Homework 5 of Numerical Analysis

刘陈若 3200104872
信息与计算科学 2001

Theoretical questions

Problem I

Solution. 显然，区间 $[a,b]$ 上的连续函数经过求和和数乘运算仍然是 $[a,b]$ 上的连续函数，并且满足加法交换律和数乘的分配律。此外，$f \equiv 0$ 是加法单位元，1 是乘法单位元，并且对于任何 $[a,b]$ 上的连续函数 f，$f+(-f)=0$。由此结合 **Definition B.2** 易知 $\mathcal{C}[a,b]$ 是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间。

其次，我们证明 **Theorem 5.7** 定义的 $\langle u,v\rangle$ 是该线性空间上的一个内积。对于任意 $v \in \mathcal{C}[a,b]$,

$$\langle v,v\rangle = \int_a^b \rho(t)|v(t)|^2 \mathrm{d}t \geq 0, \tag{1}$$

并且由 $\rho(t)>0$, $|v(t)|^2 \geq 0$ 可知 $\langle v,v\rangle = 0$ 当且仅当 $|v(t)|^2=0$，即 $v=0$。进一步我们有，

$$\begin{aligned}
&\langle u+v,w\rangle = \int_a^b \rho(t)[u(t)+v(t)]\overline{w(t)}\mathrm{d}t = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle\,,\\
&\langle av,w\rangle = \int_a^b a\rho(t)v(t)\overline{w(t)}\mathrm{d}t = a\langle v,w\rangle\,,\\
&\overline{\langle w,v\rangle} = \overline{\int_a^b \rho(t)w(t)\overline{v(t)}\mathrm{d}t} = \int_a^b \overline{\rho(t)w(t)\overline{v(t)}}\mathrm{d}t = \int_a^b \rho(t)v(t)\overline{w(t)}\mathrm{d}t = \langle v,w\rangle\,,
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 u,v,w 是任意 $[a,b]$ 上的连续函数，a 是任意复数。因此，**Definition B.108** 保证 $\langle u,v\rangle$ 是该线性空间上的一个内积。

最后，根据等式

$$\|u\|_2 = \left(\int_a^b \rho(t)|u(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle u,u\rangle} \tag{3}$$

和 **Definition B.113** 可知，$\|u\|_2$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个范数，从而完成了 **Theorem 5.7** 的全部证明。 □

Problem II

(a)

Solution. 只需证明，对于任意不相同的自然数 m, n 都有 $\langle T_m(x), T_n(x)\rangle = 0$。事实上，

$$\begin{aligned}
\langle T_m(x), T_n(x)\rangle &= \int_{-1}^{1} \cos(m\arccos x)\cos(n\arccos x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{1} \cos(m\arccos x)\cos(n\arccos x)\mathrm{d}(\arccos x) \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos(mt)\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos[(m+n)t]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos[(m-n)t]\mathrm{d}t \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

其中最后一步是因为 $\sin[(m+n)t]$ 和 $\sin[(m-n)t]$ 在 $t = 0, \pi$ 时都为 0，从而得证。 $\square$

(b)

Solution. 当然我们可以直接根据已知的 Chebyshev 多项式求模长后规范化得到答案，不过此处还是老老实实地仿照 **Example 5.19** 进行正交化：

$$\begin{aligned}
&u_1 = 1, \quad v_1 = u_1 = 1, \quad \|v_1\|_2^2 = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \pi, \quad u_1^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \\
&u_2 = x, \quad v_2 = x - \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = x, \quad \|v_2\|_2^2 = \frac{\pi}{2}, \quad u_2^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x, \\
&u_3 = x^2, \quad v_3 = x^2 - \left\langle x^2, \sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right\rangle \sqrt{\frac{2}{\pi}}x - \left\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = x^2 - \frac{1}{2}, \quad \|v_3\|_2^2 = \frac{\pi}{8}, \quad u_3^* = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

至此我们得到了前三个标准化 Chebyshev 多项式 u_1^*, u_2^*, u_3^*，其具体表达式如上所示。 $\square$

Problem III

(a)

Solution. 根据上一题的结论，**Corollary 5.25** 以及 **Example 5.28** 我们有

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \langle y, u_1^* \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \\
b_1 &= \langle y, u_2^* \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x \mathrm{d}x = 0, \\
b_2 &= \langle y, u_3^* \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}x = -\sqrt{\frac{8}{9\pi}}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

因此，最佳二次多项式近似为 $\hat{\varphi} = \frac{2}{\pi} - \frac{8}{3\pi}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3\pi} - \frac{8}{3\pi}x^2$。 □

(b)

Solution. 根据 **Theorem 5.34** 以及 **Example 5.35** 我们有

$$
G(1, x, x^2) = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle & \langle x^2, x \rangle & \langle x^2, x^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{3\pi}{8} \end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \langle y, 1 \rangle \\ \langle y, x \rangle \\ \langle y, x^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.
$$

求解方程组 $G(1, x, x^2)^T \mathbf{a} = \mathbf{c}$ 可得，

$$
\mathbf{a} = \left[\frac{10}{3\pi}, 0, -\frac{8}{3\pi} \right]^T. \tag{7}
$$

因此，最佳二次多项式近似为 $\hat{\varphi} = \frac{10}{3\pi} - \frac{8}{3\pi}x^2$。 □

Problem IV

(a)

Solution. 和 **Problem II** 类似，进行 Schimidt 正交化过程如下：

$$
\begin{aligned}
&u_1 = 1, \quad v_1 = u_1 = 1, \quad \|v_1\|_2^2 = \sum_{i=1}^{12} v_1^2(t_i) = 12, \quad u_1^* = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \\
&u_2 = x, \quad v_2 = x - \left\langle x, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle \frac{1}{2\sqrt{3}} = x - \frac{13}{2}, \quad \|v_2\|_2^2 = 143, \quad u_2^* = \frac{1}{\sqrt{143}}\left(x - \frac{13}{2}\right), \\
&u_3 = x^2, \quad v_3 = x^2 - \left\langle x^2, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle \frac{1}{2\sqrt{3}} - \left\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{143}}\left(x - \frac{13}{2}\right) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{143}}\left(x - \frac{13}{2}\right) = x^2 - 13x + \frac{91}{3}, \\
&\|v_3\|_2^2 = \frac{4004}{3}, \quad u_3^* = \sqrt{\frac{3}{4004}}\left(x^2 - 13x + \frac{91}{3}\right).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

至此我们得到了一组正交多项式 u_1^*, u_2^*, u_3^*，其具体表达式如上所示。 □

(b)

Solution. 根据（a）的结论，**Corollary 5.25** 以及 **Example 5.28** 我们有

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \langle y, u_1^* \rangle = \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{2\sqrt{3}} y_i = 277\sqrt{3}, \\
b_1 &= \langle y, u_2^* \rangle = \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{143}}\left(x_i - \frac{13}{2}\right) y_i = \frac{589}{\sqrt{143}}, \\
b_2 &= \langle y, u_3^* \rangle = \sum_{i=1}^{12} \sqrt{\frac{3}{4004}}\left(x_i^2 - 13x_i + \frac{91}{3}\right) y_i = 6034\sqrt{\frac{3}{1001}}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

因此，最佳二次多项式近似为

$$
\hat{\varphi} = \frac{277}{2} + \frac{589}{143}\left(x - \frac{13}{2}\right) + \frac{9051}{1001}\left(x^2 - 13x + \frac{91}{3}\right) \approx 9.042x^2 - 113.427x + 386.000. \tag{10}
$$

这和 **Example 5.48** 的结论是一致的。 □

(c)

Solution. 如果数据集的 x_i's 保持不变，但是 y_i's 发生变化，从 (a) 和 (b) 中很容易可以看出，求解正交多项式 u_1^*, u_2^*, u_3^* 的过程是可以重复利用的，但是计算正交多项式前的系数 b_0, b_1, b_2 的过程是需要重新计算的。

对比正规方程组，可以发现，使用正交多项式进行 approximation 时，只需要直接更新基前面的系数即可，而正规方程组的更新却涉及到矩阵的运算以及线性方程组的求解。对于大型数据集来说，这可能计算代价高昂。相比之下，正交多项式可以使用简单的公式计算，速度更快，效率更高。 □

Programming assignments

本次编程作业采用 Makefile 文件对编译进行统一管理。具体地，在 Makefile 所在目录下输入`make` 即可完成编译，得到可执行文件`test`。对其运行即可得到各小题的输出结果，具体内容将按问题顺序分别作出说明。需要注意的是，本项目作业使用 eigen3 进行线性方程组求解，它以`#include <eigen3/Eigen/...>`的形式被调用，因此在编译时需要保持相应的文件关系。

DLS solver.h

由于作业的头文件并不复杂，此处仅给出一个简单的说明。

`DLS_solver.h`定义了两个类 `DLS_solver` 和 `Normal_equations` 和一个子类 `QR_factorization`。`DLS_solver` 类是一个抽象基类，它定义了一个抽象函数 `solve()`，用来求解最小二乘问题。`Normal_equations` 类继承自 `DLS_solver`，它实现了使用正规方程组来求解最小二乘问题的方法。`QR_factorization` 类继承自 `DLS_solver`，它实现了使用 QR 分解来求解最小二乘问题的方法。这两个类的对象可以接受一个矩阵和一个向量作为输入，它们可以根据这些输入来求解最小二乘问题，并返回解的系数。此外，`Normal_equations` 类还提供了一个函数来返回 Gram 矩阵，而 `QR_factorization` 类提供了一个函数来返回 QR 分解中的 R 矩阵的非零部分 R_1。

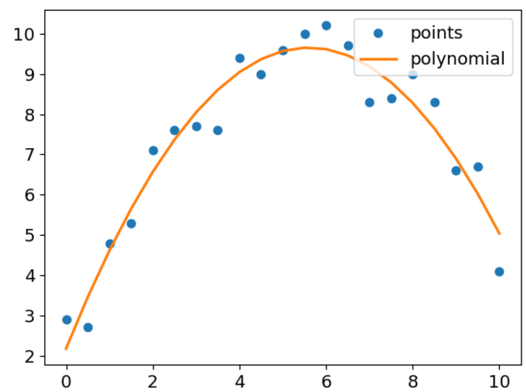
Problem A

头文件已经实现了使用正规方程组求解最小二乘问题。对于题目中所给的数据，运行程序，输出结果如下：

```
The results using normal equations are:
a0 = 2.17572
```

```
a1 = 2.67041
a2 = -0.238444
```

其中 a_0, a_1, a_2 是最佳近似二次多项式 $\hat{\varphi} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 的对应系数。所有数据点和对应的多项式图像如下所示。



Problem B

头文件已经实现了使用 QR 分解求解最小二乘问题。同时，对于相同的的数据，运行程序，输出结果如下：

```
The results using QR factorization are:
a0 = 2.17572
a1 = 2.67041
a2 = -0.238444
```

其中 a_0, a_1, a_2 是最佳近似二次多项式 $\hat{\varphi} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 的对应系数。可以看出两种不同的算法得到了相同的结果（因此此处不再绘制图像），也从侧面反映了算法的正确和准确性。

进一步，输出正规方程组对应的格拉姆矩阵 G 以及 QR 分解对应的矩阵 R_1 的条件数如下：

```
The condition number of G is: 19002
The condition number of R1 is: 141.072
```

显然 G 的条件数要远远大于 R_1 的条件数，这也证实了题目所给的结论。