Homework 4 of Numerical Analysis

刘陈若 3200104872
信息与计算科学 2001

Theoretical questions

Problem I

Solution. 由 **Algorithm 4.8** 中十进制转二进制的算法可以得到

$$477 = (111011101)_2. \tag{1}$$

进一步将其规范化得到

$$477 = (1.11011101)_2 \times 2^8. \tag{2}$$

注意这里并没有规定 FPN 中的精度 p，因此默认将 477 进行完整的表示。 □

Problem II

Solution. 由 **Algorithm 4.8** 中十进制转二进制的算法可以得到

$$\frac{3}{5} = (0.100110011\dots)_2. \tag{3}$$

进一步将其规范化得到

$$\frac{3}{5} = (1.00110011\dots)_2 \times 2^{-1}. \tag{4}$$

注意这里并没有规定 FPN 中的精度 p，因此默认将 $\frac{3}{5}$ 进行完整的表示。 □

Problem III

Solution. 不妨规范化 FPN 系统是由 **Definition 4.11** 定义的，那么由课本公式 (4.2) 中 m 的表达式很容易看出，mantissa m 本身的精度即为机器精度 $\epsilon_M = \beta^{1-p}$。

由于此时 $x = \beta^e$ 对应的 m 为 1，是规范化 FPN 系统中基为 β^e 时最小的 m（最大的 m 是 $\beta - \epsilon_M$），根据上文分析并结合即可得到

$$x_L = (\beta - \epsilon_M) \times \beta^{e-1}, \quad x_R = (1 + \epsilon_M) \times \beta^e. \tag{5}$$

从而 $x_R - x = \beta^{e+1-p} = \beta\beta^{e-p} = \beta(x - x_L)$。 □

Problem IV

Solution. 根据 **Problem II** 的结果，结合 **Definition 4.14** 和 **Example 4.29** 可知 $p = 23 + 1$。因此，

$$x_L = (1.0011\dots0011001)_2 \times 2^{-1}, \quad x_R = (1.0011\dots0011010)_2 \times 2^{-1}. \tag{6}$$

所以可以得到

$$x - x_L = (0.10011001\dots)_2 \times 2^{-24} = \frac{3}{5} \times 2^{-24}, \quad x_R - x_L = 2^{-24}. \tag{7}$$

由此得到 $x_R - x = \frac{2}{5} \times 2^{-24} < x - x_L$，从而 $\mathrm{fl}(x) = x_R = (1.0011\dots0011010)_2 \times 2^{-1}$，且相对舍入误差

$$E_{\mathrm{rel}}(x) = \frac{|\mathrm{fl}(x) - x|}{x} = \frac{2}{3} \times 2^{-24}. \tag{8}$$

□

Problem V

Solution. 首先需要说明的是，课本中是通过 **Definition 4.26** 直接定义的基本舍入单位再展开讨论的，从这个角度来说，并不能很清晰的给出本题中的基本舍入单位。

不过如果结合 **Theorem 4.27**, 把基本舍入误差看成舍入误差的界, 便可以得到, 由于此时舍入采用截断法而不是就近原则, 那么基本舍入误差应该是 **Theorem 4.27** 中的两倍, 即此时 $\epsilon_u = \beta^{1-p} = 2^{-23}$。另一方面，从定义的角度，仿照公式 (4.13) 也可以得到

$$|\mathrm{fl}(x) - x| < |x_R - x_L| \le \epsilon_M \min(|x_R|, |x_L|) < \epsilon_M |x|, \tag{9}$$

从而 $\epsilon_u = \epsilon_M = \beta^{1-p} = 2^{-23}$。 □

Problem VI

Solution. 因为 $1 > \cos\frac{1}{4} > 0$，在 **Theorem 4.49** 中设 $x = 1$，$y = \cos\frac{1}{4}$，并且假设本题中 $\beta = 2$，则有

$$m_{x-y} = m_x(1 - \frac{y}{x}) = (0.031087\dots)_{10} = (0.000001\dots)_2. \tag{10}$$

由此可知，将 m_{x-y} 规范化需将所有数左移 6 位，从而损失了 6 位精度。 □

Problem VII

Solution. 假设本题中 $\beta = 2$。首先，可以利用二倍角公式

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \tag{11}$$

将减法转换为乘法，从而根据 **Example 4.48**，避免了巨量消失。

其次，也可以利用 $\cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开（当然也可以是在别的点处，尽量不要离 $\frac{1}{4}$ 太近），从而得到

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \tag{12}$$

根据 **Example 4.48**，我们需要关注泰勒展开中的减法运算。事实上，当 $x = \frac{1}{4}$ 时，对所有的正整数 n 都有

$$1 - \frac{\frac{x^{4n}}{(4n)!}}{\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}} = 1 - \frac{x^2}{4n(4n-1)} \in [2^{-1}, 2^0], \tag{13}$$

并且十分接近 1。因此结合 **Theorem 4.49**，知，泰勒展开后可以有效的避免巨量消失。 □

Problem VIII

Solution. 由 **Definition 4.59** 可知，当 $\alpha \neq 0$ 时，$(x-1)^\alpha$ 的条件数为

$$C_{(x-1)^\alpha}(x) = \left|\frac{\alpha x (x-1)^{\alpha-1}}{(x-1)^\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha x}{x-1}\right|. \tag{14}$$

当 $\alpha = 0$ 时，$(x-1)^\alpha$ 的条件数为 0。因此当 $\alpha \neq 0$ 且 $x \to 1$ 时，条件数会很大。

$\ln x$ 的条件数为

$$C_{\ln x}(x) = \left|\frac{x\frac{1}{x}}{\ln x}\right| = \left|\frac{1}{\ln x}\right|. \tag{15}$$

因此当 $x \to 1$ 时，条件数会很大。

e^x 的条件数为

$$C_{e^x}(x) = \left|\frac{xe^x}{e^x}\right| = |x|. \tag{16}$$

因此当 $x \to \infty$ 时，条件数会很大。

$\arccos x$ 的条件数为

$$C_{\arccos x}(x) = \left|\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right|. \tag{17}$$

因此当 $x \to \pm 1$ 时，条件数会很大。 □

Problem IX

Solution. 根据 **Definition 4.59**, 当 $x \in [0,1]$ 时

$$C_f(x) = \left|\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\right| = \left|\frac{x}{e^x-1}\right| = \frac{x}{e^x-1}. \tag{18}$$

由 Taylor 展开易知 $e^x - 1 > x$ 因此 $C_f(x) \le 1$。进一步，由题意可得

$$f_A(x) = \mathrm{fl}\left[1 - \mathrm{fl}(e^{-x})\right] = (1 - e^{-x}(1+\delta_1))(1+\delta_2), \tag{19}$$

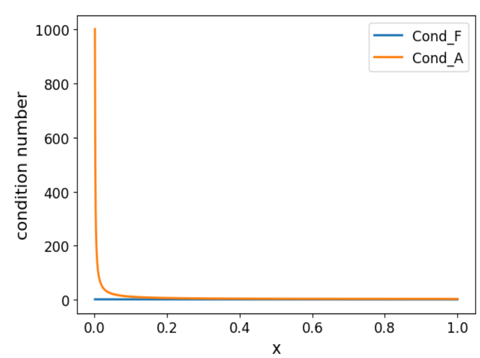
其中 $|\delta_1|, |\delta_2| < \epsilon_u$。略去其中大于一次的项，即有

$$f_A(x) = (1-e^{-x})[1 + \delta_2 - \delta_1 \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}], \tag{20}$$

从而 $\varphi(x) = 1 + \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$，根据 **Theorem 4.76** 有如下估计：

$$\mathrm{cond}_A(x) \le (1 + \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}})\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x}{x}. \tag{21}$$

事实上，将 $cond_f$ 和 $cond_A$ 的界使用 python 画图得到结果如下图所示。



可以看出函数的条件数十分稳定，但是算法 A 条件数的界当 $x \to 0$ 时会很大，说明在计算机实际计算 $f(x)$ 时，算法 A 在 x 很小时性质并不良好。 □

Problem X

Solution. 根据范数的定义（此处理解略有歧义，因此给出两种可能情况的对应结果，具体请看下文中的补充部分）和 **Definition 4.68** 可得

$$\operatorname{cond}_f(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \frac{1}{|r|} \sum_{i=0}^{n-1} \left| a_i \frac{\partial r}{\partial a_i} \right|. \tag{22}$$

由于 $F(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, r) = a_0 + a_1 r + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} + r^n = 0$，因此由隐函数求导有

$$\frac{\partial r}{\partial a_i} = -\frac{F_{a_i}}{F_r} = \frac{-r^i}{a_1 + a_2 r + \cdots + (n-1) a_{n-1} r^{n-2} + n r^{n-1}}, \tag{23}$$

从而

$$\operatorname{cond}_f(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} |a_i r^i|}{|a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + (n-1) a_{n-1} r^{n-1} + n r^n|}. \tag{24}$$

进一步，对于 Wilkinson 一例，有 $n = r = p > 0$，

$$\operatorname{cond}_f(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) = \frac{-p^p + \prod_{k=1}^{p}(p+k)}{p \sum_{i=1}^{p} \prod_{k=1, k\neq i}^{p}(p-k)} = \frac{-p^p + \prod_{k=1}^{p}(p+k)}{p!}. \tag{25}$$

由于

$$\frac{\prod_{k=1}^{p}(p+k)}{p^p} = (1 + \frac{1}{p})(1 + \frac{2}{p}) \ldots (1+1) > 2, \tag{26}$$

因此有

$$\operatorname{cond}_f(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \geq \frac{p^p}{p!}. \tag{27}$$

这与 **Example 4.64** 的结果十分类似，它们都可以说明当 p 足够大时，f 的小扰动会造成根的巨大改变。

补充：如果严格按照课本 (4.38) 构造 $1 \times n$ 矩阵的范数，那么此时的 1 范数并非向量的 1 范数，而应该指的是行向量矩阵的 1 范数，即

$$\operatorname{cond}_f(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \frac{1}{|r|} \max_{i=0,1,\ldots,n-1} \left| a_i \frac{\partial r}{\partial a_i} \right| = \frac{\max_{i=0,1,\ldots,n-1} |a_i r^i|}{|a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + (n-1) a_{n-1} r^{n-1} + n r^n|}. \tag{28}$$

对于 Wilkinson 一例，类似上文分析则对应有 $n = r = p > 0$，

$$\operatorname{cond}_f(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) = \frac{\max_{i=0,1,\ldots,p-1} |a_i p^i|}{p!} \geq \frac{p^{p-1}}{p!}. \tag{29}$$

这样也可以得到类似的结果和分析。由于此处矩阵的维数 $1\times n$ 的特殊性，此处的范数可以有两种理解，**但是思路都是类似的**。都给出对应的结果，特此补充。 $\square$

Problem XI

Solution. 仿照 **Example 4.29**，在规范化 FPN (β,p,L,U) 中取 $\beta=2,p=2,L=-1,U=1$。此时根据 **Definition 4.38** 计算 $a=(2)_{10}=(1.0)_2\times 2^1$ 与 $a=(3)_{10}=(1.1)_2\times 2^1$ 的商。

由于 $\frac{2}{3}=(0.1010\dots)_2$，**Definition 4.38** 第 2 步后（寄存器精度为 4）$\frac{a}{b}=(0.101)_2\times 2^0$，第 3 步后 $\frac{a}{b}=(1.01)_2\times 2^{-1}$，第 5 步后（round to even）$\frac{a}{b}=(1.0)_2\times 2^{-1}$，从而有

$$\mathrm{fl}(\frac{2}{3})=(1.0)_2\times 2^{-1}, \tag{30}$$

进而

$$-\delta=\frac{\frac{2}{3}-\mathrm{fl}(\frac{2}{3})}{\frac{2}{3}}=\frac{(0.0101\dots)_2\times 2^{-1}}{(1.0101\dots)_2\times 2^{-1}}=\frac{1}{4}. \tag{31}$$

然而 $|\delta|=\frac{1}{4}=\epsilon_u$，与 **Lemma 4.39** 矛盾！ $\square$

Problem XII

Solution. 在 IEEE 754 标准下，由于根在区间 $[128,129]$ 之间，因此此时若将 FPN 表示成 (4.1) 的形式，有 $e=7$，因此此时 FPN 系统中相邻两个浮点数间距为

$$\Delta=\epsilon_M\times 2^e=2^{-16}>10^{-6}. \tag{32}$$

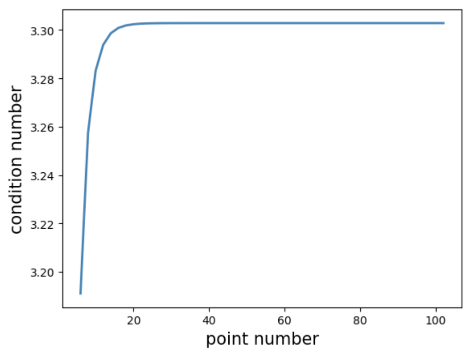
因此绝对精度并不能保证达到 10^{-6} 以内。 $\square$

Problem XIII

Solution. 求解三次样条的插值问题（不失一般性，以 complete cubic spline 为例，其他边界条件类似），根据 **Theorem 3.7**，可以发现先需求解课本式（3.15）给出的线性方程组得到各 m_i $(i=1,2,\dots,N)$，再根据 m_i 的值带入课本 **Lemma 3.3** 式（3.6）的方程组得到多项式的各个系数。因此，若其中两个插值点 x_i,x_{i+1} 的距离远小于其余相邻插值点的间距，产生的误差可能会来自式（3.15）和（3.6）两步。

首先是求解（3.15）的线性方程组。x_i,x_{i+1} 间距很小意味着相对来说 λ_i 和 μ_{i+1} 会十分趋近 0，而 λ_{i+1} 和 μ_i 会十分趋近与 1。按照题目给出的提示，此时（3.15）的矩阵的条件数（由于范数的等价性，不妨本题的条件数均以 2 范数为基准）似乎应该很大。然而，根据我在 python 的计算，结果并非如此。

不失一般性，我构造了等间距 1 的一系列插值点，并使最中间的两个插值点间距为 0.01。改变插值点个数从 6-102 个，对应的矩阵（维度从 4-100）的条件数存入了`condition_number.txt`中并作图如下。



可以发现，随着插值点个数增多，矩阵条件数略有增大，并且最终稳定在 3.30283 左右，并没有出现异常。因此可以认为（3.15）能够求解得到较为稳定的 $m_i\ (i=1,2,\ldots,N)$。

由此考虑第二步：求解（3.6）。由于 $c_{i,0}=f_i$，$c_{i,1}=m_i$，在求解 $c_{i,0},c_{i,1}$ 的过程中并不会出现异常情况。然而，若 x_i,x_{i+1} 的距离非常近，则由样条函数连续可微知此时 $m_i\sim m_{i+1}$（即 $\frac{m_{i+1}}{m_i}\to 1$，下同）；并且，由样条函数在 x_i 处的 Taylor 展开以及差商的连续性可知此时还有 $K_i=f[x_i,x_{i+1}]\sim m_i$。也就是说，$m_i,m_{i+1},K_i$ 三者此时近似相等。

由此，在计算 $c_{i,2}=\frac{3K_i-2m_i-m_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}$ 和 $c_{i,3}=\frac{m_i+m_{i+1}-2K_i}{(x_{i+1}-x_i)^2}$ 时，二者的分子和分母都会十分接近 0！从而导致在计算 $c_{i,2}$ 和 $c_{i,3}$ 分子分母时，会出现 **Example 4.48** 所示的巨量消失现象，导致结果不准确。

综上所述，结果的不准确出现在了求解课本式（3.6）一步中分子分母的加减法运算产生的巨量消失。 □

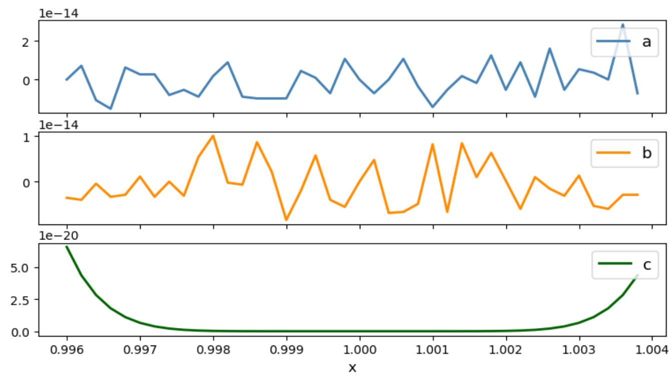
Programming assignments

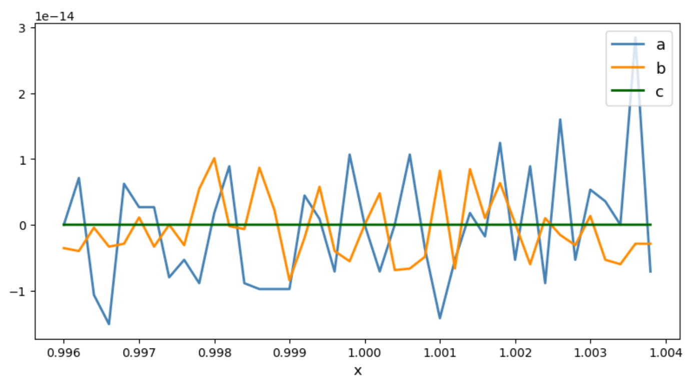
本次编程作业使用 C++ 和 python 共同编写，python 作画图用。其中 C++ 部分采用 Makefile 文件对编译进行统一管理。具体地，在 Makefile 所在目录下输入`make` 即可完成编译，得到可执行文件`test`。对其运行即可得到各小题的输出结果，具体内容将按问题顺序分别作出说明。

Problem A

题目中给出的函数的三种不同表达形式在 $[0.99, 1.01]$ 等间距插值结果在`point_value.txt`中给出了完整的展示和说明。限于篇幅，请自行查阅该文本文件，此处不再列出具体的值。

进一步，三个函数在 $[0.996, 1.004]$ 计算得到的函数值的各自放大图像及对比图如下图所示。





理论上说，三个函数在 x 接近 1 时都应该趋向 0。但是从图像中可以很明显地看出三个函数表达形式的误差并不相同。对比 (4.49 a) 和 (4.49 b)，可以发现 (4.49 b) 形式的误差总体小于 (4.49 a) 的误差，这是因为 (4.49 b) 的二元运算次数为 15 次，远远小于 (4.49 a) 中的 43 次，从而避免了大量的舍入误差。另一方面，对比图中，似乎 (4.49 c) 都是 0，发生了巨量消失。然而通过单独绘图以及`point_value.txt`中的数据，可以看出并没有明显发生这种情况。此外，只有 (4.49 c) 的值是连续的。因此综合考虑，(4.49 a) 的形式误差最大，其次是 (4.49 b)，误差最小的是 (4.49 c)。

Problem B

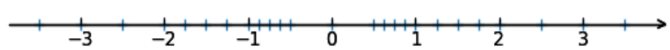
首先，根据 **Definition 4.17**, 程序相应输出

```
UFL = 0.5
OFL = 3.5
```

其次，对于 FPN 系统的全体浮点数，程序相应输出

```
All numbers in F are:
0.5, -0.5, 0.625, -0.625, 0.75, -0.75, 0.875, -0.875, 1, -1, 1.25, -1.25, 1.5, -1.5,
1.75, -1.75, 2, -2, 2.5, -2.5, 3, -3, 3.5, -3.5, 0.
25 numbers in total.
```

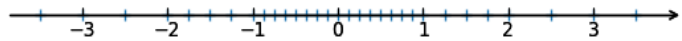
而 25 个 FPN 也印证了 **Corollary 4.19**: $\#F = 2^P(U-L+1)+1 = 8(1+1+1)+1 = 25$。进一步的，FPN 系统的全体浮点数在实轴上表示如下图所示。



此外，该 FPN 系统的非规格化浮点数由程序输出如下:

```
All subnumbers are:
0.125, -0.125, 0.25, -0.25, 0.375, -0.375.
6 numbers in total.
```

加上这些非规格化浮点数后的全体 FPN 在实轴上表示如下图所示。


−3
−2
−1
0
1
2
3