Primenjena teorija igara domaći 1 - Karnoovo takmičenje N kompanija

Ognjen Čavić E2 161/2024

Novembar 2024

1 Nomenklatura

q_i - Količina proizvoda koja je proizvedena od strane i-te kompanije u takmičenju

c_i - Ukupna cena proizvodnje odgovarajuće kompanije

d_i - Cena ulaska na tržište

$\overline{c_i}$ - Koeficijent proizvodnje kompanije tj. trošak pravljenja jednog proizvoda

$p(q_1, ..., q_N)$ - Cena pojedinačnog proizvoda koji zavisi od ukupne količine proizvoda

a - Faktor osetljivosti cene proizvoda

b - Maksimalna cena proizvoda

$u_i(q_1, ..., q_2)$ - Profit tj. dobit svake od kompanija

2 Model u slučaju kada se N kompanija takmiči

Jedina stvar koja se razlikuje u odnosu na model sa dve kompanije je to što se sabiraju količine proizvoda više kompanija. Kako bi se stvari malo pojednostavile pretpostavlja se da su cene proizvodnje pojedinačnih proizvoda i ulaska na tržište iste za svaku kompaniju tj:

$$\begin{gathered} c_1 = c_2 = ... = c_N \\ d_1 = d_2 = ... = d_N \end{gathered}$$

Stoga su konačne cene proizvodnje za svaku od kompanija sledeće:

$$\begin{gathered} c_1(q_1) = \overline{c}q_1 + d \\ c_2(q_2) = \overline{c}q_2 + d \\ \vdots \\ c_N(q_N) = \overline{c}q_N + d \end{gathered}$$

Odakle se vidi se da u ovom slučaju cene proizvodnje zavise samo od količine robe. Pojedinačna cena svakog proizvoda je opisana na sledeći način:

$$p(q_1, q_2, ..., q_N) = b - a\sum_{i=1}^{N} q_i \tag{1}$$

Preostaje definisati funkciju koja opisuje profit:

$$u_1(q_1, q_2, ..., q_N) = q_1 * p(q_1, q_2, ..., q_N) - c_1(q_1)$$
$$u_2(q_1, q_2, ..., q_N) = q_2 * p(q_1, q_2, ..., q_N) - c_2(q_2)$$
$$\vdots$$
$$u_N(q_1, q_2, ..., q_N) = q_N * p(q_1, q_2, ..., q_N) - c_N(q_N)$$

3 Analiza promene plasirane robe, pojedinačne cene i dobiti sa porastom broja kompanija

Cilj je maksimizovati profit, stoga je potrebno uraditi prvi izvod profita odgovarajuće kompanije po količini plasirane robe jer je to jedina stvar kojom ta kompanija može da upravlja.

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = b - aq_1 - a\sum_{i=1}^{N} q_i - \overline{c} = 0$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = b - aq_2 - a\sum_{i=1}^{N} q_i - \overline{c} = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial u_N}{\partial q_N} = b - aq_N - a\sum_{i=1}^{N} q_i - \overline{c} = 0$$

Sabiranjem ovih jednačina dobija se sledeće:

$$nb - a\sum_{i=1}^{N} q_i - aN\sum_{i=1}^{N} q_i - N\overline{c} = 0$$
$$nb - a(N+1)\sum_{i=1}^{N} q_i - N\overline{c} = 0$$

Odakle sledi optimalna količina proizvoda koja dovodi do maksimalne dobiti:

$$q^* = \sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{Nb - N\overline{c}}{a(N+1)} \tag{2}$$

gde je neophodan uslov $b > \overline{c}$ jer broj proizvoda ne sme biti negativan. Zamenom u izraz za pojedinačnu cenu plasirane robe, dobija se i optimalna cena pojedinačnog proizvoda:

$$p^*(q_1, q_2, ..., q_N) = \frac{b + N\overline{c}}{N+1} \tag{3}$$

4 Analiza slučaja kada broj kompanija neograničeno raste

Kada broj kompanija neograničeno raste potrebno je ispitati ka kojim vrednostima konvergiraju broj proizvoda i pojedinačna cena:

$$\lim_{N\to\infty} q^* = \lim_{N\to\infty} \frac{Nb - N\overline{c}}{a(N+1)} = \frac{b-\overline{c}}{a}$$
$$\lim_{N\to\infty} p^* = \lim_{N\to\infty} \frac{b + N\overline{c}}{N+1} = \overline{c}$$

što znači da porast broja kompanija preko nekog broja dovodi do toga da se cena i količina proizvoda skoro i ne menjaju, a to podrazumeva da se isti profit deli između više kompanija tj. da svaka kompanija ima manju dobit tj. profit.

5 Karnoov duopol sa nesimetričnim troškovima proizvodnje