Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα 1: Πρώτη Εργασία

Εμμαμουήλ-Θωμάς Χατζάκης:2021030061

Απριλ 2024

Συνολικές ώρες: 22

Ερώτημα Θ

Θ.1 (10) Για κάθε $T > 0$, να υπολογίσετε (λεπτομερώς το ολοκλήρωμα) και να σχεδιάσετε (η απάντηση είναι αρκετά απλή, συνεπώς, μπορείτε να τη σχεδιάσετε εύκολα με χρήση του *matlab*) τη συνάρτηση αυτοομοιότητας της.

.

Η συνάρτηση αυτοομοιότητας της $\varphi(t)$ ορίζεται ως:

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cdot \varphi(t+\tau) dt$$

όπου $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}$ όταν $|t| \leq \frac{T}{2}$ και $\varphi(t+\tau) = \frac{1}{\sqrt{T}}$ όταν $-\frac{T}{2} - \tau \leq t \leq \frac{T}{2} - \tau$

.

Για $\tau = 0$

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} dt = 1$$

Για $\tau < 0$

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} dt = \frac{\frac{T}{2}}{T} + \frac{\frac{T}{2} - \tau}{T} = 1 + \frac{\tau}{T}$$

Για $\tau > 0$

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} \frac{1}{T} dt = \frac{\frac{T}{2} - \tau}{T} + \frac{\frac{T}{2}}{T} = 1 - \frac{\tau}{T}$$

. Τελικά

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \begin{cases} 1 + \frac{\tau}{T}, -T \leq \tau \leq 0 \\ 1 - \frac{\tau}{T}, 0 < \tau \leq T \\ 0, \text{αλλού} \end{cases}$$

.

Θ.2 (10) Να επαναλάβετε για την $\varphi(t-2)$.

.

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $t' = t-2$ τότε

$$R'_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-2) \cdot \varphi(t-2+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t') \cdot \varphi(t'+\tau) dt' = R_{\varphi\varphi}(\tau)$$

. Τελικά

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \begin{cases} 1+\frac{\tau}{T}, -T-2 \leq \tau \leq -2 \\ 1-\frac{\tau}{T}, -2 < \tau \leq T-2 \\ 0, \text{αλλού} \end{cases}$$

.

Θ.3 (10)

.

Για $0 < \tau \leq \frac{T}{2}$

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{\tau}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} dt - \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+\tau} \frac{1}{T} dt + \int_{\frac{T}{2}+\tau}^{T} \frac{1}{T} dt = 1 - \frac{3\tau}{T}$$

Για $\frac{T}{2} < \tau \leq T$

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{\tau}^{T} \frac{-1}{T} dt = -1 + \frac{\tau}{T}$$

Για $\frac{-T}{2} < \tau \leq 0$

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{0}^{\frac{T}{2}+\tau} \frac{1}{T} dt - \int_{\frac{T}{2}+\tau}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} dt + \int_{\frac{T}{2}+\tau}^{T+\tau} \frac{1}{T} dt = 1 + \frac{3\tau}{T}$$

Για $-T < \tau \leq \frac{-T}{2}$

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\tau}^{T} \frac{-1}{T} dt = -1 - \frac{\tau}{T}$$

Τελικά

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \begin{cases} 1-\frac{\tau}{T}, -T < \tau \leq \frac{-T}{2} \\ 1+\frac{3\tau}{T}, \frac{-T}{2} < \tau \leq 0 \\ 1-\frac{3\tau}{T}, 0 < \tau \leq \frac{T}{2} \\ 1+\frac{\tau}{T}, \frac{T}{2} < \tau \leq T \\ 0, \text{αλλού} \end{cases}$$

.

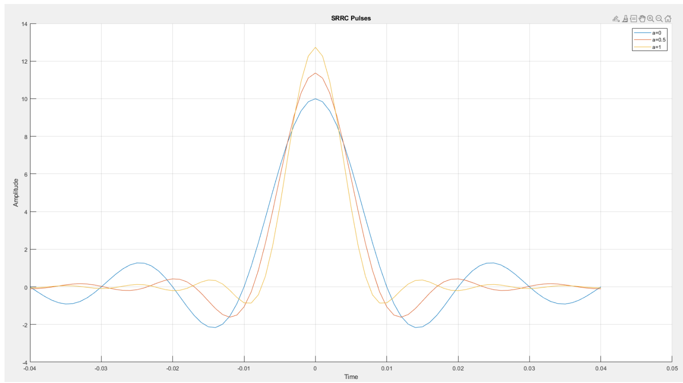
Ερώτημα A

A.1 Να δημιουργήσετε παλμούς $SRRC$ $\varphi(t)$**. Ενδεικτικές τιμές:** $T = 10^{-2}sec$, $T_s = \frac{T}{Over}$, $over = 10$, $A = 4$ **και συντελεστή** $roll - off$ $a = 0, 0.5, 1$ **(το A δηλώνει το μισό μήκος του αποκομμένου παλμού μετρημένο σε περιόδους συμβόλου).**

```
%A1
T=10^-2;
over=10;
Ts=T/over;
A=4;
a = [0,0.5,1];

phit_matrix = [];

figure;
 hold on;
 grid on;
for i=1:length(a)
   [phi,t] = srrc_pulse(T,over,A,a(i));
   phit_matrix = [phit_matrix; phi];
   plot(t,phi);
end
hold off;
title('SRRC Pulses');
xlabel('Time');
ylabel('Amplitude');
legend('a=0','a=0.5','a=1');
```

Σχήμα 1: Κώδικας δημιουργίας παλμών

(5)Να σχεδιάσετε σε κοινό *plot* **τους παλμούς, στον κατάλληλο άξονα του χρόνου, για** $T = 10^{-2} sec$, $over = 10$, $A = 4$ **και** $a = 0, 0.5, 1$.



Σχήμα 2: $SRRC$ παλμοί για διάδορα $Roll - off$

.

(5)Τι παρατηρείτε σχετικά με το ρυθμό "μείωσης" του πλάτους των παλμών, όσο αυξάνεται η απόλυτη τιμή του χρόνου, $|t|$ **, σε σχέση με τις τιμές του α· Ποιος παλμός φθίνει πιο γρήγορα;**

.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο παράγωντας $roll - off$ ο παλμός φθίνει γρηγορότερα αλλά ταυτόχρονα το $bandwith$ μεγαλώνει.

.

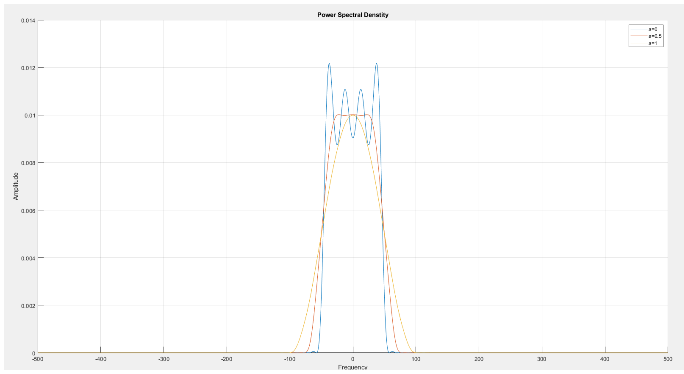
A.2 Μέσω των συναρτήσεων fft και $fftshift$, να υπολογίσετε τους μετασχηματισμούς $Fourier$ $\Phi(t)$

Να σχεδιάσετε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $|F(F)|^2$ αυτών των παλμών

```
%A2
%a)
N=2048;
Fs = 1/Ts;
f_axis = (-0.5:1/N:0.5-1/N);
F_axis = Fs*f_axis;
PHIF_matrix = [];
PHI_psd_matrix=[];
figure;
hold on;
grid on;
for i=1:height(phit_matrix)
    PHI = fftshift(fft(phit_matrix(i,:),N))*Ts;
    PHIF_matrix =[PHIF_matrix; PHI];
    PHI_psd = abs(PHI).^2;
    PHI_psd_matrix=[PHI_psd_matrix;PHI_psd];
    plot(F_axis,PHI_psd);
end
hold off;
title("Power Spectral Denstity")
xlabel('Frequency');
ylabel('Amplitude');
legend('a=0','a=0.5','a=1');
```

Σχήμα 3:

(α) (5) σε κοινό πλοτ,

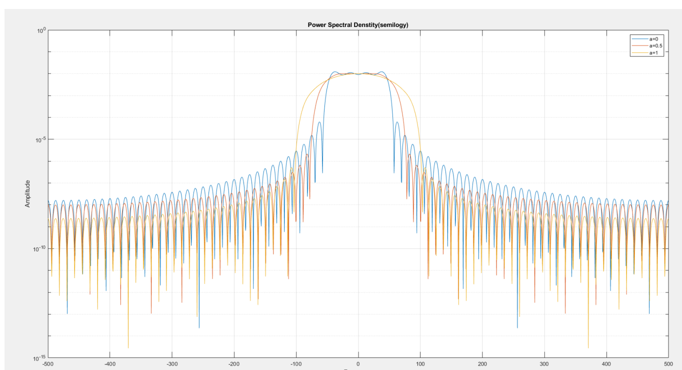


Σχήμα 4: Φασματική πυκνότητα ενέργειας για διάφορες τιμές του a

(5) **σε κοινό** *semilogy* **(παρατηρήστε ότι η** *semilogy* **σάς δίνει τη δυνατότητα να μελετήσετε τις τιμές των** $|\Phi(F)|^2$ **σε διαστήματα όπου αυτές είναι πολύ μικρές, κάτι το οποίο δεν μπορεί να γίνει με την** *plot***)**

```
%b)
figure;
for i=1:height(PHI_psd_matrix)
    semilogy(F_axis,PHI_psd_matrix(i,:));
    hold on;
end
hold off;
grid on;
title("Power Spectral Denstity(semilogy)")
xlabel('Frequency');
ylabel('Amplitude');
legend('a=0','a=0.5','a=1');
```

Σχήμα 5:



Σχήμα 6: *Semilogy* Φασματικής πυκνότητας ενέργειας

.

A.3 Το θεωρητικό εύρος φάσματος των παλμών άπειρης διάρκειας είναι $BW = \frac{1+a}{2T}$.

.

(5) Να υπολογίσετε την τιμή του θεωρητικού εύρους φάσματος για καθένα από τους τρεις παλμούς.

.

Για $a = 0$ το *bandwith* είναι $BW = \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} = 50$

.

Για $a = 0.5$ το *bandwith* είναι $BW = \frac{1+0.5}{2 \cdot 10^{-2}} = 75$

.

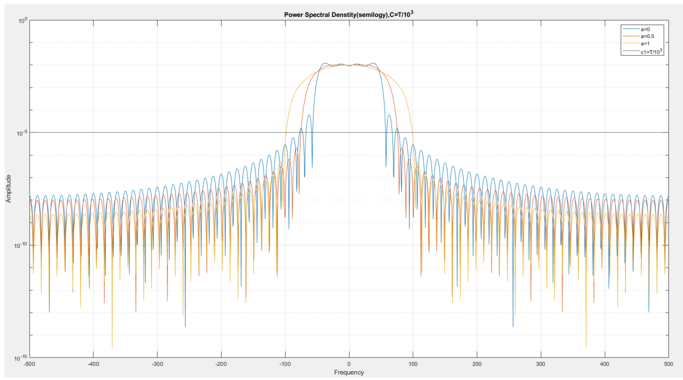
Για $a = 1$ το *bandwith* είναι $BW = \frac{1+1}{2 \cdot 10^{-2}} = 100$

(5) Στην πράξη, αφού οι αποκομμένοι παλμοί έχουν, θεωρητικά, άπειρο εύρος φάσματος, χρειάζεται ένας πιο πρακτικός ορισμός για το εύρος φάσματος. Στο κοινό *semilogy* του ερωτήματος $A.2$, να σχεδιάσετε μία οριζόντια γραμμή με τιμή c (ενδεικτικά $c = \frac{T}{10^3}$) και να θεωρήσετε ότι οι τιμές οι οποίες ευρίσκονται κάτω από αυτή τη γραμμή είναι "πρακτικά μηδέν." Σε αυτή την περίπτωση, ποιο είναι προσεγγιστικά το εύρος φάσματος των τριών παραπάνω παλμών (η χρήση της δυνατότητας $\backslash Zoomin$" θα σας φανεί χρήσιμη); Ποιος παλμός είναι πιο αποδοτικός ως προς το εύρος φάσματος;

Για $a = 0$ το *bandwith* είναι $BW = 57$, Για $a = 0.5$ το *bandwith* είναι $BW = 75.5$, Για $a = 1$ το *bandwith* είναι $BW = 98.6$. Ο πιο αποδοτικός παλμός ως προς το εύρος φάσματος είναι αυτός με $a = 0.5$ αφού προσεγγίζει καλύτερα τη θεωριτική τιμή.

```
%A3
%b)
c1=T/(10^3);
figure;
for i=1:height(PHI_psd_matrix)
    semilogy(F_axis,PHI_psd_matrix(i,:));
    hold on;
end
yline(c1);
hold off;
grid on;
title("Power Spectral Denstity(semilogy),C=T/10^3")
xlabel('Frequency');
ylabel('Amplitude');
legend('a=0','a=0.5','a=1','c1=T/10^3');
```

Σχήμα 7:



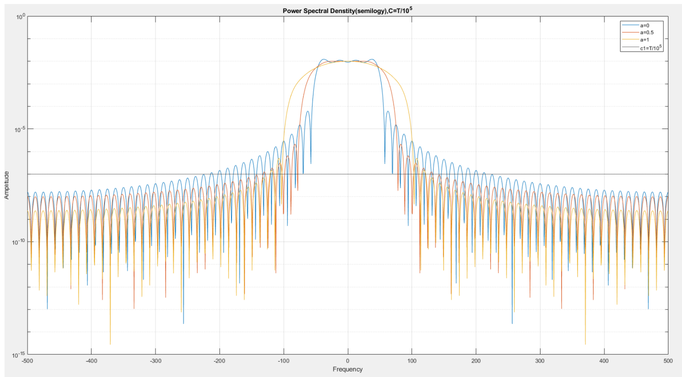
Σχήμα 8: *Semilogy* Φασματικής πυκνότητας ενέργειας με την γραμμή $c = \frac{T}{10^3}$

(5) Πώς μεταβάλλεται το εύρος φάσματος των παλμών αν $c = \frac{T}{10^5}$; Στην περίπτωση αυτή, ποιος παλμός είναι πιο αποδοτικός;

Για $a = 0$ το *bandwith* είναι $BW = 81.4$, Για $a = 0.5$ το *bandwith* είναι $BW = 77.8$, Για $a = 1$ το *bandwith* είναι $BW = 103$. Ο πιο αποδοτικός παλμός ως προς το εύρος φάσματος είναι αυτός με $a = 0.5$ αφού προσεγγίζει καλύτερα τη θεωριτική τιμή.

```
%c(
c2=T/(10^5);
figure;
for i=1:height(PHI_psd_matrix)
    semilogy(F_axis,PHI_psd_matrix(i,:));
    hold on;
end
yline(c2);
hold off;
grid on;
title("Power Spectral Denstity(semilogy),C=T/10^5")
xlabel('Frequency');
ylabel('Amplitude');
legend('a=0','a=0.5','a=1','c1=T/10^5');
```

Σχήμα 9:



Σχήμα 10: $Semilogy$ Φασματικής πυκνότητας ενέργειας με την γραμμή $c = \frac{T}{10^5}$

Ερώτημα Β

Β.1 Για $T = 10^{-2} sec$, $A = 4$, $a = 0, 0.5, 1$ και $k = 0, 1, ..., 2A$ (αντίστοιχα αποτελέσματα θα πάρετε για αρνητικά κ)

1. να σχεδιάσετε σε κοινό $plot$ τους παλμούς $\varphi(t)$ και $\varphi(t{-}kT)$,
2. να σχεδιάσετε το γινόμενο $\varphi(t) \cdot \varphi(t{-}kT)$,
3. να προσεγγίσετε αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου$\varphi(t) \cdot \varphi(t{-}kT)$, με τη μέθοδο που αναφέρουμε στις σημειώσεις.

```
%B)

k=[0:1:2*A];
delayed_phi_matrix = [];
%B1)
%a
for i=1:height(phit_matrix)
    figure;
     hold on;
    for j=1:length(k)-6
       delayed_phi = delayseq(phit_matrix(i,:).',k(j)*T,Fs).';
       delayed_phi_matrix = [delayed_phi_matrix; delayed_phi];
       plot(t,delayed_phi);
    end
    hold off;
    grid on;
    title('phi(t) and phi(t-kT) for a='+ string(a(i)));
    xlabel('Time');
    ylabel('Amplitude');
    legend('k=0','k=1','k=2');
end
```

Σχήμα 11: Κώδικας βήματος 1

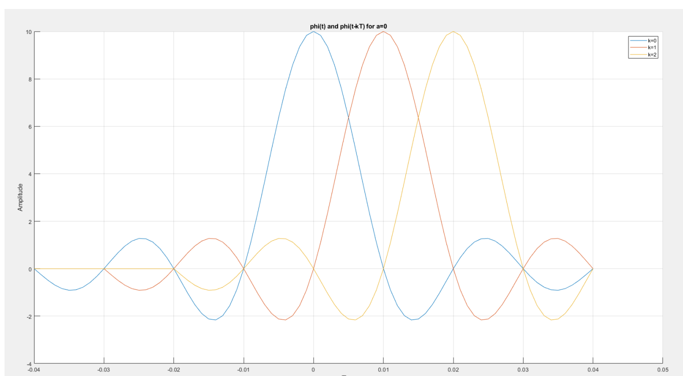
```
%b
for i=1:height(phit_matrix)
    for j=1:length(k)-6
        product = phit_matrix(i,:).*delayed_phi_matrix(j,:);
        figure;
        plot(t,product);
        title("phi(t)*phi(t-kT) for" + " " + "k=" + string(k(j))+ " " + "and a=" + " " +string(a(i)));
        xlabel('Time');
        ylabel('Amplitude');
        grid on;
    end
end
```

Σχήμα 12: Κώδικας βήματος 2

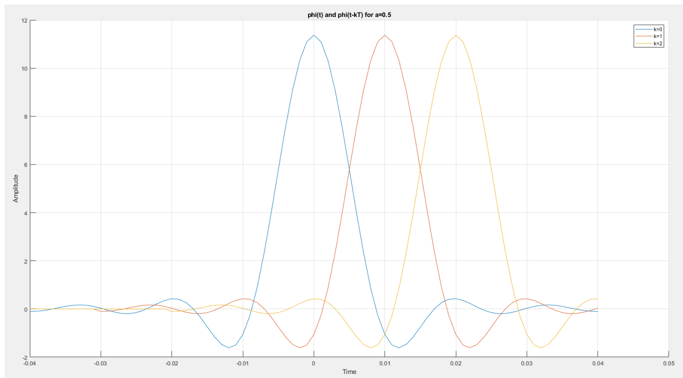
```
for i=1:height(phit_matrix)
    for j=1:length(k)-5
        delayed_phi_2 = delayseq(phit_matrix(i,:).',k(j)*T,Fs).';
        integral = sum(phit_matrix(i,:).*delayed_phi_2)*Ts;
        fprintf("Integral phi(t)*phi(t-kT) for" + " " + "k=" + string(k(j))+ " " + "and a=" + " " +string(a(i)) +" " +"is:"+ " " + string( integral) +'\n');

    end

end
```

Σχήμα 13: Κώδικας βήματος 3

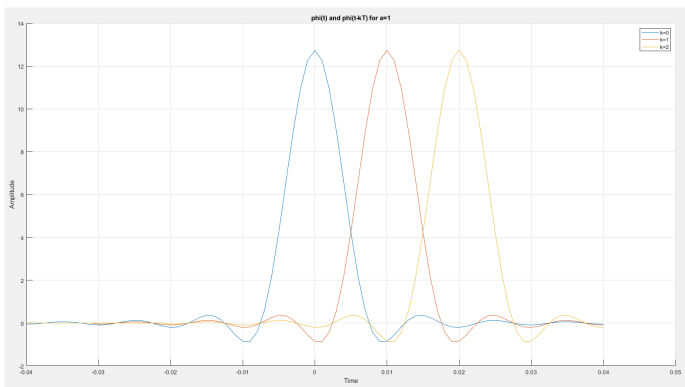
(10) Να σχεδιάσετε τα αποτελέσματα των βημάτων 1. και 2., για $a = 0, 0.5, 1$ και $k = 0, 1, 2$.



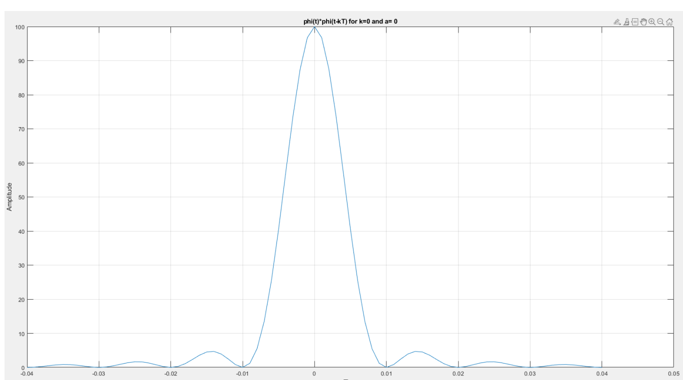
Σχήμα 14: $\varphi(t)$ και $\varphi(t-kT)$ για $a = 0$



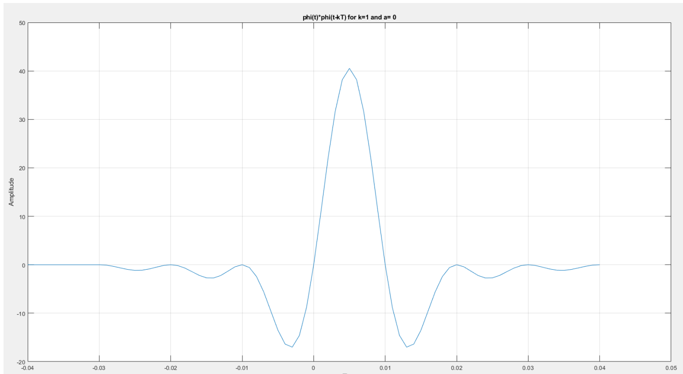
Σχήμα 15: $\varphi(t)$ και $\varphi(t-kT)$ για $a = 0.5$



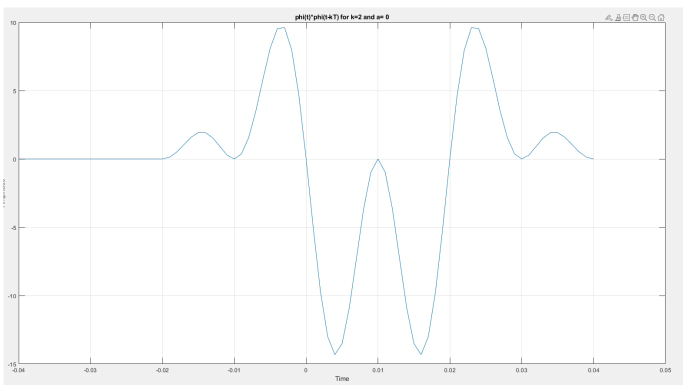
Σχήμα 16: $\varphi(t)$ και $\varphi(t-kT)$ για $a = 1$



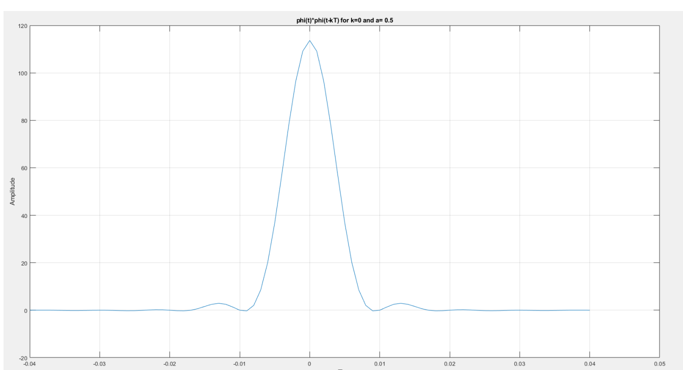
Σχήμα 17: Γινόμενο $\varphi(t) \cdot \varphi(t-0T)$ για $a = 0$



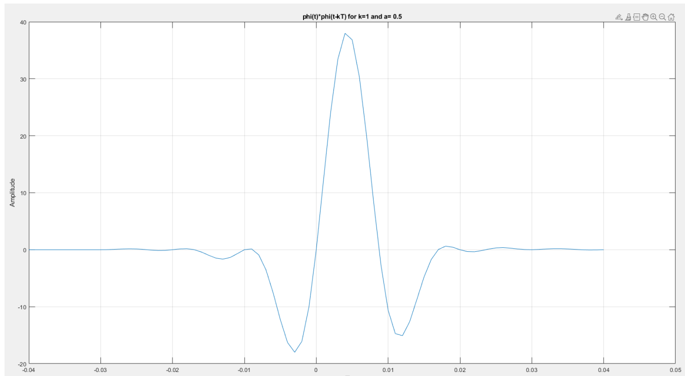
Σχήμα 18: Γινόμενο $\varphi(t) \cdot \varphi(t{-}1T)$ για $a = 0$



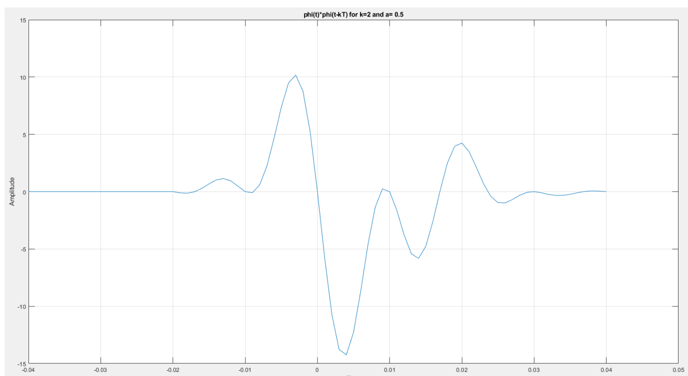
Σχήμα 19: Γινόμενο $\varphi(t) \cdot \varphi(t{-}2T)$ για $a = 0$



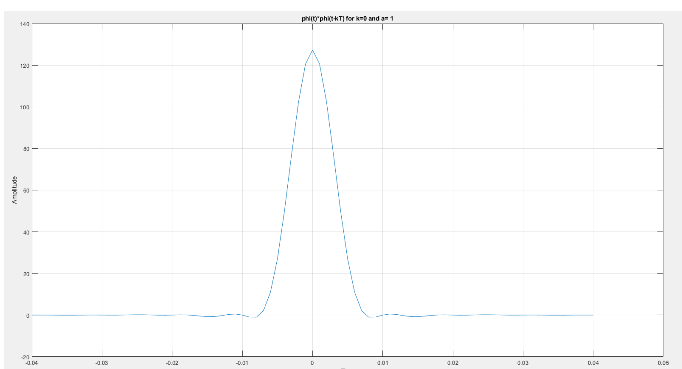
Σχήμα 20: Γινόμενο $\varphi(t) \cdot \varphi(t{-}0T)$ για $a = 0.5$



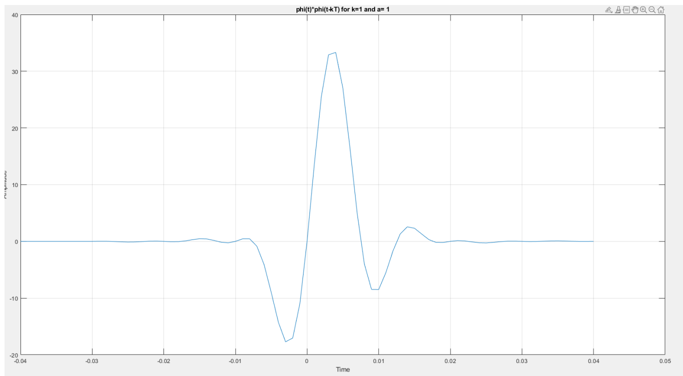
Σχήμα 21: Γινόμενο $\varphi(t) \cdot \varphi(t-1T)$ για $a = 0.5$



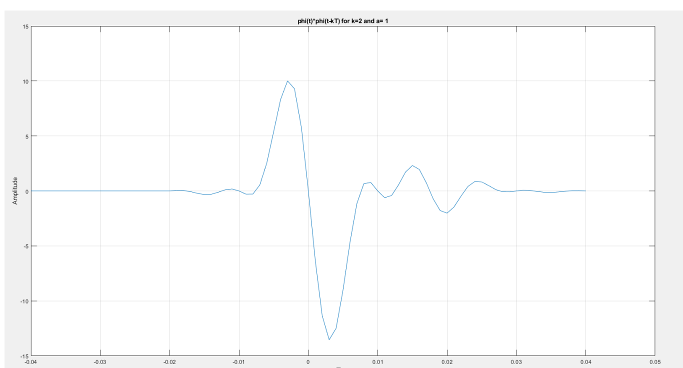
Σχήμα 22: Γινόμενο $\varphi(t) \cdot \varphi(t-2T)$ για $a = 0.5$



Σχήμα 23: Γινόμενο $\varphi(t) \cdot \varphi(t-0T)$ για $a = 1$



Σχήμα 24: Γινόμενο $\varphi(t) \cdot \varphi(t{-}1T)$ για $a = 1$



Σχήμα 25: Γινόμενο $\varphi(t) \cdot \varphi(t{-}2T)$ για $a = 1$

(10) Να αναφέρετε τις τιμές των ολοκληρωμάτων που υπολογίσατε στο βήμα 3., για $a = 0, 0.5, 1$ και $k = 0, 1, 2, 3$ και να προσπαθήσετε να τις εξηγήσετε.

```
Integral phi(t)*phi(t-kT) for k=0 and a= 0 is: 0.97475
Integral phi(t)*phi(t-kT) for k=1 and a= 0 is: 0.029027
Integral phi(t)*phi(t-kT) for k=2 and a= 0 is: -0.034885
Integral phi(t)*phi(t-kT) for k=3 and a= 0 is: 0.046111
Integral phi(t)*phi(t-kT) for k=0 and a= 0.5 is: 0.99988
Integral phi(t)*phi(t-kT) for k=1 and a= 0.5 is: 2.1998e-05
Integral phi(t)*phi(t-kT) for k=2 and a= 0.5 is: 0.00033292
Integral phi(t)*phi(t-kT) for k=3 and a= 0.5 is: -0.00034066
Integral phi(t)*phi(t-kT) for k=0 and a= 1 is: 0.99997
Integral phi(t)*phi(t-kT) for k=1 and a= 1 is: -4.6762e-05
Integral phi(t)*phi(t-kT) for k=2 and a= 1 is: -8.2122e-05
Integral phi(t)*phi(t-kT) for k=3 and a= 1 is: -0.00020308
```

Σχήμα 26: Τιμές ολοκληρωμάτων

Παρατηρούμε ότι για τις διάφορες τιμές του a τρία ολοκληρώματα προσεγγίζουν την μονάδα ενώ τα άλλα το μηδέν. Αυτά τα τρία ολοκληρώματα είναι το γινόμενο της $\varphi(t)$ με τον εαυτό της, δηλαδή για $k = 0$.

Ερώτημα C

Τέλος, θα προσομοιώσουμε ένα PAM σύστημα βασικής ζώνης, το οποίο μεταφέρει $Nbits$ χρησιμοποιώντας διαμόρφωση $2-PAM$. Έστω $T=10^2 sec$, $over=10$, $a=0.5$, και $A=4$ (το A ισούται με το μισό μήκος του αποκομμένου παλμού μετρημένο σε περιόδους συμβόλου).

.

$C.1$ **(5) Να δημιουργήσετε N $bits$ b_i, για $i=0,...,N-1$ (ενδεικτικά $N=50,100$), με την εντολή :** $b=(sign(randn(N,1))+1)/2;$

```
%C1
N1=100;


b= (sign(randn(1,N1))+1)/2;
```

Σχήμα 27: $b=(sign(randn(N,1))+1)/2;$

$C.2$ **Το σύστημα $2-PAM$ βασικής ζώνης υλοποιείται ως εξής. (α) (5) Να γράψετε συνάρτηση:**$X = bits\ to\ 2PAM(b);$ **η οποία παίρνει είσοδο την ακολουθία $bits$ b και παράγει ως έξοδο την ακολουθία από $2-PAM$ σύμβολα X, χρησιμοποιώντας την εξής απεικόνιση:** $0\rightarrow+1$,$1\rightarrow-1$

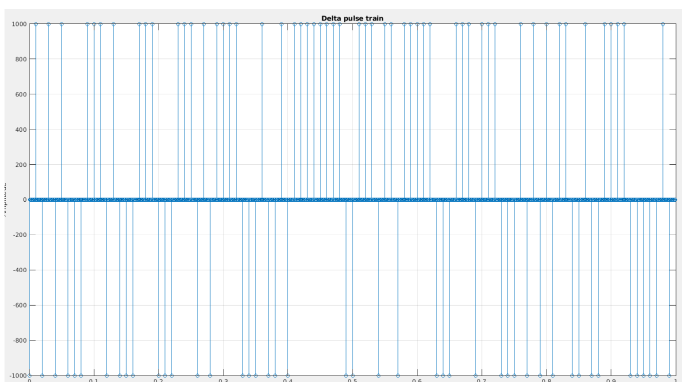
```
function [b] =bits_to_2pam(b)
    for i=1:length(b)
        if b(i)==0
            b(i)=1;
        elseif b(i)==1
            b(i)=-1;
        end
    end
end
```

Σχήμα 28: $X = bits\ to\ 2PAM(b);$

(β) **Να προσομοιώσετε το σήμα** $\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \delta(t-kT)$ **μέσω της εντολής** $X_{delta} = 1/Ts \cdot upsample(X, over)$;
. **(10) Να ορίσετε κατάλληλα τον άξονα του χρόνου και να σχεδιάσετε το σήμα** $X_\delta(t)$. [η]

```
%C2
%a
X = bits_to_2pam(b);
X_delta = 1/Ts*upsample(X, over);

%b
tN = [0:Ts:(N1*T)-Ts];
figure();
stem(tN,X_delta);
title('Delta pulse train');
xlabel('Time');
ylabel('Amplitude');
grid on;
```

Σχήμα 29:



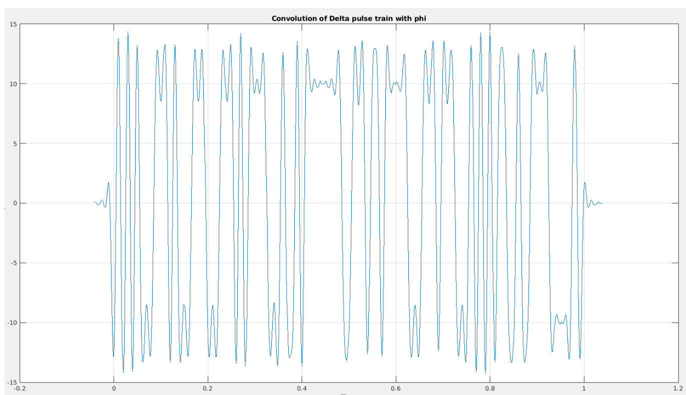
Σχήμα 30: X_δ

(γ) Να δημιουργήσετε αποκομμένο $SRRC$ παλμό $\varphi(t)$ (χρησιμοποιώντας τις παραπάνω παραμέτρους) και να προσομοιώσετε τη συνέλιξη $X(t) = X_\delta(t) * \varphi(t)$.

(10) Να κατασκευάσετε κατάλληλα τον άξονα του χρόνου και να σχεδιάσετε το σήμα $X(t)$

```
%g
[phi_c2,t_c2] = srrc_pulse(T,over,A,a(2));
X_t = conv(X_delta,phi_c2)*Ts;


t_conv = [min(tN)+min(t_c2):Ts:max(tN)+max(t_c2)];
figure;
plot(t_conv,X_t);
title('Convolution of Delta pulse train with phi');
xlabel('Time');
ylabel('Amplitude');
grid on;
```

Σχήμα 31:



Σχήμα 32: $X(t)$

(δ) Υποθέτοντας ιδανικό κανάλι, στην είσοδο του δέκτη λαμβάνουμε $X(t)$. Να προσομοιώσετε τη συνέλιξη $Z(t) = X(t) * \varphi(-t)$.

(10) Να σχεδιάσετε το Z(τ) στον αντίστοιχο άξονα του χρόνου και να βρείτε τι τιμές παίρνει τις χρονικές στιγμές kT , για $k = 0, ..., N-1$. Να συσχετίσετε τις τιμές αυτές με τις τιμές των X_k, για $k = 0, ..., N-1$. Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

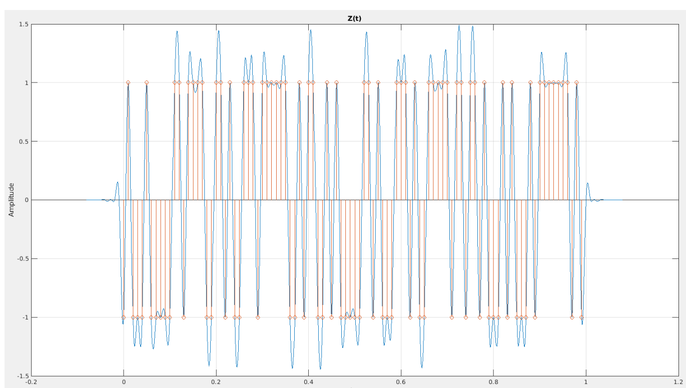
(5) Ένας γραφικός τρόπος για να συγκρίνετε τις τιμές $Z(kT)$ με τις τιμές X_k, για $k = 0, ..., N-1$, είναι να επιλέξετε *hold on* **στο** *plot* **του $Z(t)$ και να εκτελέσετε την εντολή** $stem([0 : N-1], X)$; **όπου X είναι το διάνυσμα με τα σύμβολα X_k, $k = 0, ..., N-1$. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;**

.

Παρατηρείται ότι οι τιμές $Z(kT)$ έχουν μία μικρή απόκληση απο τις τιμές των συμβόλων X_k.

```
%d
phi_flipped = phi_c2(numel(phi_c2):-1:1);
t_flipped = t_c2(numel(t_c2):-1:1);
Z_t = conv(X_t,phi_flipped)*Ts;
t_conv2 = [min(t_conv)+min(t_flipped):Ts:max(t_conv)+max(t_flipped)];
figure;
plot(t_conv2,Z_t);
hold on;
stem([0:N1-1]*T,X);
hold off;
title('Z(t)');
xlabel('Time');
ylabel('Amplitude');
grid on;
```

Σχήμα 33:



Σχήμα 34: $Z(t) with X_k$