数值分析第二章编程作业报告

刘陈若 3200104872

信息与计算科学 2001

程序编译和运行说明

本次项目作业采用 Makefile 文件对编译进行统一管理。具体地，在 Makefile 所在目录下输入`make`即可完成编译，得到 problemB-problemE的可执行文件`B`,`C`,`D`,`E`。分别对其进行运行，即可得到各小题的输出结果，具体内容将在下一节中按问题顺序分别作出说明。

程序运行结果及简要分析

Problem A

问题 A 没有数值输出，其具体的要求都已经全部在头文件`interpolationsolver.h`中得到实现。

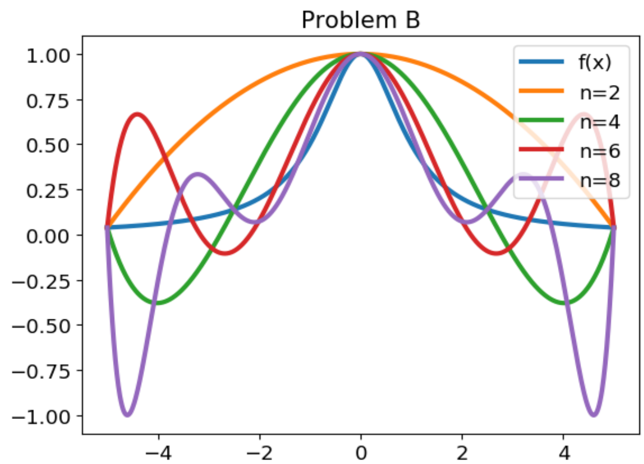
具体来说，头文件首先定义了 Function 类和 Interpolation 类，分别对不同类型的函数以及插值公式进行抽象。除了一般化的函数外，Newton polynomial 和 Hermite polynomial 类对 Function 类进行继承。通过运算符 () 的重载，只需给出插值多项式所有 $\pi_k(x)$ 前的系数 a_k, 即可唯一表示对应的函数。

而系数的确定将由 Interpolation 类完成。Interpolation 类派生出的 Newton Formula 和 Hermite Formula 类分别根据差商计算公式递推得到所有系数 a_k，得到相应的 Newton polynomial 和 Hermite polynomial，并且通过 solve() 函数（以及 Hermite polynomial 特有的 solvediff() 函数）分别返回插值函数在任意一点的函数（以及导数）值。

有两点需要格外注意。首先，Newton Formula 和 Hermite Formula 类的具体对象构造方式并不相同，Newton Formula 需要给出的是带插值函数和插值点的位置，而 Hermite Formula 需要给出的是插值点位置和插值点的函数（及其导数）值。其次，根据题目要求，希望实现的是给出一个能够返回插值多项式任意一点函数值的接口，也就是说，希望能把具体的系数 a_k 封装在类内，而不是返回插值函数的具体表达式交由用户进行函数值计算。因此，虽然设计了 Get coef() 函数返回插值多项式的相应系数，但除了本实验报告的必要展示之外，应尽量避免使用该函数。

Problem B

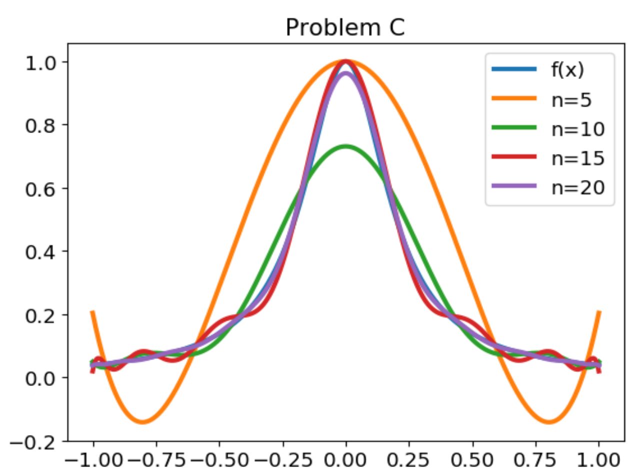
问题 B 中，首先对 $n = 2, 4, 6, 8$，分别利用函数 $f(x) = 1/(1 + x^2)$ 在插值点 $x_i = -5 + i/n$, $i = 0, 1, \dots, n$ 的值进行插值，然后对不同 n 的值对应的插值函数进行描点采样，并将采样数据存储至`probB_result.txt`文件后导入 Python 绘制出其图像，和真实的 $f(x)$ 图像比较得到下图。



从图中可以看出，对于 $f(x)$ 采用等间距节点插值会产生明显的 Runge 现象，随着 n 的增加插值函数并未达到更好的拟合效果，并且在区间端点处产生了更为剧烈的振荡。

Problem C

问题 C 中，首先对 $n = 5, 10, 15, 20$，分别利用函数 $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ 在 Chebyshev 多项式的零点 $x_i = \cos \frac{2i-1}{2n}\pi$，$i = 1, 2, \ldots, n$ 的值进行插值，然后对不同 n 的值对应的插值函数进行描点采样，并将采样数据存储至`probC_result.txt`文件后导入 Python 绘制出其图像，和真实的 $f(x)$ 图像比较得到下图。



从图中可以看出，对于 $f(x)$，将 Chebyshev 多项式的零点作为节点进行插值时，随着 n 的增大，多项式函数对原函数具有更好的近似效果，有效地避免了插值函数振荡的问题。

Problem D

(a)

如果记距离 D 关于时间 t 的函数为 $D=f(t)$，根据题意有

$$\begin{aligned} f(0)=0,\quad f'(0)=75,\quad f(3)=225,\quad f'(3)=77,\quad f(5)=383 \\ f'(5)=80,\quad f(8)=623,\quad f'(8)=74,\quad f(13)=993,\quad f'(13)=72 \end{aligned} \tag{1}$$

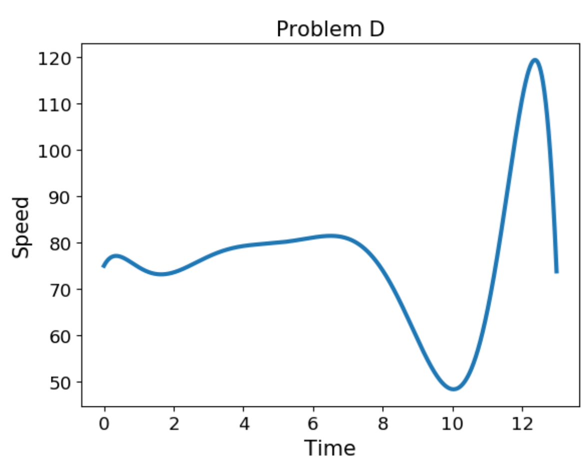
将这些插值点和对应数据输入进行 Hermite 插值后，对其在 $t=10s$ 处的距离和速度进行预测，程序有如下输出：

```
The car's distance at t = 10s is 742.503 feet
The car's speed at t = 10s is 48.3817 feet/s
```

也即，根据插值结果，在 $t=10s$ 处的距离和速度分别为 742.503 feet 和 48.3817 feet/s.

(b)

通过对得到的 Hermite 插值函数的导数利用 solvediff() 函数进行描点采样，并将采样数据存储至`probD_result.txt`文件后，导入 Python 可以绘制出汽车速度随时间的图像如下图所示。



从中可以很直观地看出，当 t 在 $12s$ 左右时，根据图像此时汽车速度将远远超过 $55mi/h$。事实上，如果以 $0.01s$ 为间隔进行等间隔采样，可以近似得到汽车在观测过程中的最大速度为：

```
The max speed during the observation is 119.417 feet per second
```

Problem E

(a)

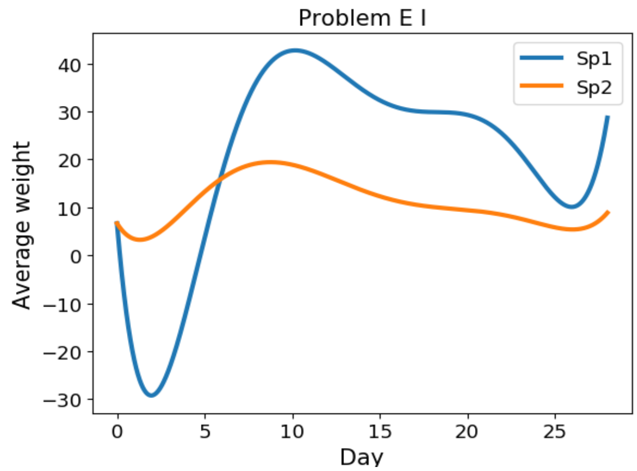
使用 Newton 公式对两类样本分别进行插值，利用 Get coef() 函数得到两个插值函数的系数分别为：

```
The Coefficients of curve for Sp1 are: 6.67 1.77167 0.457833 -0.124778 0.013566
-0.000978085 4.1477e-05
The Coefficients of curve for Sp2 are: 6.67 1.57167 -0.0871667 -0.0152729
0.00257908 -0.000204804 8.6768e-06
```

因此，两类种群的 Average weight curves 分别为

$$\begin{aligned} p_{Sp1}(x) &= 6.67\pi_0(x) + 1.77167\pi_1(x) + 0.457833\pi_2(x) - 0.124778\pi_3(x) \\ &\quad +0.013566\pi_4(x) - 0.000978085\pi_5(x) + 4.1477 * 10^{-5}\pi_6(x) \\ p_{Sp2}(x) &= 6.67\pi_0(x) + 1.57167\pi_1(x) - 0.0871667\pi_2(x) - 0.0152729\pi_3(x) \\ &\quad +0.00257908\pi_4(x) - 0.000204804\pi_5(x) + 8.6768 * 10^{-6}\pi_6(x) \end{aligned} \tag{2}$$

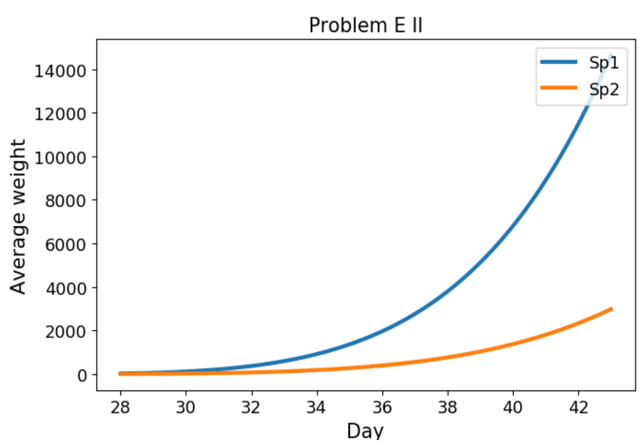
直观来看，对函数进行描点采样，并将采样数据存储至`probE_result.txt`文件后，导入 Python 后绘制出如下所示函数图像。图像的简单分析将在 (b) 中一并进行。



(b)

根据 (a) 中的插值函数，可以得到 15 天后，也就是第 43 天时两类样本的 Average weight，以及样本在 28-43 天之间的平均重量曲线如下所示。

```
Average weight of Sp1 after another 15 days is: 14640.3
Average weight of Sp2 after another 15 days is: 2981.48
```



显然这样的结果是与直觉相违背的。结合 (a) 中的图像，我们可以得到如下结论：当插值点无法自

主决定时，可能会产生 Runge 现象导致插值函数与真实函数在观测区间内发生较大差异；此外，插值函数对观测区间外的函数值并不一定具有好的预测效果。