

Πολυτεχνείο Κρήτης
Σχολή ΗΜΜΥ
Ασύρματες Επικοινωνίες
3η Εργασία



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
TECHNICAL UNIVERSITY OF CRETE

Αποστολάκη Αλεξάνδρα: 2021030167

Πίνακας Περιεχομένων

Μέρος Α:	3
Μέρος Β:	5
Μέρος Γ:	7
Μέρος Δ:	12

Η άσκηση αυτή, αφορά θέματα εκτίμησης και γραμμικής ισοστάθμισης τηλεπικοινωνιακών καναλιών χωρίς CFO.

Μέρος Α:

Εκφώνηση:

A. (20) Αρχικά, θα δημιουργήσουμε τα δεδομένα.

A.1 Να δημιουργήσετε τυχαίο μιγαδικό κανάλι $\{h_k\}_{k=0}^K$, με $\mathbf{h} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{K+1})$ (ενδεικτικά, $K = 4, 6$), και να το κανονικοποιήσετε ώστε να έχει ενέργεια ίση με 1.

A.2 Να δημιουργήσετε πακέτο πληροφορίας $\{s_n\}_{n=1}^N$, με ισοπίθανα $s_n \in \{\pm 1 \pm j\}$ (ενδεικτικά, $N = 100, 200$).

A.3 Να θεωρήσετε τα σύμβολα στις θέσεις $n = n_1, \dots, n_2$ ως σύμβολα εκπαίδευσης (ενδεικτικά, $n_1 = 40, n_2 = 60$).

A.4 Να υπολογίσετε την ανθόρυβη έξοδο του καναλιού $\{y_n\}_{n=1}^{N+K}$.

A.5 (10) Να αποδείξετε ότι η ισχύς της εξόδου ισούται με $P_y = 2 \sum_{k=0}^K |h_k|^2 = 2$.

A.6 (10) Για δεδομένο SNR (ενδεικτικά, $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$), να προσθέσετε λευκό κυκλικό Gaussian θόρυβο $\{w_n\}$ στην έξοδο $\{y_n\}$ και να λάβετε την ένθροβη έξοδο $\{y_n^N\}$.

A.7 Να σχεδιάσετε τις ακολουθίες $\{y_n\}$ και $\{y_n^N\}$ στο μιγαδικό επίπεδο (οριζόντιος άξονας το πραγματικό μέρος και κατακόρυφος άξονας το φανταστικό μέρος). Τι παρατηρείτε;

Απάντηση:

A.1

Δημιουργούμε τυχαίο μιγαδικό κανάλι:

$$\mathbf{h} = [h_0, \dots, h_K]^T, \quad \mathbf{h} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{K+1}), \quad \mu\epsilon \ K = 6$$

και κανονικοποιούμε την ενέργειά του σε 1 ώστε να ελέγχουμε την ισχύ εξόδου:

$$E_h = \sum_{k=0}^K |h_k|^2, \quad \tilde{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{E_h}} \Rightarrow \sum_{k=0}^K |\tilde{h}_k|^2 = 1.$$

A.2

Δημιουργούμε πακέτο $N = 200$ ισοπίθανων συμβόλων 4-QAM:

$$s_n \in \{+1 + j, +1 - j, -1 + j, -1 - j\}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Για $n \notin [1, \dots, N]$, δεν στέλνουμε τίποτα.

Ενέργεια συμβόλων:

$$|s_n|^2 = 2 \Rightarrow \mathbb{E}\{|s_n|^2\} = 2.$$

A.3

Ορίζουμε ότι τα σύμβολα στο διάστημα $n = n_1, \dots, n_2$ ($n_1 = 30, n_2 = 70$) είναι γνωστά στον δέκτη και θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα βήματα για εκτίμηση/ισοστάθμιση.

A.4

Το κανάλι είναι Γ.Χ.Α, άρα η έξοδος δίνεται από συνέλιξη:

$$y_n = \sum_{k=0}^K \tilde{h}_k s_{n-k}, \quad n = 1, \dots, N + K,$$

Επειδή $K > 0$, στο παραπάνω σύστημα έχουμε παρουσία διασυμβολικής παρεμβολής (ISI).

A.5

Η μέση ισχύς εξόδου είναι

$$P_y = \mathbb{E}\{|y_n|^2\}.$$

Με ασυσχέτιστα σύμβολα και $\mathbb{E}\{|s_n|^2\} = 2$,

$$P_y = 2 \sum_{k=0}^K |\tilde{h}_k|^2 = 2,$$

δηλαδή με την κανονικοποίηση του καναλιού έχουμε σταθερή ισχύ εξόδου $P_y = 2$.

A.6

Η ένθρουβη έξοδος ορίζεται ως

$$y_n^N = y_n + w_n, \quad w_n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_w^2),$$

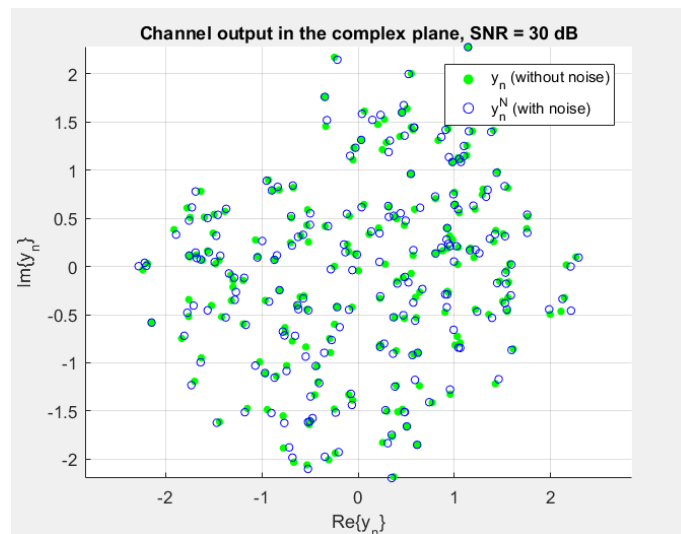
Με:

$$\text{SNR} = \frac{P_y}{\sigma_w^2} \Rightarrow \sigma_w^2 = \frac{P_y}{10^{\text{SNR(dB)}/10}},$$

και για $P_y = 2$.

A.7

Σχεδιάζουμε τα $\{y_n\}$ και $\{y_n^N\}$ στο μιγαδικό επίπεδο:



Στα σύμβολα y_n φαίνεται ξεκάθαρα η διασυμβολική παρεμβολή, που δίνει την εικόνα του "νέφους". Με προσθετικό λευκό μιγαδικό Gaussian θόρυβο, τα σημεία y_n^N απέχουν λίγο από τα y_n .

Μέρος Β:

Εκφώνηση:

B. (20) Στη συνέχεια, θα εκτιμήσουμε το κανάλι, υποθέτοντας ότι γνωρίζουμε την τάξη του, K .

B.1 (10) Να χρησιμοποιήσετε την εντολή `toeplitz` και να κατασκευάσετε τον κατάλληλο πίνακα για την εκτίμηση του καναλιού.

B.2 Να κατασκευάσετε το κατάλληλο διάνυσμα $[y_{n_1+K}^N \cdots y_{n_2}^N]^T$ για την εκτίμηση του καναλιού.

B.3 (10) Να υπολογίσετε την εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων του καναλιού.

B.4 Να σχεδιάσετε σε κοινό plot το πραγματικό κανάλι και την εκτίμησή του (πραγματικό και φανταστικό μέρος). Τι παρατηρείτε;

Απάντηση:

B.1–B.2

Με $n_2 - n_1 > K$, οι έξοδοι που εξαρτώνται μόνο από τα γνωστά σύμβολα εκπαίδευσης s_{n_1}, \dots, s_{n_2} είναι:

$$y_{n_1+K}, y_{n_1+K+1}, \dots, y_{n_2}.$$

Ορίζουμε

$$\mathbf{y}_{\text{train}} = \begin{bmatrix} y_{n_1+K}^N \\ \vdots \\ y_{n_2}^N \end{bmatrix}$$

και τον πίνακα για την εκτίμηση του καναλιού μέσω της εντολής `toeplitz`:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_{n_1+K} & s_{n_1+K-1} & \cdots & s_{n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n_2} & s_{n_2-1} & \cdots & s_{n_2-K} \end{bmatrix}.$$

Άρα:

$$\mathbf{y}_{\text{train}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{h}} + \mathbf{w}_{\text{train}},$$

όπου y_{train} και A είναι γνωστά και h και w_{train} άγνωστα.

B.3

Θα υπολογίσουμε το h_{LS} το οποίο ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους:

$$C(\mathbf{h}) = \|\mathbf{y}_{\text{train}} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{h}}\|_2^2.$$

Αναζητούμε δηλ. την ποσότητα:

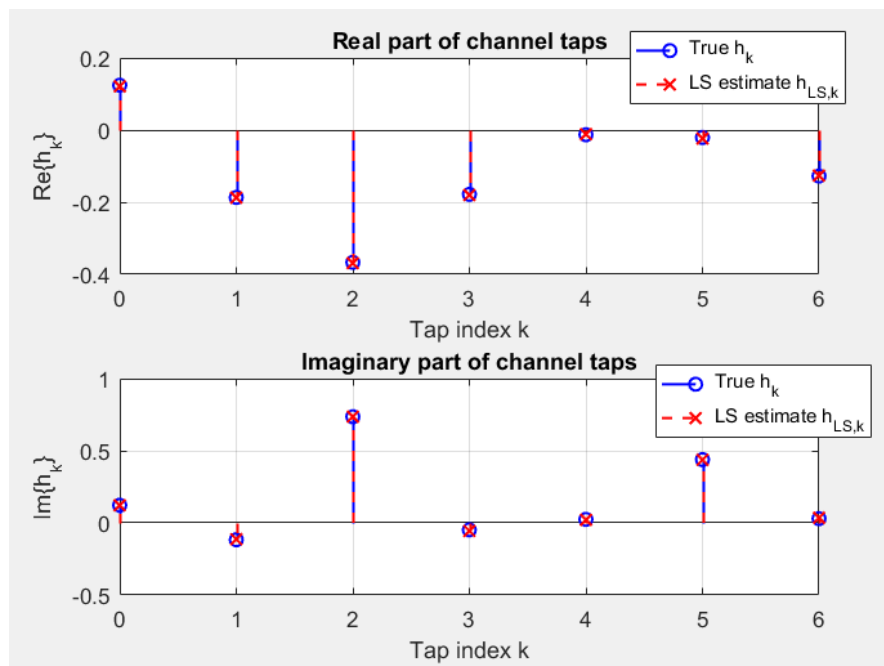
$$\mathbf{h}_{LS} = \arg \min_{\mathbf{h}} C(\mathbf{h}),$$

η οποία έχει, τελικά, λύση:

$$\mathbf{h}_{LS} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{y}_{\text{train}}.$$

B.4

Γραφική πραγματικού καναλιού με την εκτίμησή του:



Παρατηρούμε ότι το κανάλι εκτιμάται με μεγάλη ακρίβεια.

Μέρος C:

Εκφώνηση:

C. (30) Στη συνέχεια, θα ισοσταθμίσουμε το κανάλι.

C.1 (10) Να υπολογίσετε τον ισοσταθμιστή zero-forcing $\{f_k^{\text{ZF}}\}_{k=0}^{4K}$ για καθυστέρηση Δ (ενδεικτικά, $\Delta = K$).

C.2 (10) Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τη σύνθετη χρουστική απόκριση (κανάλι-ισοσταθμιστής zero-forcing) (πραγματικό και φανταστικό μέρος). Τι παρατηρείτε;

C.3 Να περάσετε την ένθρουβη έξοδο του καναλιού $\{y_n^N\}$ από τον ισοσταθμιστή.

C.4 (10) Να αποκόψετε κατάλληλα την έξοδο του ισοσταθμιστή, λαμβάνοντας μία εκτίμηση για την είσοδο του καναλιού $\{\hat{s}_n\}_{n=1}^N$.

C.5 Να σχεδιάσετε την (αποκομμένη) έξοδο του ισοσταθμιστή στο μιγαδικό επίπεδο. Τι παρατηρείτε;

C.6 (10) Να επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα για τον ισοσταθμιστή ελαχίστων τετραγώνων, $\{f_k^{\text{LS}}\}_{k=0}^{4K}$.

C.7 (10) Να επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα για $\Delta = 0, \dots, 4K$. Τι παρατηρείτε;

Απάντηση:

Θεωρούμε γραμμικό ισοσταθμιστή:

$$\mathbf{f} = [f_0, \dots, f_{4K}]^T, \quad L_f = 4K + 1,$$

και την σύνθετη χρουστική απόκριση (κανάλι-ισοσταθμιστής):

$$g_n = (h * f)_n, \quad n = 0, \dots, L_g - 1, \quad L_g = L_f + K.$$

Επιλέγουμε καθυστέρηση $\Delta=K$.

C.1

Στόχος του ισοσταθμιστή ZF είναι να καταφέρει:

$$g_n \approx \delta[n - \Delta],$$

έτσι ώστε το συνολικό σύστημα (διακριτό κανάλι-ισοσταθμιστής) να είναι ισοδύναμο με μία καθυστέρηση.

Η παραπάνω συνέλιξη γράφεται, ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{h}_1 & \hat{h}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \hat{h}_1 & \hat{h}_0 & \ddots & \vdots \\ \hat{h}_K & \vdots & \hat{h}_1 & \ddots & 0 \\ 0 & \hat{h}_K & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \hat{h}_K & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \hat{h}_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{h}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{4K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{L_g-1} \end{bmatrix}$$

Άρα, τελικά:

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{g}.$$

Με \mathbf{e}_Δ το διάνυσμα με 1 στη θέση $\Delta + 1$, αναζητούμε το f που ελαχιστοποιεί την ποσότητα:

$$\|\mathbf{e}_\Delta - \mathbf{g}\|_2^2 = \|\mathbf{e}_\Delta - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_2^2,$$

και η λύση είναι, τελικά:

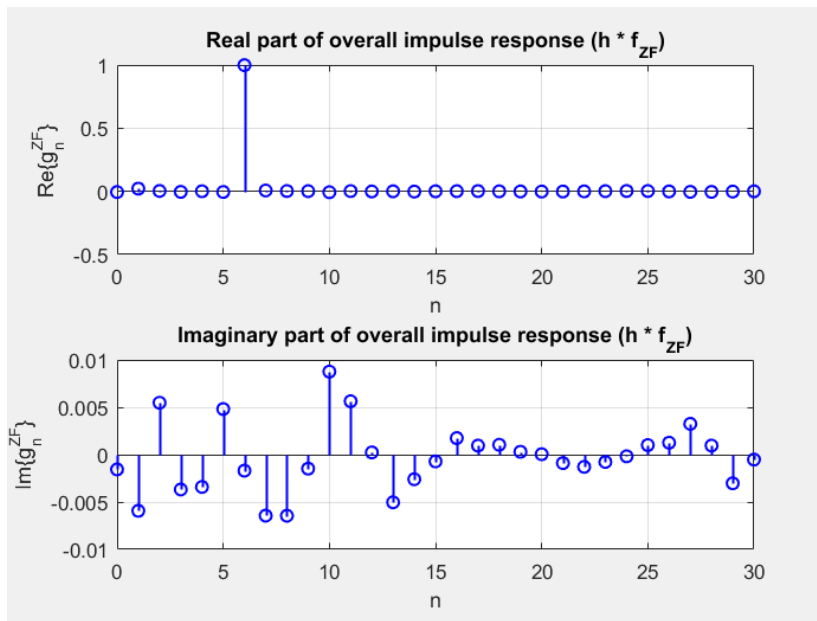
$$\mathbf{f}_{LS}^{ZF} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{e}_\Delta.$$

C.2

Υπολογίζουμε την σύνθετη χρουστική απόκριση (χρησιμοποιώντας το αρχικό h για να δούμε τι επιτεύχθηκε στο πραγματικό κανάλι):

$$\mathbf{g}_{ZF} = h * \mathbf{f}_{ZF}$$

και σχεδιάζουμε το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος:



Παρατήρηση: Στο πραγματικό μέρος της g_{ZF} παρατηρούμε έναν κύριο παλμό στη θέση Δ με πλάτος περίπου 1, ενώ τα υπόλοιπα δείγματα είναι σχεδόν μηδενικά (δηλ. $g_{ZF} \approx \delta[n - \Delta]$). Στο φανταστικό μέρος οι τιμές είναι πολύ μικρές και κοντά στο μηδέν, όπως αναμένεται.

C.3–C.4

Περνάμε την ένθορυβη έξοδο από τον ισοσταθμιστή:

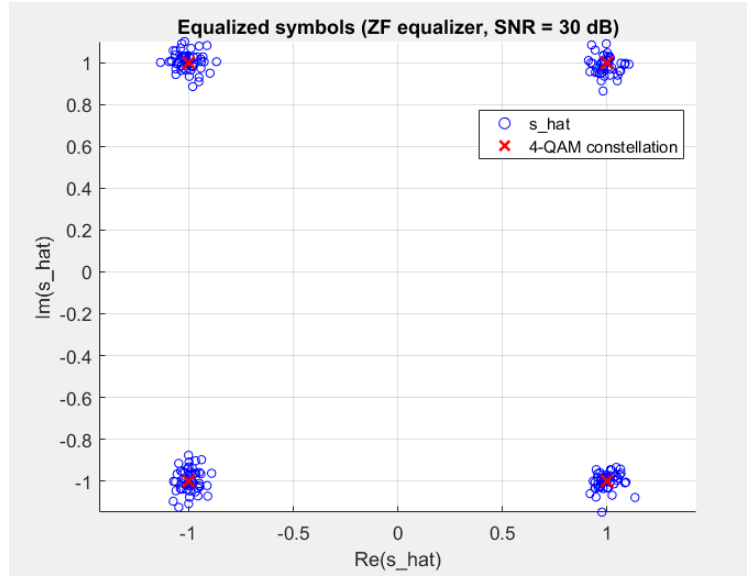
$$z_n = (y_n^N * f_{ZF})_n,$$

Επειδή, όπως προαναφέρθηκε, ο ισοσταθμιστής έχει σχεδιαστεί ώστε $g_n \approx \delta[n - \Delta]$, το συνολικό σύστημα ισοδυναμεί με καθυστέρηση Δ , δηλαδή $z_n \approx s_{n-\Delta}$. Άρα, για την εκτίμηση της εισόδου κρατάμε τα εξής N σύμβολα:

$$\hat{s}_n = z_{n+\Delta}, \quad n = 1, \dots, N.$$

C.5

Σχεδιασμός αποκομμένης εξόδου \hat{s}_n :



Παρατήρηση: Τα ισοσταθμισμένα σύμβολα \hat{s}_n συγκεντρώνονται κοντά στα 4 ιδανικά σημεία της 4-QAM. Η διασπορά γύρω από αυτά είναι μικρή (SNR = 30 dB και έτυχε επίσης στο συγκεκριμένο run), άρα η ισοστάθμιση λειτουργεί σωστά με λίγα σφάλματα.

C.6

Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω για τον ισοσταθμιστή ελαχίστων τετραγώνων με χρήση των γνωστών συμβόλων εκπαίδευσης.:

Ορίζουμε FIR ισοσταθμιστή μήκους $L_f = 4K + 1$,

$$\mathbf{f}_{LS} = [f_0, \dots, f_{4K}]^T,$$

και έξοδο

$$z_n = (y_n^N * f_{LS})_n.$$

Με καθυστέρηση απόφασης $\Delta = K$, ευθυγραμμίζουμε την έξοδο ώστε στο διάστημα εκπαίδευσης να ισχύει $z_{n+\Delta} \approx s_n$, $n = n_1, \dots, n_2$.

Σε μορφή πινάκων, οι έξοδοι του ισοσταθμιστή που αντιστοιχούν στα s_{n_1}, \dots, s_{n_2} είναι:

$$\begin{bmatrix} z_{n_1+\Delta} \\ \vdots \\ z_{n_2+\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n_1+\Delta}^N & y_{n_1+\Delta-1}^N & \cdots & y_{n_1+\Delta-(L_f-1)}^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n_2+\Delta}^N & y_{n_2+\Delta-1}^N & \cdots & y_{n_2+\Delta-(L_f-1)}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{L_f-1} \end{bmatrix}.$$

Άρα, τελικά:

$$\mathbf{z} = \mathbf{Y}\mathbf{f}.$$

Αναζητούμε, λοιπόν, το \mathbf{f} που ελαχιστοποιεί την ποσότητα:

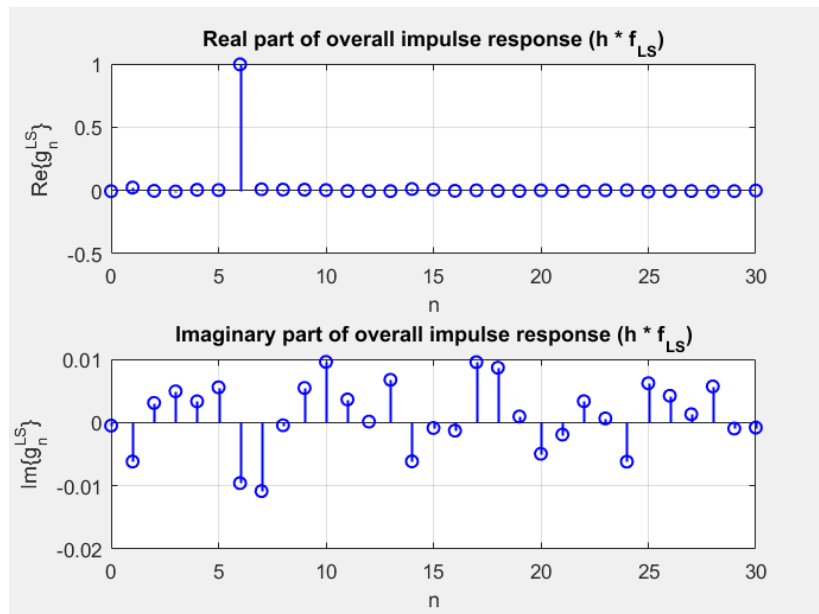
$$\|\mathbf{a}_{tr} - \mathbf{z}_{tr}\|_2^2 = \|\mathbf{a}_{tr} - \mathbf{Y}\mathbf{f}\|_2^2.$$

κι η λύση είναι, τελικά:

$$\mathbf{f}_{LS} = (\mathbf{Y}^H \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^H \mathbf{a}_{tr}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε και σχεδιάζουμε τη συνολική κρουστική απόκριση (χρησιμοποιώντας το αρχικό h για να δούμε τι επιτεύχθηκε στο πραγματικό κανάλι):

$$g_n^{LS} = (h * f_{LS})_n,$$



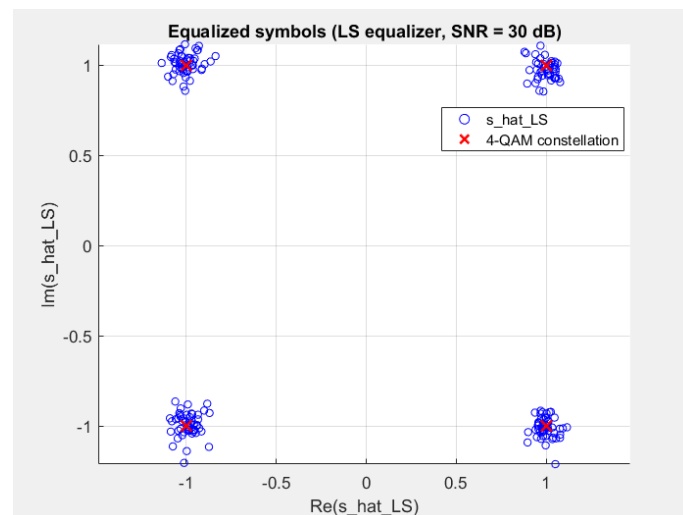
και, έπειτα, εφαρμόζουμε τον ισοσταθμιστή στην έξοδο y_n^N :

$$z_n = (y_n^N * f_{LS})_n.$$

Τέλος, κρατάμε τα N κατάλληλα δείγματα ώστε να πάρουμε εκτιμήσεις της εισόδου:

$$\hat{s}_n = z_{n+\Delta}, \quad n = 1, \dots, N,$$

και σχεδιάζουμε τα \hat{s}_n στο μιγαδικό επίπεδο:

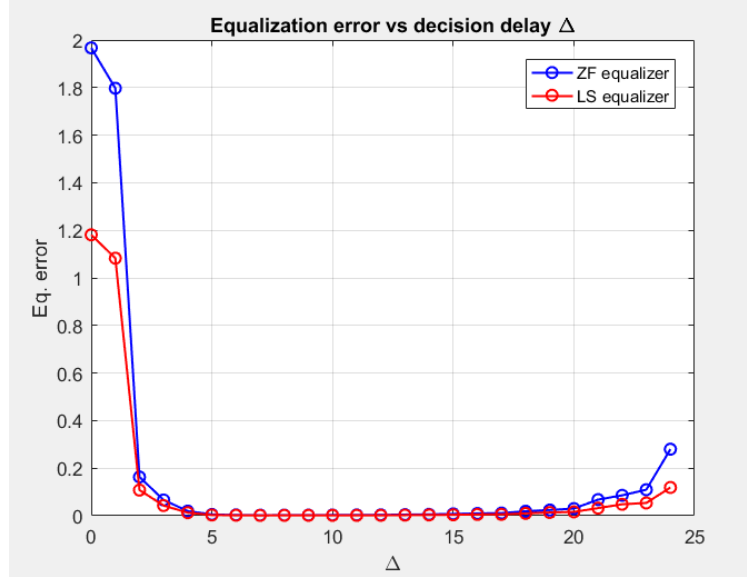


C.7

Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω για $\Delta = 0, \dots, 4K$. Για κάθε Δ υπολογίζουμε τους ισοσταθμιστές f_{Δ}^{ZF} και f_{Δ}^{LS} , περνάμε την y_n^N από αυτούς ($z_n = (y^N * f_{\Delta})_n$) και παίρνουμε $\hat{s}_n = z_{n+\Delta}$, για $n=1, \dots, N$. Ως κριτήριο χρησιμοποιούμε το εξής:

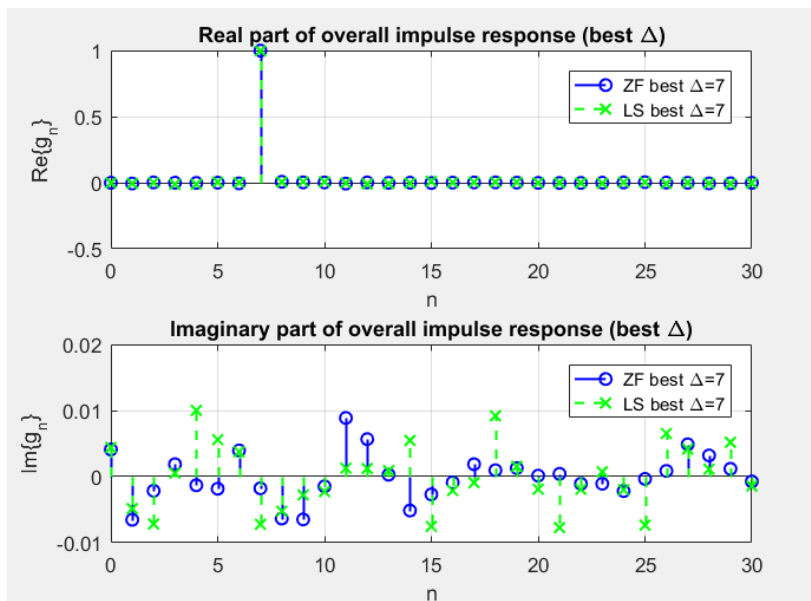
$$\text{eq_error}(\Delta) = \text{mean}(|\hat{s}_n - s_n|^2), \quad n = n_1, \dots, n_2,$$

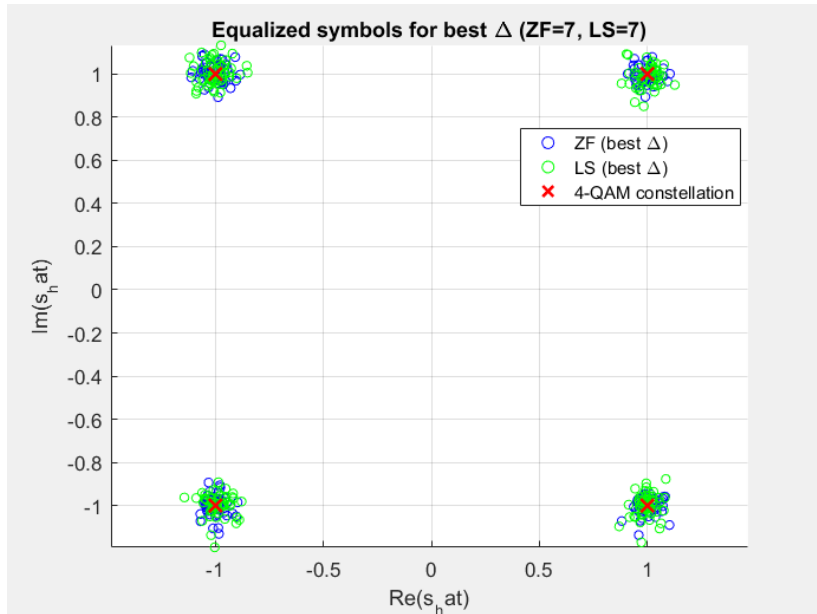
το οποίο και σχεδιάζουμε:



Παρατήρηση: Το σφάλμα ισοστάθμισης εξαρτάται έντονα από την καθυστέρηση απόφασης Δ . Για πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες τιμές Δ το σφάλμα αυξάνεται (περισσότερο στις πολύ μεγάλες), ενώ υπάρχει μια ενδιάμεση περιοχή όπου ελαχιστοποιείται. Βλέπουμε επίσης ότι οι καμπύλες ZF και LS έχουν παρόμοια συμπεριφορά, με τον LS να δίνει ελαφρώς μικρότερο σφάλμα σε κάποιες τιμές της Δ .

Έπειτα, επιλέγουμε $\Delta^* = \arg \min_{\Delta} \text{eq_error}(\Delta)$ (ξεχωριστά για ZF/LS) και τέλος σχεδιάζουμε την σύνθετη χρ. απόκριση $g_n = (h * f_{\Delta})_n$ και την αποκομμένη έξοδο \hat{s}_n για την βέλτιστη καθυστέρηση Δ^* :





Παρατήρηση: Για την καθυστ. Δ^* η συνολική κρουστική απόκριση $g_n = (h * f)_n$ προσεγγίζει καλύτερα το $\delta[n - \Delta^*]$ (κύριος παλμός ≈ 1 και τα υπόλοιπα σχεδόν μηδενικά), ενώ στο διάγραμμα για τις προσεγγίσεις εισόδου \hat{s}_n , αυτές συγκεντρώνονται πιο κοντά στα ιδανικά σημεία της 4-QAM, άρα έχουμε καλύτερη ισοστάθμιση/λιγότερα σφάλματα.

Μέρος D:

Εκφώνηση:

D. (30) Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την απόδοση της εκτίμησης/ισοστάθμισης καναλιού.

D.1 Να δημιουργήσετε τυχαίο κανάλι $\{h_k\}$ και να το κανονικοποιήσετε ώστε να έχει ενέργεια ίση με 1, και ακολουθία εκπαίδευσης $\{s_n\}_{n=n_1}^{n_2}$.

D.2 Για $\text{SNR} = [0 : 2 : 30]$, να εκτιμήσετε την πιθανότητα σφάλματος bit ως εξής:

- να δημιουργήσετε M πακέτα δεδομένων $\{s_n\}$ (με τα σύμβολα εκπαίδευσης στις κατάλληλες θέσεις)
- για κάθε πακέτο, να υπολογίσετε την αντίστοιχη ένθορυβη έξοδο
- για κάθε πακέτο, να εκτιμήσετε το κανάλι και τους δύο ισοσταθμιστές, για καθυστέρηση $\Delta = K$
- (10) να ισοσταθμίσετε την ένθορυβη έξοδο του καναλιού, και να εντοπίσετε τα σφάλματα εκτίμησης της εισόδου.

D.3 (10) Να σχεδιάσετε την πιθανότητα σφάλματος bit σαν συνάρτηση του SNR.

D.4 (10) Να επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα αλλά τώρα σε κάθε υλοποίηση του πειράματος να δημιουργείτε τυχαίο κανάλι, $\mathbf{h} \sim \mathcal{CM}(\mathbf{0}_{K+1}, \frac{1}{K+1} \mathbf{I}_{K+1})$. Τι παρατηρείτε σχετικά με την πιθανότητα σφάλματος bit;

Απάντηση:

Για $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0 : 2 : 30$ τρέχουμε Monte-Carlo πειράματα με $M = 500$ πακέτα, για $\Delta = K$, $L_f = 4K + 1$ ($L_g = L_f + K$). Η ακολουθία εκπ. είναι $s_{\text{train}} = s(n_1 : n_2)$ και το BER υπολογίζεται μόνο στα data bits (εκτός δηλ. των συμβόλων στους δείκτες $[n_1, n_2]$ καθώς αυτά θεωρούνται γνωστά στον δέκτη).

D.1–D.3 (σταθερό κανάλι)

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία δημιουργίας πακέτων συμβόλων 4-QAM (με τα σύμβολα εκπαίδευσης στις κατάλληλες θέσεις), εισαγωγής training και AWGN βάσει SNR. Με την ίδια διαδικασία εκτίμησης από τα training symbols βρίσκουμε \hat{h}_{LS} . Στη συνέχεια υπολογίζουμε:

$$f_{\text{ZF}} = (H^H H)^{-1} H^H e_{\Delta} \quad (\text{με } H(h_{LS}))$$

και

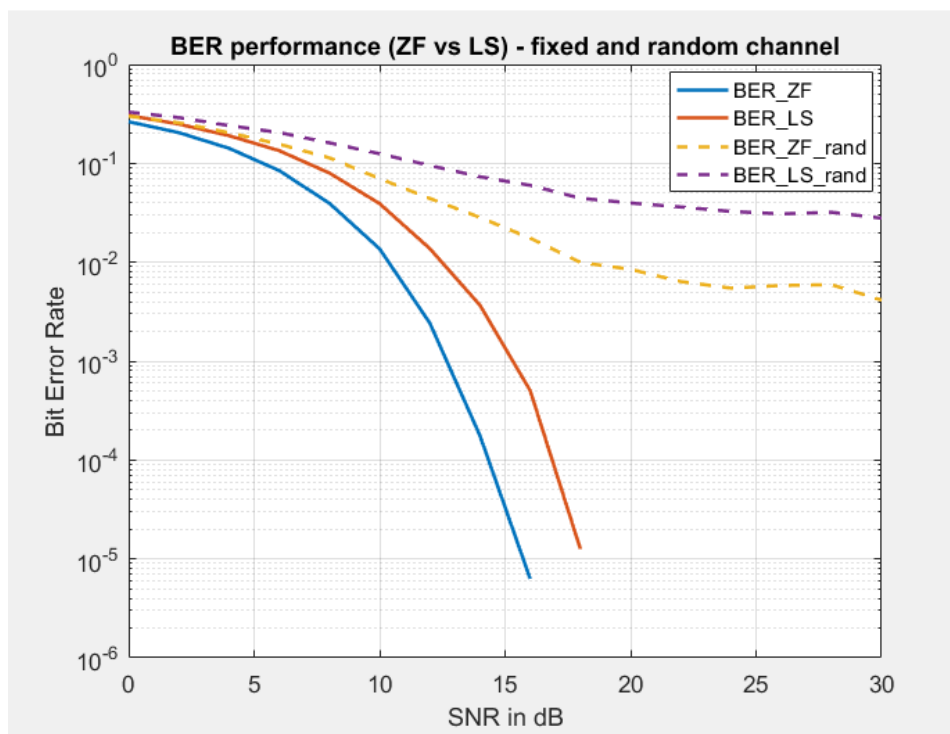
$$f_{\text{LS}} = (Y^H Y)^{-1} Y^H s_{\text{train}}.$$

Ισοσταθμίζουμε, ομοίως με πριν, κάνουμε hard-decision και προκύπτουν οι καμπύλες BER_{ZF} και BER_{LS} .

D.4 (τυχαίο κανάλι ανά πακέτο)

Επαναλαμβάνουμε ακριβώς τα ίδια βήματα, αλλά σε κάθε πακέτο παίρνουμε νέο τυχαίο κανάλι $\mathbf{h} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \frac{1}{K+1} \mathbf{I}_{K+1})$, οπότε προκύπτουν οι $\text{BER}_{\text{ZF,rand}}$ και $\text{BER}_{\text{LS,rand}}$ (μέσος όρος στα M πακέτα).

Αποτελέσματα:



Παρατηρήσεις: Στο σταθερό κανάλι το BER μειώνεται με μεγάλη κλίση όσο αυξάνει το SNR και οι ZF/LS δείχνουν πολύ καλή απόδοση (με τον ZF λίγο καλύτερο σε υψηλά SNR). Αντίθετα, όταν το κανάλι μεταβάλλεται τυχαία ανά πακέτο, οι καμπύλες είναι αισθητά χειρότερες κι εμφανίζουν μικρότερη κλίση. Τέλος, επειδή η διαδικασία είναι Monte-Carlo με τυχαίο κανάλι/θόρυβο, τα αποτελέσματα μπορεί να διαφέρουν από run σε run.