TEOREMAS DE ESPACIO VECTORIAL

1.-Sea V un conjunto no vacio y se $(k,+,\bullet)$ un campo. Se dice que V es un espacio vectorial sobre k si están definidas dos leyes de composición, llamadas adición y multiplicación por una escalar, tales que:

i)La adicion asigna a cada pareja ordenada $(\overline{u},\overline{v})$ de elementos de V un único elemento $\overline{u}+\overline{v}\in V$, llamado la suma de $\overline{u}$ y $\overline{v}$

ii) $\forall \overline{u},\ \overline{v},\overline{w}\in V\ :\ \overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})=(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}$

iii) $\exists\ \overline{0}\ \in\ V$ tal que $\overline{0}+\overline{v}=\overline{v}\ ,\forall\ \overline{v}\in v$

iv) $\forall\ \overline{v}\in V\ -\overline{v}\in V$ tal que $-\overline{v}+\overline{v}=0$

v) $\forall \overline{u}\ ,\overline{v}\in V:\ \overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}$

vi) La multiplicación por una escalar asigna a cada pareja asignada $(\alpha,\overline{v})$ de elementos $\alpha\in k$ y $\overline{v}\in V$ un único elemento $\alpha\overline{v}\in V$, llamado el producto de α por $\overline{v}$

vii) $\forall \alpha\in K:\overline{v}\in V:\alpha(\overline{u}+\overline{v})=\alpha\overline{u}+\alpha\overline{v}$

viii) $\forall \alpha\ ,\ \beta\in K;\overline{v}\in V:(\alpha+\beta)\overline{v}=\alpha\overline{v}+\beta\overline{v}$

ix) $\forall \alpha\ ,\ \beta\in K;\overline{v}\in V:\ \alpha(\beta\overline{v})=(\alpha\beta)\overline{v}$

x) Si 1 es la unidad de K: $1\ \overline{v}=\overline{v},\ \forall\overline{v}\in V$

A los elementos de V se les llama vectores y a los de K escalares.

2.- Si V es un espacio vectorial sobre K, entonces

i) $\forall\ \overline{u},\overline{v},\ \overline{w}\in V:\overline{u}+\overline{v}=\overline{u}+\overline{w}\Rightarrow\overline{v}=\overline{w}$

ii)El vector $\overline{0}$ es único y es tal que $\overline{v}+\overline{0}=\overline{v},\ \forall\ \overline{v}\in V$

iii)El vector $-\overline{v}$ es único y es tal que $\overline{v}+(-\overline{v})=\overline{0}$

iv)La ecuación $\overline{u}+\overline{x}=\overline{v}$ tiene solución única en V.

v) $\forall\ \overline{v}\in V:\ \ -(-\overline{v})=\overline{v}$

vi) $\forall\overline{u},\ \overline{v}\in V:\ -(\overline{u}+\overline{v})=-\overline{u}+(-\overline{v})$

3.- Sea V un espacio vectorial sobre K:

i) $\forall\alpha\in K:\ \alpha\ \overline{0}=\overline{0}$

ii) $\forall \overline{v} \in V:\ 0\overline{v} = \overline{0}$, donde 0 e el cero de K

iii) $\forall \alpha \in K, \overline{v} \in V:\quad (-\alpha)\overline{v} = -(\alpha\overline{v}) = \alpha(-\overline{v})$

iv) $\forall \alpha \in K, \overline{v} \in V:\ \ \alpha\overline{v} = \overline{0} \Rightarrow \alpha = 0\ o\ \ \overline{v} = \overline{0}$

v) $\forall \alpha \in K, \overline{u}\ , \overline{v} \in V : \alpha\overline{u} = \alpha\,\overline{v}\quad y\ \alpha \neq 0 \Rightarrow \overline{u} = \overline{v}$

vi) $\forall \alpha \in K, \overline{u}\ , \overline{v} \in V : \alpha\,\overline{v} = \beta\overline{v}\ \ y\ \overline{v} \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

4.- Si V es un espacio vectorial sobre K, entonces $\overline{u} - \overline{v} = \overline{u} + (-\overline{v})\ ;\ \forall \overline{u}, \overline{v} \in V$

Al vector $\overline{u} - \overline{v}$ se le llama la diferencia $\overline{u}$ menos $\overline{v}$

5.- Sea V un espacio vectorial sobre K y sea S un subconjunto de V. S es un subespacio de V si es un espacio vectorial sobre K respecto a la adición y la multiplicación por un escalar definidas en V.

6.- Sea V un espacio vectorial sobre K y sea S un sunconjunto de V.

S es un subespacio de V si y solo si

i) $\forall \overline{u}\ , \overline{v} \in S : \overline{u} + \overline{v}\ \in S$

ii) $\forall \alpha \in K, \overline{v} \in S\ :\ \alpha\overline{v}\ \in\ S$

7.- Un vector $\overline{w}$ es una combinación lineal de los vectores $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ si puede ser expresado en la forma $\overline{w} = \alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{v}_n$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares.

8.- Sea $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ un conjunto no vacio de vectores de un espacio vectorial V. El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores S, denotado con L(S),es un subespacio de V

9.- Sea $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ un conjunto de vectores:

i) S es linealmente dependiente si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, no todos iguales a cero, tales que $\alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{v}_n = \overline{0}$

ii) S es linealmente independiente si la igualdad $\alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{v}_n = \overline{0}$ solo se satisface con $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

10.- Todo conjunto que contiene al vector $\overline{0}$ es linealmente dependiente

11.-

Si S es un conjunto linealmente independiente entonces cualquier subconjunto de S es linealmente independiente.

12.- Sea V un espacio vectorial sobre K, y sea $G=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_m\}$, un conjunto de vectores de V. Se dice que G es un generador de V si para todo vector $\overline{x}\in V$ existen escalares $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ tales que $\overline{x}=\alpha_1\overline{v}_1+\alpha_2\overline{v}_2+\ldots+\alpha_m\overline{v}_m$

13.- Sea V un espacio vectorial sobre K y sea G un subconjunto de V, G es un generador de V si y solo si V = L(G)

14.- Se llama base de espacio vectorial V a un conjunto generador de V que es linealmente independiente.

15.- Sea V un espacio vectorial sobre K. Si $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_n\}$ es una base de V, entonces cualquier conjunto de vectores de V con más de n elementos es linealmente dependiente.

16.- Sea V un espacio vectorial sobre K. Si $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_n\}$ es una base de V, entonces cualquier otra base de dicho espacio está formada por n vectores.

17.- Sea V un espacio vectorial sobre K. Si $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_n\}$ es una base de V se dice que V es de dimensión n, lo cual se denota con dim V = n

En particular, si $V=\{\overline{0}\}$, dim V =0

18.- Si V es un espacio vectorial de dimensión n, cualquier conjunto linealmente independiente formado por n vectores de V es una base de dicho espacio.

19.- Si V es un espacio vectorial de dimensión n y W es un subespacio de V, entonces

$$\dim W\le n$$

En particular, si $\dim W=n$ entonces W = V

20.- Sea $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_n\}$ una base de un espacio vectorial V sobre K , y sea $\overline{x}\in V$. Si

$$\overline{x}=\alpha_1\overline{v}_1+\alpha_2\overline{v}_2+\ldots+\alpha_n\overline{v}_n$$

los escalares $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ se llaman coordenadas de $\overline{x}$ en la base B; y el vector de K^n

$$(\overline{x})_B=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)^T$$

Se llama vector de coordenadas de $\overline{x}$ en la base B.

21.- Sea $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_n\}$ una base de un espacio vectorial V sobre K . Para cualquier $\overline{x}\in V$ el vector $(\overline{x})_B$ es único.

22.- Sea $A=\left[a_{ij}\right]$ una matriz de mxn con elementos en un campo K, y sea $\overline{r}_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$ el i-ésimo renglón de A. Si $A_r=(\overline{r}_2\,,\,\overline{r}_2\,,\ldots,\,\overline{r}_m)$, el conjunto $L(A_r)$ se llama espacio renglón de A.

23.- Dos matrices A y B son equivalentes (por renglones), lo cual se denota mediante $A\sim B$, si alguna de ellas puede obtenerse a partir de la otra mediante una sucesión finita de transformaciones elementales (por renglón).

24.- Dos matrices equivalentes tienen el mismo espacio renglón

25.- Sea $A=\left[a_{i\,j}\right]$ una matriz de mxn con elementos en un campo K, y sea $\overline{c}_i=(a_{1i},a_{2i},\ldots,a_{mi})^T$ la i-ésima columna de A. Si $A_c=\{\overline{c}_1,\overline{c}_2,\ldots,\overline{c}_n\}$, el conjunto de $L(A_c)$ se llama espacio columna de A.

26.- Para cualquier matriz A se tiene que $\dim L(A_r)=\dim L(A_c)$

27.- Se llama rango de una matriz A , y se denota con R(A), al número $R(A)=\dim L(A_r)=\dim L(A_c)$

28.- Si A es una matriz de nxn, los siguientes enunciados son equivalentes

i)R(A)=n

ii) $A\sim I_n$

iii) $\exists\ A^{-1}$

iv) $\dim A\neq 0$

v) Los renglones de A son linealmente independientes

vi) Las columnas de A son linealmente independientes

29.- El sistema de ecuaciones lineales $A\overline{x}=\overline{b}$ es compatible si y solo si $R(A)=R(A,\overline{b})$

30.- Sea $A\overline{x}=\overline{b}$ un sistema compatible de m ecuaciones lineales con n incógnitas: si R(A)=n el sistema es determinado y si $R(A)<n$ el sistema es indeterminado

31.- Sea F el conjunto de todas las funciones reales de variable real, y sean $f, g \in F$. Se dice que f y g son iguales, lo cual se denota mediante f = g, cuando $f(x) = g(x), \forall x \in R$

32.- Sea F el conjunto de funciones reales de variable real, y sean $f, g \in F$; $\alpha \in R$:

i) La suma de f y g es una función f+g definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in R$

ii)El producto de α y f es una función αf definida por $(\alpha f) = \alpha \bullet f(x), \forall x \in R$

33.- Sea $\{f_1, f_2, .., f_n\}$ un conjunto de n funciones reales de variable real. Si existen n valores $x_1, x_2, ..., x_n \in R$ tales que el sistema

$$\begin{array}{l}\alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_1) + ... + \alpha_n f_n(x_1) = 0 \\ \alpha_1 f_1(x_2) + \alpha_2 f_2(x_2) + ... + \alpha_n f_n(x_2) = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \alpha_1 f_1(x_n) + \alpha_2 f_2(x_n) + ... + \alpha_n f_n(x_n) = 0\end{array}$$

Solo admite la solución trivial, entonces el conjunto de funciones es linealmente independiente

34.- Sea $\{f_1, f_2, .., f_n\}$ un conjunto de n funciones reales de variable real, derivables al menos n-1 veces en el intervalo (a,b) y sea

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1^`(x) & f_2^`(x) & \dots & f_n^`(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Si W(x_0) $\neq 0$ para algún $x_0 \in (a,b)$, entonces el conjunto de funciones es linealmente independiente en dicho intervalo.