# Robot Prometheus

## Cinemática directa

Para describir el movimiento en términos de orientación y posición del efector final en la mano del robot utilizamos la convención de Denavit–Hartenberg

$$\boldsymbol{T_{i-1}^{i}} = \mathbf{Rot}(\mathbf{z_i}, \boldsymbol{\theta_i})\mathbf{Trans}(\mathbf{z_i}, \mathbf{d_i})\mathbf{Trans}(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}_i)\mathbf{Rot}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha_i})$$

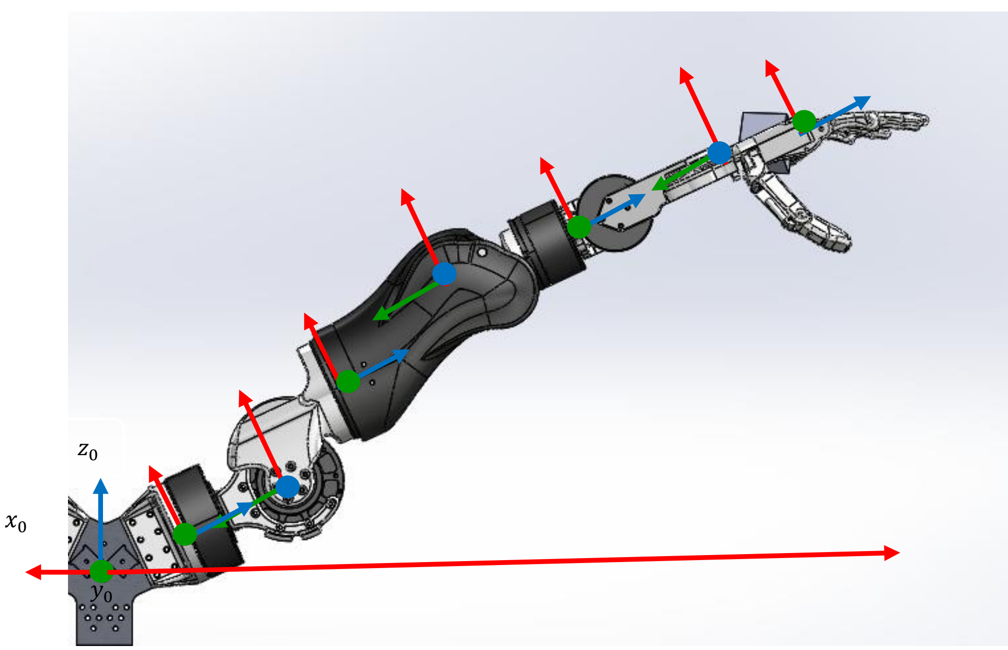
$$\boldsymbol{T_{ee}^{0} = T_{0B}T_{0H}T_{1}^{2}T_{2}^{3}T_{3}^{4}T_{4}^{5}T_{5}^{6}T_{6}^{ee}}$$

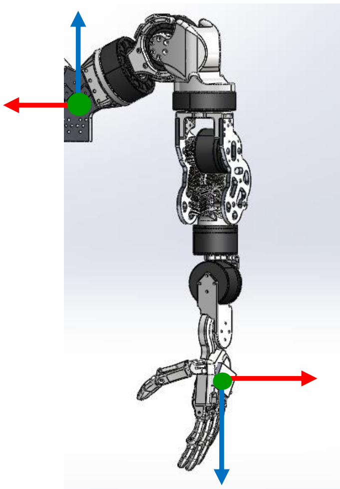
Parámetros del Robot

$d_1 = 183.73 \quad a_2 = 58.28 \quad a_3 = 18.76 \quad d_3 = 244.4$
$a_4 = 18.53 \quad d_5 = 123.03 \quad d_7 = 150$
$\alpha = 65°$

### Tabla DH del **brazo izquierdo**

| $T_{i-1}^{i}$ | $T_{i-1}^{i}$ | $\boldsymbol{\theta_i}$ | $\boldsymbol{d_i}$ | $\boldsymbol{a_i}$ | $\boldsymbol{\alpha_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Base | $\mathrm{T_{0B}}$ | $90°$ | $0$ | $0$ | $-\alpha$ |
| Hombro | $\mathrm{T_{0H}}$ | $-90°$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| Rotación hombro 1 | $\mathrm{T_{01}}$ | $\theta_1$ | $d_1$ | $0$ | $-90°$ |
| Rotación hombro 2 | $\mathrm{T_{12}}$ | $\theta_2$ | $0$ | $a_2$ | $90°$ |
| Rotación brazo | $\mathrm{T_{23}}$ | $\theta_3$ | $d_3$ | $a_3$ | $-90°$ |
| Rotación codo | $\mathrm{T_{34}}$ | $\theta_4$ | $0$ | $a_4$ | $90°$ |
| Rotación Roll muñeca | $\mathrm{T_{45}}$ | $\theta_5$ | $d_5$ | $0$ | $-90°$ |
| Rotación yaw muñeca | $\mathrm{T_{56}}$ | $\theta_6$ | $0$ | $0$ | $90°$ |
| ee | $\mathrm{T_{ee}}$ | $0$ | $d_7$ | $0$ | $0°$ |





$$\mathbf{P\_0} = [0,0,0,0,0,0]$$

TLee = 0.4226 0.0000 -0.9063 -595.0771

0.0000 1.0000 0.0000 0.0000

0.9063 -0.0000 0.4226 382.9389

0 0 0 1.0000

$$\mathbf{P\_home} = [0,-115,-90,0,90,0]$$

TLee = -1.0000 -0.0000 -0.0000 -224.7959

-0.0000 1.0000 0.0000 -37.2900

0.0000 0.0000 -1.0000 -439.7823

0 0 0 1.0000

Fig. Posición **home**

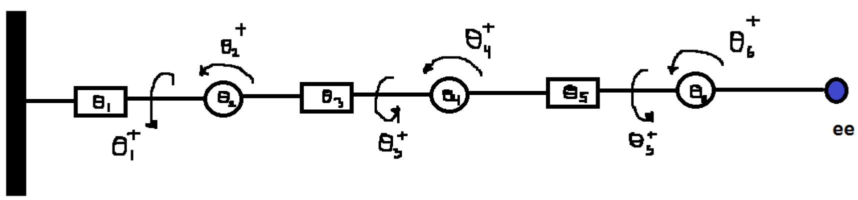



Fig. Cadena cinemática del brazo izquierdo, dirección positiva de rotación $\theta_i^+$ de cada actuador

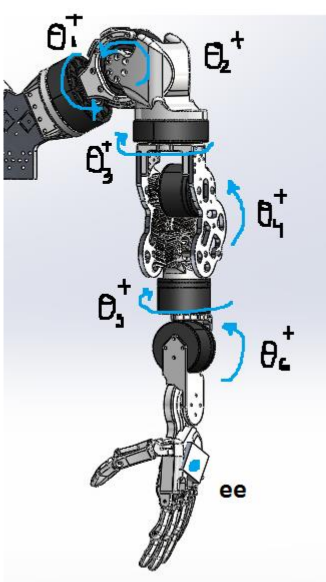



Fig. Posición **home**

Rango de trabajo de cada actuador respecto a la **posición home**

$$-180 \leq \theta_1 \leq 50$$

$$-10 \leq \theta_2 - 115 \leq 140$$

$$-140 \leq \theta_3 - 90 \leq 110$$

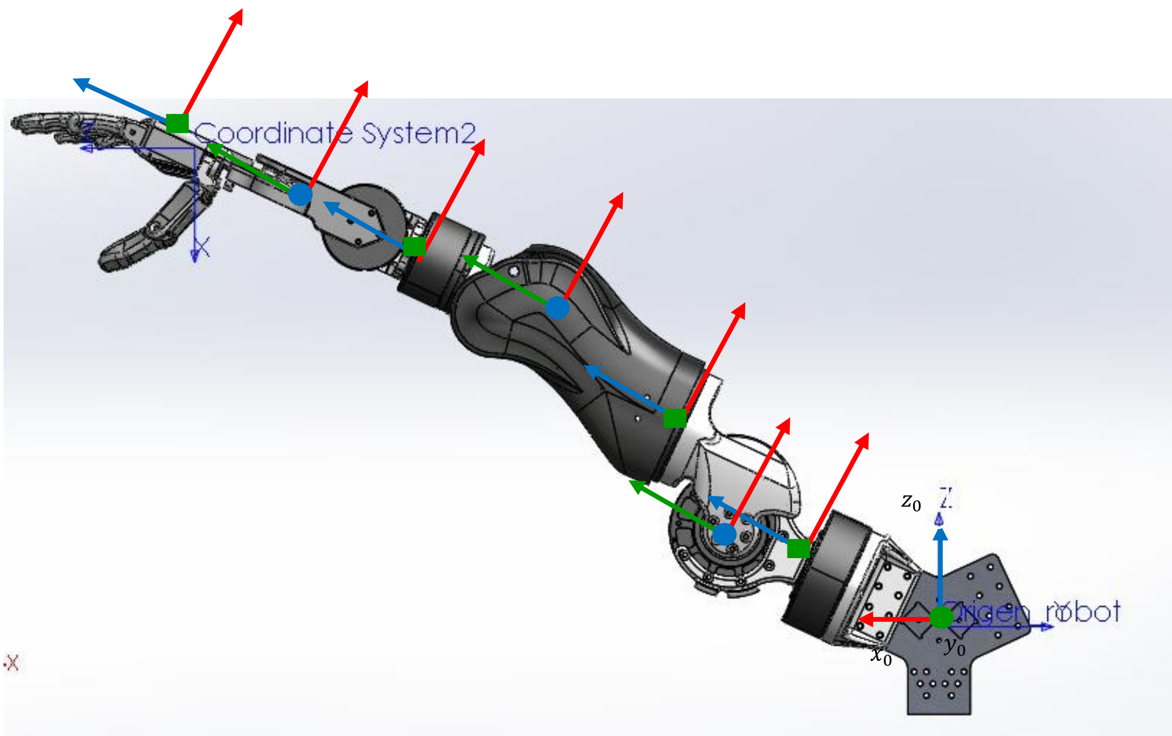
$$-130 \leq \theta_4 \leq 10$$

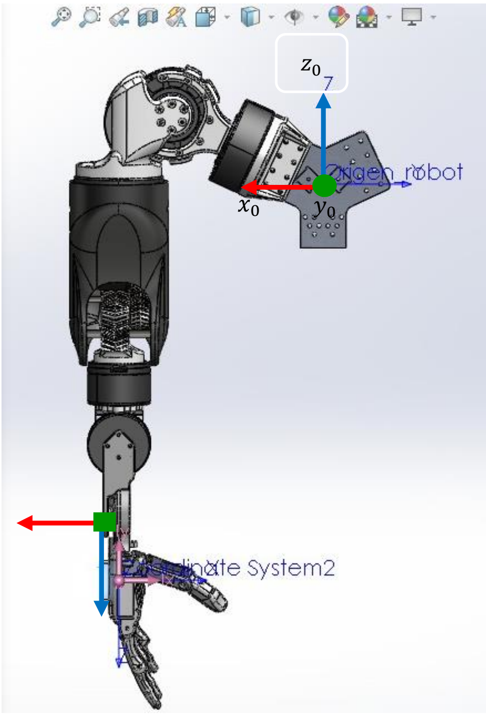
$$-180 \leq \theta_5 + 90 \leq 180$$

$$-90 \leq \theta_6 \leq 70$$

Tabla DH del **brazo derecho**

| $T_{i-1}^{i}$ | $T_{i-1}^{i}$ | $\boldsymbol{\theta_i}$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Base | $\mathrm{T_{0B}}$ | $90°$ | $0$ | $0$ | $\alpha$ |
| Hombro | $\mathrm{T_{0H}}$ | $90°$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| Rotación hombro 1 | $\mathrm{T_{01}}$ | $\theta_1$ | $d_1$ | $0$ | $90°$ |
| Rotación hombro 2 | $\mathrm{T_{12}}$ | $\theta_2$ | $0$ | $a_2$ | $-90°$ |
| Rotación brazo | $\mathrm{T_{23}}$ | $\theta_3$ | $d_3$ | $a_3$ | $90°$ |
| Rotación codo | $\mathrm{T_{34}}$ | $\theta_4$ | $0$ | $a_4$ | $-90°$ |
| Rotación Roll muñeca | $\mathrm{T_{45}}$ | $\theta_5$ | $d_5$ | $0$ | $90°$ |
| Rotación yaw muñeca | $\mathrm{T_{56}}$ | $\theta_6$ | $0$ | $0$ | $-90°$ |
| ee | $\mathrm{TR_{ee}}$ | $0$ | $d_7$ | $0$ | $0°$ |






$$\mathbf{P\_0} = [0,0,0,0,0,0]$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| TRee = | -0.4226 | -0.0000 | 0.9063 | 595.0771 |
| | 0.0000 | -1.0000 | -0.0000 | 0.0000 |
| | 0.9063 | 0.0000 | 0.4226 | 382.9389 |
| | 0 | 0 | 0 | 1.0000 |

$$\mathbf{P\_home} = [0,115,90,0,-90,0]$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| TRee = | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 244.7959 |
| | 0.0000 | -1.0000 | 0.0000 | -37.29.00 |
| | 0.0000 | 0.0000 | -1.0000 | -439.7823 |
| | 0 | 0 | 0 | 1.0000 |

Fig. Posición **home**

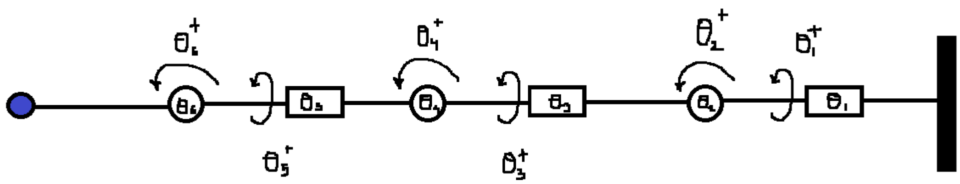



Fig. Cadena cinemática del brazo izquierdo, dirección positiva de rotación $\theta_i^+$de cada actuador

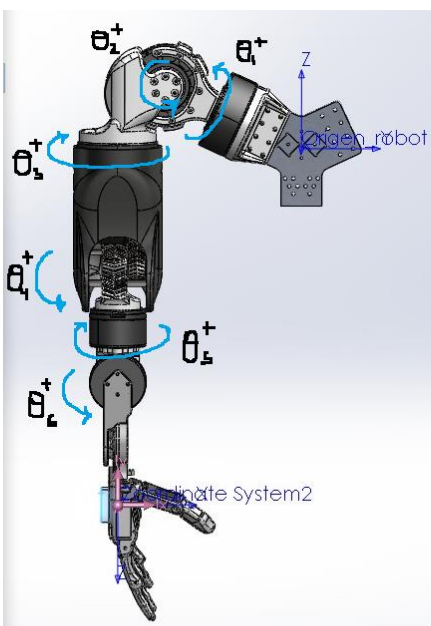



Fig. Posición **home**

Rango de trabajo de cada actuador respecto a la **posición home**

$$-50 \leq \theta_1 \leq 180$$

$$-140 \leq \theta_2 + 115 \leq 10$$

$$-110 \leq \theta_3 + 90 \leq 140$$

$$-10 \leq \theta_4 \leq 130$$

$$-180 \leq \theta_5 - 90 \leq 180$$

$$-70 \leq \theta_6 \leq 90$$

## Modelo Dinámico

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J_G}(\boldsymbol{q})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{F}$$

$$\tau_j = ki_j\,, \qquad j = 1,2,3,4,5,6$$

## Jacobiano Geométrico

El Jacobiano Geométrico relaciona las velocidades articulares en el espacio articular con las velocidades lineales y angulares en el espacio cartesiano

Es decir

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{J_G} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{pmatrix}$$

Donde

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}\,, i = 1,2,3,4,5,6$$

$J_G$ tiene un jacobiano relacionado con la velociad lineal y un jacobiano relacionado con la velocidad angular, es decir

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J_v}\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{J_\omega}\dot{\boldsymbol{q}}$$

De tal manera que

$$\boldsymbol{J_G}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J_v}(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J_\omega}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

Calculo de $\boldsymbol{J_v}(\boldsymbol{q})$

De la cinemática directa

$$\boldsymbol{T_{ee}^0} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x \\ r_{21} & r_{22} & r_{33} & y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q}) = (x(\boldsymbol{q}), y(\boldsymbol{q}), z(\boldsymbol{q}))$

Luego

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \frac{\partial x}{\partial q_4}\dot{q}_4 + \frac{\partial x}{\partial q_5}\dot{q}_5 + \frac{\partial x}{\partial q_5}\dot{q}_6$$

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \frac{\partial y}{\partial q_4}\dot{q}_4 + \frac{\partial y}{\partial q_5}\dot{q}_5 + \frac{\partial y}{\partial q_5}\dot{q}_6$$

$$v_z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \frac{\partial z}{\partial q_4}\dot{q}_4 + \frac{\partial z}{\partial q_5}\dot{q}_5 + \frac{\partial z}{\partial q_5}\dot{q}_6$$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{J_v}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial x}{\partial q_4} & \frac{\partial x}{\partial q_5} & \frac{\partial x}{\partial q_5} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_4} & \frac{\partial y}{\partial q_5} & \frac{\partial y}{\partial q_6} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_4} & \frac{\partial z}{\partial q_5} & \frac{\partial z}{\partial q_5} \end{bmatrix}$$

Calculo de $\boldsymbol{J_\omega}(\boldsymbol{q})$

Usamos la submatriz de rotación de la cinemática directa

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{33} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$R$ es una matriz ortogonal, por lo tanto cumple

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{I}$$

Derivando

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{R}\frac{d\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{T}}}{dt} = 0$$

Sea

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{T}}$$

Con

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial q}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial q_2}q_2 + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial q_4}\dot{q}_4 + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial q_5}\dot{q}_5 + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial q_5}\dot{q}_6$$

Luego, $\Omega$ cumple

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{0}$$

Por tanto $\Omega$ es antisimétrica

Por lo tanto

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\omega_x(\dot{\boldsymbol{q}}) = T_x(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \cdots, \dot{\theta}_6)$$

$$\omega_y(\dot{\boldsymbol{q}}) = T_y(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \cdots, \dot{\theta}_6)$$

$$\omega_z(\dot{\boldsymbol{q}}) = T_z(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \cdots, \dot{\theta}_6)$$

Cuya representación matricial en la base canonica de velocidades articulares es $\boldsymbol{J_\omega}(\boldsymbol{q})$

Finalmente expresamos el jacobiano geométrico como

$$\boldsymbol{J_G}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J_v}(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J_\omega}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

## Compensación de gravedad

Partimos de la energía potencial

$$U(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} U_i(\boldsymbol{q})$$

Con $U_i(\boldsymbol{q}) = m_i g P_{z_i}(\boldsymbol{q})$

Donde: $m_i$ es la masa del eslabón y $P_{z_i}$ la distancia del plano $xy$ hasta el centro de masa del eslabón de $i -$ esimo eslabón.

Por lo tanto

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = -\boldsymbol{\nabla U}(\boldsymbol{q})$$

Cálculo de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$

Sean $\boldsymbol{cm_i} = (\boldsymbol{x_{c_i}}, \boldsymbol{y_{c_i}}, \boldsymbol{z_{c_i}})$ las cordenadas del centro de masa de cada eslabón respecto al sistema de referencia incial

Usando la cinemática directa, sea

$$\boldsymbol{A_i} = \boldsymbol{T_{0H}} \boldsymbol{T_{0B}} \boldsymbol{T_1} \boldsymbol{T_2} \cdots \boldsymbol{T_i}$$

Con

$$\boldsymbol{A_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_i \\ 0 & 1 & 0 & y_i \\ 0 & 0 & 1 & z_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de orietación posición del de $i$ – eslabón, con posición $P_i = (x_i, y_i, z_i)$

Sea

$\boldsymbol{s_i} \ = (\boldsymbol{P_i} - \boldsymbol{cm_i}) = (\boldsymbol{s_{x_i}}, \boldsymbol{s_{y_i}}, \boldsymbol{s_{z_i}})$

el vector que va de la posición del i-esimo elabón sobre el eje de rotación al centro de masa del eslabón

Sea

$$\boldsymbol{B_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s_{x_i} \\ 0 & 1 & 0 & s_{y_i} \\ 0 & 0 & 1 & s_{z_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz DH necesaria para llegar de la posición $\boldsymbol{P_i}$ hasta la posición $\boldsymbol{P_{cm_i}}$

Entonces

$$\boldsymbol{P_{cm_i}} = \boldsymbol{A_i B_i^{-1}}$$

Luego, la gravedad sólo actúa sobre la componente z, por lo tanto

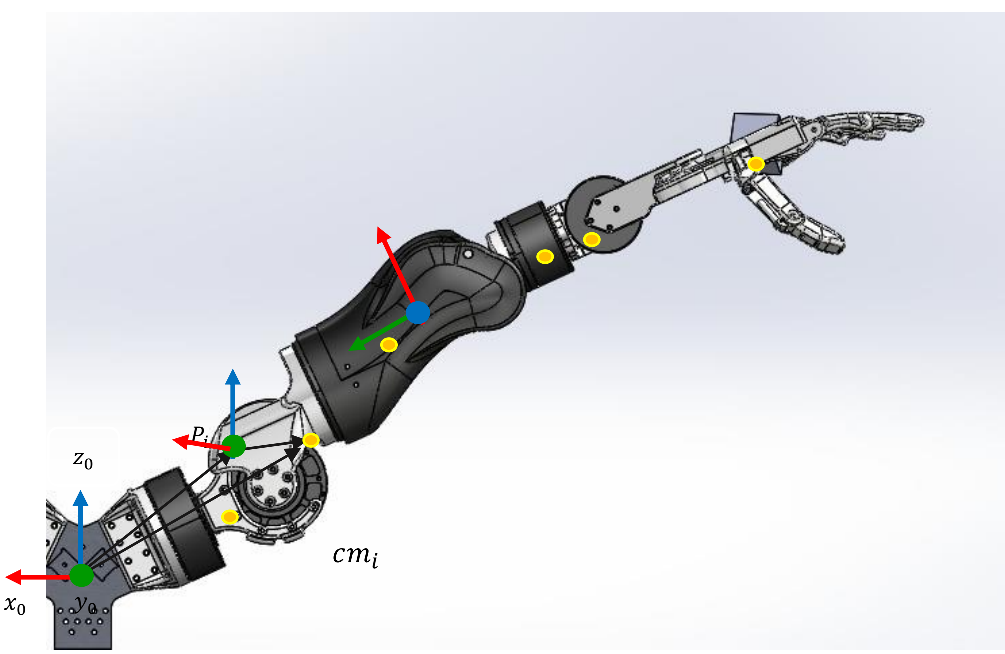
$$\boldsymbol{U_i} = \boldsymbol{m_i g P_{z_i}}$$

Luego

$$U(q) = \sum_{i=1}^{n} U_i(q)$$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{g(q)} = -\boldsymbol{\nabla U(q)}$$



Primera prueba

Converción de unidades según las ecuaciones de las leyes de control

Aproximación en el esalbón 3

Sistema de referencia en el origen

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

$$\tau_i = cI_i$$