

Πολυτεχνείο Κρήτης
Σχολή ΗΜΜΥ
Ασύρματες Επικοινωνίες
4η Εργασία



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
TECHNICAL UNIVERSITY OF CRETE

Αποστολάκη Αλεξάνδρα: 2021030167

Πίνακας Περιεχομένων

Μέρος 1: Ιδανικά κανάλια (χωρίς υόρυβο, χωρίς CFO)	3
Μέρος 2: Ιδανικό κανάλι με CFO	11
Μέρος 3: Μη-ιδανικά κανάλια χωρίς CFO	16
Μέρος 4: Μη-ιδανικά κανάλια με CFO	20

Η άσκηση αυτή αφορά τεχνικές συγχρονισμού, εκτίμησης CFO και εκτίμησης καναλιού σε ιδανικά και μη-ιδανικά κανάλια.

Στα παρακάτω, T και T_s είναι, αντίστοιχα, η περίοδος συμβόλου και δείγματος, με

$$\frac{T}{T_s} = \text{over} \in \mathbb{N},$$

N το πλήθος των συμβόλων σε κάθε πακέτο, και N_{tr} το πλήθος των συμβόλων εκπαίδευσης σε κάθε πακέτο. Τα φίλτρα στον πομπό και στο δέκτη είναι SRRC, με roll-off factor $\beta = 0.4$ και μισό μήκος ίσο με $B = 3$ περιόδους συμβόλου.

Μέρος 1: Ιδανικά κανάλια (χωρίς θόρυβο, χωρίς CFO)

Εκφώνηση:

- 1.1 Να δημιουργήσετε πακέτο με 4-QAM σύμβολα, A_0, \dots, A_{N-1} . Να θεωρήσετε τα πρώτα N_{tr} σύμβολα ως σύμβολα εκπαίδευσης. Να περάσετε το πακέτο από το φίλτρο μορφοποίησης και να υπολογίσετε το χαμηλοπερατό ισοδύναμο της εισόδου του καναλιού

$$A(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n g_T(t - nT).$$

- 1.2 Να θεωρήσετε ότι η κρουστική απόκριση του φυσικού καναλιού είναι $c(t) = \delta(t)$ και ότι το κανάλι είναι αθόρυβο.

- 1.3 Να φιλτράρετε με το προσαρμοσμένο φίλτρο στο δέκτη (να θεωρήσετε ότι ο χρόνος στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου αρχίζει στο $t = 0$).

- 1.4 Να υπολογίσετε το σύνθετο αναλογικό κανάλι, υποθέτοντας ότι ο χρόνος αρχίζει στο $t = 0$. Να σχεδιάσετε την απόλυτη τιμή του.

- 1.5 Να προσπαθήσετε να συγχρονιστείτε με βάση την ενέργεια του ληφθέντος σήματος, θεωρώντας ότι $d = 0, \dots, 4\text{over} - 1$. Να σχεδιάσετε το κατάλληλο στατιστικό. Τι παρατηρείτε;

- 1.6 Να προσπαθήσετε να συγχρονιστείτε με βάση τα σύμβολα εκπαίδευσης, για τα ίδια d . Να σχεδιάσετε την απόλυτη τιμή του αντίστοιχου στατιστικού και να τη συγχρίνετε με την απόλυτη τιμή του σύνθετου καναλιού. Τι παρατηρείτε;

- 1.7 Αφού συγχρονιστείτε με έναν από τους δύο παραπάνω τρόπους, να κατασκευάσετε την μήκους N symbol-spaced ακολουθία εξόδου και να τη σχεδιάσετε. Τι παρατηρείτε;

- 1.8 Να επαναλάβετε τα παραπάνω με τη μόνη διαφορά στο ότι $c(t) = c\delta(t)$, με $c \in \mathbb{C}$. Τι παρατηρείτε;

Απάντηση:

Δημιουργία πακέτου & φίλτρο μορφοποίησης. Παράγεται πακέτο 4-QAM $\{A_n\}_{n=0}^{N-1}$ με τα πρώτα N_{tr} σύμβολα ως training. Το σήμα βασικής ζώνης στην είσοδο του καναλιού γράφεται

$$A(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n g_T(t - nT),$$

όπου $g_T(t)$ είναι SRRC με roll-off $\beta = 0.4$ και μισό μήκος $A = 3T$.

Προσαρμοσμένο φίλτρο & σύνθετο κανάλι. Με προσαρμοσμένο φίλτρο $g_R(t) = g_T(t)$, στην έξοδο του matched filter (χωρίς θόρυβο) έχουμε

$$y(t) = (A(t) \otimes c(t)) \otimes g_R(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n h(t - nT),$$

όπου

$$h(t) = c(t) \otimes g_T(t) \otimes g_R(t)$$

είναι το σύνθετο κανάλι. Για $c(t) = \delta(t)$ προκύπτει $h(t) = g_T \otimes g_R$, ενώ για flat fading $c(t) = c \delta(t)$ ισχύει $h(t) = c(g_T \otimes g_R)$

(ίδια μορφή με ιδανικό κανάλι, απλά με κλιμάκωση πλάτους και περιστροφή φάσης λόγω του πολλ/μου με c).

Κλιμάκωση με T_s . Στην υλοποίηση διακριτού χρόνου, το matched filtering/σύνθετο κανάλι υλοποιούνται με συνέλιξη και πολλαπλασιασμό με T_s ώστε το άθροισμα να προσεγγίζει το ολοκλήρωμα:

$$y[n] \approx \sum_{\ell} x[\ell] g[n - \ell] T_s, \quad h[n] \approx (g * g)[n] T_s.$$

Συγχρονισμός με βάση την ενέργεια (1.5). Για $d = 0, \dots, d_{\text{total}} - 1$, όπου $d_{\text{total}} = \text{length}(h_{\text{composite}}) - A \cdot \text{over}$, ορίζεται το στατιστικό ενέργειας (symbol-spaced δειγματοληψία)

$$\mathcal{E}(d) = \sum_{k=0}^{N-1} |y[d + k \text{ over}]|^2,$$

και επιλέγεται $d_E = \arg \max_d \mathcal{E}(d)$.

Συγχρονισμός με training (1.6). Ορίζεται

$$C_d = \sum_{n=0}^{N_{tr}-1} A_n^* y(dT_s + nT), \quad d = 0, \dots, d_{\text{total}} - 1,$$

και $d_T = \arg \max_d |C_d|$. Με $\mathbb{E}[A_n] = 0$ και $\mathbb{E}[|A_n|^2] = \sigma_A^2$, ισχύει (κατά μέσο όρο)

$$\mathbb{E}[C_d] = N_{tr} \sigma_A^2 h(dT_s),$$

άρα το $|C_d|$ αντιγράφει το $|h(t)|$. Η εκτίμηση

$$\hat{h}(dT_s) = \frac{C_d}{N_{tr} \sigma_A^2}$$

δίνει προσεγγιστικά το σύνθετο κανάλι στα χρονικά offsets dT_s .

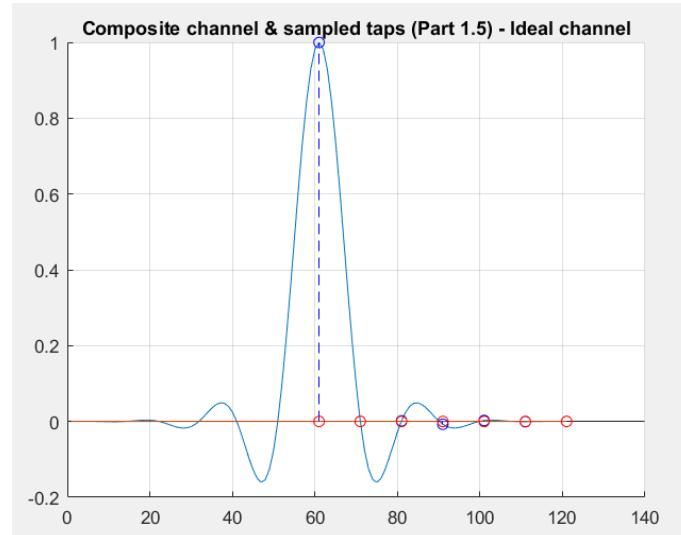
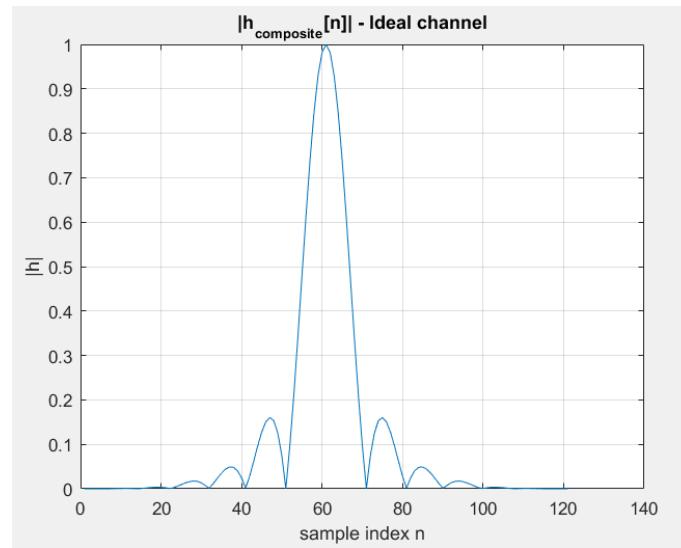
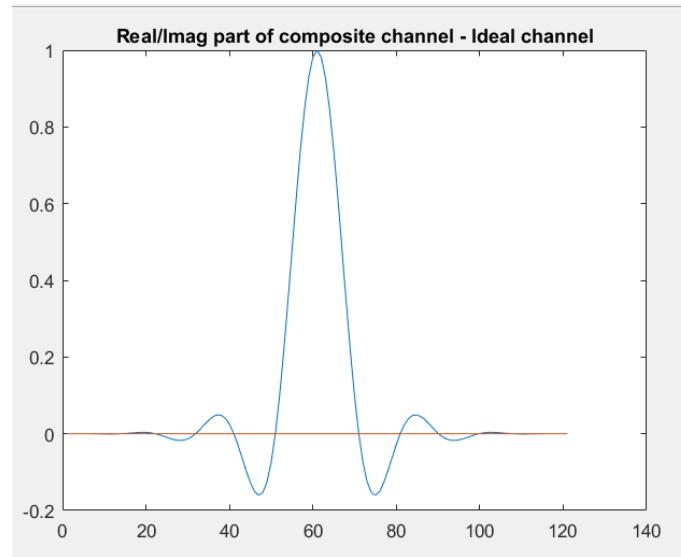
Symbol-spaced ακολουθία (1.7) & flat fading (1.8). Με $d^* \in \{d_E, d_T\}$ σχηματίζεται η ακολουθία μήκους N

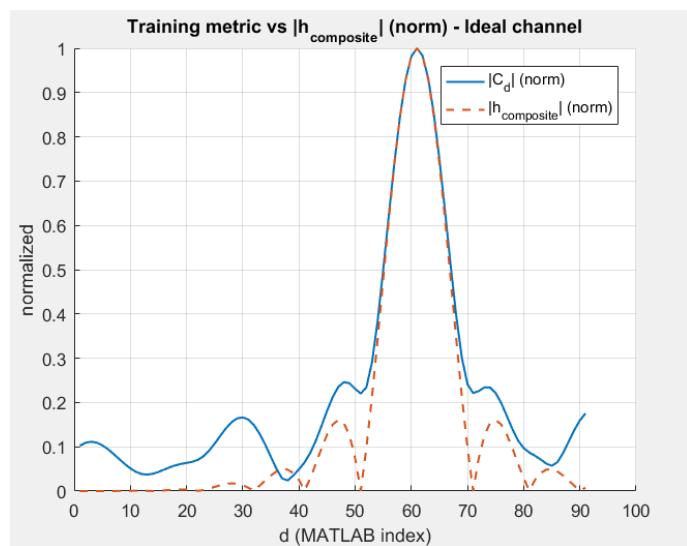
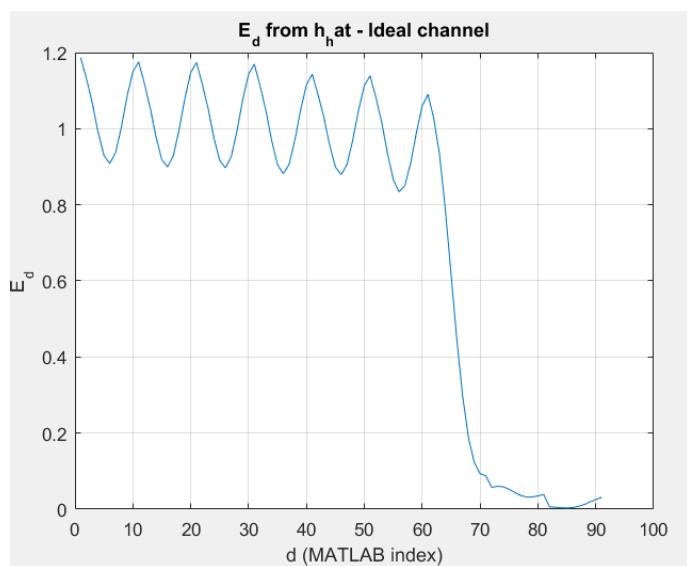
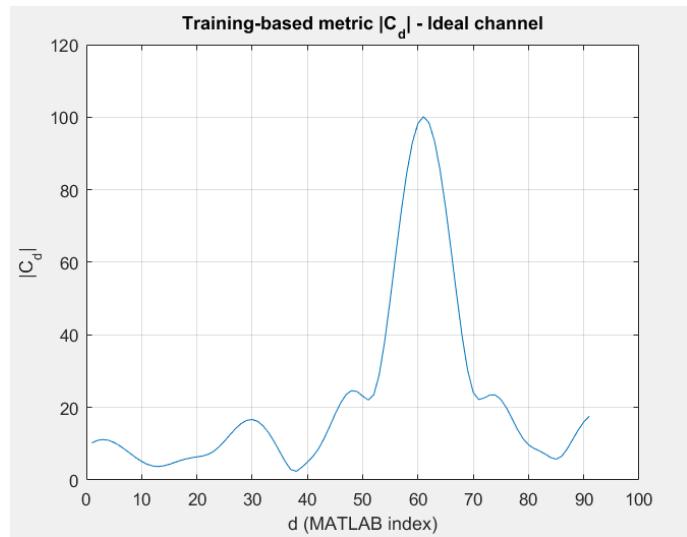
$$Y_k = y(d^* T_s + kT), \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

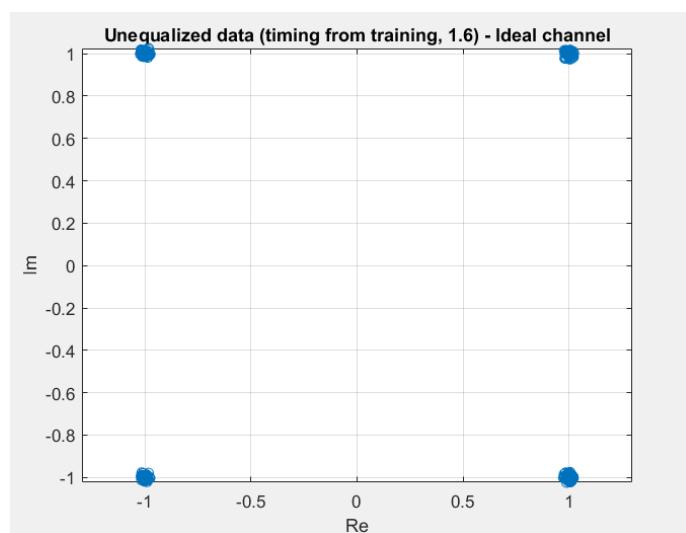
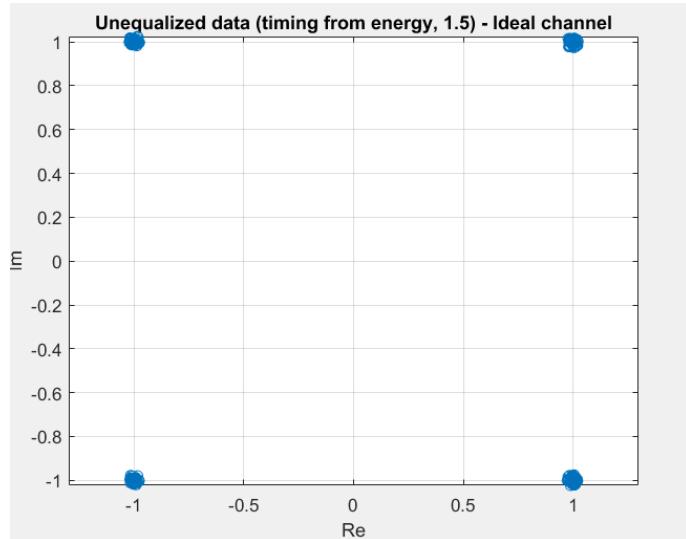
Για $c = 1$ (ιδανικό κανάλι) τα σύμβολα σχηματίζουν 4-QAM (καθώς $g_T \otimes g_R$ είναι Nyquist), ενώ για $c \in \mathbb{C}$ παρατηρείται περιστροφή και κλιμάκωση των συμβόλων, χωρίς αλλαγή στον χρόνο συγχρονισμού (στον κώδικα προκύπτει $d_E = d_T$).

Plots:

Γραφικές για την περίπτωση $c(t) = \delta(t)$:



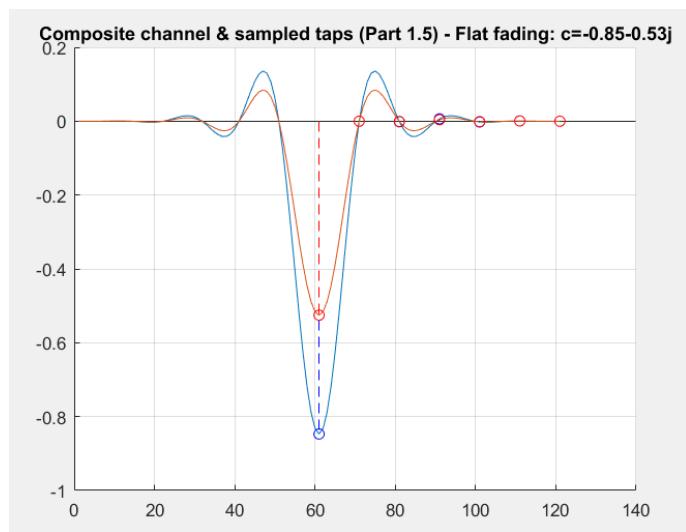
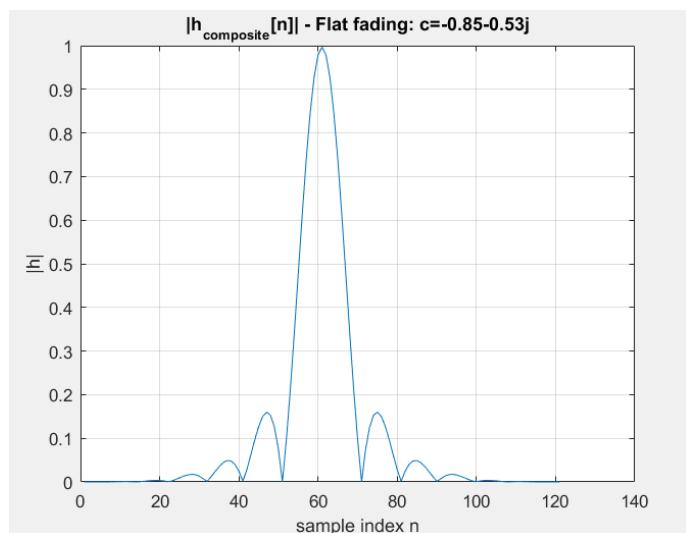
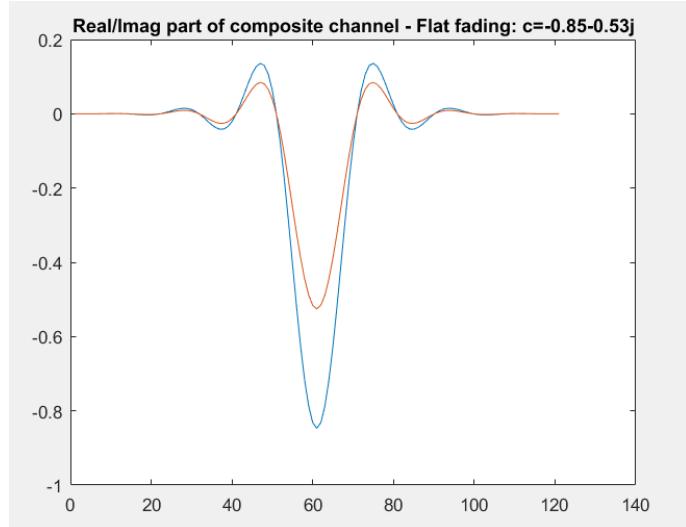


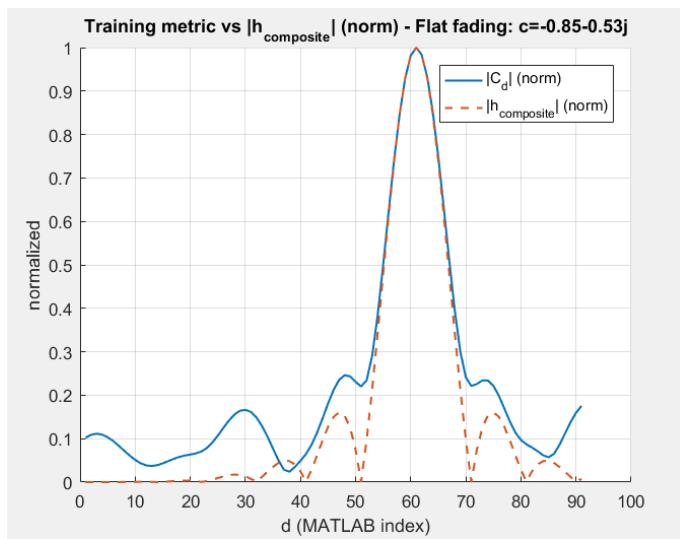
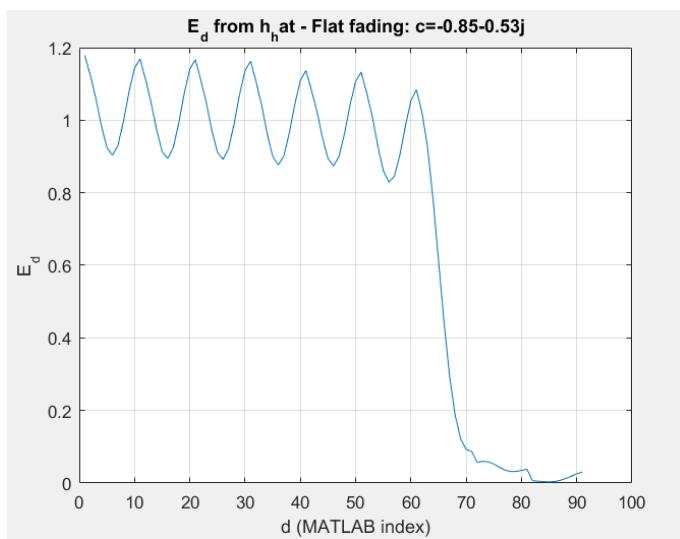
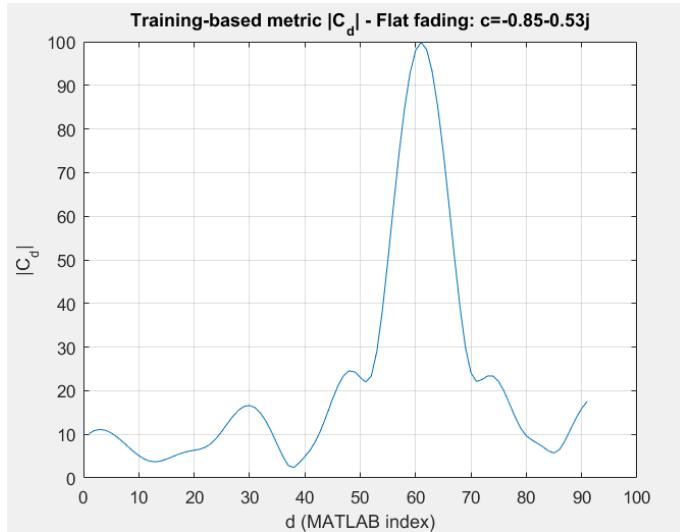


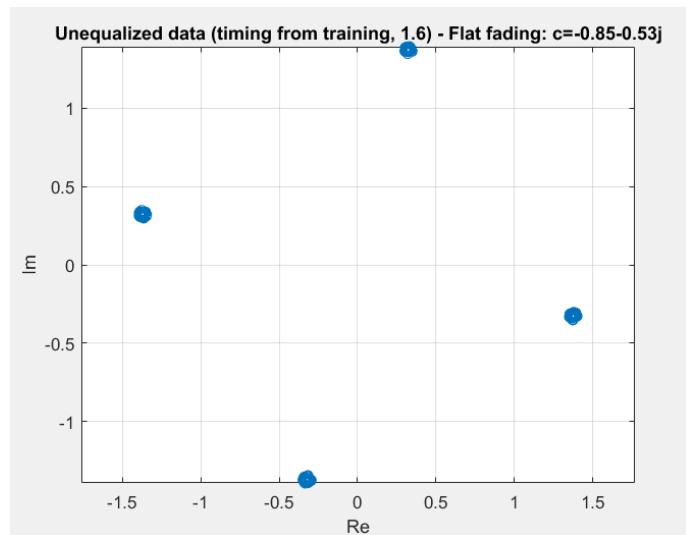
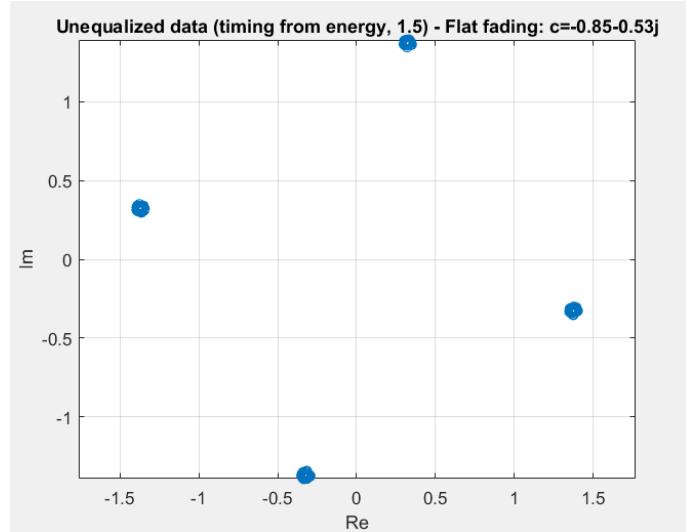
Παρατηρήσεις:

- Και οι δύο μέθοδοι συγχρονισμού (energy/training) δίνουν σχεδόν καθαρό 4-QAM, όπως αναμένεται σε ιδανικό κανάλι (χωρίς ISI/θόρυβο).
- Η δύο μέθοδοι δεν παρουσιάζουν καμία διαφορά ως προς το τελικό constellation.

Γραφικές για την περίπτωση $c(t) = c \delta(t)$:







Παρατηρήσεις:

- Συγκριτικά με πριν, το flat fading επιφέρει μόνο μιγαδική αλιμάκωση/σταθερή περιστροφή του constellation, χωρίς να αλλάζει το timing (οι δύο συγχρονισμοί καταλήγουν στο ίδιο d^*).
- Κι εδώ, energy και training-based μέθοδοι συγχρονισμού οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα.

Μέρος 2: Ιδανικό κανάλι με CFO

Εκφώνηση:

2.1 Να επαναλάβετε τα βήματα A.1 και A.2.

2.2 Να υποθέσετε την ύπαρξη CFO ΔF . Τότε, το σήμα στην είσοδο του δέκτη θα ισούται με

$$Y(t) = e^{j(2\pi\Delta F t + \phi)} A(t).$$

Να δειγματοληπτήσετε, λαμβάνοντας

$$Y_n := Y(nT_s) = e^{j(2\pi(\Delta F T_s)n + \phi)} A(nT_s).$$

Να θέσετε $\Delta F_s := \Delta F T_s \approx 10^{-3}$ και $\phi = 0$.

2.3 Να επαναλάβετε τα βήματα A.3 μέχρι A.7. Τι παρατηρείτε;

2.4 Να υλοποιήσετε και το βήμα A.8 ή/και να θέσετε τυχαία φάση Φ , με $\Phi \sim U[0, 2\pi)$. Τι παρατηρείτε;

2.5 Αν έχετε καταφέρει να συγχρονιστείτε, να εκτιμήσετε το CFO με χρήση συμβόλων εκπαίδευσης.

2.6 Να αναιρέσετε την επίδραση του CFO και να σχεδιάσετε την μήκους N symbol-spaced ακολουθία εξόδου. Τι παρατηρείτε;

2.7 Να εκτιμήσετε το διακριτό ισοδύναμο κανάλι (στην περίπτωση αυτή το κανάλι έχει μόνο έναν συντελεστή) με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (LS).

2.8 Να προσπαθήσετε να αναιρέσετε την επίδραση του καναλιού και να σχεδιάσετε την ακολουθία που λαμβάνετε μετά από αυτό. Τι παρατηρείτε;

Απάντηση:

Μοντέλο CFO. Με CFO ΔF και φάση ϕ , το σήμα στην είσοδο του δέκτη γράφεται

$$Y(t) = e^{j(2\pi\Delta F t + \phi)} A(t).$$

Με δειγματοληψία σε $t = nT_s$:

$$Y_n = e^{j(2\pi\Delta F_s n + \phi)} A(nT_s), \quad \Delta F_s = \Delta F T_s.$$

Ορίζοντας τη κανονικοποιημένη συχνότητα ως προς σύμβολο

$$v = \Delta F T = \text{over} \cdot \Delta F_s,$$

η CFO προκαλεί περιστροφή που μεταβάλλεται με τον δείκτη συμβόλου (κύκλος στον αστερισμό).

Εκτίμηση CFO με training. Μετά τον αρχικό συγχρονισμό (energy metric), χρησιμοποιούνται τα training δείγματα και υπολογίζεται στατιστικό $f(v)$ σε πλέγμα τιμών v . Η εκτίμηση λαμβάνεται ως

$$\hat{v} = \arg \max_v f(v),$$

και στον κώδικα προκύπτει $\hat{v} \approx v_{\text{true}}$.

Διόρθωση CFO. Στο symbol-rate, η διόρθωση γίνεται με

$$Z_k = Y_k e^{-j2\pi\hat{v}k}.$$

Μετά τη διόρθωση, παραμένει μόνο σταθερή (ως προς k) φάση/χλίμακα που μπορεί να απορροφηθεί από τον συντελεστή καναλιού.

1-tap LS εκτίμηση καναλιού & ισοστάθμιση. Για ιδανικό φυσικό κανάλι (ένας συντελεστής), η LS εκτίμηση είναι

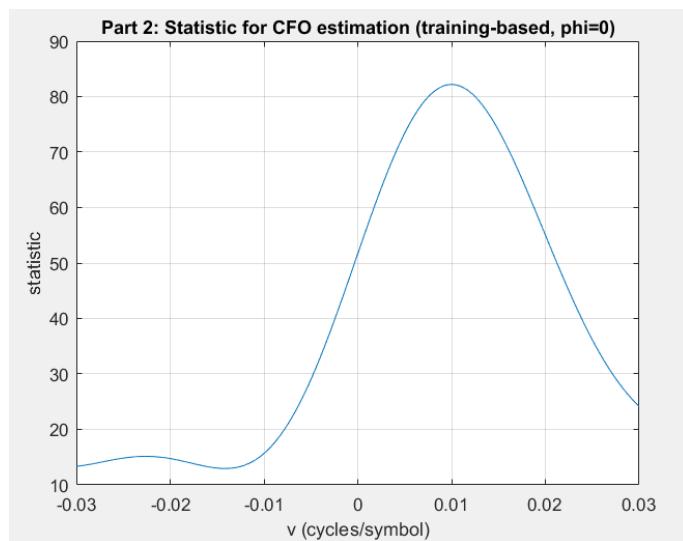
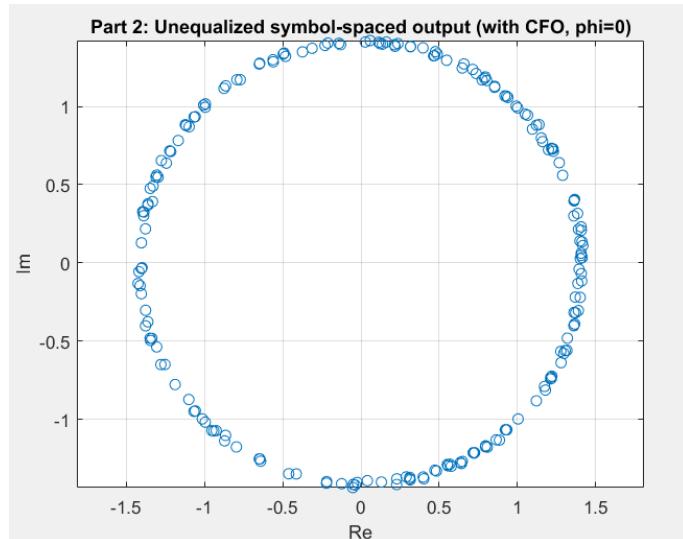
$$\hat{h}_{LS} = \frac{\mathbf{a}_{tr}^H \mathbf{z}_{tr}}{\mathbf{a}_{tr}^H \mathbf{a}_{tr}},$$

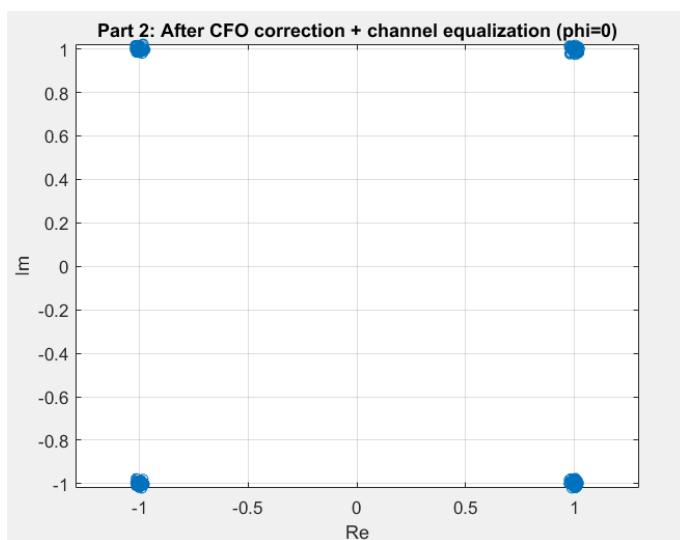
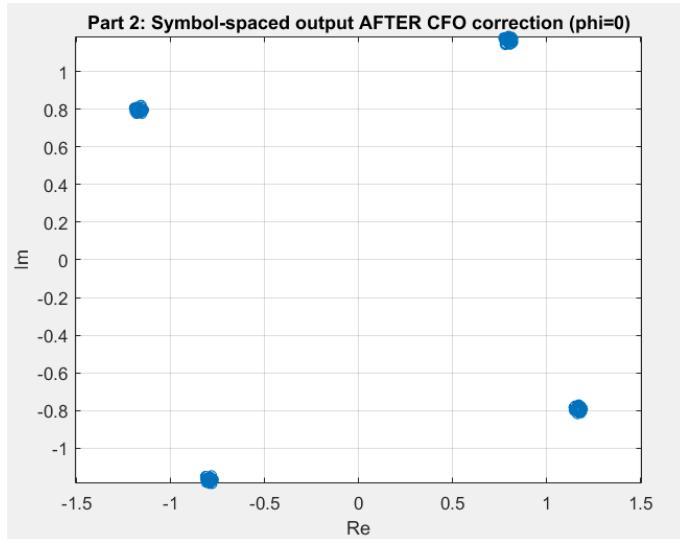
όπου \mathbf{a}_{tr} τα training σύμβολα και \mathbf{z}_{tr} τα αντίστοιχα δείγματα μετά CFO correction. Τέλος,

$$Z_k^{(eq)} = \frac{Z_k}{\hat{h}_{LS}}.$$

Παρατήρηση: η τυχαία αρχική φάση ϕ αλλάζει τη φάση του \hat{h}_{LS} , όμως μετά τη διαίρεση $Z^{(eq)}$ η τελική αστερισμική διάταξη είναι ίδια (ανεξάρτητη της ϕ).

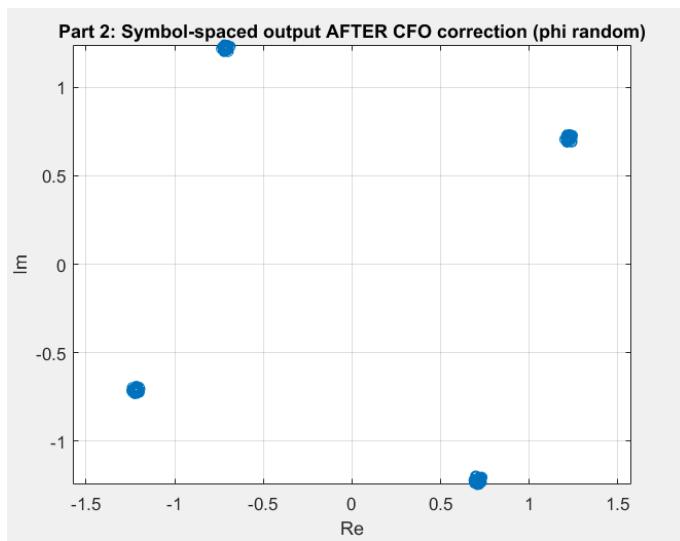
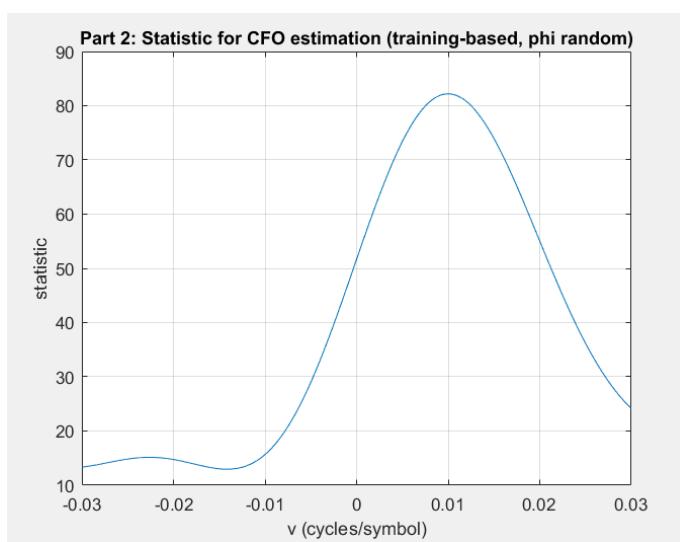
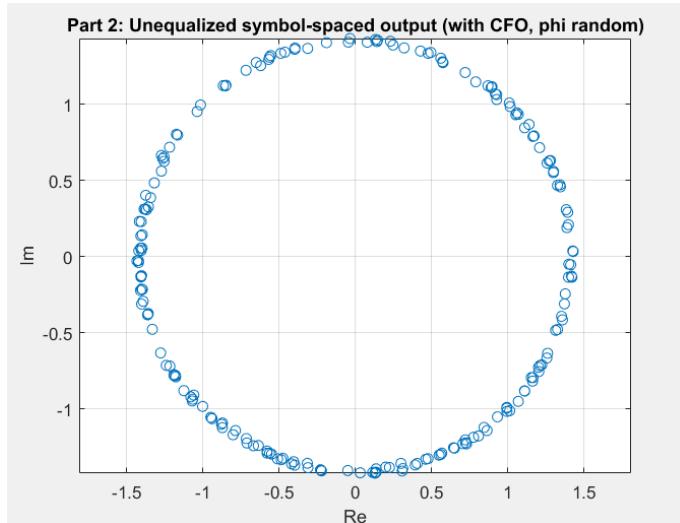
Plots:

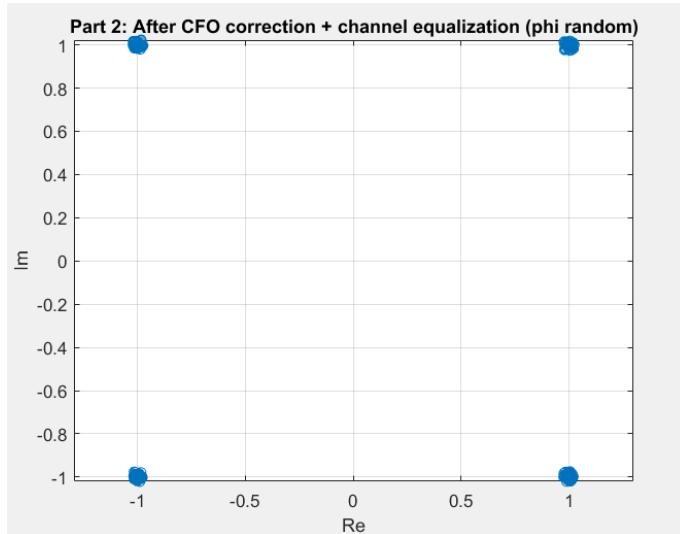




Παρατηρήσεις:

- Πριν τη διόρθωση CFO, τα δείγματα περιστρέφονται με το χρόνο (χυκλική τροχιά στον αστερισμό).
- To metric ως προς v έχει μέγιστο κοντά στο $v_{true} \Rightarrow$ σωστή εκτίμηση CFO.
- Μετά το CFO correction και την ισοστάθμιση, ο αστερισμός επανέρχεται σε 4-QAM.





Παρατηρήσεις:

- Η ϕ αλλάζει μόνο τη συνολική (σταθερή) φάση, όχι τη συμπεριφορά του CFO.
- Μετά το CFO correction και την ισοστάθμιση, ο αστερισμός επανέρχεται σε 4-QAM.

Μέρος 3: Μη-ιδανικά κανάλια χωρίς CFO

Εκφώνηση:

3.1 Να υλοποιήσετε το βήμα A.1.

3.2 Να υπερβάλετε ότι η χρονική απόχριση του φυσικού καναλιού είναι

$$c(t) = c_0 \delta(t) + c_1 \delta(t - KT_s),$$

με $K \sim U\{1, \dots, 4\}$.

3.3 Να υλοποιήσετε τα βήματα A.3 και A.4.

3.4 Να υλοποιήσετε το βήμα A.6, υπολογίζοντας την ποσότητα corr_d , για

$$d = 0, \dots, (4A) + 1 + (K + 2) - 2.$$

3.5 Να υπολογίσετε την ποσότητα E_d , υποθέτοντας μήκος ισοδύναμου διακριτού καναλιού M (να βρείτε το κατάλληλο διάστημα για τις τιμές του d), και να συγχρονιστείτε, λαμβάνοντας μία symbol-spaced ακολουθία μήκους $N + M - 1$.

3.6 Να εκτιμήσετε το διακριτό ισοδύναμο κανάλι μήκους M , με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

3.7 Να υπολογίσετε τον ZF ισοσταθμιστή, μήκους $L \approx 5M$, για καθυστέρηση $\delta = M$.

3.8 Να φιλτράρετε την symbol-spaced ακολουθία εξόδου, και να αποκόψετε τα πρώτα δ δείγματα στην εξόδο του ισοσταθμιστή. Να σχεδιάσετε τα επόμενα N δείγματα. Τι παρατηρείτε;

Απάντηση:

Φυσικό κανάλι 2-κρουστικών. Θεωρούμε

$$c(t) = c_0 \delta(t) + c_1 \delta(t - KT_s), \quad K \sim U\{1, \dots, 4\}.$$

Με SRRRC πομπού/δέκτη, το σύνθετο κανάλι είναι

$$h(t) = c(t) \otimes g_T(t) \otimes g_R(t),$$

και λόγω μνήμης (ISI) η symbol-spaced εξόδος δεν είναι πλέον καθαρή 4-QAM.

Training συσχέτιση & συγχρονισμός. Υπολογίζεται

$$\text{corr}_d = |C_d|, \quad C_d = \sum_{n=0}^{N_{tr}-1} A_n^* y(dT_s + nT),$$

για $d = 0, \dots, 4A + K + 1$, και έπειτα

$$\hat{h}(dT_s) = \frac{C_d}{N_{tr}\sigma_A^2}.$$

Για δεδομένο μήκος διακριτού ισοδύναμου καναλιού M , ορίζεται

$$E_d = \sum_{m=0}^{M-1} \left| \hat{h}((d + m)T_s) \right|^2, \quad d^* = \arg \max_d E_d.$$

Με d^* σχηματίζεται ακολουθία μήκους $N + M - 1$:

$$Y_k = y(d^*T_s + kT), \quad k = 0, \dots, N + M - 2.$$

Η σχέση ισοδύναμου διακριτού καναλιού γράφεται:

$$Y_k = \sum_{m=0}^{M-1} h_m^{(\tau)} A_{k-m},$$

οπότε αναμένεται ISI και άπλωμα του αστερισμού πριν την ισοστάθμιση.

LS εκτίμηση M -tap διακριτού ισοδύναμου καναλιού. Με Toeplitz πίνακα training \mathbf{S} (από τα γνωστά A_n) και παρατηρήσεις \mathbf{y} , η LS εκτίμηση είναι

$$\hat{\mathbf{h}}_{LS} = (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{y}.$$

ZF ισοσταθμιστής. Θέλουμε η συνέλιξη να προσεγγίζει καθυστέρηση δ :

$$(\hat{\mathbf{h}}_{LS} * \mathbf{f})[n] \approx \delta[n - \delta].$$

Με μήκος $L \simeq 5M$ και $\delta = M$, η λύση ZF (LS) δίνεται από

$$\mathbf{f}_{ZF} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{e}_\delta,$$

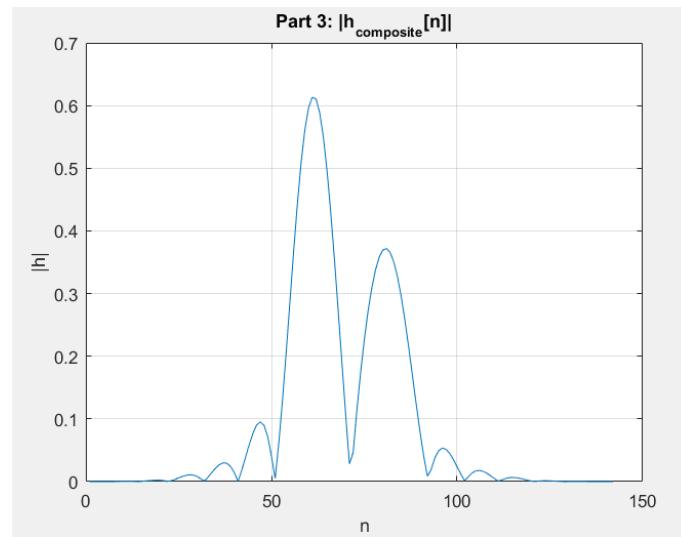
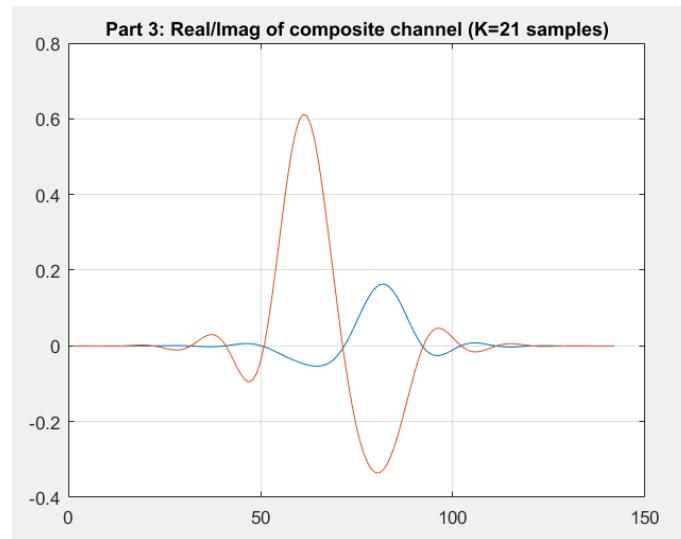
όπου \mathbf{H} ο Toeplitz πίνακας συνέλιξης του $\hat{\mathbf{h}}_{LS}$ και \mathbf{e}_δ το διάνυσμα με 1 στη θέση δ .

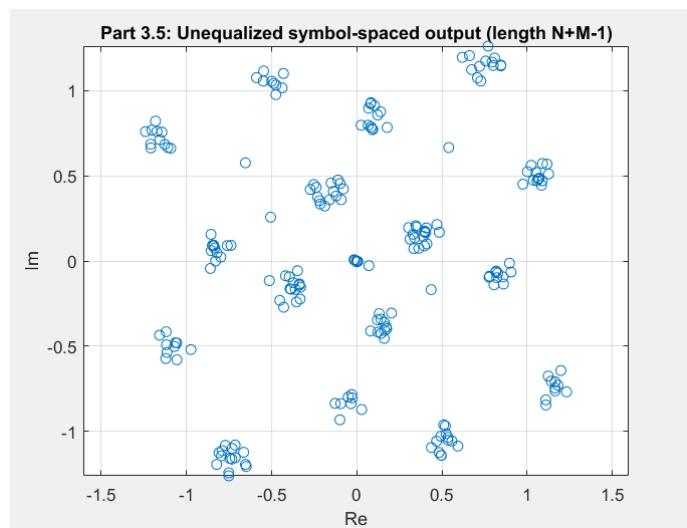
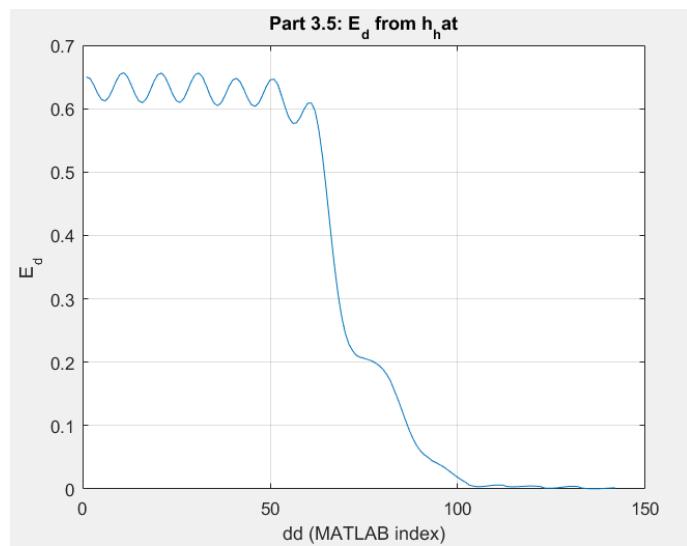
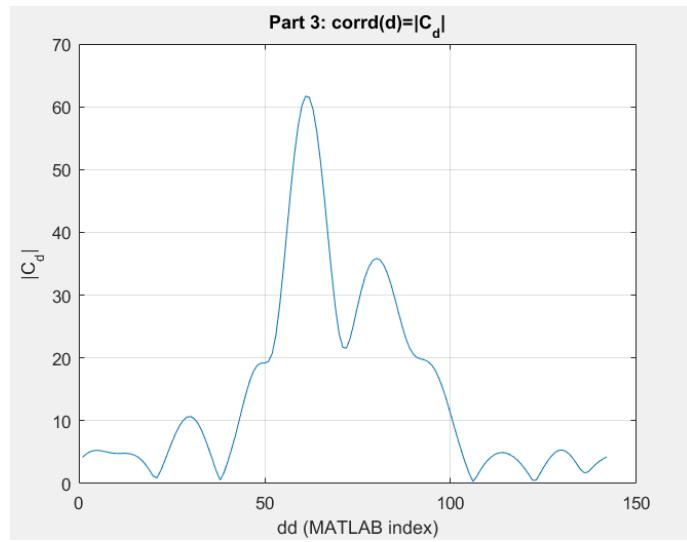
Φιλτράρισμα & αποκοπή. Φιλτράρουμε $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} * \mathbf{f}_{ZF}$ και κρατάμε τα επόμενα N δείγματα μετά την καθυστέρηση:

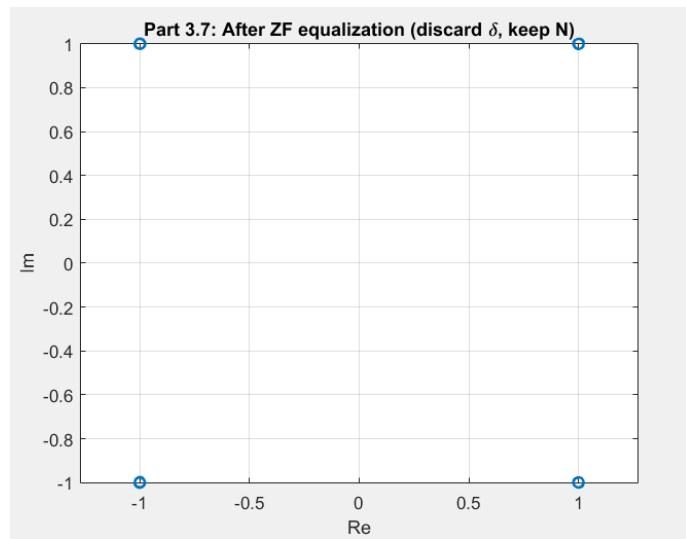
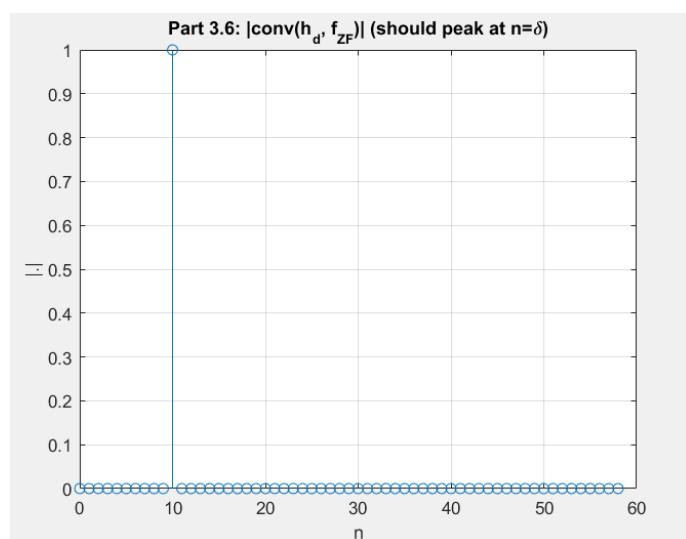
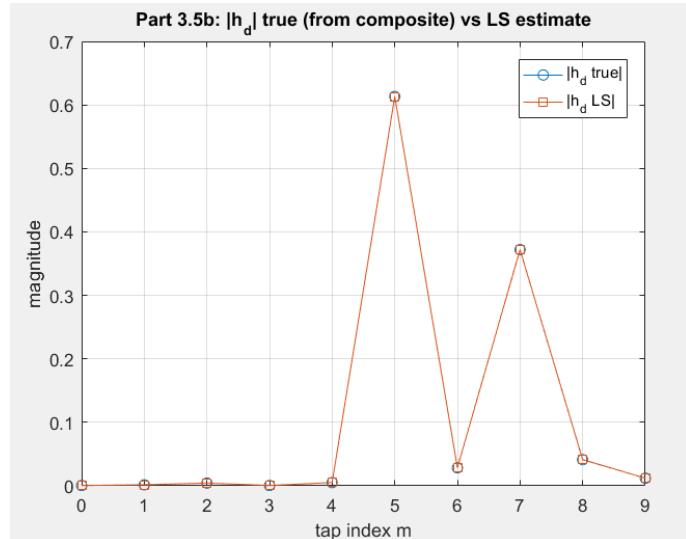
$$Z_{\text{keep}} = \{Z_\delta, Z_{\delta+1}, \dots, Z_{\delta+N-1}\}.$$

Παρατήρηση: μετά την ισοστάθμιση, ο αστερισμός επανέρχεται σε καθαρό 4-QAM (αθόρυβη περίπτωση), δηλ. ουσιαστικά απομακρύνεται η ISI.

Plots:







Παρατηρήσεις:

- Το $|h_{\text{composite}}[n]|$ εμφανίζει δύο κύριες συνιστώσες (2 διαδρομές), άρα το κανάλι έχει μνήμη και προκαλεί ISI.
- Πριν την ισοστάθμιση ο αστερισμός είναι απλωμένος λόγω ISI, ενώ μετά από LS εκτίμηση M -tap καναλιού και ZF ισοστάθμιση επανέρχεται σε καθαρό 4-QAM (αυθόρυβη περίπτωση).

Μέρος 4: Μη-ιδανικά κανάλια με CFO

Εκφώνηση:

4.1 Να επαναλάβετε όλα τα βήματα του Μέρους Γ, μόνο που τώρα να υποθέσετε και CFO.

Απάντηση:

Μοντέλο. Το φυσικό κανάλι είναι όπως στο Μέρος 3, αλλά τώρα το λαμβανόμενο σήμα φέρει και CFO:

$$Y(t) = e^{j(2\pi\Delta F t + \phi)} (A(t) \otimes c(t)).$$

Μετά το matched filter και symbol-spaced δειγματοληψία, η έξοδος έχει ταυτόχρονα ISI (από $c(t)$) και περιστροφή που μεταβάλλεται στον χρόνο (από CFO).

Συγχρονισμός με training & E_d . Υπολογίζονται $\text{corr}_d = |C_d|$ και E_d όπως στο Μέρος 3, ώστε να βρεθεί d^* και να σχηματισθεί η ακολουθία $\{Y_k\}_{k=0}^{N+M-2}$.

Εκτίμηση & διόρθωση CFO. Εκτιμάται η κανονικοποιημένη CFO \hat{v} (cycles/symbol) από training δείγματα και διορθώνεται:

$$Z_k^{(cfo)} = Y_k e^{-j2\pi\hat{v}k}.$$

Μετά τη διόρθωση, η επίδραση του CFO αφαιρείται (μέχρι σταθερή φάση).

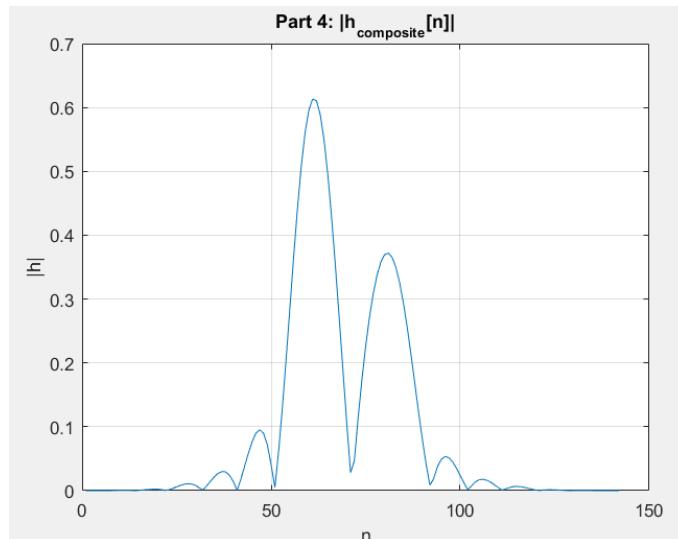
LS εκτίμηση καναλιού & ZF ισοστάθμιση. Πάνω στα CFO-corrected δείγματα εφαρμόζεται LS εκτίμηση M -tap καναλιού

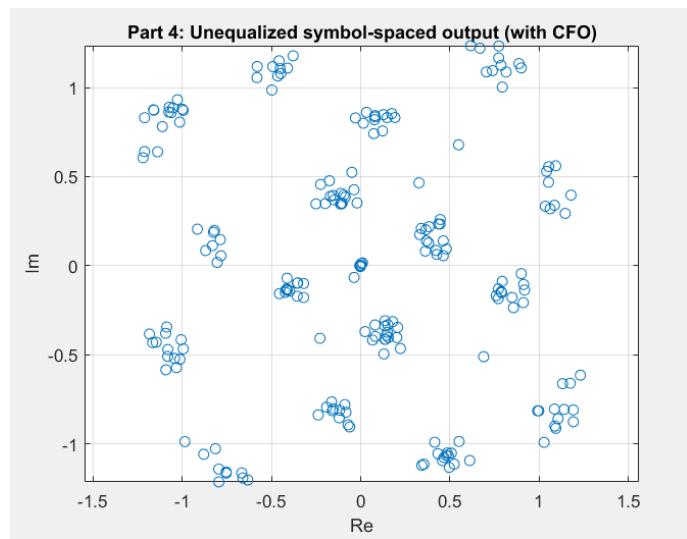
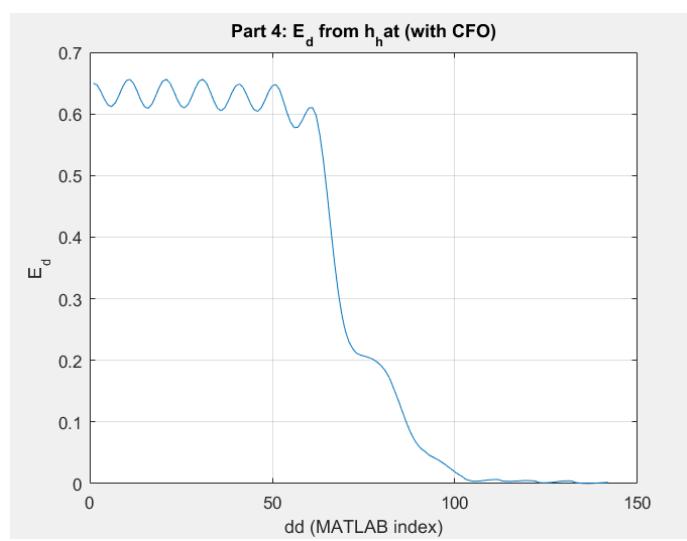
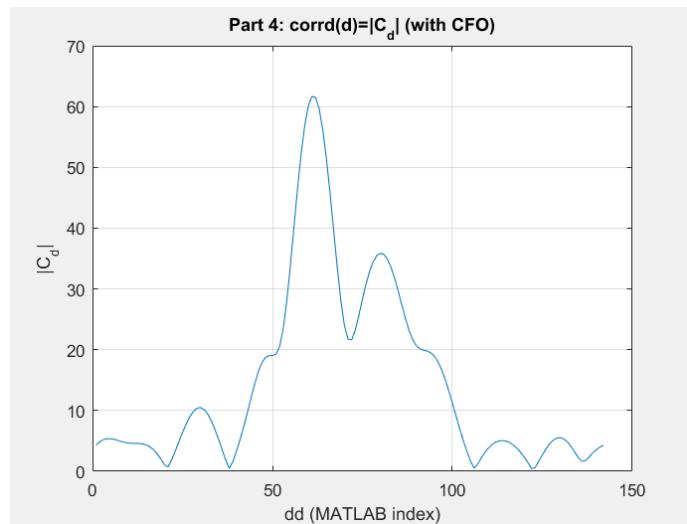
$$\hat{\mathbf{h}}_{LS} = (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{z},$$

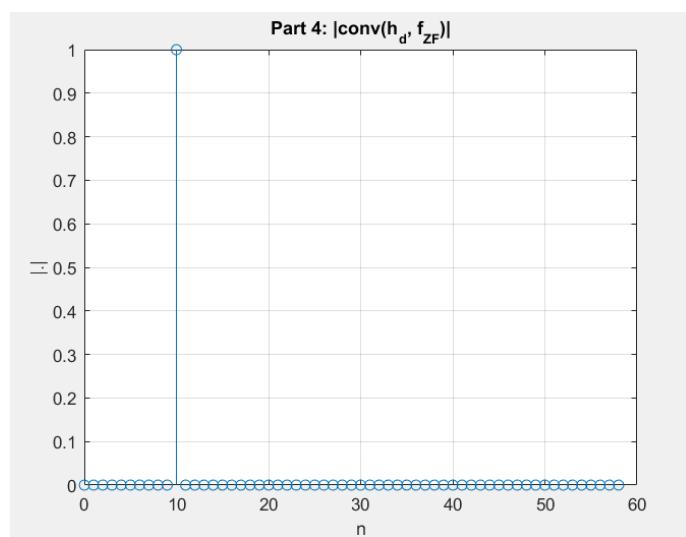
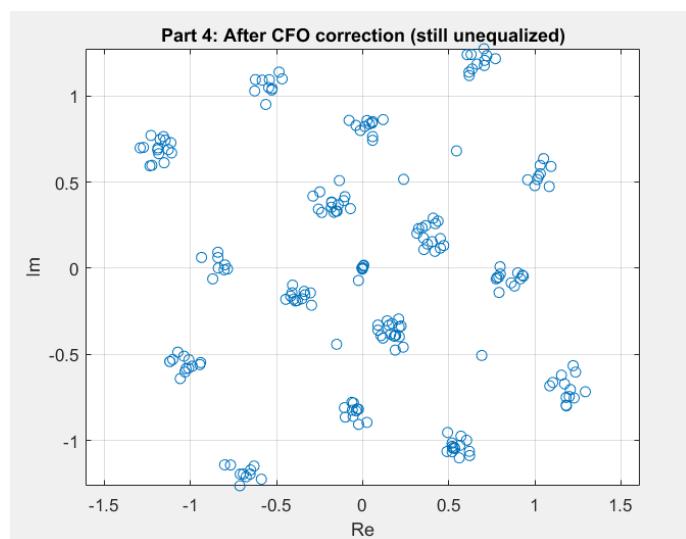
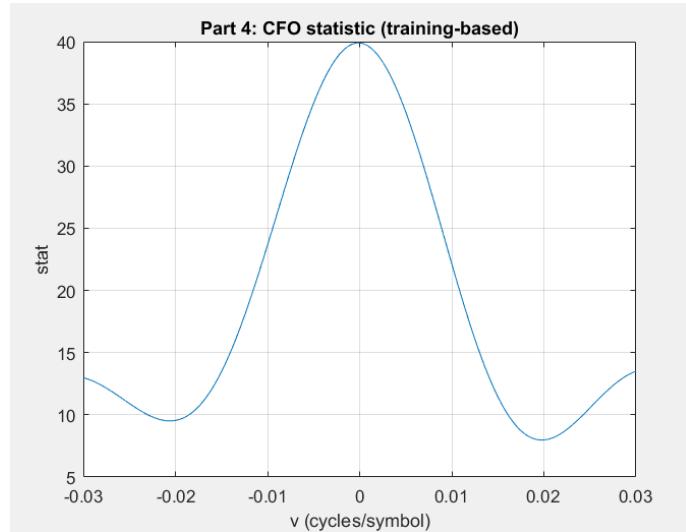
και στη συνέχεια ZF ισοσταθμιστής μήκους $L \simeq 5M$ με $\delta = M$ όπως στο Μέρος 3. Τέλος, κρατάμε τα N δείγματα μετά την καθυστέρηση δ .

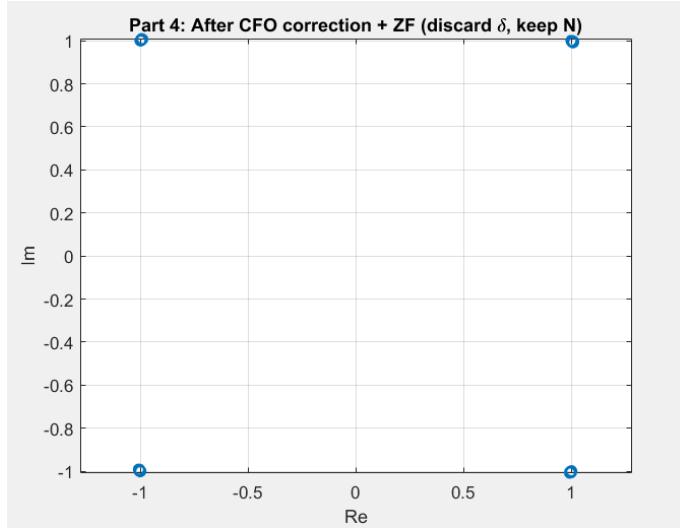
Παρατήρηση. Παρότι πριν τη διόρθωση ο αστερισμός είναι έντονα παραμορφωμένος (CFO + ISI), μετά CFO correction + ZF η διάταξη επανέρχεται σε 4-QAM (ανόρυβη περίπτωση), και τα αποτελέσματα είναι ίδια με το Μέρος 3.

Plots:









Παρατηρήσεις:

- Πριν τη διόρθωση, συνυπάρχουν CFO και ISI \Rightarrow έντονη παραμόρφωση αστερισμού.
- Μετά το CFO correction αφαιρείται η χρονικά μεταβαλλόμενη περιστροφή, αλλά παραμένει ISI.
- Με LS εκτίμηση M -tap και ZF ισοστάθμιση, ο αστερισμός επανέρχεται σε 4-QAM.

Σύγκριση Μέρους 3 και Μέρους 4:

- Η βασική διαφορά του Μέρους 4 είναι το επιπλέον βήμα εκτίμησης/διόρθωσης CFO. Αφού διορθώθει το CFO, η υπόλοιπη διαδικασία (LS M -tap + ZF) είναι ίδια με το Μέρος 3, γιατί η ISI παραμένει και πρέπει να αντιμετωπιστεί
- Τελικό αποτέλεσμα: μετά από CFO correction + (LS M -tap) + ZF, η έξοδος είναι ίδια με του Μέρος 3.