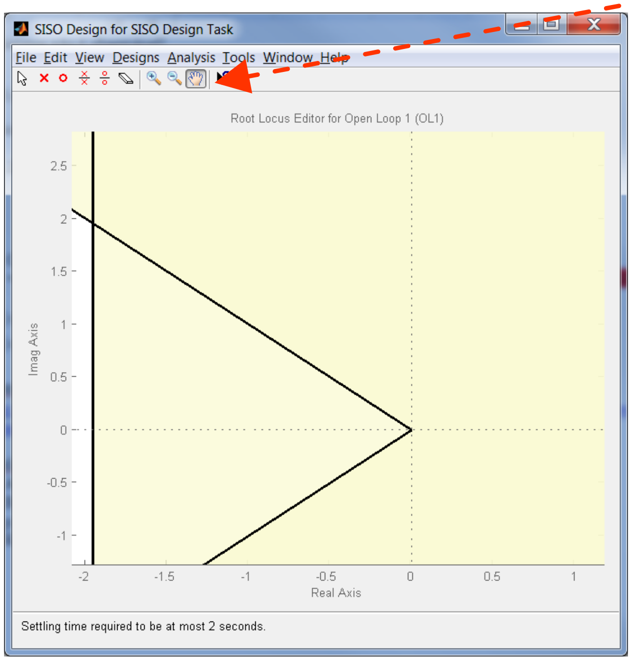
Exercício 5

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

Tempo de estabelecimento de 2 segundos (Ts)
Amortecimento de 0.707

RLTOOL no MatLab

Ponto:
-2 -+2i



A equação característica final (desejada) deve ser:

(s - (-2 +2i)). (s - (-2 -2i))

$= s^2 + 4\,s + 8$

Exercício 5

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} u$$

Verificar se o sistema é controlável primeiro!

$$\Phi_{Crt} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\phi crt.) = \det \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} & [AB] \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -2$$

Resposta: SIM! É controlável!

Exercício 5

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

A B

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B| & AB| & \cdots | & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A)$$

Substituindo S por A na equação característica final (desejada)

$s^2 + 4\,s + 8$

$$\phi(\mathrm{A}) = \mathrm{s}^2 + 4\,\mathrm{s} + 8 = A^2 + 4A + 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Identidade

$$\phi(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Diferente da internet!!!!

Exercício 5

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

A B

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B | & AB | & \cdots | & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}} Adj\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^t \right) \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = -1.5 - 5.5$$

Exercício 5

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

Utilizando o MatLab função ACKER :

```
>> A = [0 1; -1 0]

>> B = [1;-1]

>> p = [-2+j*2; -2-j*2];      % Desired Pole Location

>> K =acker(A,B,p)


K =


   -1.5000   -5.5000
```

Exercício 5

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

Utilizando o MatLab – função PLACE:

```
>> A = [0 1; -1 0]
A =
     0     1
    -1     0
>> B = [1;-1]
B =
     1
    -1
>> p = [-2+j*2; -2-j*2];       % Desired Pole Location
>> K=place(A,B,[p])
K =
   -1.5000   -5.5000
```

Exercício 5

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

Verificando os Resultados:

$u(t) = -K.x(t)$ = -[k1 k2].x(t)

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k1 & -k2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(-1.5) & -(-5.5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ -1.5 & -5.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 6.5 \\ -0.5 & -5.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Exercício 5

$$\begin{bmatrix} d(x_0) \\ d(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

Verificando os Resultados:

%Calculado

```
>> d = eig([1.5 6.5;-0.5 -5.5])

d =

     1
    -5
```

%YOUTUBE

```
>> d = eig([-4.6 7.5;-1.4 0.6])

d =

  -2.0000 + 1.9339i
  -2.0000 - 1.9339i
```

http://www.youtube.com/watch?v=efcoTYiC95o&list=UUMTtePMuQMLsSuIV4MInFYA&index=5&feature=plcp

$$k = e_n^T \, P^{-1} \, \phi_{des}(A)$$

$$e_n^T = [0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 1]$$

$$P = [B \;\; AB \;\; A^2B \ldots]$$

$$\phi_{des}(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots a_0 I$$

EXAMPLE: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$

desire poles at $-2 \pm 2i$

$$s^2 + 4s + 8 = 0$$

$$\left[\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercício 6

Determine um controlador *K* de realimentação dos estados para o seguinte sistema pela fórmula de Ackermann,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o sistema em malha fechada deve responder com um P.O. 10% e um tempo de estabelecimento de 10 segundos.