Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα 1: Πρώτη Εργασία

Εμμαμουήλ-Θωμάς Χατζάκης:2021030061

Μάιος 2024

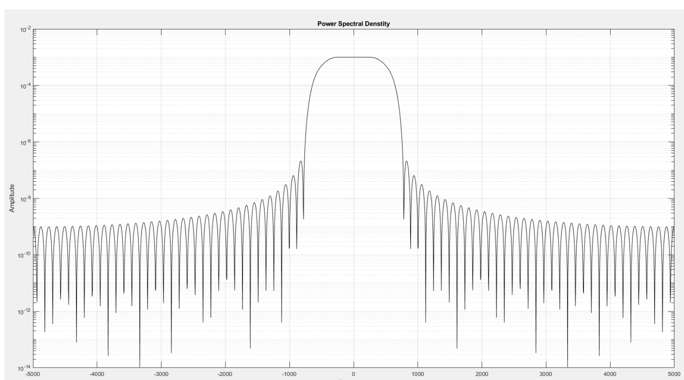
1 Ερώτημα Α

Α. Στο πρώτο μέρος της άσκησης, το οποίο είναι, κυρίως, πειραματικό, θα μελετήσουμε το φασματικό περιεχόμενο PAM κυματομορφών βασικής ζώνης.

.

Α.1 Να δημιουργήσετε παλμό SRRC $\phi(t)$ **με τιμές** $T = 10^{-3} sec$, $over = 10$, $Ts = \frac{T}{over}$, $A = 4$ **και** $a = 0.5$.

(10) Μέσω των συναρτήσεων fftshift και fft, να υπολογίσετε το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier της $\phi(t)$, $|\Phi(F)|$, **σε** Nf **ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα**



Σχήμα 1: Power Spectral Denstity

```
%A1
T= 10^(-3);
over = 10;
Ts = T/over;
A=4;
a=0.5;

[phi,t] = srrc_pulse(T,over,A,a);

Nf=2048;
Fs = 1/Ts;
f_axis = linspace(-1/2,1/2-Fs/Nf,Nf);
F_axis = Fs*f_axis;

PHI = fftshift(fft(phi,Nf))*Ts;
XF_abs = abs(PHI);
PHI_psd = XF_abs.^2;

figure;
semilogy(F_axis,PHI_psd,'k');
grid on;
title("Power Spectral Denstity");
xlabel('Frequency');
ylabel('Amplitude');
```

Σχήμα 2: Κώδικας Α1

Α.2 Να δημιουργήσετε ακολουθία $N = 100$ ανεξάρτητων και ισοπίθανων bits $b_0, ..., b_{N-1}$. Χρησιμοποιώντας απεικόνιση:

$$0 \rightarrow +1$$

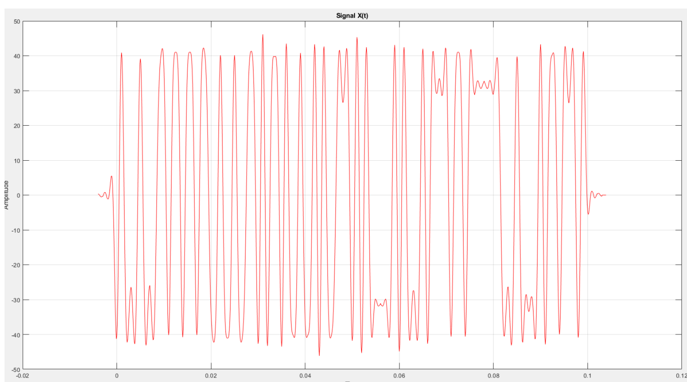
$$1 \rightarrow -1$$

να απεικονίσετε τα bits σε σύμβολα X_n, για $n = 0, ..., N-1$

```
function [b] =bits_to_2pam(b)
    for i=1:length(b)
        if b(i)==0
            b(i)=1;
        elseif b(i)==1
            b(i)=-1;
        end
    end
end
```

Σχήμα 3: Bits to 2PAM

Να κατασκευάσετε την κυματομορφή $\sum_{k=0}^{N-1} X_n \cdot \phi(t - nT)$ υποθέτοντας ότι το πλήθος των συμβόλων είναι άπειρο, αποδείξαμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος της $X(t)$ είναι $S_X(F) = \frac{\sigma_x^2}{T} \cdot |\Phi(F)|^2$



Σχήμα 4: Signal X(t)

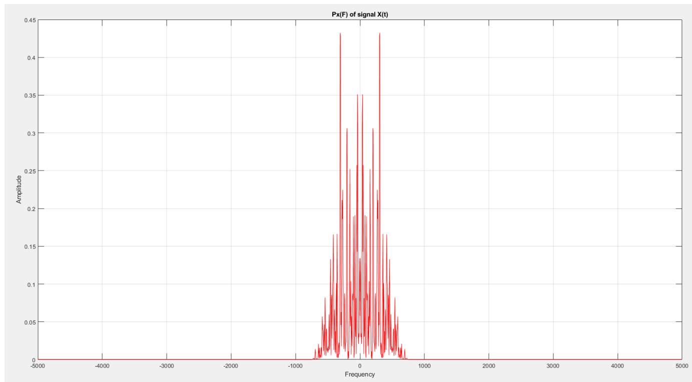
```
%A2
N=100;

b= (sign(randn(1,N))+1)/2;
X = bits_to_2pam(b);

figure;
stem(X);
grid on;
title("Bits to 2PAM");
xlabel('Time');
ylabel('Amplitude');

X_delta = 1/Ts*upsample(X, over);
t_delta = [0:Ts:(N*T)-Ts];

X_t = conv(X_delta,phi)*Ts;
t_conv = t(1)+t_delta(1):Ts:t(end)+t_delta(end);

figure;
plot(t_conv,X_t,'r');
grid on;
title("Signal X(t)");
xlabel('Time');
ylabel('Amplitude');

S_x = (var(X)/T)*PHI_psd;
```

Σχήμα 5: κώδικας A2

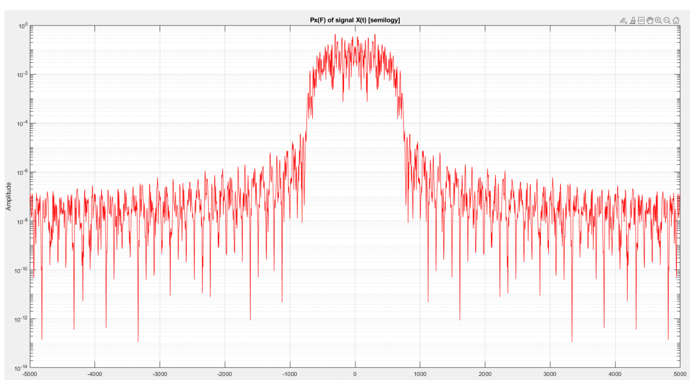
A.3(10) Με χρήση των συναρτήσεων fftshift και fft να υπολογίσετε το περιοδόγραμμα μίας υλοποίησης της $X(t)$

$$P_X(F) = \frac{|\mathcal{F}[X(t)]|^2}{T_{total}}$$

όπου T_{total} είναι ο συνολικός χρόνος διάρκειας της $X(t)$ σε sec. Να σχεδιάσετε το $P_X(F)$ με χρήση plot και semilogy.



Σχήμα 6: $P_X(F)$



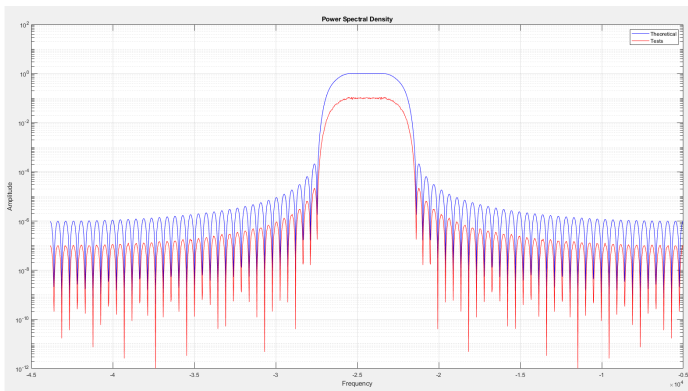
Σχήμα 7: $P_X(F)$ with semilogy

```
%A3
X_F = fftshift(fft(X_t,Nf))*Ts;
XF_abs = abs(X_F);
XF_psd = XF_abs.^2;

T_total = max(t_conv)- min(t_conv)+1;

Px_F = XF_psd/T_total;

figure;
plot(F_axis,Px_F,'r');
grid on;
title("Px(F) of signal X(t)");
xlabel('Frequency');
ylabel('Amplitude');


figure;
semilogy(F_axis,Px_F,'r');
grid on;
title("Px(F) of signal X(t) [semilogy]");
xlabel('Frequency');
ylabel('Amplitude');
```

Σχήμα 8: Κώδικας Α3

Να επαναλάβετε για διάφορες υλοποιήσεις της ακολουθίας bits $b_0, ..., b_N - 1$, ώστε να αποκτήσετε μία καλή εικόνα σχετικά με το πώς μοιάζει το περιοδόγραμμα υλοποιήσεωντης $X(t)$.

(10) Να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος υπολογίζοντας αριθμητικές μέσες τιμές πάνω σε K (ενδεικτικά, $K = 500$) υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων. Να σχεδιάσετε σε κοινό semilogy την εκτίμηση και τη θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος.



Σχήμα 9: Εκτίμηση και Θεωριτική φασματική πυκνότητα ισχύος

(10) Όσο αυξάνετε το K και το N, θα πρέπει η προσέγγιση να γίνεται καλύτερη. Συμβαίνει αυτό στα πειράματά σας; Αν ναι, μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Για τον έλεγχο της προσέγγισης δοκιμάστηκαν διάφορες τιμές για το K και το N (K=1000,10000 και N=1000,10000,100000). Παρατηρείται όσο αυτά αυξάνονταν η προσέγγιση γινόταν όλο και καλύτερη. Αυτό συμβαίνει διότι μεγαλύτερο K σημαίνει περισσότερες υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας όποτε καλύτερη προσέγγιση της μέσης τιμής και μεγαλύτερο N σημαίνει παραγωγή περισσότερων συμβόλων οπότε περισσότερη πληροφορία για τη στοχαστική διαδικασία.

```
k=500;

X_tests = zeros(k,Nf);
for i=1:k
    b_test= (sign(randn(1,N))+1)/2;
    X_test = bits_to_2pam(b_test);
    X_delta_test = 1/Ts*upsample(X_test, over);
    X_t_test = conv(X_delta_test,phi)*Ts;
    X_F_test = fftshift(fft(X_t_test,Nf))*Ts;
    XF_abs_test = abs(X_F_test);
    XF_psd_test = XF_abs_test.^2;
    X_tests(i,:)=XF_psd_test;
end

Sx_tests = mean(X_tests);

figure;
semilogy(F_axis,S_x,'b');
hold on;

semilogy(F_axis,Sx_tests,'r');
hold off;
grid on;
title("Power Spectral Density");
xlabel('Frequency');
ylabel('Amplitude');
legend("Theoretical","Tests");
```

Σχήμα 10: Κώδικας Α3

Α.4 Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση

$$00 \rightarrow +3$$

$$01 \rightarrow +1$$

$$11 \rightarrow -1$$

$$10 \rightarrow -3$$

να κατασκευάσετε την ακολουθία 4PAM X_n, $n = 0, ..., \frac{N}{2} - 1$. Παρατηρήστε ότι,αν τα bits είναι ισοπίθανα, τότε και τα σύμβολα X_n είναι ισοπίθανα!

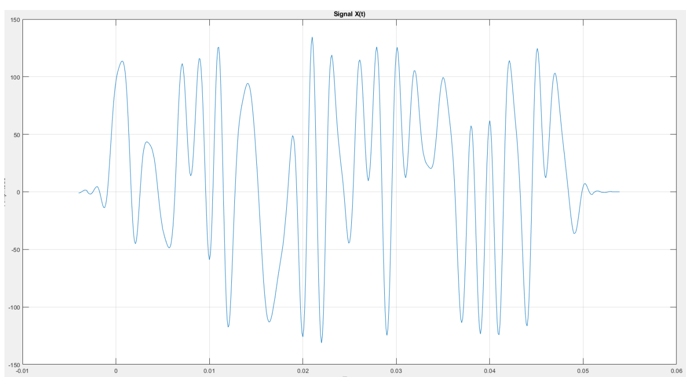
```
function X =bits_to_4pam(b1,b2)
    N=100;
    for i=1:N/2
        if (b1(i)==0 & b2(i)==0)
            X(i)=3;
        elseif (b1(i)==0 & b2(i)==1)
            X(i)=1;
        elseif (b1(i)==1 & b2(i)==1)
            X(i)=-1;
        else
            X(i)=-3;
        end
    end
end
```

Σχήμα 11: Bits to 4PAM

Να κατασκευάσετε την κυματομορφή

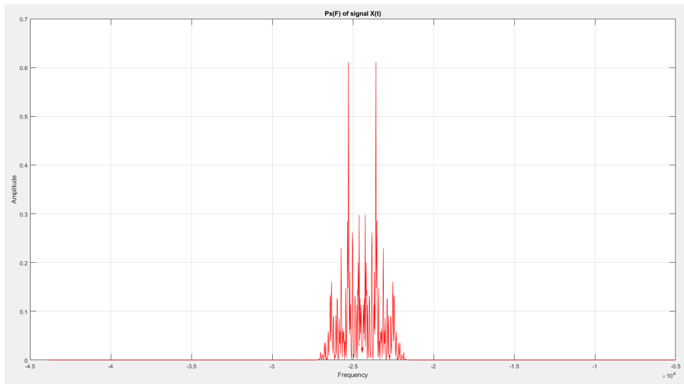
$$X(t) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} X_n \cdot \phi(t - nT)$$

χρησιμοποιώντας την ίδια περίοδο T με το ερώτημα A.2

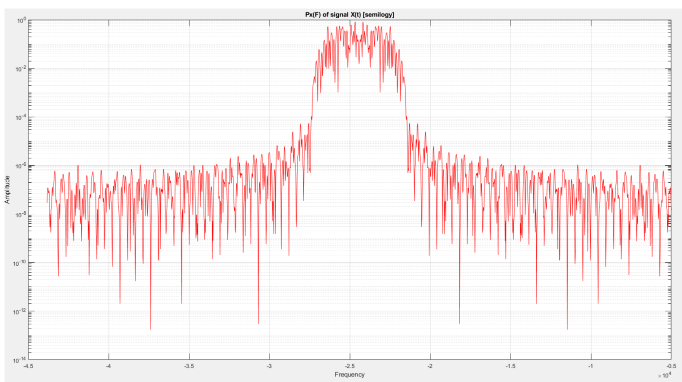


Σχήμα 12: Signal $X(t)$

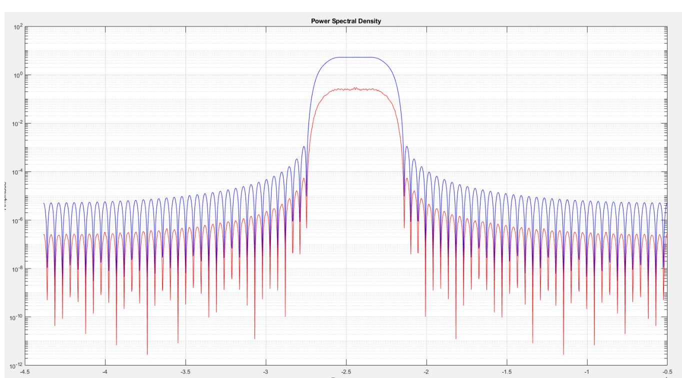
(10) Να υπολογίσετε το περιοδόγραμμα και να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος μέσω αριθμητικών μέσων τιμών υλοποιήσεων περιοδογραμμάτων της X(t).Να σχεδιάσετε την πειραματική και την θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος στο ίδιο semilogy.



Σχήμα 13: $P_X(F)$

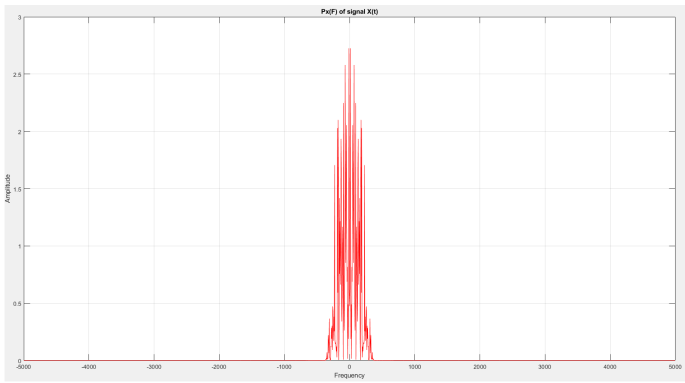


Σχήμα 14: $P_X(F)$ with semilogy

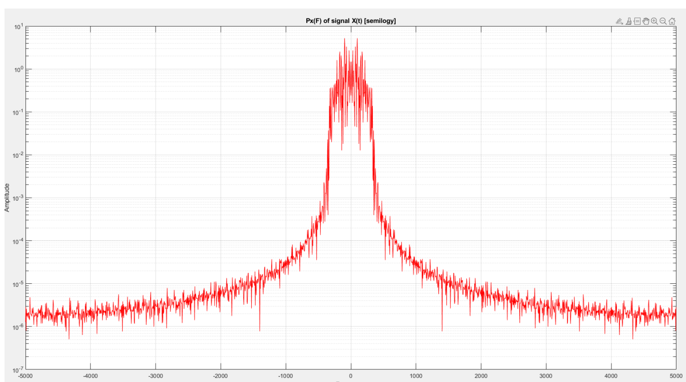


Σχήμα 15: Εκτίμηση και Θεωριτική φασματική πυκνότητα ισχύος

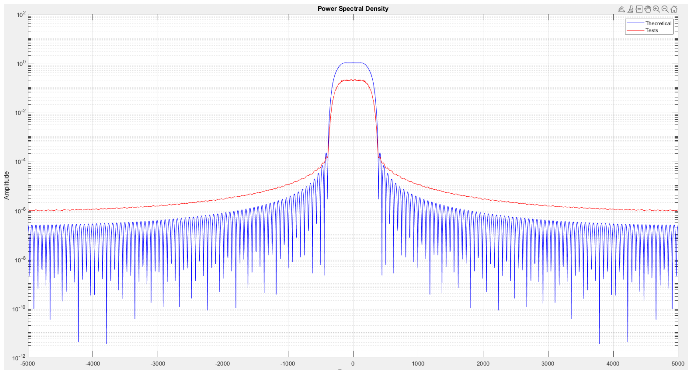
A.5 (10) Να επαναλάβετε το βήμα A.3, θέτοντας περίοδο συμβόλου $T' = 2T$ (να διατηρήσετε την περίοδο δειγματοληψίας T_s ίση με αυτή των προηγούμενων βημάτων, άρα, θα πρέπει να διπλασιάσετε την παράμετρο $over$).



Σχήμα 16: $P_X(F)$



Σχήμα 17: $P_X(F)$ with semilogy



Σχήμα 18: Εκτίμηση και Θεωριτική φασματική πυκνότητα ισχύος

(5) Τι παρατηρείτε σχετικά με το εύρος φάσματος των κυματομορφών σε αυτή την περίπτωση σε σχέση με αυτό των κυματομορφών του βήματος Α.3; Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Παρατηρείται ότι το εύρος φάσματος έχει υποδιπλασιαστεί που είναι αναμενόμενο αφού διπλασιάστηκε η περίοδος που είναι αντιστρόφως ανάλογη της συχνότητας.

Α.6 (2.5) Αν θέλατε να στείλετε δεδομένα όσο το δυνατό ταχύτερα έχοντας διαθέσιμο το ίδιο εύρος φάσματος, θα επιλέγατε 2-PAM ή 4-PAM, και γιατί·

Θα γινόταν επιλογή συστήματος 4-PAM διότι κάθε σύμβολο μεταφέρει 2 bits πληροφορίας

(2.5) Αν το διαθέσιμο εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, θα επιλέγατε περίοδο συμβόλου T ή $T' = 2T$, και γιατί;

Σε αυτή τη περίπτωση θα προτιμηθεί περίοδος συμβόλου $T' = 2T$ διότι το εύρος φάσματος θα υποδιπλαστιαστεί και επομένως το κόστος θα μειωθεί.

2 Ερώτημα Β

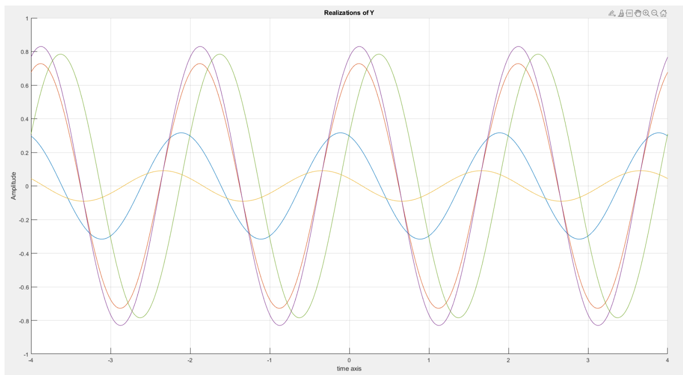
Στο δεύτερο μέρος της άσκησης, το οποίο είναι, κυρίως, θεωρητικό, θα μελετήσουμε απλές στοχαστικές διαδικασίες.

Εστω

$$Y(t) = Xcos(2\pi F_0 t + \Phi)$$

όπου $X \sim \mathcal{N}(0,1)$**,**$\Phi \sim [0, 2\pi)$ **και** X, Φ **ανεξάρτηρες τυχαίες μεταβλητές.**

1. (5) Να σχεδιάσετε σε κοινό plot 5 υλοποιήσεις της.



Σχήμα 19: Πέντε υλοποιήσεις της Y

2. (10) Να υπολογίσετε τις ποσότητες $E[Y(t)]$ **και** $R_{YY}(t+\tau, t) = E[(Y(t+\tau)Y(t)]$**. Τι διαπιστώνετε;**

$$E[Y(t) = E[Xcos(2\pi F_0 t + \Phi)] = E[X]E[cos(2\pi F_0 t + \Phi)] = 0$$

διότι X, Φ ανεξάρτηρες τυχαίες μεταβλητές και $m_x = 0$.

$R_{YY}(t+\tau, t) = E[(Y(t+\tau)Y(t)] = E[X^2 cos(2\pi F_0(t+\tau)+\Phi)cos(2\pi F_0(t)+\Phi)]$
$= E[\frac{1}{2}cos(2\pi F_0(t+\tau-t))]E[\frac{1}{2}cos(2\pi F_0(t+\tau+t)+2\Phi] =$
$= E[\frac{1}{2}cos(2\pi F_0(t+\tau-t))] = \frac{1}{2}cos(2\pi F_0 \tau)$

Παρατηρείται ότι η R_{YY} εξαρτάται μόνο από το τ όποτε είναι στάσιμη υπό την ευρεία έννοια.

3.(5) Να υπολογίσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος, $S_Y(F)$**.**

$$S_Y(F) = \mathcal{F}\{R_Y(\tau)\} = \mathcal{F}\{\frac{1}{2}cos(2\pi F_0 \tau)\} = \frac{1}{4}(\delta(F-F_0) + \delta(F+F_0))$$