

## Άσκηση 2 - Diversity, Spatial Multiplexing

Ασύρματες Επικοινωνίες

Student: Emmanouil Thomas Chatzakis  
Student ID: 2021030061

---

### 1 Πρώτο Μέρος

1.

Αρχικά, θα υλοποιήσουμε ένα σύστημα με μία κεραία εκπομπής, δύο κεραίες λήψης και block fading, με κανάλια  $h_1$  και  $h_2$ , ανεξάρτητα μεταξύ τους, όμοια κατανομημένα,  $\mathcal{CN}(0, 1)$ .

Υλοποιούμε σύστημα με μία κεραία εκπομπής και δύο κεραίες λήψης ( $1 \times 2$ ), με block fading Rayleigh. Για κάθε block, το διάνυσμα καναλιού είναι

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad h_1, h_2 \sim \mathcal{CN}(0, 1) \text{ ανεξάρτητα.}$$

2.

Να δημιουργήσετε πακέτα 4-QAM εισόδου,  $\{s[k]\}_{k=1}^N$ , με τιμές  $\pm 1 \pm j$ , ισοπίθανες (ενδεικτικά,  $N = 200$ ).

Θέλουμε ακολουθία συμβόλων  $\{s[k]\}_{k=1}^N$  4-QAM με τιμές  $\pm 1 \pm j$ , ισοπίθανες.

$$s[k] \in \{1 + j, 1 - j, -1 + j, -1 - j\}$$

με ενέργεια συμβόλου,

$$\mathbb{E}[|s[k]|^2] = 2.$$

3.

Να υπολογίσετε τις εξόδους

$$r_i[k] = h_i s[k] + n_i[k], \quad i = 1, 2, k = 1, \dots, N,$$

όπου  $n_i[k]$  λευκός Gaussian προσθετικός θόρυβος με διασπορά  $N_0$ . Το SNR ορίζεται ως εξής:

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left( \frac{\text{συνολική ισχύς εκπεμπόμενου σήματος}}{\text{ισχύς θορύβου στο δέκτη}} \right).$$

Οι έξοδοι στις δύο κεραίες λήψης δίνονται από

$$r_i[k] = h_i s[k] + n_i[k], \quad i = 1, 2, k = 1, \dots, N,$$

όπου  $n_i[k] \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2)$  είναι λευκός προσθετικός Gaussian θόρυβος.

Ο λόγος σήματος προς θόρυβο σε dB ορίζεται ως

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left( \frac{E_s}{\sigma_n^2} \right),$$

όπου  $E_s$  είναι η συνολική ενέργεια εκπεμπόμενου σήματος και  $\sigma_n$  η ισχύς θορύβου στον δέκτη.

#### 4.

Να υποθέσετε ότι στο δέκτη γνωρίζετε τις ακριβείς τιμές των καναλιών  $h_1$  και  $h_2$  και να υλοποιήσετε τη μέθοδο **maximum ratio combining**.

Γνωστά τα  $h_1, h_2$  στον δέκτη, το σήμα στις δύο κεραίες γράφεται

$$\mathbf{y}[k] = \begin{bmatrix} r_1[k] \\ r_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} s[k] + \begin{bmatrix} n_1[k] \\ n_2[k] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}[k] \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma_n^2 \mathbf{I}_2).$$

Ο δέκτης maximum ratio combining (MRC) σχηματίζει ένα σύνθετο δείγμα

$$z[k] = h_1^* r_1[k] + h_2^* r_2[k] = (|h_1|^2 + |h_2|^2) s[k] + h_1^* n_1[k] + h_2^* n_2[k].$$

Η κανονικοποιημένη έξοδος είναι

$$\tilde{s}[k] = \frac{z[k]}{|h_1|^2 + |h_2|^2},$$

οπότε το πρόβλημα ανάγεται σε ισοδύναμο μονοκαναλικό AWGN.

Για 4-QAM γράφουμε

$$s[k] = X_R[k] + jX_I[k], \quad X_R[k], X_I[k] \in \{\pm 1\},$$

και αντίστοιχα

$$\tilde{s}[k] = \tilde{X}_R[k] + j\tilde{X}_I[k].$$

Οι ML αποφάσεις στα in-phase και quadrature μέρη είναι

$$\hat{X}_R[k] = \text{sign}(\tilde{X}_R[k]), \quad \hat{X}_I[k] = \text{sign}(\tilde{X}_I[k]),$$

και τελικά

$$\hat{s}[k] = \hat{X}_R[k] + j\hat{X}_I[k].$$

#### 5.

Να υπολογίσετε πειραματικά το BER για  $\text{SNR}_{\text{dB}} = [0:2:20]$  χρησιμοποιώντας  $K$  πακέτα με  $N$  σύμβολα το καθένα (ενδεικτικά,  $K = 1000$ ).

Υπολογίζουμε πειραματικά το BER για την διάφορες τιμές του SNR με  $K = 1000$  πακέτα και  $N = 200$  σύμβολα ανά πακέτο.

6.

Να συγκρίνετε το πειραματικό BER με το θεωρητικό και την προσέγγιση υψηλού SNR.

Συγκρίνουμε το πειραματικό αποτέλεσμα με το θεωρητικό BER και την προσέγγιση υψηλού SNR.

Θεωρητικό BER για  $M = 2$ :

$$P(e) = \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2 \sum_{m=0}^1 \binom{1+m}{m} \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^m$$

$$= \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2 (2 + \mu),$$

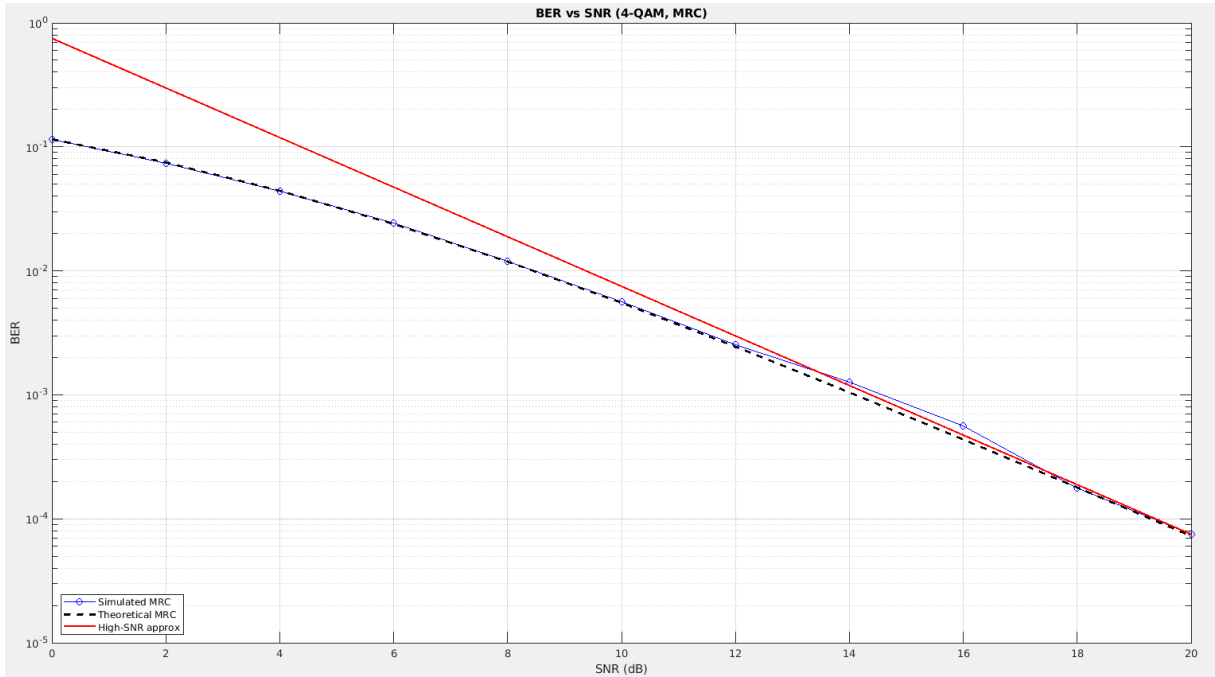
όπου

$$\mu := \sqrt{\frac{\text{SNR}}{2 + \text{SNR}}}.$$

Προσέγγιση υψηλού SNR

$$P(e) \approx \binom{2M-1}{M} \frac{1}{2^M \text{SNR}^M}$$

$$= \frac{3}{4 \text{SNR}^2}.$$



Σχήμα 1: Experimental BER vs Theoretical BER vs high SNR approximation

Παρατηρούμε ότι η πειραματική καμπύλη ακολουθεί τη θεωρητική στο μεγαλύτερο μέρος της. Πιθανές αποκλίσεις ίσως οφείλονται σε σφάλματα αριθμητικών μεθόδων κατά την προσομοίωση. Η προσέγγιση υψηλού SNR αποκλίνει αρκετά από τις άλλες καμπύλες για τιμές SNR έως περίπου 14 dB, όπου αρχίζει να συγκλίνει.

7.

Να επαναλάβετε τα βήματα 1--5 για την περίπτωση που έχετε δύο κεραίες στον πομπό και χρησιμοποιείτε την τεχνική transmit beamforming (TB).

Θεωρούμε

$$\mathbf{X} := \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \mathbf{h}^* s[k],$$

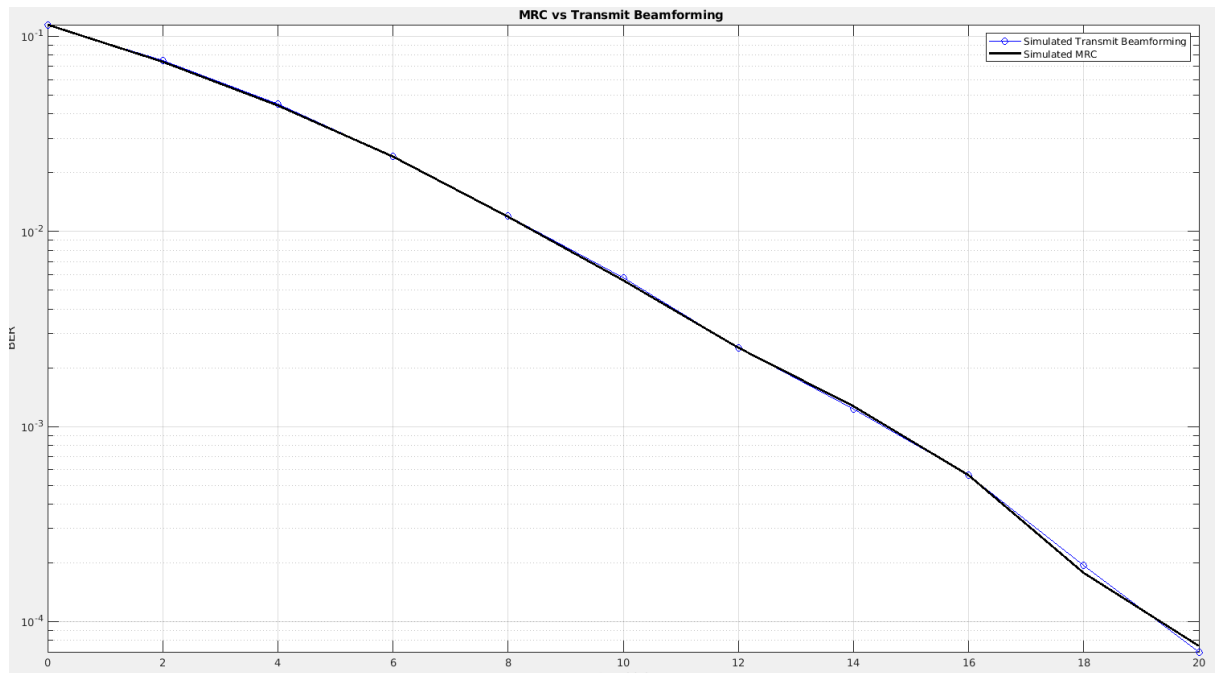
με συνολική ισχύ εκπομπής  $\mathbb{E}[|X|^2]$ . Το λαμβανόμενο σήμα είναι

$$Y = \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} (h_1 h_1^* + \dots + h_M h_M^*) s[k] + n_s[k] = \|\mathbf{h}\| s[k] + n_s[k].$$

Παρατηρούμε ότι το λαμβανόμενο σήμα είναι το ίδιο με την μέθοδο MRC οπότε οι κανόνες απόφασεις παραμένουν ίδιοι.

8.

Να συγκρίνετε τα BERs των τεχνικών MRC και TB. Τι παρατηρείτε;



Σχήμα 2: TB vs MRC

Παρατηρούμε ότι οι δύο καμπύλες ταυτίζονται όπως αναμενεται από την θεωρία.

9.

Να επαναλάβετε τα βήματα 1--5 για την περίπτωση που έχετε δύο κεραίες στον πομπό και χρησιμοποιείτε τον κώδικα Alamouti (να προσέξετε στον ορισμό του SNR!).

Εξετάζουμε ένα σύστημα  $2 \times 1$  block flat fading καναλιού, δηλαδή το κανάλι θεωρείται σταθερό σε κάθε χρονικό μπλοκ. Το κανάλι περιγράφεται από το διάνυσμα:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad h_1, h_2 \sim \mathcal{CN}(0, 1).$$

Σε κάθε χρονική περίοδο μετάδοσης μεταφέρονται δύο σύμβολα  $s_1$  και  $s_2$ , τα οποία είναι κανονικοποιημένα ώστε η μέση ισχύς τους να ικανοποιεί:

$$E\{|s_1|^2\} = E\{|s_2|^2\} = \frac{E_s}{2}.$$

Η διάταξη εκπομπής μπορεί να αναπαρασταθεί με τον πίνακα:

$$X = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix}.$$

Τα σήματα που φτάνουν στον δέκτη στα δύο χρονικά διαστήματα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1 s_1 + h_2 s_2 + n_1, \\ y_2 &= -h_1 s_2^* + h_2 s_1^* + n_2, \end{aligned}$$

όπου  $n_1$  και  $n_2$  αντιπροσωπεύουν προσθετικό θόρυβο με κατανομή  $\mathcal{CN}(0, \sigma_n^2)$ .

Αν ορίσουμε το διάνυσμα  $[y_1, y_2]^T$  και το πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με τον ερμιτιανό συζυγή πίνακα  $H^H$ , προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = H^H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{bmatrix}.$$

Από τον υπολογισμό αυτό προκύπτουν τα:

$$R_1 = \frac{h_1^* y_1 + h_2 y_2^*}{\|h\|}, \quad R_2 = \frac{h_2^* y_1 - h_1 y_2^*}{\|h\|}.$$

Αφού αντικαταστήσουμε τις τιμές των  $y_1$  και  $y_2$ , λαμβάνουμε ότι:

$$R_1 = \|h\| s_1 + Z_1, \quad R_2 = \|h\| s_2 + Z_2,$$

όπου  $Z_1$  και  $Z_2$  είναι ανεξάρτητες σύνθετες Γκαουσιανές μεταβλητές με κατανομή  $\mathcal{CN}(0, \sigma_n^2)$ .

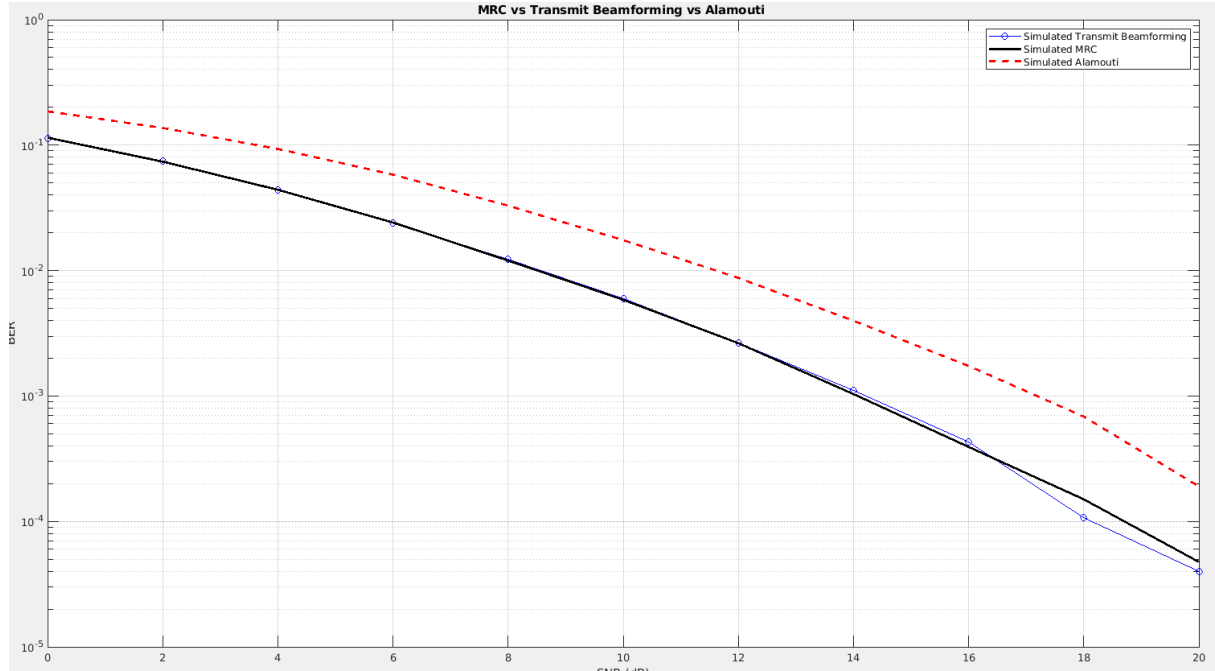
Παρατηρούμε επομένως ότι η εκτίμηση των συμβόλων  $s_1$  και  $s_2$  μπορεί να γίνει ανεξάρτητα, επιλύοντας δύο ισοδύναμα υποπροβλήματα της μορφής:

$$R = \|h\| s + Z, \quad Z \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2),$$

τα οποία έχουν την ίδια μαθηματική δομή με την έξοδο ενός συστήματος MRC  $1 \times 2$ . Κατά συνέπεια, η βέλτιστη απόφαση (ML) και η πιθανότητα σφάλματος είναι ίδιες με εκείνες του MRC  $1 \times 2$ , ενώ ο βαθμός διαφοροποίησης του συστήματος είναι  $M = 2$ .

10.

Να συγκρίνετε τα BERs των τεχνικών MRC, TB και Alamouti. Τι παρατηρείτε;



Σχήμα 3: MCR vs TB vs Alamouti

Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της μεθόδου Alamouti βρίσκεται πιο ψηλά( κατά 3dB) απο τις άλλες 2 καμπύλες αλλά συγκλίνει με τον ίδιο ρυθμό. Αυτό είναι αποτέλεσμα της μετάδοσης 2 συμβολων με κανονικοποιημένη ενέργεια.

11.

Να αποδείξετε ότι ο κώδικας Alamouti ικανοποιεί το κριτήριο του βαθμού (rank criterion). Δηλαδή, για οποιαδήποτε διαφορετικά ζεύγη  $(x_1, x_2)$  και  $(x'_1, x'_2)$ , ο αντίστοιχος πίνακας είναι πλήρους βαθμού.

Αρκεί να δείξουμε ότι ο πίνακας διαφοράς των 2 ζευγών είναι πλήρους βαθμού. Το κάθε ζεύγος δημιουργεί τον παρακάτω κώδικα Alamouti.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 & -x'^{*}_2 \\ x'_2 & x'^{*}_1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας της διαφοράς τους είναι:

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x_1 - x'_1 & -x_2^* + x'^{*}_2 \\ x_2 - x'_2 & x_1^* - x'^{*}_1 \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσά του είναι:

$$\det(\Delta \mathbf{X}) = (x_1 - x'_1)(x_1^* - x'^{*}_1) - (-x_2^* + x'^{*}_2)(x_2 - x'_2) = |x_1 - x'_1|^2 + |x_2 - x'_2|^2.$$

Για  $(x_1, x_2) \neq (x'_1, x'_2)$  ισχύει

$$|x_1 - x'_1|^2 + |x_2 - x'_2|^2 > 0 \Rightarrow \det(\Delta \mathbf{X}) \neq 0,$$

άρα  $\Delta\mathbf{X}$  είναι πλήρους βαθμού (rank 2) και ο κώδικας Alamouti ικανοποιεί το κριτήριο βαθμού

## 2 Δεύτερο Μέρος

τη συνέχεια, θα μελετήσουμε σενάρια Spatial Multiplexing σε συστήματα με δύο κεραίες εκπομπής και δύο κεραίες λήψης και block fading.

1.

Να δημιουργήσετε ανεξάρτητα όμοια κατανομημένα κανάλια  $h_{i,j} \sim \mathcal{CN}(0,1)$ , για  $i, j = 1, 2$ .

2.

Να δημιουργήσετε δύο ακολουθίες εισόδου 4-QAM,  $\{X_{1,n}\}$  και  $\{X_{2,n}\}$ .

3.

Να υπολογίσετε τις εξόδους

$$Y_{i,n} = h_{i,1}X_{1,n} + h_{i,2}X_{2,n} + W_{i,n}, \quad W_{i,n} \sim \mathcal{CN}(0, N_0), \quad i = 1, 2.$$

4.

Να εκτιμήσετε τις ακολουθίες εισόδου με χρήση

(α) (του κανόνα μέγιστης πιθανότητας,

(β) του decorrelator,

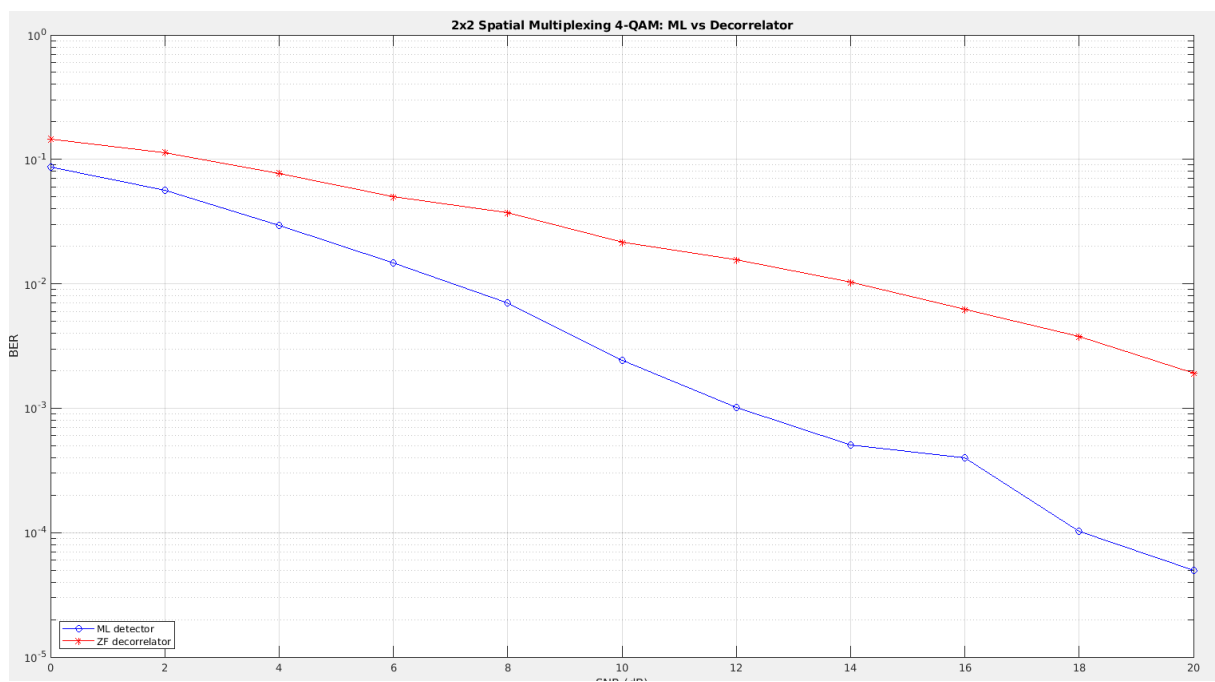
και να υπολογίσετε τις αντίστοιχες πιθανότητες σφάλματος bit, σαν συνάρτηση του SNR. Τι παρατηρείτε;

Ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία με το μέρος 1. Σε αυτή τη περίπτωση μελετάμε ένα 2x2 σύστημα με 4-QAM σύμβολα εκπομπής με  $s = 4$ . Τα λαμβανόμενα σήματα είναι:

$$\mathbf{Y}_1 = h_{11}X_1 + h_{12}X_2 + W_1$$

$$\mathbf{Y}_2 = h_{21}X_1 + h_{22}X_2 + W_2$$

Στα αποτελέσματα των δύο μεθόδων παρατηρούμε απόκλιση. Αυτό οφείλεται στο τρόπο με τον οποίο κάθε μέθοδος αντιμετωπίζει τα σήματα. Στη ML το σήμα έχει 2 διαδρομές άρα και η τάξη διαφοροποίησης είναι 2. Ο decorrelator αντιμετωπίζει το πρόβλημα σαν single input single output άρα και βαθμό διαφοροποίησης 1.



Σχήμα 4: ML vs Decorrelator