ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ – ΣΥΣ 411

Χατζάκης Εμμανουήλ-Θωμάς:2021030061

A)

α.

Με τη χρήση της εντολής **eig(A)** στη **Matlab** θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A του συστήματος.

Ιδιοτιμές	Ιδιοδιανύσματα
$\lambda_1 =- 1.7036$	$v_1 = [0.9943,\ 0.0633,\ -0.074,\ 0.0434]^T$
$\lambda_2 = 0.7310$	$v_2 = [0.9995,\ -0.0142,\ -0.0165,\ -0.0226]^T$
$\lambda_3 =- 0.0438 + 0.2066j$	$v_3 = [1.0000,\ 0.0005 + 0.0003j, 0.0013 + 0.0002j, - 0.0003 - 0.0064j]^T$
$\lambda_4 =- 0.0438 - 0.2066j$	$v_4 = [1.0000,\ 0.0005 - 0.0003j,\ 0.0013 - 0.0002j, - 0.0003 + 0.0064j\ ]^T$

Για **u=0** το σύστημα γίνεται $\frac{dx}{dt} = Ax(t)$. Η λύση του συστήματος ανοικτού βρόχου για μηδενική είσοδο είναι : $x(t) = e^{At}x(0)$

Για να εκφράσουμε τον **x** ως προς modes του συστήματος παρατηρούμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του **A** είναι μοναδικές. Λόγο αυτού ο πίνακας μετάβασης μπορεί να εκφραστεί ως:

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t},$$

$$A_i = v_i \tilde{v}_i,$$

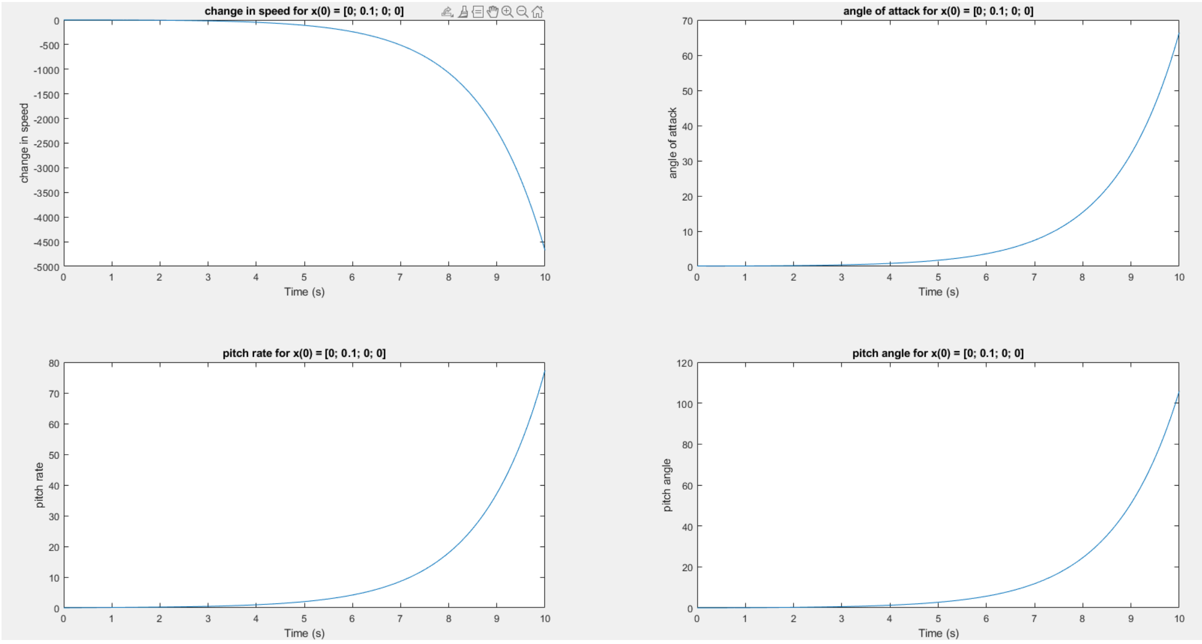
όπου τα v_i και $\overline{v_i}$ Είναι τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i

Οπότε το σύστημα ανοικτού βρόχου γράφετε

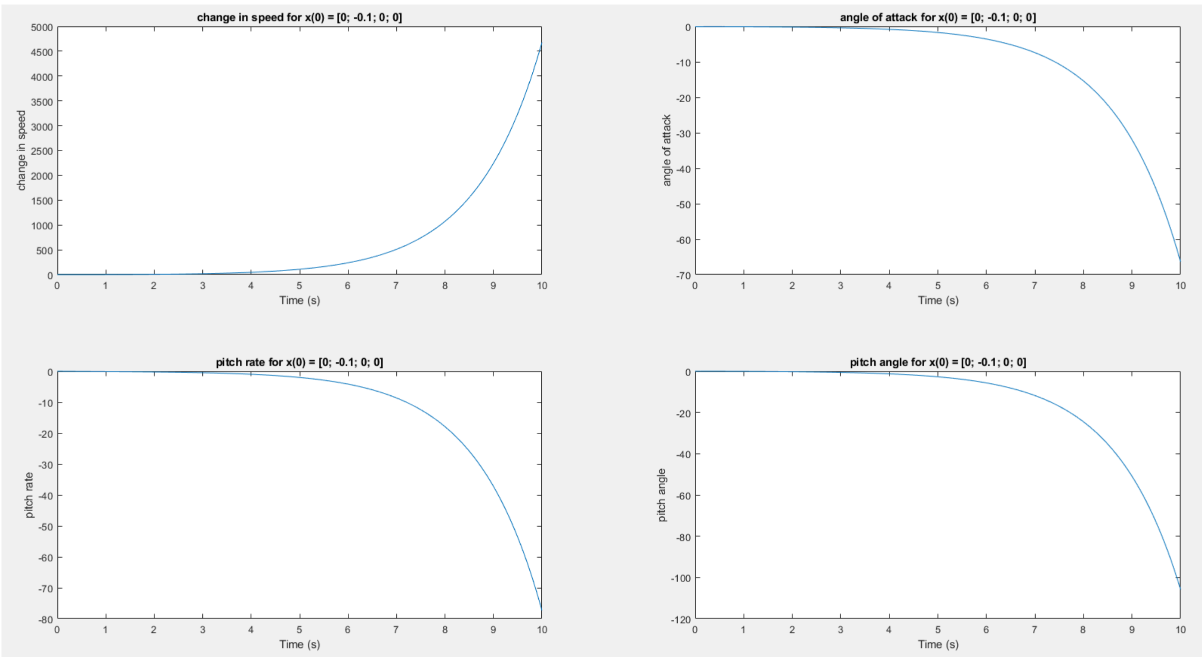
$x(t)\ =\ \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} x(0)$ και υπολογίζεται με τη βοήθεια της **Matlab**

Με τη χρονική απόκριση του συστήματος θα σχεδιάσουμε με την χρήση **Matlab** για τις δίαφορες αρχικές συνθήκες.

- $x(0)\ =\ [0\ 0.1\ 0\ 0]^T$



- $x(0)\ =\ [0\ -0.1\ 0\ 0]^T$

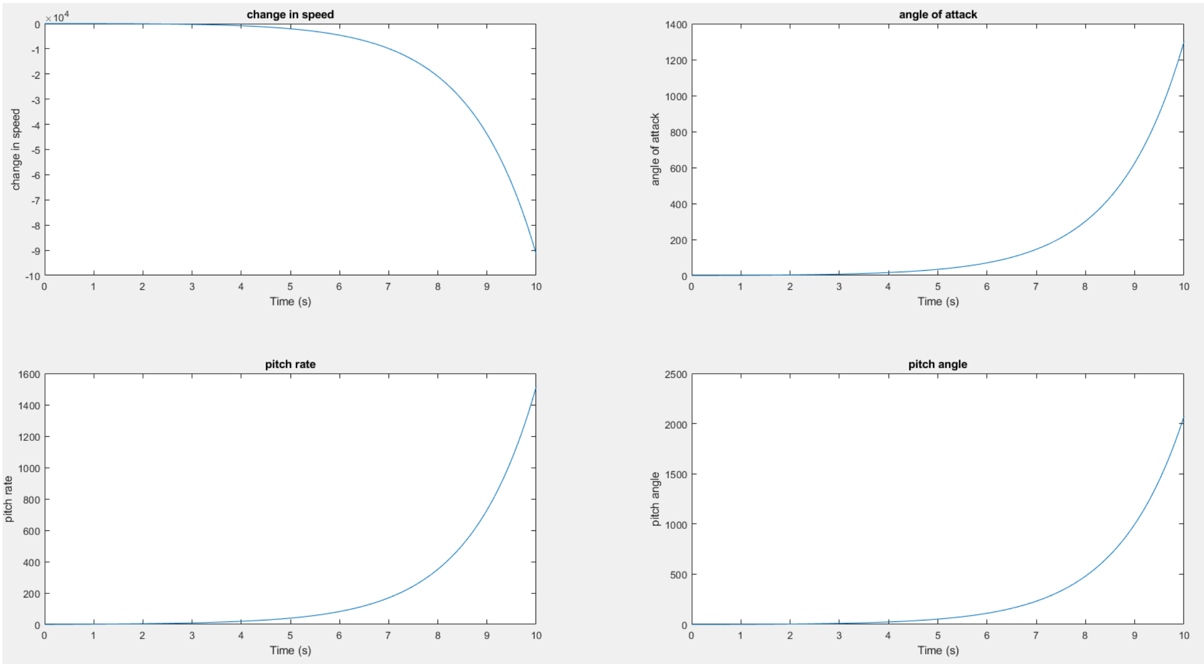


Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις το σύστημα δεν συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας β.

Τραβόντας το τιμόνι προς τα κάτω το πιλότος επιχειρεί να ανυψώσει το αεροπλάνο και για να το πετύχει θέτει την είσοδο $\delta_{\varepsilon} = -1$ για χρόνο $T = 4\,sec$. Έχοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες ($x(0) = [0,\ 0,\ 0,\ 0]^{T}$) το σύστημα έχει τη μορφή $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$ με λύση

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(t) = \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(t)$$

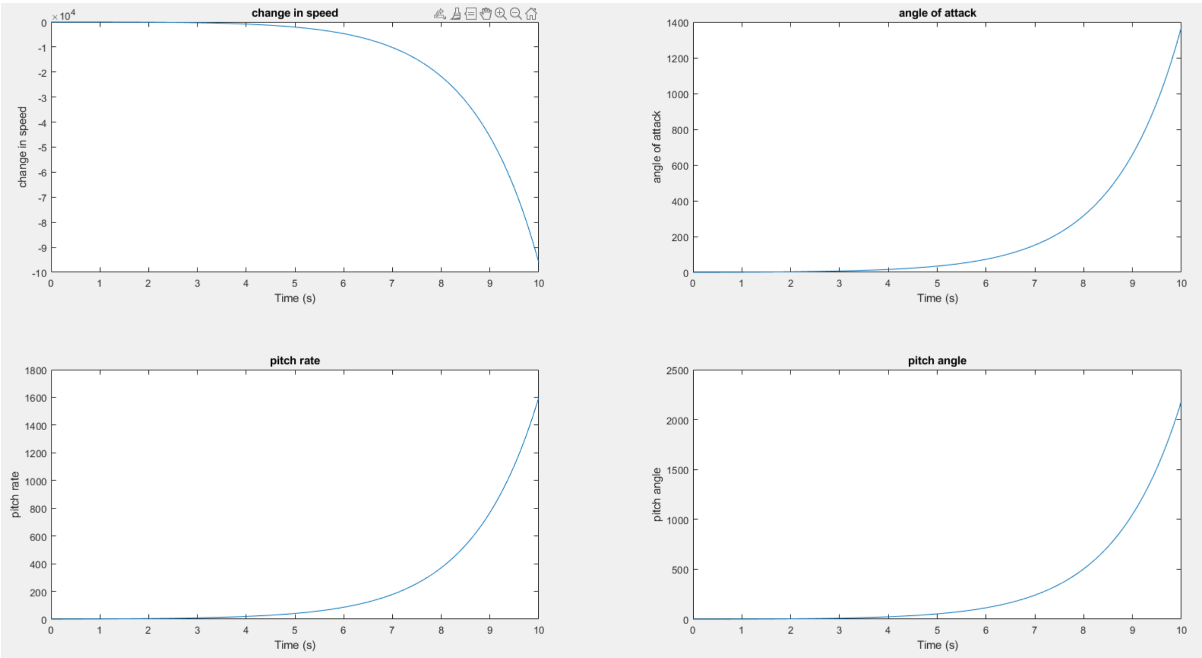
Μιας και οι ιδιοτιμές του **πίνακα A** δεν άλλαξαν περιμένουμε το σύστημα να είναι και πάλι ασταθές και καμιά κατάσταση να μη συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας.



Όπως βλέπουμε η πρόβλεψη μας ήταν ορθή και όλες οι καταστάσεις αποκλίνουν προς στο άπειρο.

γ.

Αλλάζουμε τη είσοδο σε $\delta_{\varepsilon} = -1$ για $0 \leq t$ και $\delta_{\varepsilon} = 0$ για $t \leq 0$ με αρχικές συνθήκες $x(0) = [0,\ 0,\ 0,\ 0]^{T}$.



Πάλι βλέπουμε ότι οι καταστάσεις αποκλίνουν από την ισορροπία. Αυτό θα γίνεται για οποιαδήποτε είσοδο u και να δοκιμάσει ο πιλότος διότι ο **πίνακας A** έχει θετικες ιδιοτιμές.

δ.

Στο πρώτο ερώτημα βρήκαμε ότι οι ιδιοτιμές του **πίνακα A** δεν έχουν όλες αρνητικό πραγματικό μέρος. Εξαιτίας αυτού το σύστημα μας δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και χρειάζεται κάποιο σύστημα ελεγκτή για να μην είναι ασταθές. Επιπλέον από τις γραφικές του πρώτου ερωτήματος παρατηρούμε ότι και για διάφορες αρχικές συνθήκες η κίνηση του αεροσκάφους είναι πάλι ασταθής.

ε.

Για να μελετήσουμε την ελεγξιμότητα του συστήματος θα πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα ελεγξιμότητας και να βρούμε τον βαθμό του. Με τη χρήση της εντολής **ctrb(A,B)** στη **Matlab** βρίσκουμε τον **πίνακα Pc** και με το την εντολή **rank(Pc)** βρίσκουμε τον βαθμό του.

rank(Pc) = 4, πλήρους βαθμού οπότε το σύστημα είναι ελέγξιμο.

ζ.

Για να μελετήσουμε την παρατηρησιμότητα του συστήματος για $x = q = x_3$ άρα και **C=[0, 0, 1, 0]** θα πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα παρατηρησιμότητας και να βρούμε τον βαθμό του. Με τη χρήση της εντολής **obsv(A,C)** στη **Matlab** βρίσκουμε τον **πίνακα Po** και με το την εντολή **rank(Pc)** βρίσκουμε τον βαθμό του.

rank(Po) = 4, πλήρους βαθμού οπότε το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

B)

α)

Απο το A μέρος ξέρουμε ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο όποτε μπορούμε να σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή ανατροφοδότησης της μορφής $u =- Kx + r$. Έτσι μπορούμε να τοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές του συστήματος όπου θέλουμε.
Οι ζητούμενες ιδιοτιμές είναι:
$\lambda_{1,2} = -1.25 \pm 2.2651j$ και $\lambda_{3,4} = -0.01 \pm 0.095j$
Με τη χρήση της συνάρτηση **place(A, B, [λ_1, λ_2, λ_3, λ_4])** της **Matlab** βρίσκουμε το **διάνυσμα K**

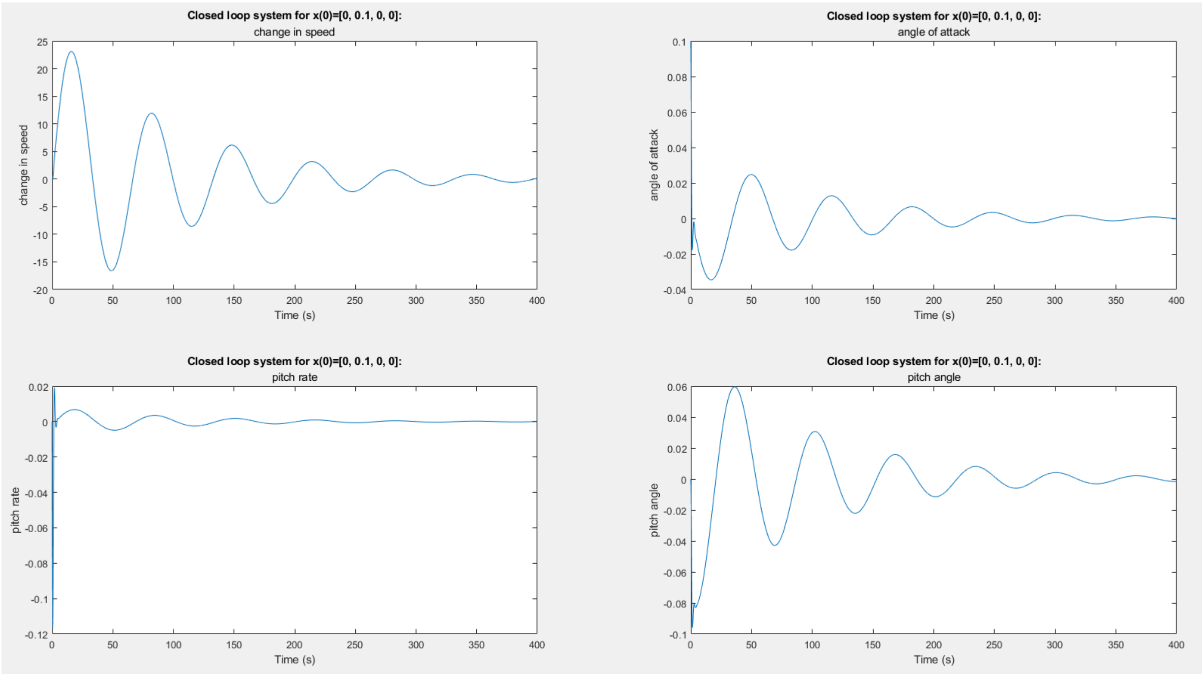
$$K = [-0.047, -4.1260, -10.7075, -0.1149]$$

Το σύστημα με ελεγκτή έχει τη μορφή $\frac{dx}{dt} = (A - BK)x(t) + Br$

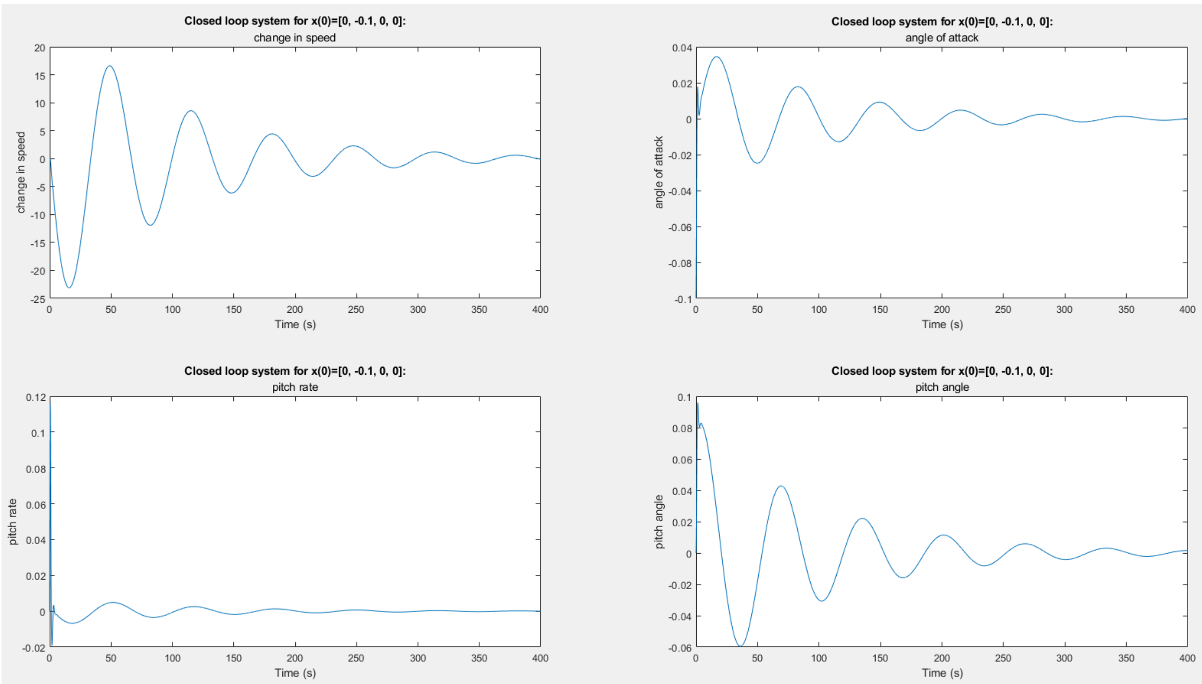
β.

Θέτοντας την **είσοδο αναφοράς r=0** το σύστημα παίρνει τη μορφη $\frac{dx}{dt} = (A - BK)x(t)$.

- $x(0) = [0\ 0.1\ 0\ 0]^T$



- $x(0) = [0\ -0.1\ 0\ 0]^T$

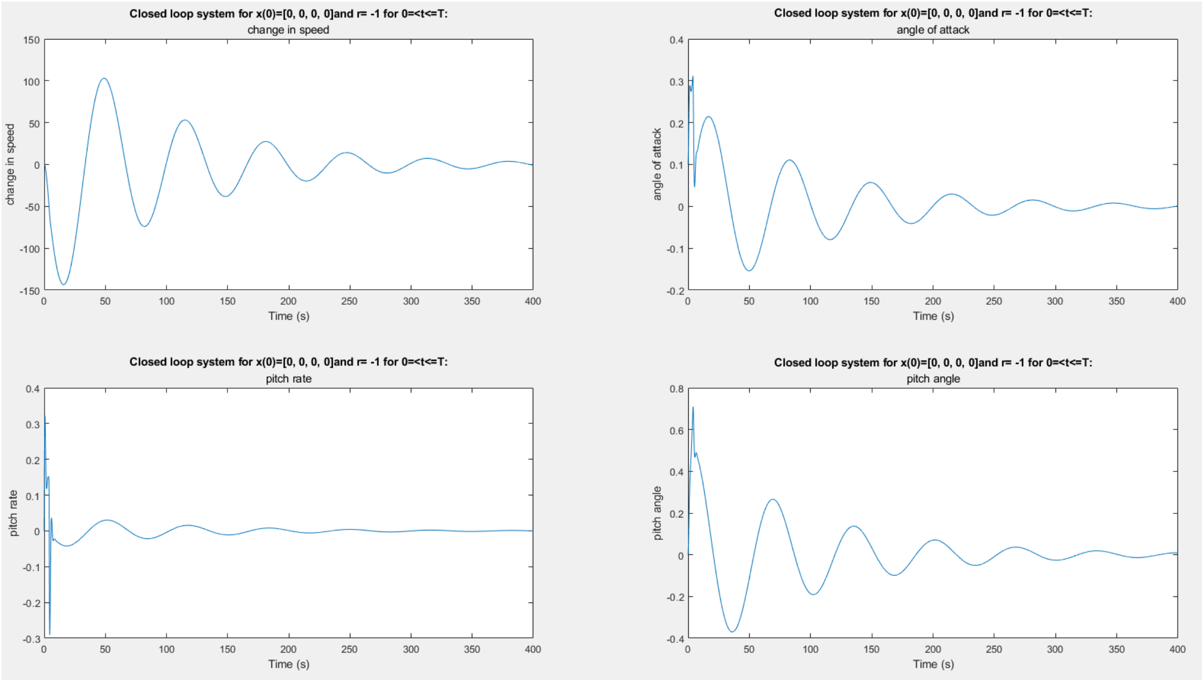


Παρατηρείται ότι το νέο σύστημα με τον ελεγκτή είναι ασυμπτωτικά ευσταθές καθώς και στις δύο περιπτώσεις αρχικών τιμών οι καταστάσεις τείνουν στο σημείο ισορροπίας.

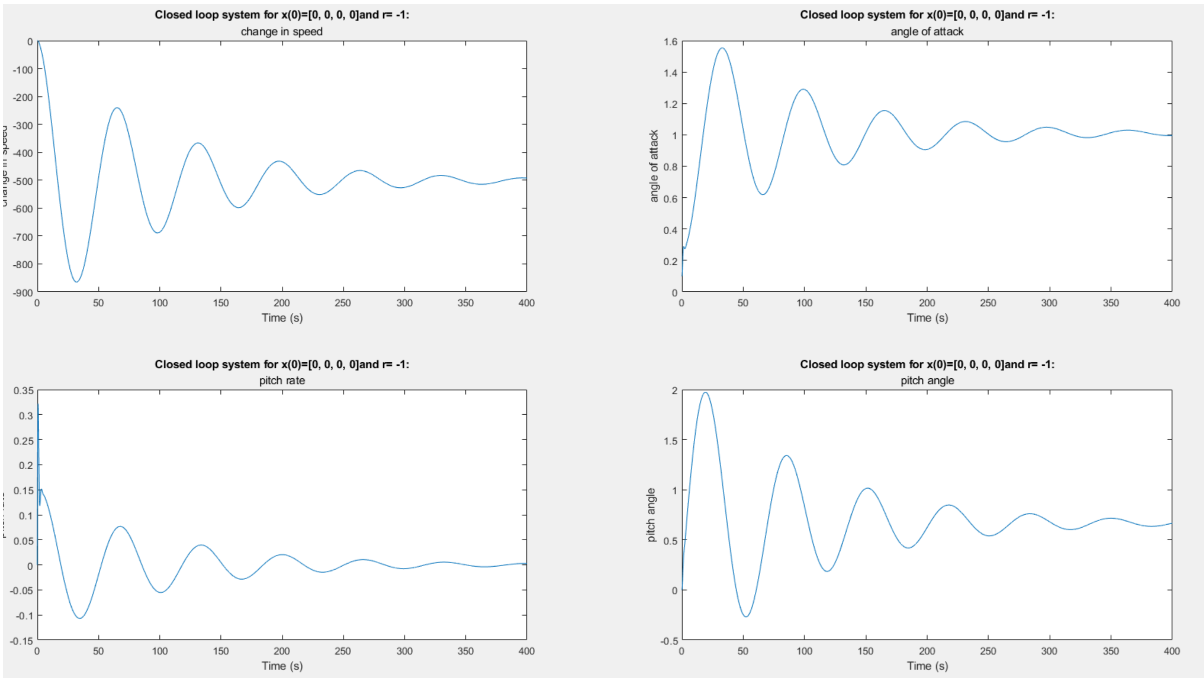
γ.

Θα μελετήσουμε το σύστημα κλειστού βρόχου για μηδενικές αρχικές συνθήκες και διάφορες εισόδους αναφοράς.

1. $r = -1$ για χρόνο $\mathrm{T} = 4\,sec$



2. $r = -1$ για $t \geq 0$



Στη πρώτη περίπτωση παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις τείνουν όλες στο σημείο ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι ο πιλότος μπορεί να υψώσει το αεροπλάνο χωρίς να κινδυνεύει να χάσει τον έλεγχο.

Στη περίπτωση της αρνητικής βηματικης εισόδου κάποιες καταστάσεις δεν συγκλίνουν στο μηδέν. Αυτό συμβαίνει διότι ο πιλότος τραβάει συνεχώς το τιμόνι προς τα πίσω και το αεροπλάνο ανυψώνεται συνεχώς. Πιο συγκεκριμένα βλέπουμε ότι η ταχύτητα του αεροσκάφους μειώνεται και ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης συγκλίνει στο μηδέν. Το αποτέλεσμα είναι λογικό καθώς η είσοδος που εφαρμόζεται είναι σταθερή οπότε και η κλήση με τον οποία ανεβαίνει. Επίσης η γωνία επίθεσης και η κλίση αυξάνονται το οποίο είναι αναμενόμενο καθώς το αεροσκαφος υψώνεται. Παρατηρούμε βέβαια ότι μετά από λίγο χρόνο και οι δύο καταστάσεις σταθεροποιούνται λόγω το ελεχτή μας.

δ.

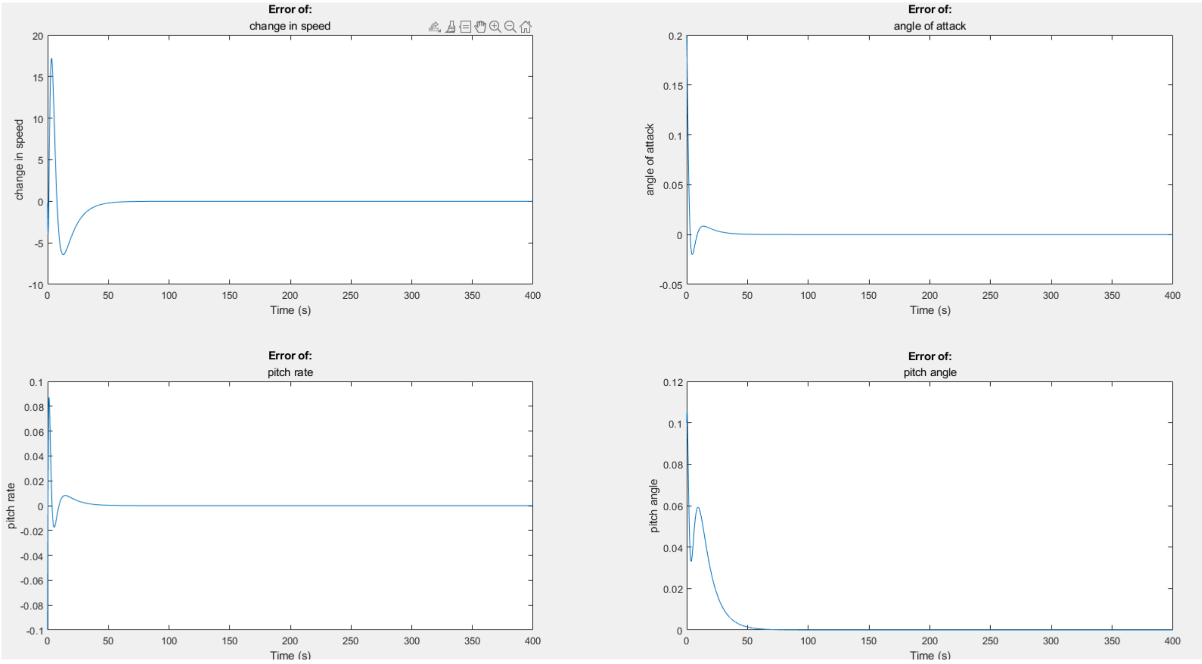
Όμοια με το πρώτο ερώτημα του δεύτερου μέρους βρίσκουμε το **διάνυσμα L** τοποθετώντας τις ιδιοτιμές του συστήματος στις:
$\lambda_1 =- 0.1,\ \lambda_2 =- 0.421,\ \lambda_3 =- 0.587,\ \lambda_1 =- 1,$
Τελικά
$L\ =\ [-\ 179.7758,\ 1.3792,\ 1.0477,\ 1.4451]^T$

Έχοντας την τιμή του L κατασκευάζουμε τον παρατηρητή Luenberger.
$\frac{d\widehat{x}}{dt} = A\widehat{x} + Bu + L(y - C\widehat{x}).$

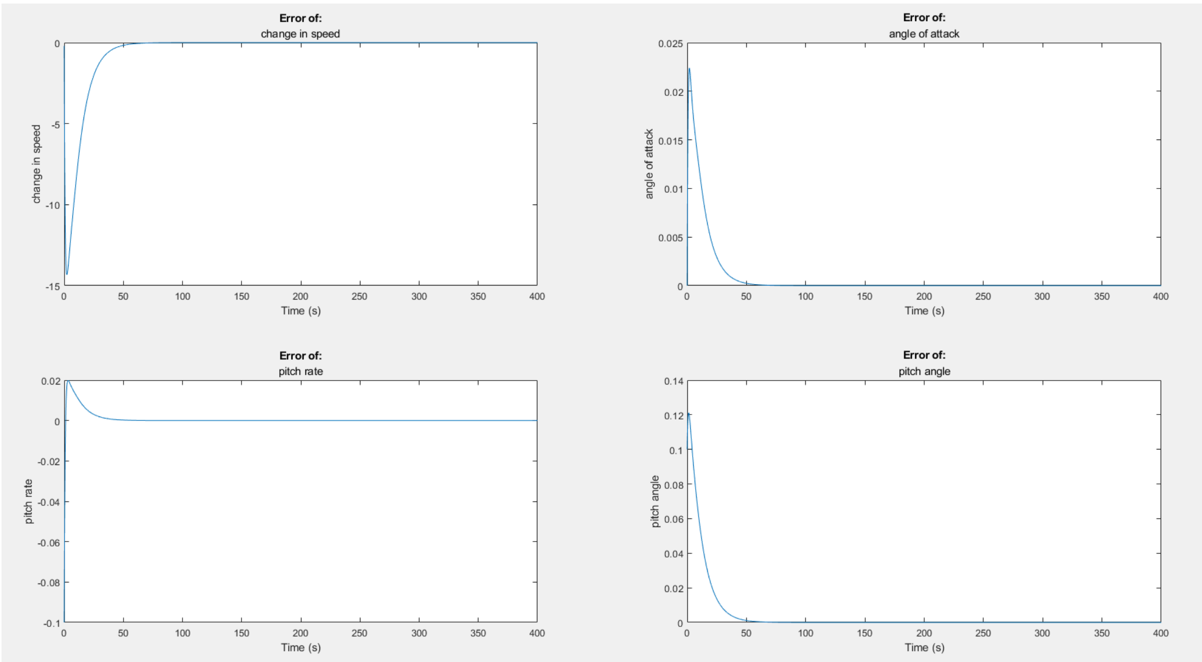
ε.

Το σφάλμα εκτίμησης ορίζεται ώς $e = x - \widehat{x}$ οπότε
$\frac{de}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\widehat{x}}{dt} = Ax + Bu - [A\widehat{x} + Bu + L(y - C\widehat{x})] = Ax - A\widehat{x} - L(y - C\widehat{x}) =$
$= (A - LC)e$
Επίσης $e(0) = x(0) - \widehat{x}(0)$
Θα μελετήσουμε το σφάλμα εκτίμησης για μηδενική είσοδο r=0 και διάφορες αρχικές συνθήκες.

1. $x(0) = [0\ 0.1\ 0\ 0]^T$ και $\hat{x}(0) = [0.2, \ -0.1,\ 0.1, \ -0,1]^T$



2. $x(0) = [0, -\ 0.1,\ 0,\ 0]^T$ και $\hat{x}(0) = [0.2, \ -0.1,\ 0.1, \ -0,1]^T$

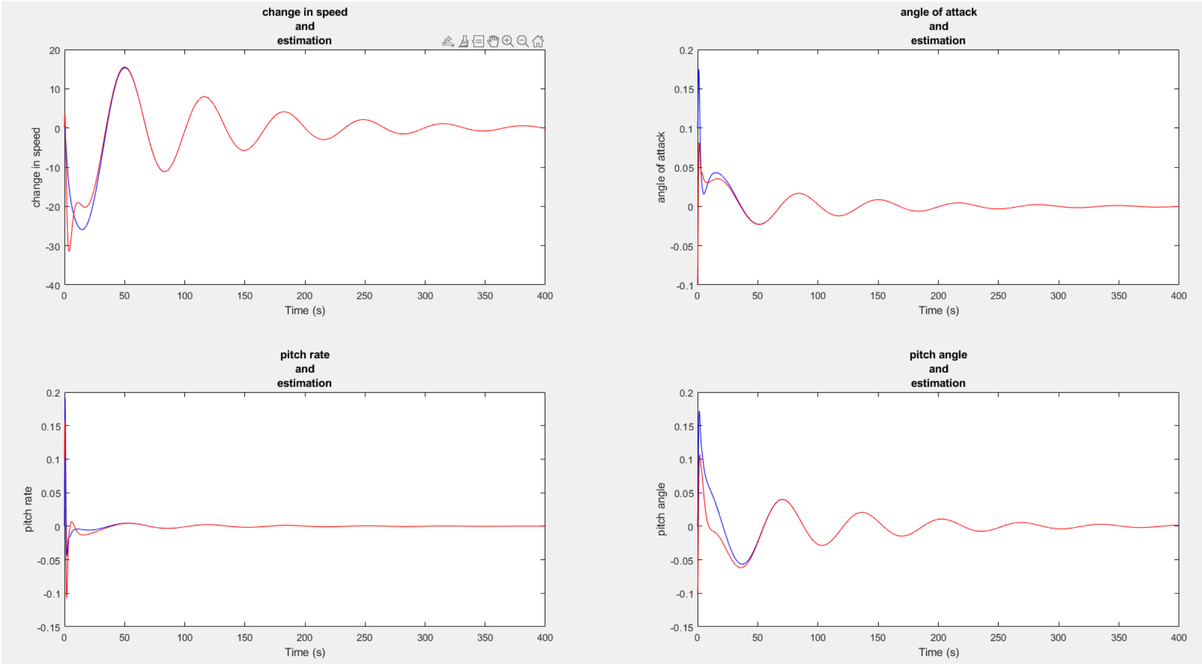


ζ.

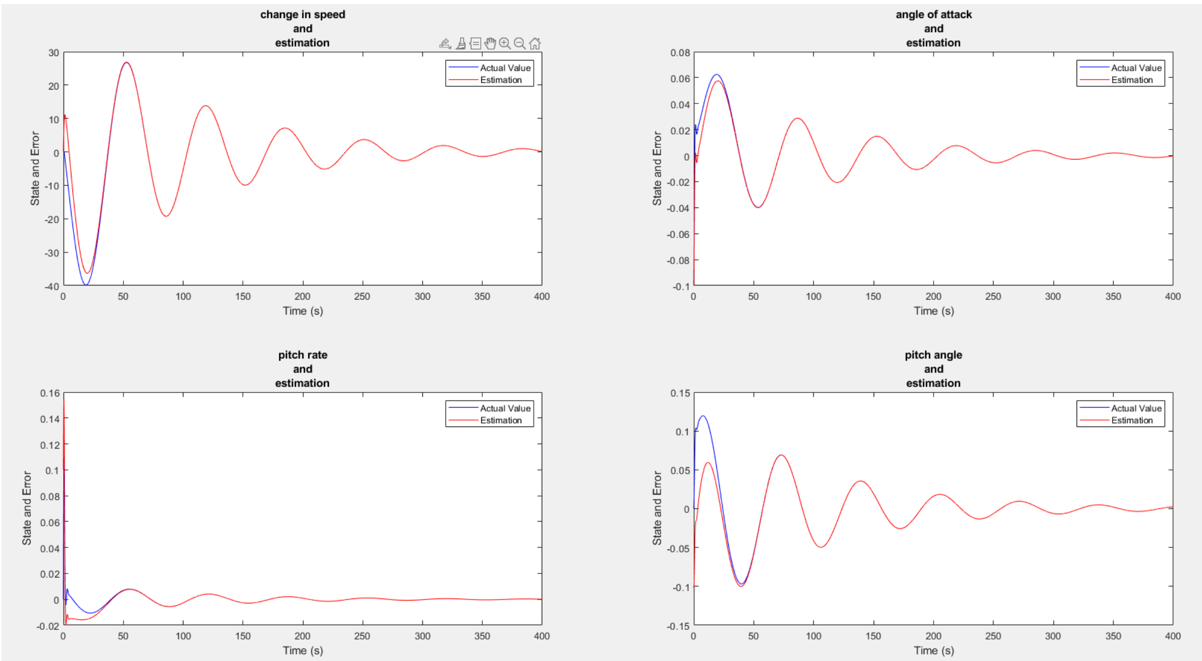
Τώρα που έχουμε σχεδιάσει τον ελεγκτή και τον παρατηρητή μπορούμε να φτιάξουμε έναν πλήρη ελεγκτή ο οποίος ορίζεται από το επαυξημένο διάνυσμα $(x, \hat{x})$ ή ισοδύναμα από το σύστημα (x, e) όπου $\hat{x} = x - e$.

Θα μελετηθεί ο πλήρης ελεγκτής για μηδενική είσοδο r=0 και διάφορες αρχικές συνθήκες.

1. $x(0) \; = \; [0\ 0.1\ 0\ 0]^T$ και $\hat{x}(0) \; = \; [0.2, \; -0.1, \; 0.1, \; -0, 1]^T$



2. $x(0) \; = \; [0, - \; 0.1, \; 0, \; 0]^T$ και $\hat{x}(0) \; = \; [0.2, \; -0.1, \; 0.1, \; -0, 1]^T$



Ενώ το x και το $\hat{x}$ έχουν διαφορετικές αρχικές συνθήκες μετά από λίγο το σφάλμα γίνεται μηδενικό. Αυτό μας δείχνει ότι μπορούμε να ελέγξουμε το σύστημα χωρίς να ξέρουμε τη κατάσταση κάθε στιγμή. Οπότε μπορούμε να διαλέξουμε ποιά έξοδο θέλουμε να παρατηρήσουμε και να ελέγξουμε το νέο σύστημα.

η.

Η νέα αναπαράσταση του συστήματος μας θα είναι $z \ = \ (x, e)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\mathrm{H}(s) \ = \frac{-1.6450s^3 - 1.0345s^2 - 0{,}4008s - 1.9213 \cdot 10^{-17}}{s^4 + 2.52s^3 + 6.7523s^2 + 0.1567s + 0.611}$$

Το νέο σύστημα μας έχει τη μορφή $\frac{dz}{dt} = \overline{A}z + \overline{B}r,\ y = \overline{C}z$. Το z περιέχει 8 καταστάσεις, τέσσερις από το x και τέσσερις απο το e). Θα μελετήσουμε το νέο σύστημα ως προς την ελεγξιμότητα.
Χρησιμοποιόντας ξανά τις εντολές ctrb($\overline{A}$,$\overline{B}$) και rank(Pc) βρίσκουμε ότι rank(Pc) = 4 < 8. Οπότε υπάρχει ένας υπόχωρος ο οποίος είναι ελέγξιμος και είναι το σύστημα κλειστού βρόχου.
Θα μελετήσουμε αν το μη ελέγξιμο ως προς την ευαστάθεια. Οι ιδιοτιμές του σφάλματος εκτίμησης είναι αρνητικές με τιμές.

$$\lambda_1 = \ -1\,,\ \lambda_2 = \ -0.5870,\ \lambda_3 = \ -0.4210,\ \lambda_4 = \ -0.1$$

Συμπεραίνουμε ότι το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο από την είσοδο r αλλά είναι ευσταθοποιήσιμο.

θ.

Έχοντας μελετήσει το σύστημα θα σχεδιάσουμε έναν νέο ελεγκτή ανατροφοδότησης και θα επιλέξουμε ένα K ώστε να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους.

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T(t)Qx(t) \ + u^T(t)Ru(t))dt$$

Όπου $Q \ = Q^T > \ 0 \,\&\, R \ = R^T > \ 0$

Αυτός είναι γραμμικός τετραγωνικός ρυθμιστής που μας βοηθάει να βρούμε το βέλτιστο K για Q και R.

Το αεροσκάφος μας θέλουμε να είναι σταθερό κατά την πτήση όποτε θα επιλέξουμε μεγάλους συντελεστές για την κλίση και τον ρυθμό μεταβολής της.

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

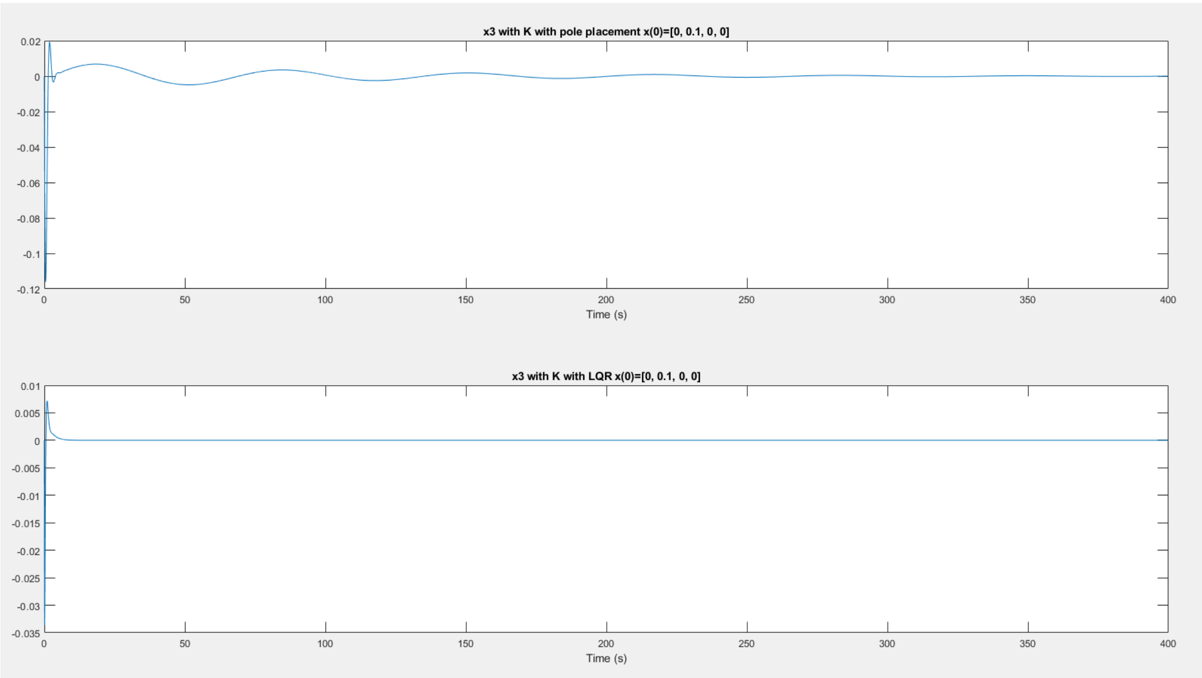
και βάζουμε penalty στη είσοδο R=1.

Το νέο K είναι $K = [3.0876, \ -5.9008, \ -12.3982, -48.5277]$
Οι ιδιοτιμές είναι :
$\lambda_1 = \ -16.5238$, $\lambda_{2,3} = \ -2.4192 \pm 2.3452j$, $\lambda_4 = \ -0.5163$

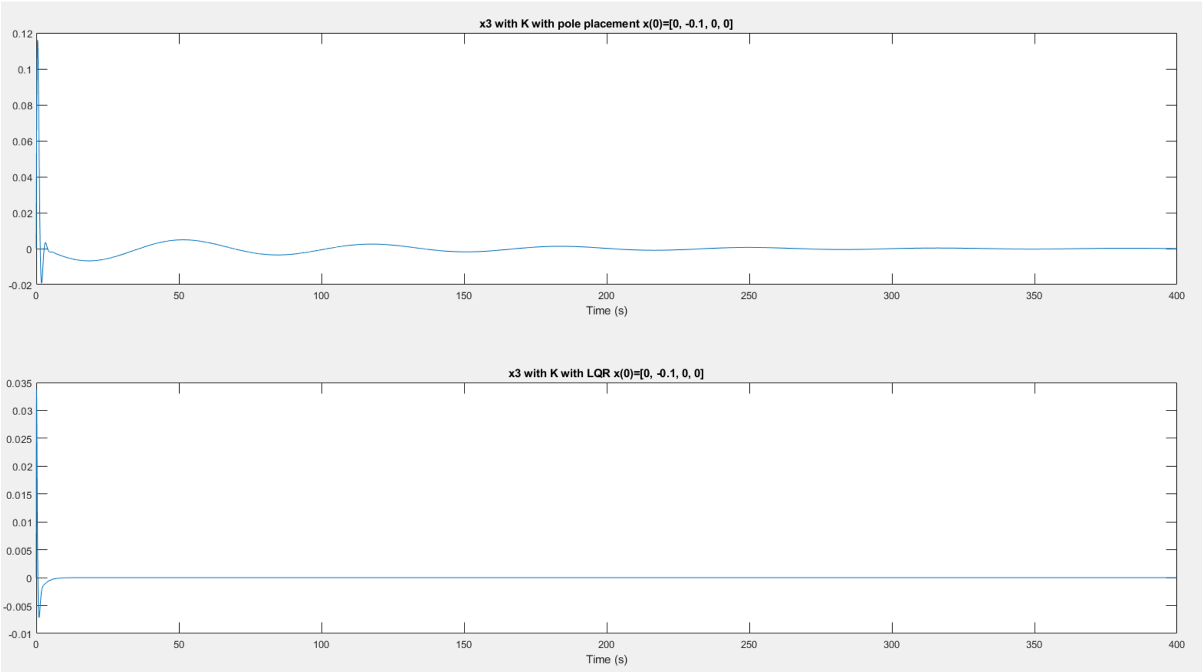
Οι πόλοι είναι πολύ πιο αριστερά από ότι οι πόλοι του ερωτήματος β. Αυτό βέβαια αλλάζει ανάλογα τα penalties που θέτουμε.

Τέλος για **y = q** και διάφορες αρχικές συνθήκες βλέπουμε πως ανταποκρίνονται οι δύο ελεγκτές

1. K με τοποθέτηση πόλων



2. K με LQR



Και στις 2 περιπτώσεις παρατηρούμε οτι με το K που κατασκευάσαμε με την μέθοδο LQR η κατάσταση q τείνει πολύ γρηγορότερα στο σημείο ισορροπίας και έχει και μικρότερη υπερύψωση. Οπότε K που κατασκευάσαμε με την μέθοδο LQR είναι καλύτερο για ένα F-16.