Bacanje atomske bombe (Hirošima)

Seminarski rad na kursu
Osnove matematičkog modeliranja

Predrag Mitić, Luka Miletić i Maja Crnomarković

maj 2021.

Profesor: Milan Dražić

Asistent: Zorica Dražić

Sadržaj

1 Deo I - Opis problema

Atomska bomba na Hirošimu je bačena iz bombardera B'29 koji nije bio mnogo okretan. Zbog toga pretpostavimo da se kretao na istoj visini od $9600m$ sve vreme leta. Leteo je maksimalnom brzinom od $530km/h$. U trenutku $t = 0$ izbacio je bombu koja je posle nekog vremena eksplodirala na tlu proizvodeći udarni talas brzine $350m/s$. Da bi se našao što dalje od cilja u trenutku kada ga sustigne udarni talas, avion može da skreće u horizontalnoj ravni maksimalnom krivinom radijusa $4700m$. Izračunati koliko daleko je bombarder bio u trenutku kada ga je stigao udarni talas i koliko vremena je od tada proteklo, ako se kretao optimalnom putanjom koja maksimizuje tu daljinu.

Označićemo datu visinu sa h = $9600m$, maksimalnu brzinu sa $\upsilon = 530km/h$, brzinu udarnog talasa sa υ_{talasa} = 350m/s i maksimalnu krivinu radijusa sa R =4700m.

2 Deo II - Modeliranje

Posmatrajući naš problem, zaključujemo da model treba da podelimo na nekoliko delova. Prvo ćemo modelirati kretanje bombe, tj. projektila u zavisnosti od trenutka ispaljivanja, zatim deo u kome avion skreće u horizontalnoj ravni, a potom deo u kome nastavlja pravo kako bi se što više udaljio od udarnog talasa.

2.1 Kretanje bombe (projektila)

Izvedimo prvo formule za kretanje bombe. Naime, znamo da se bomba ispaljuje iz bombardera koji leti na konstantoj visini nekom brzinom. Iz toga zaključujemo da se radi o horizontalnom hitcu, pa pravimo model shodno tome.

Horizontalni hitac je kretanje tela, u ovom slučaju bombe, koja je izbačena nekom brzinom υ_0 u horizontalnom pravcu. Vektor početne brzine je horizontalan.

Horizontalan hitac posmatramo kao rezultat slaganja dva kretanja:

- u horizontalnom pravcu - ravnomerno pravolinijsko kretanje brzinom koje mu je neko telo zadalo
- u vertikalnom pravcu - ravnomerno ubrzano pravolinijsko kretanje pod dejstvom sile Zemljine teže (slobodan pad)

Trenutak t_0 je trenutak ispaljivanja bombe. Od početnih uslova imamo

$$(x(0),\, y(0)) = (0,\, h)$$

$$(\upsilon_{x0},\, \upsilon_{y0}) = (\upsilon_0,\, 0)$$

Zbog slobodnog pada imaćemo ubrzanje g koje prouzrokuje sila Zemljine teže, pa dobijamo sledeći vektor

$$(a_{x0},\, a_{y0}) = (0,\, -g)$$

Znamo da je ubrzanje drugi izvod pozicije po vremenu, integraljenjem toga dobijamo brzinu, koja je prvi izvod pozicije po vremenu.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

postaje

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \tag{1}$$

Ubacivanjem početnih uslova dobijamo da su konstante $c_1 = \upsilon_0$ i $c_2 = 0$, pa je konačna formula za brzinu:

$$(\upsilon_x, \upsilon_y) = (\upsilon_0, -gt) \tag{3}$$

Daljim integraljenjem ove formule dobijamo da je formula za poziciju bombe:

$$x(t) = \upsilon_0 * t \tag{4}$$

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2} \tag{5}$$

Ovim smo dobili model položaja naše bombe.

Ukoliko izrazimo x preko t u (4) i ubacimo u (5) dobijamo jednačinu putanje bombe

$$y = -\frac{gx^2}{2\upsilon_0^2} + h \tag{6}$$

Iz jednačine se vide da se radi o paraboli.

2.2 Određivanje trenutka i položaja eksplozije

Sada je potrebno da odredimo u kom trenutku se desila eksplozija. To se dešava kada bomba padne na zemlju, tj. kada je njena y-koordinata jednaka nuli, $y(t) = 0$.

$$h - \frac{gt^2}{2} = 0 \tag{7}$$

$$h = \frac{gt^2}{2} \tag{8}$$

$$2h = gt^2 \tag{9}$$

$$t^2 = \frac{2h}{g} \tag{10}$$

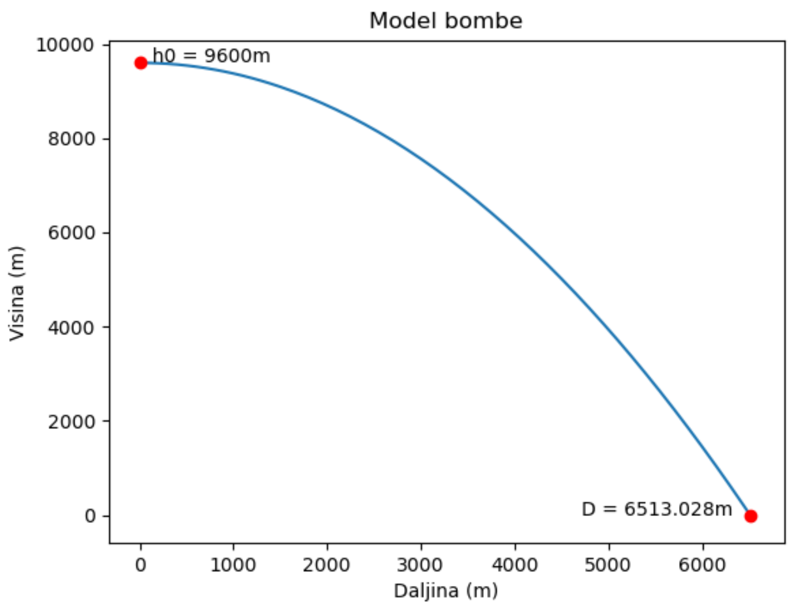
$$t_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{11}$$

Jednačina ima dva rešenja, i mi uzimamo samo t = 44.2401s koje je veće od 0. Označimo dobijeno vreme sa t_b.

Sledeće što treba da odredimo je $x(t_b)$, kako bismo znali sa koje tačke nam kreće udarni talas.

$$x(t_b) = v_0 * t_b \tag{12}$$

Dobijamo $x(t_b) = 6513.28m$. Označimo ovu vrednost vrednost sa D.



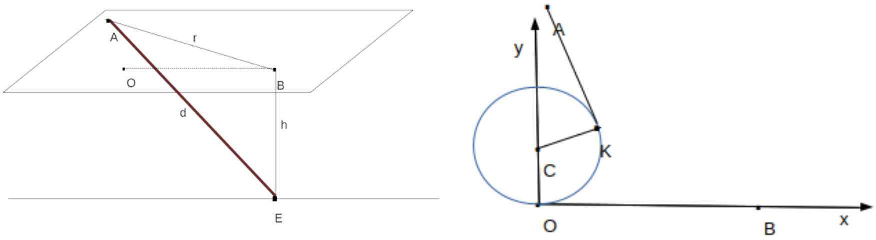
Slika 1: Prikaz kretanja atomske bombe

Implementaciju ovog grafika možete videti u fajlu "modelBombe.py".

2.3 Kretanje aviona

Avion se može kretati pravolinijski ili može skretati horizontalno. Ukoliko bi nakon ispaljivanja projektila prvo nastavio pravo, pa tek u nekom kasnijem momentu t skrenuo, ne bismo imali optimalnu putanju jer se avion ne bi udaljavao od mesta na kome će se desiti eksplozija. Ako bismo imali dodatna skretanja, to takođe ne bi bila optimalna putanja, jer će se avion najbrže udaljavati tako

što se kreće pravolinijski, nakon što je prvim skretanjem došao u takvu poziciju da se udaljava od mesta eksplozije. Zato ćemo uzeti da avion odmah nakon ispaljivanja bombe počinje da skreće, a potom nastavlja pravo kako bi se što brže udaljio od eksplozije.
Kretanje aviona, dakle, delimo na dva dela: u prvom delu avion horizontalno skreće, $[t_0, t_1]$, gde je t_0 trenutak $t = 0$ u kome avion izbacuje bombu, a t_1 trenutak u kom avion završava skretanje. U drugom delu kreće se konstantnom brzinom pravolinijski, $[t_1, t_s]$. Vreme t_s predstavlja vreme susreta aviona i udarnog talasa.



Slika 2: Levo: Projekcija tačke E na horizontalnu ravan, desno: Horizontalno skretanje aviona

Slika iznad biće korišćena kao pomoć, radi ilustracije onoga što radimo. S obzirom na to da avion ne može da skreće vertikalno, već samo horizontalno, on će sve vreme biti u jednoj istoj horizontalnoj ravni.

Posmatrajmo sliku "*Projekcija tačke E na ravan*". Na ovoj pomoćnoj slici, tačkom A označena je pozicija na kojoj se avion nalazi u trenutku kada ga udarni talas stiže, tačkom E pozicija bombe u trenutku eksplozije, a tačkom B projekcija tačke E na horizontalnu ravan u kojoj se nalazi avion, u cilju lakšeg računanja traženog rastojanja AE. Označimo AE sa d, AB sa r. Dužina duži BE je h koje nam je dato, a dužina OB jednaka je D.

Kako je ABE pravougli trougao, na osnovu Pitagorine teoreme važi:

$$d^2 = r^2 + h^2 \tag{13}$$

S obzirom na to da nam je h konstantno, d će biti maksimalno ukoliko je r maksimalno, tako da ćemo traženjem optimalnog r ustvari naći optimalno d.
Kako bismo se lakše snalazili, posmatraćemo samo horizontalnu ravan po kojoj se avion kreće. Na slici "*Horizontalno skretanje aviona*" prikazana je ta ravan iz ptičije perspektive.U nastavku ćemo posmatrati samo dvodimenzioni sistem, gde ćemo za koordinatni početak uzeti tačku O iz koje avion počinje sa skretanjem.

Označimo ugao za koji avion skreće sa ϕ.

Označimo sa t_1 vreme koje avion skreće. Izrazićemo ga preko ugla ϕ:

$$t_1 = \frac{R * \phi}{v} \tag{14}$$

U zavisnosti od vremena t_1, razlikovaćemo dva slučaja:

1. Kada udarni talas stigne avion pre nego što završi skretanje, tj. kada je $t_1 > t_s$
2. Kada avion završi sa skretanjem, nastavi da se kreće pravolnijski, i u nekom momentu ga talas stiže, dakle: $t_1 <= t_s$

U prvom slučaju, položaj aviona u zavisnosti od ugla ϕ biće:

$$x(\phi) = R * \sin\phi,\ y(\phi) = R * (1 - \cos\phi) \tag{15}$$

U drugom slučaju, avion se nakon skretanja kreće pravolinijski, brzinom:

$$v_x = v * \cos\phi,\ v_y = v * \sin\phi, \tag{16}$$

pa će njegov položaj u datom trenutku t biti:

$$x(t) = v * cos\phi(t - t_1) + R * \sin\phi,\ y(t) = v * sin\phi(t - t_1) + R * (1 - \cos\phi), \tag{17}$$

pri čemu je $t >= t_1$.
Neka je udarni talas stigao avion u trenutku $t = t_s$.

Mi želimo da maksimizujemo rastojanje aviona od tačke B(D, 0), tj. r. To rastojanje, u slučaju da je $t_1 > t_s$ biće:

$$r_1 = \sqrt{(x(\phi) - D)^2 + y(\phi)^2} \tag{18}$$

a u slučaju da je $t_1 <= t_s$ važiće:

$$r_2 = \sqrt{(x(t_s) - D)^2 + y(t_s)^2} \tag{19}$$

Iz (13) i (18) imamo

$${d_1}^2 = (x(\phi) - D)^2 + y(\phi)^2 + h^2 \tag{20}$$

Iz (13) i (19) imamo

$${d_2}^2 = (x(t_s) - D)^2 + y(t_s)^2 + h^2 \tag{21}$$

S druge strane, udarni talas će preći rastojanje d. On će se kretati vreme $t_s - t_b$ (bomba pada vreme t_b i nakon toga eksplodira). Dakle, važi:

$$d = v_{talasa} * (t_s - t_b) \tag{22}$$

3 Deo III - Implementacija i diskusija rezultata

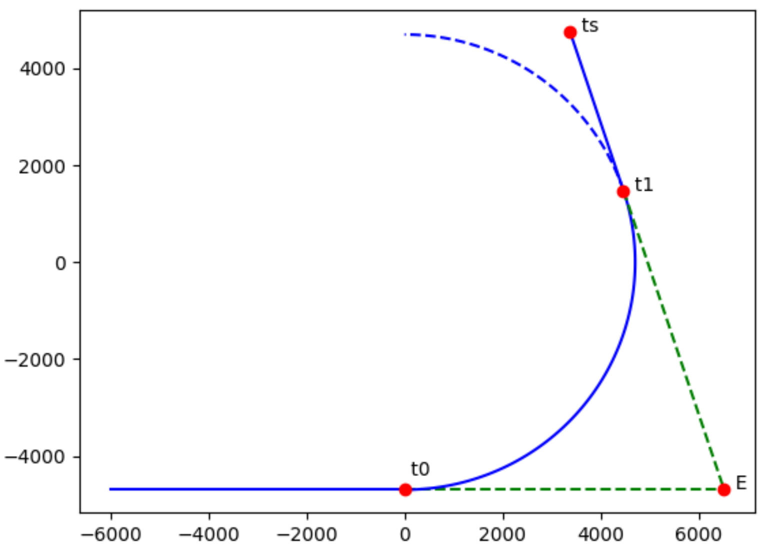
Naša implementacija urađena je u Pythonu i nalazi se u fajlu "modelAviona.py". Tražili smo optimalni ugao ϕ na intervalu $[0, \pi]$, sa greškom 0.001, iterativnom metodom. Za svako ϕ u petlji smo računali prvo t_1. Potom smo, pomoću funkcije fsolve tražili nulu funkcije koja je razlika udaljenosti na kojoj se avion nalazi u trenutku susreta i udaljenosti koju pređe udarni talas (jer su

te udaljenosti iste).
Dobili smo da će avion stići da skrene za najviše $\phi = 2.605\ rad$ jer će ga tada udarni talas stići dok je jos u zaokretu. Zbog toga, za sve uglove $[2.605, \pi]$, udaljenost na kojoj će udarni talas stići avion biće 13615.3251 m.

U petlji smo, za ugao ϕ, u nizovima niz_t i niz_d čuvali odgovarajuće vreme susreta i udaljenost aviona od mesta eksplozije, a potom smo nakon petlje našli maksimum niza niz_d, što je ustvari optimalna udaljenost, i njemu odgovarajuće vreme susreta iz niza niz_t.

Dobili smo da ugao skretanja treba da iznosi $\phi = 1.8914 rad$, da će vreme susreta biti $t_s = 83.7497 s$, a da će rastojanje aviona od tačke eksplozije u trenutku udara biti $d = 13828.3699 m$.
Ukratko ćemo objasniti oznake u kodu radi lakšeg razumevanja:

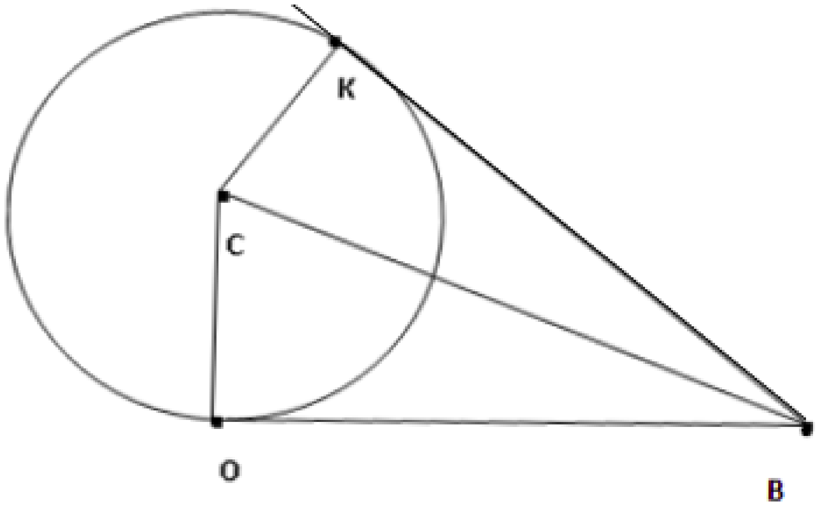
tb - trenutak padanja bombe na zemlju
D - udaljenost na koju je bomba pala
$t_1(fi)$ - funkcija koja racuna vreme koje je potrebno avionu da skrene za dati ugao ϕ
$x(t_s, fi, t1)$ i $y(t_s, fi, t1)$ - funkcije koje računaju x, tj. y koordinatu aviona u datom trenutku t_s
$d(fi, ts)$ - udaljenost na kojoj se avion nalazi u trenutku kada ga udarni talas stigne
$r(t)$ - poluprečnik udarnog talasa u trenutku t



Slika 3: Prikaz kretanja aviona

Na slici iznad prikazali smo kako će izgledati kretanje aviona na intervalu

$[t_0, t_1]$, a potom na intervalu $[t_1, t_s]$. Ovu implementaciju mozete pogledati u fajlu pod nazivom "grafikPutanje.py".



Slika 4: Prikaz ugla za koji avion treba da skrene

Sada ćemo pokazati da je ugao sa slike "*Prikaz ugla za koji avion treba da skrene*" stvarno ugao koji smo mi dobili. Duž BK je tangenta iz B na kružnicu, a isto važi i za duž BO. Odatle zaključujemo da su one jednake.Uglovi ∠OCB i ∠KCB su pravi. Dužine duži OC i CK su obe jednake R.

Na osnovu navedenog, i pravila o podudarnosti trouglova (SUS), trouglovi $\triangle BOC$ i $\triangle BKC$ su podudarni, pa su uglovi ∠OBC i ∠KBC jednaki. Označimo ugao ∠OBK sa α, pa su ∠OBC i ∠KBC jednaki $\frac{\alpha}{2}$.

Važi:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{D}$$

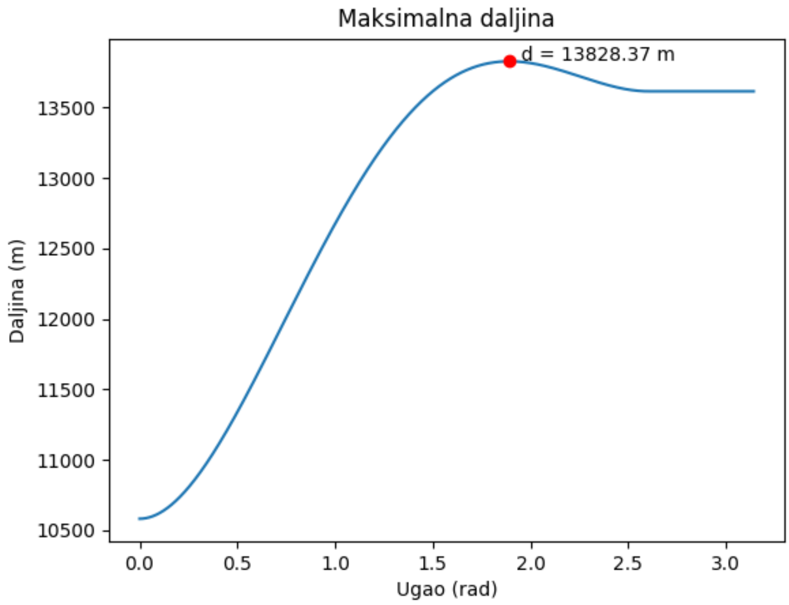
$$\frac{\alpha}{2} = \arctan\frac{R}{D}$$

$$\alpha = 2\arctan\frac{R}{D}$$

Odavde dobijamo da je ugao ∠OCK jednak $\pi - \alpha$, tj. $\pi - 2\arctan\frac{R}{D}$. Računanjem izraza sa desne strane jednakosti iznad dobijamo $\angle OCK = 1.8914 rad$, što je ugao koji smo mi dobili optimizacijom.

Za kraj rada, prikazaćemo tabelu sa vrednostima d i t_s za neke od odabranih uglova ϕ:

No.	ϕ	$t_{susreta}$	d
1	0.0 rad	74.4733 s	10581.6264 m
2	0.983 rad	80.3305 s	12631.6580 m
3	1.034 rad	80.6925 s	12758.3665 m
4	1.122 rad	81.2820 s	12964.6799 m
5	1.182 rad	81.6545 s	13095.0470 m
6	1.723 rad	83.6461 s	13792.1055 m
7	1.891 rad	83.7497 s	13828.3698 m
8	1.901 rad	83.7494 s	13828.2637 m
9	2.231 rad	83.4711 s	13730.8364 m
10	2.513 rad	83.1683 s	13624.8884 m



Slika 5: Zavisnost udaljenosti aviona od eksplozije od ugla ϕ