ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

О.Д. Толстых, И.П. Медведева

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
(случайные события)

Сборник типовых задач по дисциплине «Математика»

Иркутск 2015

УДК 517 (075.8)
ББК 22.11
Т 54

Р е ц е н з е н т ы :
А.В. Колокольчиков, к. ф.-м. н., доцент кафедры «Математика» НИ ИрГТУ;
Р.Ю. Упырь, к. т. н., доцент, завкафедрой «Управление эксплуатационной работой»

Толстых О.Д., Медведева И.П.

Т 54 Теория вероятностей (случайные события) : сборник типовых задач / О.Д. Толстых, И.П. Медведева. – Иркутск : ИрГУПС, 2014. – 124 с.

В сборнике задач кратко изложены основные теоретические сведения по теории вероятностей (случайные события), приведены образцы решения основных типов задач и большое количество задач для самостоятельного решения.

Сборник предназначен для студентов 1–2 курсов всех направлений очной и заочной форм обучения, а также для слушателей подготовительных курсов при подготовке к ЕГЭ.

Библиогр.: 12 назв.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.11

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие………………………………………………………………. 4
1. Элементы комбинаторики……………………………………………….. 6
1.1. Правила суммы и произведения ……………………………. 8
Задачи для самостоятельного решения……………………… 10
1.2. Перестановки…………..……………………………………… 12
Задачи для самостоятельного решения……………………… 14
1.3. Размещения………………………………………………………. 16
Задачи для самостоятельного решения……………………… 17
1.4. Сочетания………………………………………………………… 19
Задачи для самостоятельного решения……………………… 26
2. Вероятность случайного события
2.1. Случайные события. Алгебра событий.................................... 28
Задачи для самостоятельного решения……………………… 36
2.2. Классическое определение вероятности ……….……….... 40
Задачи для самостоятельного решения……………………… 48
2.3. Статистическое определение вероятности ………………. 53
Задачи для самостоятельного решения……………………… 55
2.4. Геометрическая вероятность ……………………………… 57
Задачи для самостоятельного решения……………………… 60
2.5. Теоремы сложения и умножения вероятностей……………….. 64
Задачи для самостоятельного решения……………………… 80
2.6. Формула полной вероятности. Формулы Байеса……………… 86
Задачи для самостоятельного решения……………………… 93
3. Повторение независимых испытаний. Схема Бернулли
3.1. Формула Бернулли……………………………………………. 97
Задачи для самостоятельного решения……………………… 102
3.2. Теорема Пуассона…………………………………………….. 105
Задачи для самостоятельного решения……………………… 108
3.3. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа..…….. 109
Задачи для самостоятельного решения……………………… 114
Ответы…………………………………………………………………….. 116
Библиографический список ……………………………………………. 120
Приложение 1……………………………………………………………….. 121
Приложение 2……………………………………………………………….. 123

ПРЕДИСЛОВИЕ

Студенты технических специальностей изучают теорию вероятностей и математическую статистику в рамках дисциплины «Математика» целый семестр: 1–2 часа лекций, 1–2 часа практических занятий. Общая трудоемкость указанных разделов в среднем составляет 108 часов, 3 зачетных единицы.

Цель и задача сборника типовых задач – ознакомить студентов с элементарной теорией вероятностей (случайными событиями).

Предмет теории вероятностей – изучение случайных массовых явлений, обладающих свойством статистической устойчивости, что позволяет решать прикладные задачи практически во всех отраслях естествознания и техники.

Изучение теории вероятностей направлено на формирование компетенции – использовать полученные знания в профессиональной деятельности.

На самостоятельную работу студентов приходится не менее 50 % всего объема часов, то есть практически столько же, сколько и часов аудиторных занятий. Поэтому издание пособий для самостоятельной работы весьма важно для учебного процесса и успешного освоения дисциплины. Предложенный сборник задач посвящен изучению раздела случайных событий и дополняет известные учебники и учебные пособия.

В результате освоения указанного раздела практической теории вероятностей студент должен достигнуть следующих результатов:

знать: основные комбинаторные правила, законы алгебры событий, различные подходы к определению вероятности, свойства вероятностей;

уметь: решать комбинаторные задачи, выполнять действия над событиями, вычислять вероятности событий;

владеть: комбинаторными правилами и свойствами вероятностей для практического решения прикладных задач.

Предлагаемый сборник задач содержит 3 главы:

1. Элементы комбинаторики.
2. Вероятность случайного события.
3. Повторение независимых испытаний. Схема Бернулли.

Теоретические положения изложены в сжатой форме и четко выделены. Основной упор в издании сделан на практическое применение элементов комбинаторного анализа в рамках теории вероятностей. Особого внимания заслуживает раздел «Алгебра событий», который далеко не всегда подробно обсуждается, но очень важен для осмысленного применения теории вероятностей. В сборнике рассмотрены различные подходы к определению вероятности события, исходя из различных типов пространств элементарных событий. Приведены основные свойства вероятностей. Завершающий раздел сборника задач – повторение независимых испытаний.

Рассмотрение схемы Бернулли важно как в силу практических приложений, так и в силу возможных обобщений. Следует отметить, что теоретические положения излагаются не с абстрактной, а с практической теоретико-множественной точки зрения, сопровождаются диаграммами Венна, большим количеством подробно разобранных задач, а также задач для самостоятельного решения с ответами. Особо следует отметить значительное количество задач с железнодорожной тематикой.

Предложенный сборник типовых задач составлен в соответствии с программой обязательного минимума для технических специальностей. Сборник может служить руководством к практическим занятиям и самостоятельной работе студентов, для подготовки к тестированию и сдаче зачета.

Данное издание будет полезно не только студентам, но также учителям и выпускникам школ. Единый государственный экзамен (ЕГЭ) традиционно включает комбинаторные задачи и задачи по теории вероятностей разного уровня сложности, вплоть до формул полной вероятности и Байеса, а также задачи, приводящие к схеме Бернулли. В школьных учебниках данный раздел изложен недостаточно, задач, аналогичных открытой базе ЕГЭ, нет. В данном издании достаточно подробно изложены основные подходы к решению таких задач.

1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

В комбинаторике изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций определенного типа можно составить из заданных элементов.

Правило суммы

Если элемент a может быть выбран из совокупности элементов n_1 способами, а элемент b может быть выбран из этой же совокупности n_2 способами, то

или a ***или*** b могут быть выбраны $n_1 + n_2$ способами.

Правило произведения

Если элемент a может быть выбран из совокупности элементов n_1 способами, а элемент b может быть выбран из этой же совокупности n_2 способами, то

и a ***и*** b могут быть выбраны $n_1 \cdot n_2$ способами.

ПЕРЕСТАНОВКИ – комбинации по n элементов, отличающиеся друг от друга порядком расположения элементов.

Число перестановок из n элементов: $P_n = n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n; \qquad (n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Пример: *элементы* a, b, c;

перестановки – a,b,c; b,a,c; c,a,b; b,c,a; a,c,b; c,b,a.

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Перестановки с повторениями – если среди элементов в перестановке элемент a_1 повторяется r_1 раз, элемент a_2 повторяется r_2 раз, …, элемент a_k повторяется r_k раз, $(r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n)$.

Число перестановок из n элементов с повторениями:

$$PP(n, r_1, r_2, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}.$$

РАЗМЕЩЕНИЯ – комбинации из n элементов по m элементов, отличающиеся друг от друга либо порядком расположения элементов, либо самими элементами.

Число размещений из n элементов по m элементов:

$$A_n^m = \frac{n\,!}{(n-m)!},$$

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Пример: *элементы* a, b, c;
размещения по два элемента – a,b; b,a; b,c; c,b; a,c; c,a.

$$A_3^2 = \frac{3\,!}{(3-2)!} = 3 \cdot 2 = 6.$$

СОЧЕТАНИЯ – комбинации из n элементов по m элементов, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m элементов:

$$C_n^m = \frac{n\,!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Пример: *элементы* a, b, c;
сочетания по два элемента – a,b; b,c; a,c.

$$C_3^2 = \frac{3\,!}{2! \cdot 1!} = 3.$$

Свойства: $C_n^m = C_n^{n-m}$; $\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$.

Число сочетаний с повторениями: $\overline{C_n^{\kappa}} = C_{n+\kappa-1}^{\kappa}$.

$$\boxed{A_n^m = C_n^m \cdot P_m}$$

1.1. Правила суммы и произведения

Задача 1. В коробке лежат 12 карандашей, из них 5 красных, 3 зеленых и 4 простых. Сколькими способами может быть выбран цветной карандаш?

Решение.

12 карандашей — 5 красных, 3 зеленых, 4 простых

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

1 карандаш — 1 цветной — 1 красный *или* 1 зеленый

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$n_1 = 5 \qquad n_2 = 3$

Цветной карандаш – красный или зеленый. Для выбора красного карандаша существует $n_1 = 5$ способов, для выбора зеленого карандаша – $n_2 = 3$ способа. Используем комбинаторное правило сложения: красный или зеленый карандаш может быть выбран числом способов $N = n_1 + n_2$.

$$N = 5 + 3 = 8.$$

Ответ: 8.

Задача 2. В группе на контрольной работе присутствовало 20 студентов. Четыре человека получили 5 (отлично), три человека – 4 (хорошо), девять – 3 (удовлетворительно), а остальные не справились с работой. Для разбора ошибок к доске вызывается студент. Сколькими способами можно вызвать к доске студента, получившего 3 (удовл.) или 2 (неуд.)?

Решение.

20 студентов — 4 отл., 3 хор., 9 удовл., 4 неуд.

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

1 студент — 1 удовл. *или* 1 неуд.

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$n_1 = 9 \qquad n_2 = 4$

Из условия задачи следует, что оценку 2 (неудовлетворительно) получили четыре студента. Следовательно, число вариантов (возможностей) вызвать к доске для разбора ошибок студента, получившего 3 (удовл.) или 2 (неуд.), равно $N = n_1 + n_2$.

$$N = 9 + 4 = 13.$$

Ответ: 13.

Задача 3. Составляются коды, состоящие из геометрической фигуры (круг, квадрат, треугольник, трапеция), арабской цифры и буквы русского алфавита. Сколько различных кодов можно составить?

Решение.

Для выбора геометрической фигуры Ф существует $n_{\text{Ф}} = 4$ возможности. Выбор арабской цифры Ц может быть осуществлен $n_{\text{Ц}} = 10$ способами, а выбор буквы русского алфавита возможен $n_{\text{Б}} = 33$ способами. Составить код Z означает выбрать *и* фигуру, *и* цифру, *и* букву: Z = ФЦБ. Используя правило произведения, получаем число кодов $N = n_{\text{Ф}} \cdot n_{\text{Ц}} \cdot n_{\text{Б}}$.

$$N = 4 \cdot 10 \cdot 33 = 1320.$$

Ответ: число кодов 1320.

Задача 4. Сколько имеется четырехзначных чисел, делящихся на 5?

Решение.

Число делится на 5, если оканчивается на 0 или 5, то есть выбор последней цифры может быть осуществлен $n_4 = 2$ способами. Первая цифра числа может быть выбрана числом способов $n_1 = 9$ (любая цифра, кроме 0). Для выбора второй и третьей цифр существует 10 возможностей (цифры могут повторяться): $n_2 = n_3 = 10$.

Для получения четырехзначного числа нужно выбрать *и* первую, *и* вторую, *и* третью, *и* четвертую цифры, следовательно, по комбинаторному правилу произведения имеем:

$$N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800.$$

Ответ: количество четырехзначных чисел, делящихся на 5, равно 1800.

Задача 5. В коробке лежат 12 карандашей, из них 5 красных, 3 зеленых и 4 синих. Сколькими способами можно выбрать три карандаша разных цветов?

Решение.

12 карандашей	—		5 красных,		3 зеленых,		4 синих
$\downarrow$			$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
3 карандаша	—	разных цветов —	1 красный	*и*	1 зеленый	*и*	1 синий
			$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
			$n_1 = 5$		$n_2 = 3$		$n_3 = 4$

Красный карандаш может быть выбран $n_1 = 5$ способами (любой из пяти), зеленый карандаш – $n_2 = 3$ способами, синий карандаш – $n_3 = 4$ способами. Следовательно, три карандаша разных цветов – красный и синий и зеленый – могут быть выбраны числом способов $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$.

$$N = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60.$$

Ответ: 60.

Задача 6. У Пети есть 7 монет по 1 рублю и 3 монеты по 2 рубля. Петя случайным образом выбирает 1 монету номиналом 1 рубль и 1 монету номиналом 2 рубля. Сколькими способами он может это сделать?

Решение.

Так как у Пети семь монет по 1 рублю и он может вынуть любую из них, то 1 монету из 7 имеющихся номиналом 1 рубль Петя может выбрать $n_1 = 7$ способами.

Аналогично, способов выбрать 1 монету номиналом 2 рубля из имеющихся 3 монет $n_2 = 3$.

Теперь, согласно правилу произведения, найдем общее число способов:

$$N = 7 \cdot 3 = 21.$$

Ответ: 21.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти количество всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 5, 6, 7.

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если ни одна цифра не повторяется дважды?

3. Найти количество трехзначных четных чисел, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться.

4. Найти количество двухзначных чисел, имеющих обе четные цифры.

5. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали розыгрыша первенства по футболу среди 16 команд, если любая команда может получить только одну медаль?

6. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Найти число различных способов выбрать конверт с маркой.

7. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с нее? Сколько будет способов, если подъем и спуск проходят по разным дорогам?

8. Найти число способов выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты, не лежащие на одной вертикали и горизонтали.

9. Из города А в город В ведут 5 дорог, а из В в С – 3 дороги. Сколько существует путей из А в С, проходящих через В?

10. Из 3 экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 7 экземпляров учебника тригонометрии нужно выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Найти число различных способов такого выбора.

11. У одного из друзей есть 7 книг по математике, а у другого 9. Сколько существует способов обменять книгу одного на книгу другого?

12. Бросают 3 волчка с 6, 8 и 10 гранями. Найти число различных способов их падения.

13. Бросают 3 волчка с 6, 8 и 10 гранями. Известно, что только два волчка упали на грань, помеченную цифрой 1. Найти число различных способов падения волчков.

14. Бросают 3 волчка с 6, 8 и 10 гранями. Известно, что по крайней мере два волчка упали на грань, помеченную цифрой 1. Найти число различных способов падения волчков.

15. Четверо студентов сдают экзамены. Известно, что не более одного из них получили «неудовлетворительно». Найти число способов выставить им оценки.

16. В урне 5 красных, 7 синих и 8 белых шаров. Сколькими способами можно вытащить из урны цветной шар?

17. В урне 2 красных, 3 синих и 5 белых шаров. Сколькими способами можно вытащить 2 шара разных цветов?

18. У Пети есть 4 монеты по 1 рублю и 2 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, достал из кармана 1 монету номиналом 1 рубль и еще 1 монету номиналом 10 рублей. Сколькими способами он может выбрать эти монеты?

19. В школьной библиотеке хранятся 18 различных книг по истории и 5 – по физике. Ученику 10-го класса надо прочитать любые 1 книгу по истории и 1 – по физике. Сколькими различными способами он может это сделать в школьной библиотеке?

1.2. Перестановки

Задача 1. Сколько пятизначных чисел, кратных 5, можно записать с помощью цифр $5, 6, 7, 8, 9,$ если все цифры в изображении числа различные?

Решение.

Число кратно 5, то есть делится на 5, следовательно, для последней цифры есть только один вариант – цифра 5. Остальные четыре цифры – это всевозможные перестановки цифр $6, 7, 8, 9,$ количество этих перестановок равно $P_4 = 4!$.

Таким образом, количество чисел с указанным свойством равно

$$N = P_4 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Ответ: 24.

Задача 2. Сколько различных слов можно составить из всех букв слова «книга»?

Решение.

Все буквы слова «книга» разные, то есть количество различных слов равно числу перестановок из 5 элементов: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ответ: 120.

Задача 3. Сколькими способами можно расставить на полке 8 книг, если среди них 2 книги одного автора, которые при любых перестановках должны стоять рядом?

Решение.

Условно будем считать две книги одного автора единой книгой. Тогда количество способов расстановки условных семи книг на полке будет равно числу перестановок из 7 элементов:

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Но в каждой такой перестановке книги одного автора можно поменять местами, поэтому общее число способов расстановки книг на полке будет в два раза больше, т. е. $5040 \cdot 2 = 10080$.

Ответ: 10080.

Задача 4. Сколькими способами можно рассадить в ряд n человек так, чтобы два определенных человека не сидели рядом?

Решение.

Всего способов рассадить в ряд n человек равно числу перестановок из n элементов, то есть $P_n = n!$. Из них два определенных человека сидят рядом в $2(n-1)\cdot(n-2)!$ случаях, так как двумя способами их можно переставить между собой, а $(n-1)$ вариантов – разместить их среди n мест, при этом $(n-2)!$ способами можно рассадить оставшихся $n-2$ человек.

Тогда два определенных человека не будут сидеть рядом в числе способов

$$N = n! - 2(n-1)\cdot(n-2)! = n! - 2(n-1)! = (n-1)!\cdot(n-2).$$

Ответ: $(n-1)!\cdot(n-2)$.

Задача 5. Сколькими способами можно рассадить 6 человек за столом, на котором стоят 6 различных приборов?

Решение.

Число способов рассаживания гостей равно числу перестановок из 6 элементов (все приборы разные и неважно, кто с кем сидит рядом), то есть

$$P_6 = 6! = 720.$$

Ответ: 720.

Задача 6. Сколькими способами можно рассадить 6 человек за круглым столом, на котором стоят 6 одинаковых приборов?

Решение.

Если стол круглый, а приборы одинаковые, то важно расположение гостей относительно друг друга, то есть число способов рассаживания гостей в 6 раз меньше, чем число перестановок из 6 элементов. Таким образом, $N = \frac{6!}{6} = 5! = 120$.

Ответ: 120.

Задача 7. Сколькими способами можно рассадить 6 человек за круглым столом так, чтобы два известных гостя сидели рядом?

Решение.

Двух гостей рядом можно посадить двумя способами, а остальных четырех человек можно рассадить $4!$ способами.

Всего способов $2\cdot 4! = 48$.

Ответ: 48.

Задача 8. Сколько различных слов можно составить из всех букв слова «математика»?

Решение.

В слове «математика» 10 букв, среди них есть повторяющиеся:

м – 2, а – 3, т – 2, е – 1, и – 1, к – 1.

Число различных слов равно числу перестановок с повторениями, в $2!\cdot3!\cdot2!$ раз меньше, чем число перестановок из 10 элементов:

$$N = \textit{ПП}(10;\, 2;\, 3;\, 2;\, 1;\, 1;\, 1) \quad \text{или}$$

$$N = \textit{ПП}(10;\, 2;\, 3;\, 2) = \frac{10!}{2!\cdot3!\cdot2!} = 151200.$$

Ответ: 151200.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти число способов, которыми семь книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд.

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

3. Сколькими способами можно распределить четыре должности среди четырех сотрудников?

4. Домашнее задание по литературе состоит в том, чтобы выучить одно из трех стихотворений: «Анчар», «Буря» или «Вьюга». Миша, Никита и Олег решили распределить все три стихотворения между собой по одному. Сколько существует способов это сделать?

5. Сколькими способами можно разложить восемь различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?

6. На сортировочной станции стоит группа из 5 вагонов 5 назначений. Найти число способов размещения вагонов по этим назначениям.

7. В автосервис одновременно приехали 4 машины для ремонта. Сколько существует способов выстроить их в очередь для обслуживания?

8. Сколько есть способов раздать спортивные номера с 1 по 5 пяти хоккеистам?

9. Несколько человек садятся за круглый стол. Считается, что два способа рассадки совпадают, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. Сколькими способами можно рассадить 5 человек?

10. Участники лыжных соревнований стартуют с интервалом в 30 секунд. Чтобы определить порядок старта, спортсмены тянут жребий, определяющий номер старта. Сколько существует различных последовательностей выхода лыжников на старт, если в соревнованиях принимает участие: а) 6 лыжников; б) 8 лыжников?

11. На собрании должны выступать 5 человек А, Б, В, Г и Д. Известно, что А должен выступать непосредственно перед Б. Сколькими способами можно расположить 5 человек в списке ораторов?

12. На собрании должны выступать 5 человек А, Б, В, Г и Д. Известно, что Б не должен выступать раньше А. Сколькими способами можно расположить 5 человек в списке ораторов?

13. Сколькими способами можно рассадить 5 человек, если два из них не могут сидеть рядом?

14. Сколькими способами можно рассадить 5 человек, если два из них хотят сидеть рядом?

15. Сколько ожерелий можно составить из 7 бусинок разного цвета (используя все)?

16. Имеются 5 одинаковых изумрудов, 6 одинаковых рубинов и 7 одинаковых сапфиров. Сколько различных браслетов можно составить из данных 18 камней?

17. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв в слове «водород»?

18. На полке стоят 15 книг: 6 в чёрных переплётах и 9 – в синих. Найти число способов расстановки книг, при которых синие книги занимают первые 6 мест.

19. На полке стоят 15 книг: 6 в чёрных переплётах и 9 – в синих. Найти число способов расстановки книг, при которых синие книги стоят рядом.

20. Сколькими способами можно сформировать состав из 15 вагонов, если на первых 4 местах стоят почтово-багажные вагоны, затем 8 купейных вагонов, и в конце – плацкартные?

21. Сколькими способами можно разделить 28 костей домино между четырьмя игроками поровну?

22. Найти число способов расстановки белых фигур (1 король, 2 слона, 2 ладьи, 2 коня, 1 ферзь) на первой линии шахматной доски.

23. Найти число способов рассадить за круглым столом 3 юношей и 3 девушек так, чтобы никакие две девушки не сидели рядом.

24. В купе железнодорожного вагона имеются два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров 4 желают сидеть по ходу поезда, 3 против движения, а остальным безразлично, где сидеть. Найти число способов размещения пассажиров.

1.3. Размещения

Задача 1. Абонент забыл три последние цифры номера телефона, но помнит, что все они четные и различные. Сколько существует различных вариантов набора забытых цифр ?

Решение.

Для набора забытых цифр по условию задачи нужно выбрать 3 четных цифры из 5 $(0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8)$. Порядок цифр в телефонном номере важен, поэтому число различных вариантов набора трех различных четных цифр равно числу размещений из 5 по 3: $A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$.

Ответ: 60.

Задача 2. На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

Решение.

По условию задачи нужно разместить 4 поезда на 7 путях, следовательно, число всех вариантов равно числу размещений из 7 по 4 (так как порядок расстановки важен):

$$A_7^4 = 7\cdot 6\cdot 5 = 210.$$

Ответ: 210.

Задача 3. В чемпионате страны по футболу принимают участие 15 команд. Сколько существует способов распределить золотую, серебряную и бронзовую медали?

Решение.

Поскольку медали неравноценны, каждая команда может получить любую медаль, то количество способов распределить золотую, серебряную и бронзовую медали среди команд будет равно числу размещений из 15 по 3 элемента:

$$A_5^3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = 15\cdot 14\cdot 13 = 2730.$$

Ответ: 2730.

Задача 4. Сколько пятизначных чисел можно записать с помощью цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, если 1) цифры не повторяются;
2) цифры могут повторяться?

Решение.

1) В пятизначном числе на первом месте может стоять любая цифра, кроме 0, то есть шесть различных вариантов. Если цифры не повторяются, то после выбора первой цифры число способов выбрать остальные четыре цифры (порядок важен) равно числу размещений из 6 по 4: A_6^4.

Тогда количество пятизначных чисел равно $N = 6 \cdot A_6^4$.

$$N = 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2160.$$

2) Для записи первой цифры существует 6 различных вариантов (кроме 0). Так как цифры могут повторяться, то вторая, третья, четвертая и пятая цифры могут быть выбраны числом способов $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$ (размещения с повторениями). Следовательно, количество пятизначных чисел с учетом повторений равно $N = 6 \cdot 7^4$.

$$N = 6 \cdot 7^4 = 14406.$$

Ответ: 1) 2160; 2) 14406.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сколько существует всех семизначных телефонных номеров, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется?

2. Найти число способов провести выборы старосты и профорга в группе из 30 человек.

3. Найти число способов составить трехцветный флаг, если есть материя 5 различных цветов.

4. Найти число способов составить трехцветный флаг, если имеется материя 5 различных цветов и одна из полос должна быть красной.

5. Сколькими способами можно распределить три различных путевки среди пяти студентов?

6. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

7. Сколькими способами студент может сдать 3 экзамена на протяжении 7 дней?

8. Сколькими способами студент может сдать 3 экзамена на протяжении 7 дней, если известно, что последний экзамен будет сдаваться на седьмой день?

9. В урне 10 шаров, помеченных номерами от 1 до 10. Из урны вынимают три раза по шару, записывают номер вынутого шара и возвращают шар в урну. Найти число способов вынуть при этом шары с различными номерами.

10. Найти число разных способов, которыми можно пять студентов разместить в аудитории на 20 мест.

11. Среди 30 членов спортивного клуба надо выбрать команду из 4 человек для участия в эстафете 100 м + 200 м + 400 м + 800 м. Сколькими способами можно сформировать такую команду?

12. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с нее, если подъем и спуск происходят по разным дорогам?

13. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 разных чашки, 5 разных блюдец и 6 разных чайных ложек. Найти число способов накрыть стол для чаепития (каждый получает ложку, чашку и блюдце).

14. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды в 52 карты по одной карте каждой масти, причем среди вынутых карт не должно быть ни одной пары одинаковых, т. е. двух королей, двух десяток и т. д.?

15. Компания из 7 юношей и 10 девушек танцует. Найти число вариантов участия девушек в танце, если все юноши в этом танце танцуют.

16. Компания из 7 юношей и 10 девушек танцует. Относительно двух девушек можно с уверенностью сказать, что они будут приглашены. Найти число вариантов участия девушек в танце, если все юноши участвуют в танце.

17. Сколько слов можно получить перестановкой букв слова «логарифм», если порядок гласных не меняется?

18. Сколько слов можно получить перестановкой букв слова «логарифм», если второе, четвертое и шестое места должны быть заняты согласными буками?

19. Найти число перестановок букв слова «математика» с неизменным порядком гласных букв.

20. На сортировочном пути ожидают подачи 12 вагонов различных направлений. Найти число различных вариантов расстановки 6 вагонов у сортировочной платформы.

21. В бассейне 10 дорожек. Сколько существует способов размещения четырех пловцов на разных дорожках?

22. Учащиеся второго класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?

1.4. Сочетания

Задача 1. У студента есть 5 книг, из которых надо прочитать ровно 2. Сколькими способами можно выбрать эти книги?

Решение.

При выборе двух книг из имеющихся важен набор взятых книг, а не их порядок, следовательно, число различных наборов по 2 книги из 5 равно числу сочетаний из 5 по 2:

$$n = C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Таким образом, у студента есть 10 вариантов, какие 2 книги читать.

Ответ: 10.

Задача 2. Из 24 учащихся надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Надо выбрать трех человек из 24. Ясно, что от порядка выбора ничего не зависит, то есть Иванов-Петров-Сидоров или Петров-Сидоров-Иванов – это одна и та же тройка дежурных. Следовательно, это будут сочетания из 24 по 3.

По формуле получаем:

$$C_{24}^3 = \frac{24!}{3! \cdot 21!} = \frac{22 \cdot 23 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2024 \text{ способа.}$$

Ответ: 2024.

Задача 3. Из партии, в которой 25 изделий, среди которых 6 бракованных, случайным образом выбрали 3 изделия для проверки качества. В скольких случаях может оказаться, что: а) все изделия годные; б) среди выбранных изделий одно бракованное; в) все изделия бракованные?

Решение:

а) Пусть событие A состоит в том, что все выбранные изделия годные.

По условию задачи 6 изделий из 25 являются бракованными, следовательно, 19 изделий – годные.

Количество возможных способов взять 3 годных изделия из 19 годных:

$$C_{19}^{3} = \frac{19!}{3!\cdot 16!} = \frac{17\cdot 18\cdot 19}{1\cdot 2\cdot 3} = 969.$$

б) Пусть событие B состоит в том, что среди 3 выбранных изделий одно бракованное, т. е. одно бракованное и два годных.

Количество возможных способов взять одно бракованное изделие из 6 бракованных равно $n_1 = 6$.

Количество возможных способов взять два годных изделия из 19 годных равно $n_2 = C_{19}^{2}$.

По правилу произведения (п. 1.1) число способов выбрать одно бракованное ***и*** два годных изделия равно:

$$N = n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot C_{19}^{2} = 6\cdot 171 = 1026.$$

в) Пусть событие C состоит в том, что все выбранные изделия бракованные. Количество возможных способов взять 3 бракованных изделия из 6 бракованных равно $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20$.

Ответ: а) 969, б) 1026, в) 20.

Задача 4. У Пети в кармане есть 6 монет, из которых 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя перекладывает какие-то три монеты в другой карман. Сколько вариантов перекладывания монет может быть?

Решение.

В кармане $n = 6$ монет. Петя перекладывает $k = 3$ монеты. Так как порядок перекладывания монет не важен, то число вариантов определяется числом сочетаний из 6 по 3. Имеем:

$$n = C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20.$$

Ответ: 20.

Задача 5. У Пети в кармане есть 6 монет, из которых 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя перекладывает какие-то три монеты в другой карман. Сколько вариантов перекладывания может быть у Пети, если известно, что пятирублевые монеты оказались в разных карманах?

Решение.

Как и в предыдущей задаче, есть $n = 6$ монет. Петя перекладывает $k = 3$ монеты, из которых 1 – пятирублевая.

$$
\begin{array}{cccccc}
\text{6 монет} & — & \text{2 монеты, (5 руб.)} & & \text{4 монеты (10 руб.)} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{3 монеты} & — & \text{1 монета (5 руб.)} & \textit{и} & \text{2 монеты (10 руб.)} \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & n_1 = 2 & & n_2 = C_4^2
\end{array}
$$

Так как одновременно перекладываются одна пятирублевая монета и две десятирублевые, то, согласно правилу произведения, число вариантов равно:

$$N = n_1 \cdot n_2 = 2 \cdot C_4^2 = 2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = 12.$$

Ответ: 12.

Задача 6. В кошельке лежат пять монет достоинством 2 рубля, три монеты достоинством 5 рублей и две монеты достоинством 10 рублей. Сколько существует возможностей (сколькими способами можно) вытащить две монеты одного достоинства?

Решение.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\text{10 монет} & — & & \text{5 монет, (2 руб.)} & & \text{3 монеты, (5 руб.)} & & \text{2 монеты (10 руб.)} \\
\downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{2 монеты} & — \text{ одного достоинства} & — & \text{2 монеты (2 руб.)} & \textit{или} & \text{2 монеты (5 руб.)} & \textit{или} & \text{2 монеты (10 руб.)} \\
 & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & & n_1 = C_5^2 & & n_2 = C_3^2 & & n_3 = C_2^2
\end{array}
$$

Вытащить две монеты одного достоинства означает вытащить две монеты по 2 рубля (из пяти монет), *или* две монеты по пять рублей (из трех монет), *или* две монеты по десять рублей (из двух монет). Следовательно, для получения общего числа возможностей (способов) используем правило сложения (союз «*или*»).

Так как порядок выбора монет не важен, то две монеты по 2 рубля из пяти монет можно вытащить количеством способов

$$n_1 = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10;$$

аналогично, выбор двух монет по пять рублей из трех монет может быть осуществлен количеством способов

$$n_2 = C_3^2 = C_3^1 = 3;$$

для выбора двух монет по десять рублей существует один способ, так как монет всего две: $n_3 = C_2^2 = C_2^0 = 1.$

Итак, общее число способов взять две монеты одного достоинства равно:

$$N = n_1 + n_2 + n_3, \quad N = 10 + 3 + 1 = 14.$$

Ответ: 14.

Задача 7. Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу вынимают 5 карт.
1) Сколько различных наборов карт можно при этом получить?
2) В скольких случаях среди пяти вынутых карт будет один туз?
3) В скольких случаях среди пяти вынутых карт будет четыре туза?
4) В скольких случаях среди пяти вынутых карт будет хотя бы один туз?

Решение.

1) Число различных наборов по 5 карт.

По условию задачи важен набор взятых карт, а не их порядок, то есть выбор конкретного количества карт определяется сочетаниями.

Число различных наборов по 5 карт из 36 равно числу сочетаний из 36 по 5:

$$n_1 = C_{36}^5 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 376992.$$

2) Среди пяти вынутых карт один туз.

$$\begin{array}{ccccc} 36 \text{ карт} & — & 4 \text{ туза,} & & 32 \text{ не туз} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 \text{ карт} & — & 1 \text{ туз} & \textit{и} & 4 \text{ не туз} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$n_2 = C_4^1 \cdot C_{32}^4$$

1 туз среди пяти вынутых карт может оказаться в числе случаев:

$$n_2 = C_4^1 \cdot C_{32}^4 = 4 \cdot \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 143840.$$

3) Среди пяти вынутых карт четыре туза.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{36 карт} & — & \text{4 туза,} & & \text{32 не туз} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{5 карт} & — & \text{4 туза} & \textit{и} & \text{1 не туз} \\
& & & \Downarrow & \\
& & & n_3 = C_4^4 \cdot C_{32}^1 &
\end{array}$$

4 туза и 1 карта не туз среди пяти вынутых карт окажется в числе случаев:

$$n_3 = C_4^4 \cdot C_{32}^1 = 1 \cdot 32 = 32.$$

4) Хотя бы один туз среди пяти вынутых карт окажется в числе случаев:

$$n_4 = C_4^1 \cdot C_{32}^4 + C_4^2 \cdot C_{32}^3 + C_4^3 \cdot C_{32}^2 + C_4^4 \cdot C_{32}^1.$$

Подсчитать n_4 можно следующим способом: из общего числа способов вынуть 5 карт из 36 вычесть число способов вынуть 5 карт без тузов, то есть 5 из 32:

$$n_4 = C_{36}^5 - C_{32}^5 = 376992 - 201376 = 175616.$$

Ответ: 1) $C_{36}^5 = 143840$; 2) $C_4^1 \cdot C_{32}^4 = 287680$; 3) $1 \cdot C_{32}^1 = 32$; 4) $C_{36}^5 - C_{32}^5 = 175616$.

Задача 8. В коробке лежат 3 красных, 4 синих и 2 зеленых шара. Сколькими способами можно взять несколько шаров так, чтобы среди них были шары разных цветов?

Решение.

$$\begin{array}{ccc}
\text{3 красных} & \text{4 синих} & \text{2 зеленых} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 \textit{ или } 2 \textit{ или } 3 & 1 \textit{ или } 2 \textit{ или } 3 \textit{ или } 4 & 1 \textit{ или } 2 \\
\Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
n_1 = C_3^1 + C_3^2 + C & n_2 = C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 & n_3 = C_2^1 + C_2^2
\end{array}$$

По условию задачи нужно взять хотя бы один красный шар (*или* один, *или* два, *или* три), *и* хотя бы один синий шар (*или* один, *или* два, *или* три, *или* четыре), *и* хотя бы один зеленый шар (*или* один, *или* два). Порядок выбора шаров не важен. Следовательно, число возможных способов равно:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \text{ (союз «}\textit{и}\text{»).}$$

$$N = \left(C_3^1 + C_3^2 + C_3^3\right) \cdot \left(C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4\right) \cdot \left(C_2^1 + C_2^2\right) = 315.$$

Можно воспользоваться свойством сочетания $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$ и перейти к противоположному исходу: общее возможное число исходов минус 1, когда не берем ни одного нужного шара ($C_n^0 = 1$).

Тогда число способов выбрать хотя бы один шар

а) красного цвета $n_1 = 2^3 - 1 = 7$;

б) синего цвета $n_2 = 2^4 - 1 = 15$;

в) зеленого цвета $n_3 = 2^2 - 1 = 3$.

Следовательно, общее число вариантов выбора равно

$$N = 7 \cdot 15 \cdot 3 = 315.$$

Ответ: 315.

Задача 9. В группе из 20 студентов 4 отличника и 7 хорошистов. Сколькими способами из них можно отобрать команду в 6 человек так, чтобы среди них было хотя бы два отличника?

Решение.

В команде из 6 человек должно быть хотя бы два отличника, то есть

2 отличника (из четырех) *и* 4 хорошиста (из семи)

или 3 отличника (из четырех) *и* 3 хорошиста (из семи)

или 4 отличника (из четырех) *и* 2 хорошиста (из семи).

Так как важен состав группы, а не порядок выбора студентов, то число возможных способов выбора определяется числом сочетаний (C_n^m). Используя комбинаторные правила сложения (союз «*или*») и произведения (союз «*и*»), получаем общее число способов отобрать нужную команду:

$$N = C_4^2 \cdot C_7^4 + C_4^3 \cdot C_7^3 + C_4^4 \cdot C_7^2.$$

Заметим, что $C_7^4 = C_7^3$, $C_4^3 = C_4^1$, $C_4^4 = 1$, тогда $$N=\left(C_4^2+C_4^1\right)\cdot C_7^3+C_7^2,$$

$$N=\left(\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}+4\right)\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}=10\cdot 35+21=371.$$

Ответ: 371.

Задача 10. Лифт останавливается на 8 этажах. Сколькими способами можно распределить между этими остановками 5 пассажиров лифта?

Решение.

Очевидно, несколько пассажиров лифта (или все) могут выйти на одном из этажей. Таким образом, нужно распределить $\kappa=5$ пассажиров между $n=8$ этажами, не принимая во внимание порядок. Число возможных способов распределения пассажиров лифта по этажам определяется числом сочетаний с повторениями $\left(\overline{C_n^\kappa}=C_{n+\kappa-1}^\kappa\right)$: $N=\overline{C_8^5}=C_{12}^5$,

$$N=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=11\cdot 9\cdot 8=792.$$

Ответ: 792.

Задача 11. При расформировании составов на сортировочной горке в отцепах могут быть вагоны 5 видов: крытые, полувагоны, платформы, изотермические и специальные. Определить число возможных сочетаний вагонов в отцепах из трех вагонов. Решить эту задачу с учетом порядка вагонов в отцепе.

Решение.

1) Отцепы отличаются числом вагонов различного вида, но не их порядком. Вагоны каждого вида могут повторяться от 0 до $\kappa=3$ раз.

Число таких отцепов равно числу сочетаний с повторениями:

$$\overline{C_5^3}=C_7^3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=35.$$

2) Если учитывать порядок вагонов в отцепе, то первым и вторым и третьим вагоном в отцепе может быть выбран любой из 5 видов. Следовательно, число отцепов с учетом порядка вагонов равно $5^3=125$.

Ответ: 1) 35; 2) 125.

Задача 12. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 10 команд. Команды, занявшие первые три места, награждаются золотой, серебряной и бронзовой медалями, а две последние команды покидают первенство. Сколько возможно различных результатов первенства?

Решение.

1-й способ. Две последние команды (могут быть любые из 10) покидают первенство, что возможно числом способов (порядок не важен): C_{10}^{2}.

Три призовых места могут распределиться между тремя командами из оставшихся 8 числом способов (порядок важен): A_8^3.

Используя правило произведения, получим количество различных результатов первенства: $N = C_{10}^{2} \cdot A_8^3$. $N = \dfrac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 15120$.

2-й способ. Первые три места могут быть распределены числом способов: A_{10}^{3}. Последние две команды покидают первенство – число вариантов C_7^2.

Всего различных результатов первенства: $N = A_{10}^{3} \cdot C_7^2$.

$$N = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15120.$$

3-й способ. Имеем 5 команд: 3 на первых трех местах и 2 на последних могут расположиться с учетом порядка числом способов: A_{10}^{5}. Но так как последние две команды покидают первенство и не важно, какая из команд на последнем, а какая на предпоследнем месте, то различных вариантов в два раза меньше – $N = \dfrac{1}{2} A_{10}^{5} = \dfrac{1}{2}(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) = 15120$.

Ответ: 15120.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сколькими способами можно выбрать 3 книжки из 5?

2. Сколькими способами можно выбрать трех человек из 30?

3. Найти число различных билетов по 3 вопроса, которые можно составить из 60 вопросов.

4. Найти число вариантов распределения трех одинаковых путевок среди пяти сотрудников.

5. Найти число экзаменационных комиссий, состоящих из 5 человек, которые можно образовать из 10 преподавателей.

6. Сколькими способами можно из двенадцати человек, играющих в городки, набрать на соревнования команду из четырех человек?

7. Сколькими способами можно составить команду на игру из 6 человек из сборной университета по волейболу в 15 человек?

8. Сколько календарных игр в розыгрыше первенства по футболу могут сыграть 16 команд, если любые две команды играют между собой только один матч?

9. В урне 10 шаров: 5 белых, 3 синих и 2 красных. Сколькими способами можно вытащить из урны два шара одного цвета?

10. Из ящика, содержащего 25 деталей, среди которых 5 дефектных, вынимают 6 деталей. Найти число возможностей вытащить при этом 3 дефектных детали.

11. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами можно образовать стартовую шестёрку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

12. У одного из друзей 7 различных книг по математике, а у другого 5. Найти число способов обмена по две книги.

13. Из колоды в 36 карт вынимают 9 карт. Найти число возможностей вытащить при этом 3 дамы.

14. Из урны, содержащей 5 белых и 6 синих шаров, вынимают 3 шара. Найти число способов вынуть при этом хотя бы 2 белых шара.

15. Найти число точек пересечения диагоналей выпуклого десятиугольника, если никакие три из диагоналей не пересекаются в одной точке (каждым из четырех вершин соответствует одна точка пересечения).

16. На одной из двух параллельных прямых лежат 5 точек, а на другой 11. Найти количество треугольников с вершинами в этих точках.

17. В забеге на 500 метров участвуют 14 спортсменов. Для выигрыша в спортивной лотерее надо правильно указать тройку спортсменов, занявших призовые места. Сколько существует способов указать этих спортсменов?

18. На склад завезли партию из 10 компьютеров, среди которых 3 имеют заводские дефекты. Сколькими способами можно выбрать из этой партии 5 компьютеров, чтобы только 2 из них имели дефекты?

19. У бармена есть 6 сортов зеленого чая. Для проведения чайной церемонии требуется подать зеленый чай ровно трех различных сортов. Сколькими способами бармен может выполнить заказ?

20. В ларьке продаются 15 роз и 18 тюльпанов. Ученик 10-го класса хочет купить 3 цветка для своей одноклассницы, причем все цветы должны быть одинаковыми. Сколькими способами он может составить такой букет?

21. У Пети в кармане есть 9 монет, из которых 5 монет по рублю и 4 монеты по 10 рублей. Петя перекладывает какие-то три монеты в другой карман. Сколько различных вариантов перекладывания монет может быть, если известно, что две монеты по 10 рублей оказались в другом кармане?

22. В кошельке у Саши лежат 8 монет по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Саша открывает кошелек и выбирает 2 монеты по 5 рублей и 2 монеты по 10 рублей, которые кладет в копилку. Сколько различных вариантов выбора монет может быть?

23. Решите предыдущую задачу, если Саше неважно, какие монеты брать, т. е. он просто берет 4 монеты из кошелька.

24. В классе из 14 школьников и 8 школьниц назначают 6 дежурных. При этом классный руководитель требует, чтобы число дежурных школьников и школьниц было одинаковым. Сколькими способами можно так сделать?

25. Имеется набор из 5 ручек разных цветов. Сколькими способами можно выбрать 3 ручки для обводки чертежа? Сколькими способами можно выбрать 3 ручки для обводки чертежа, если среди них обязательно должен быть красный цвет?

2. ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

2.1. Случайные события. Алгебра событий

ОПЫТ = ИСПЫТАНИЕ – комплекс условий

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ИСХОД (ω), СОБЫТИЕ (A) – результат опыта

ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ (СОБЫТИЙ) Ω – совокупность всех исходов опыта (испытания)

Если в результате опыта:

событие обязательно произойдет	– ДОСТОВЕРНОЕ СОБЫТИЕ (Ω)
событие не может произойти	– НЕВОЗМОЖНОЕ СОБЫТИЕ ($\varnothing$)
событие может произойти или не произойти	– СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ (A, B, C)

Событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий	– СУММА событий $A+B$
Событие, состоящее в одновременном или последовательном появлении событий	– ПРОИЗВЕДЕНИЕ событий $A \cdot B$

СУММА нескольких событий – $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$ – событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$

ПРОИЗВЕДЕНИЕ нескольких событий – $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n$ – событие, состоящее в одновременном или последовательном появлении событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$

Появление события A без события B – РАЗНОСТЬ событий $A \setminus B$

Возможность появления любого исхода одинакова	– РАВНОВОЗМОЖНЫЕ события
Если при одном испытании появление одного из событий исключает появление другого	– НЕСОВМЕСТНЫЕ события $A \cdot B = \varnothing$
Если при испытании появление одного из событий не исключает появление другого	– СОВМЕСТНЫЕ события $A \cdot B \neq \varnothing$
Появление одного события влияет на возможность появления другого	– ЗАВИСИМЫЕ события
Появление одного события не влияет на возможность появления другого	– НЕЗАВИСИМЫЕ события

Если в результате испытания произойдет хотя бы одно из событий	– ПОЛНАЯ ГРУППА событий $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = \Omega$
Если события попарно несовместны и в результате испытания обязатель-но произойдет одно из них	– ПОЛНАЯ ГРУППА несовместных событий 1. $A_i \cdot A_j = \varnothing$; 2. $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = \Omega$.
Два несовместных события, образующие полную группу	– ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ события A и $\overline{A}$: $A + \overline{A} = \Omega$

ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ

1^0 $A + \Omega = \Omega, \quad A \cdot \Omega = A$

2^0 $A + \varnothing = A, \quad A \cdot \varnothing = \varnothing$

3^0 $A + A = A, \quad A \cdot A = A$

4^0 $\overline{\Omega} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = \Omega$

5^0 $A + \overline{A} = \Omega, \quad \overline{A} = \Omega \setminus A, \quad A \cdot \overline{A} = \varnothing$

6^0 $\overline{(\overline{A})} = A$

7^0 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{\sum_i A_i} = \prod_i \overline{A_i}$

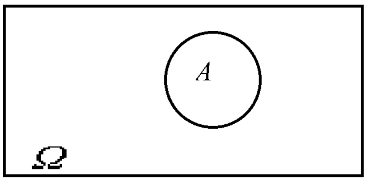
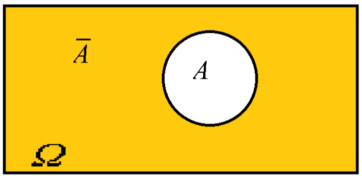
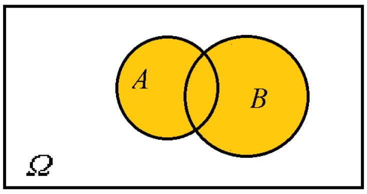
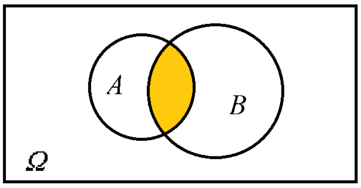
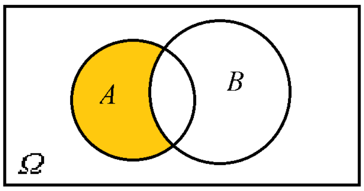
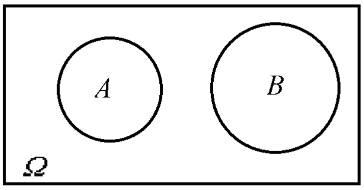
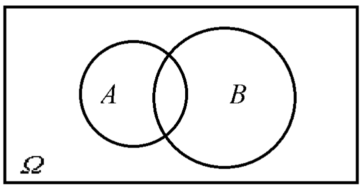
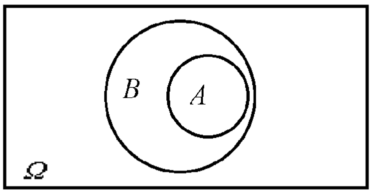
8^0 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{\prod_i A_i} = \sum_i \overline{A_i}$

9^0 $A \setminus B = A \setminus A \cdot B = A \cdot \overline{B}, \quad A \setminus (A \setminus B) = A \cdot B$

10^0 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

11^0 $A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A}, \quad A \cdot B \subseteq A \subseteq A + B$

Диаграммы Венна

Пространство элементарных исходов Ω Событие A		$A \subset \Omega$
Противоположное событие $\overline{A}$		$\overline{A} = \Omega \setminus A$
Сумма событий		$A + B$ $A \cup B$
Произведение событий		$A \cdot B$ $A \cap B$
Разность событий		$A \setminus B = A \cdot \overline{B}$
Несовместные события		$A \cdot B = \varnothing$
Совместные события		$A \cdot B \neq \varnothing$
Событие A влечет событие B		$A \subseteq B$

Задача 1. Описать пространства элементарных событий в следующих экспериментах: монета бросается: а) один раз; б) два раза.

Решение.

а) При бросании монеты один раз возможно два исхода (элементарных события): выпадение герба ($\varGamma$);
выпадение цифры ($\mathit{Ц}$).

Пространство элементарных исходов $\varOmega = \{\varGamma,\ \mathit{Ц}\}$.

Отметим, что если монета правильная, то исходы $\varGamma$, $\mathit{Ц}$ равновозможны, несовместны, т. е. образуют полную группу несовместных событий – случаев. Если же монета неправильная, то исходы $\varGamma$, $\mathit{Ц}$ не равновозможны, они по-прежнему образуют полную группу несовместных событий, т. к. описывают пространство $\varOmega$, но не являются случаями.

б) При подбрасывании монеты 2 раза возможны исходы:

оба раза выпал герб (ГГ);
оба раза выпала цифра (ЦЦ);
первый раз выпал герб, а второй раз – цифра (ГЦ);
первый раз выпала цифра, второй раз – герб (ЦГ).

Стало быть, пространство элементарных событий состоит из четырех исходов: $\varOmega = \{\varGamma\varGamma, \varGamma\mathit{Ц}, \mathit{Ц}\varGamma, \mathit{ЦЦ}\}$.

Задача 2. Бросается игральная кость. Описать пространство элементарных событий (исходов).

Решение.

При бросании игральной кости возможны исходы (элементарные события) $\omega_i = i$, i – число выпавших очков, $i = \overline{1, 6}$.

Пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{\, i \,\}_1^6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Например, события:

A = {выпадение четного числа очков}, $A = \{2, 4, 6\}$;

B = {выпадение нечетного числа очков}, $B = \{1, 3, 5\}$;

C = {число выпавших очков не больше 4}, $C = \{\, i \le 4 \,\} = \{1, 2, 3, 4\}$;

D = {число выпавших очков не меньше 3}, $D = \{\, i \ge 3 \,\} = \{3, 4, 5, 6\}$.

Рассмотрим некоторые действия с указанными событиями.

а) Сумма событий $A + C = \{1, 2, 3, 4, 6\} = \varOmega \setminus \{\, 5 \,\}$;

$$B + D = \{1, 3, 4, 5, 6\} = \varOmega \setminus \{\, 2 \,\}.$$

Разность событий

$$A \setminus C = \{6\}; \quad C \setminus A = \{1, 3\}; \quad C \setminus D = \{1, 2\}; \quad D \setminus C = \{5, 6\}.$$

Произведение событий

$$A \cdot C = \{2, 4\}; \quad C \cdot D = \{3, 4\}; \quad B \cdot C = \{1, 3\}; \quad A \cdot D = \{4, 6\}.$$

б) События A и B, C и D в сумме дают все пространство элементарных событий: $A + B = \Omega$; $C + D = \Omega$.

Появление события A исключает появление события B;

$A \cdot B = \varnothing$ – невозможное событие, т. е. события A и B взаимно противоположны: $A = \overline{B}$, $B = \overline{A}$.

Одновременное появление событий C и D возможно,

$$C \cdot D = \{3, 4\} \neq \varnothing.$$

Таким образом, события A и B образуют полную группу несовместных событий, а C и D – полную группу совместных событий.

Задача 3. Обследуется работа АТС в течение часа. Элементарные события – число вызовов, поступивших в течение данного часа. Описать пространство элементарных событий.

Решение.

Элементарные события (исходы) – число вызовов:

$$\omega_i = i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Понятно, что в течение часа число вызовов конечно. Но мы не можем установить верхнюю границу, поэтому, абстрагируясь, считаем, что оно может быть любым от 0 до ∞. Стало быть, пространство элементарных исходов $\Omega = \{i\}_{i=0}^{\infty}$ является счетным множеством.

Задача 4. Ведется стрельба по мишени. Элементарные исходы – точка попадания в мишень. Описать пространство элементарных событий.

Решение.

Пусть, например, мишень представляет собой круг радиуса R.

Так как элементарные исходы – точка попадания в мишень, то пространство элементарных исходов можно описать как множество точек, заполняющих круг: $\Omega = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$.

Задача 5. Некто наблюдает броуновское хаотичное движение частиц. Описать возможное пространство элементарных событий.

Решение.

От соударений частицы с другими она изменяет свою траекторию. Следовательно, пространство элементарных событий в этом эксперименте может представлять собой множество всевозможных траекторий движущейся частицы.

Задача 6. Сбрасывается бомба на военный объект. Событие A – бомба попала в цель, событие B – бомба взорвалась. Выразить событие C, состоящее в поражении цели.

Решение.

Цель будет поражена, если бомба попала в цель и взорвалась. Используя правило произведения, получаем событие $C = A \cdot B$.

Задача 7. Студенту в сессию нужно сдать три экзамена: математику, информатику и физику. Записать следующие события:

а) событие A – сдать только один экзамен;

б) событие B – сдать только два экзамена;

в) событие C – сдать три экзамена;

г) событие D – сдать хотя бы один экзамен.

Решение.

Пусть события M, $И$, $Ф$ означают сдать математику, информатику, физику; а $\overline{M}, \overline{И}, \overline{Ф}$ соответственно не сдать указанные предметы.

а) Событие A – сдать только один экзамен – состоит в сдаче *или* только математики, *или* только информатики, *или* только физики, т. е. является суммой трех несовместных событий.

Сдать только математику означает, что при этом информатика *и* физика не сданы, т. е. $M \cdot \overline{И} \cdot \overline{Ф}$ – произведение трех независимых событий.

Аналогично можно записать события – сдать только информатику или только физику.

Таким образом, событие $A = M \cdot \overline{И} \cdot \overline{Ф} + \overline{M} \cdot И \cdot \overline{Ф} + \overline{M} \cdot \overline{И} \cdot Ф$.

б) Событие B – сдать только два экзамена – заключается в том, что могут быть: сданы математика *и* информатика, *и* физика не сдана,

или сданы математика *и* физика, *и* информатика нет,

или сдана информатика *и* физика, *и* математика нет.

Как и в пункте а) используя правила произведения и суммы, получаем

$$B = M \cdot И \cdot \overline{Ф} + M \cdot \overline{И} \cdot Ф + \overline{M} \cdot И \cdot Ф.$$

в) Событие C – сдать три экзамена – означает сдать *и* математику, *и* информатику, *и* физику, т. е. $C = M \cdot И \cdot Ф$.

г) Событие D – сдать хотя бы один экзамен – можно представить как сумму несовместных событий:

сдать только один экзамен
или сдать только два экзамена
или сдать все три экзамена.

Стало быть, $D = A + B + C$ – сумма трех несовместных событий. Иначе, событие D означает сдать *или* математику, *или* информатику, *или* физику: $D = M + И + \Phi$ – сумма трех совместных событий (появление одного не исключает появление других). В дальнейшем для подсчета вероятности такого события эти способы представления события D не рациональны.

Легко видеть, что всё пространство элементарных исходов Ω – результатов сдачи сессии – включает еще один исход, а именно:

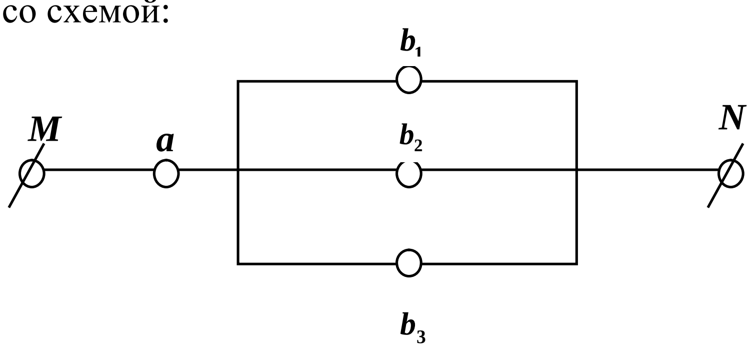
{не сдать ни одного экзамена: *и* математику, *и* информатику, *и* физику}.

Событие $\overline{M} \cdot \overline{И} \cdot \overline{\Phi}$ является противоположным событию D – сдать хотя бы один экзамен, то есть $\overline{D} = \overline{M} \cdot \overline{И} \cdot \overline{\Phi}$.

Стало быть $D = \Omega \setminus \overline{D} = \Omega - \overline{M} \cdot \overline{И} \cdot \overline{\Phi}$.

В дальнейшем мы увидим, что этот способ представления события D при подсчете вероятности если не единственно возможный, то наиболее удачный и рациональный.

Задача 8. Электрическая цепь между точками M и N составлена в соответствии со схемой:



События: A – выход из строя элемента $\boldsymbol{a}$;

B_n – выход из строя элемента $\boldsymbol{b_n}$, $n = 1, 2, 3$.

Выразить через эти события событие C – разрыв цепи – и событие $\overline{C}$.

Решение.

Элементы $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{b_3}$ соединены параллельно между собой и последовательно с элементом $\boldsymbol{a}$.

При параллельном соединении тока в цепи нет, если все элементы вышли из строя, а при последовательном соединении – если хотя бы один элемент вышел из строя.

Таким образом, событие C – разрыв цепи – состоит в том, что вышел из строя элемент $\boldsymbol{a}$ *или* все элементы $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{b_3}$:

$$C = A + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 .$$

Событие $\overline{C}$ получим, например, используя законы алгебры событий:

$$\overline{C} = \overline{A + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3} ;$$

или $$\overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B_1 \cdot B_2 \cdot B_3} ;$$

или $$\overline{C} = \overline{A} \cdot \left(\overline{B}_1 + \overline{B}_2 + \overline{B}_3\right),$$

что означает нахождение в рабочем состоянии элемента $\boldsymbol{a}$ и хотя бы одного из элементов $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{b_3}$.

Упражнение

Выясните:

– несовместные события зависимы или нет;

– совместные события зависимы или нет;

– независимые события совместны или нет;

– зависимые события совместны или нет?

Замечание к упражнению

Ответ на первый вопрос: несовместные события – появление одного из них исключает появление другого, то есть несовместные события всегда зависимы.

Предлагаем читателям ответить на оставшиеся три вопроса. Необходимо либо обосновать ответ, либо привести соответствующие примеры.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Бросили игральную кость. Элементарным исходом является выпадение определённого числа очков на верхней грани.

Событие A={выпадение «4»}.

Укажите событие, противоположное к A:

а) выпало нечётное число очков,

б) выпало число очков, большее 4,

в) выпало число очков, меньшее 4,

г) выпало число очков, не равное 4.

2. Бросили монету и игральную кость.

События: A={выпал «герб»};

B={выпало чётное число очков}.

Укажите верные утверждения:

а) события A и B несовместны и независимы,

б) события A и B совместны и зависимы,

в) событие $A+B$ – достоверное событие,

г) события A и B совместны и независимы.

3. Наудачу выбрано натуральное число от 1 до 50.

События: A={наудачу выбранное число нечетное},

B={наудачу выбранное число делится на 10}.

Являются ли события A и B

а) совместными, б) несовместными,

в) зависимыми, г) независимыми?

4. Из колоды карт вынимают одну карту, затем возвращают её в колоду, тщательно перетасовывают и снова вынимают одну карту.

События: A={в первый раз вынут туз пик},

B={во второй раз вынут туз пик}.

Укажите верные утверждения:

а) события A и B несовместны и независимы,

б) события A и B совместны и независимы,

в) события A и B несовместны и зависимы,

г) события A и B совместны и зависимы.

5. Рассматриваются события:

A={экзамен студент сдал на «отлично»},

B={экзамен студент сдал на «хорошо»},

C={экзамен студент сдал на «удовлетворительно»},

D={экзамен студент сдал на «неудовлетворительно»},

E={студент не явился на экзамен}.

Укажите верные утверждения:

а) события A и C независимы,

б) события $A+B+C$, $D+E$ противоположны,

в) событие E достоверное событие,

г) события A, B, C, D, E образуют полную группу несовместных событий,

д) события A и B совместны.

6. Производят два выстрела по мишени.

События: A= {ни одного попадания},

B= {одно попадание},

C = {два попадания}.

Укажите верные утверждения:
а) события образуют полную группу несовместных событий,
б) события образуют полную группу совместных событий,
в) события являются равновозможными,
г) события A и B совместны.

7. Из полной, хорошо перетасованной колоды вынимают одну карту.
События: A= {появление карты бубновой масти},
B= {появление карты трефовой масти},
C = {появление карты червовой масти}.

Укажите верные утверждения:
а) события образуют полную группу,
б) события не образуют полную группу,
в) события являются равновозможными,
г) события совместны и зависимы,
д) события несовместны и зависимы,
е) события несовместны и независимы.

8. Бросаются две игральные кости.
События: S_1= {сумма выпавших очков не более 4},
S_2= {сумма выпавших очков равна 4},
S_3= {сумма выпавших очков равна 11}.

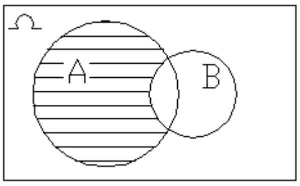
Укажите верные утверждения:
а) события равновозможны;
б) события неравновозможны;
в) события S_1 и S_2 совместны;
г) события S_2 и S_3 несовместны и зависимы;
д) события несовместны и независимы;
е) события образуют полную группу;
ж) события не образуют полную группу.

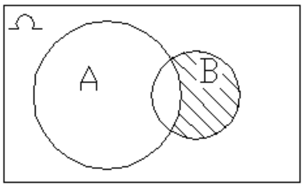
9. Монета подбрасывается три раза. Наблюдаемый результат – появление герба или цифры на верхней стороне монеты. Запишите пространство элементарных исходов данного опыта. Сколько элементарных исходов благоприятствует событиям:

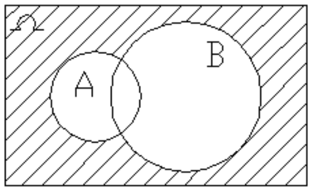
а) A={герб выпал ровно один раз},
б) B={герб выпал хотя бы один раз},
в) C={ни разу не выпала цифра},
г) D={герб выпал не менее чем два раза подряд}?

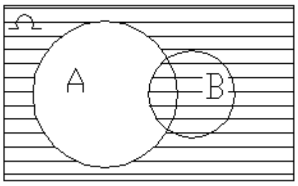
10. Из урны, содержащей шары белого, чёрного и синего цвета, наудачу извлекается один шар. События A и B соответственно означают появление белого и черного шаров. Опишите события: $\overline{A+B}$; $\overline{A}+B$; $A+\overline{B}$; $\overline{A}\cdot\overline{B}$.

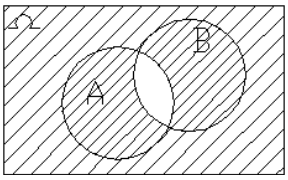
11. Запишите верные утверждения для диаграмм Венна:

а) 

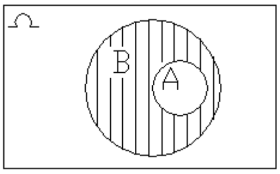
б) 

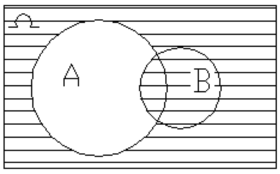
в) 

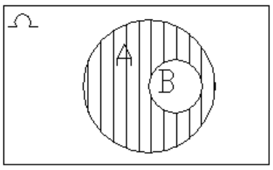
г) 

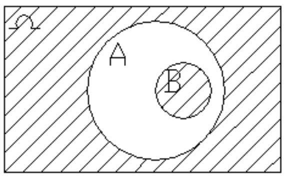
д) 

12. Событие A есть следствие события B (B влечет за собой A). Укажите диаграмму Венна для разности событий $A \backslash B$:

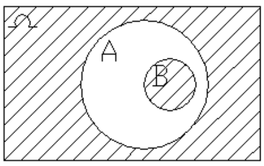
а) 

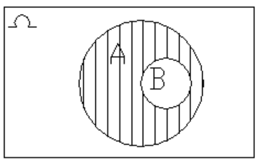
б) 

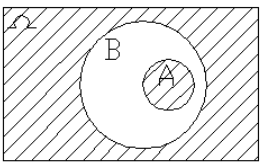
в) 

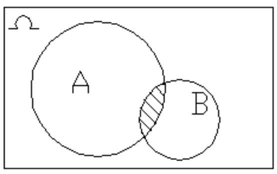
г) 

13. Событие B есть следствие события A (A влечет за собой B). Укажите диаграмму Венна для события, противоположного к разности $B \backslash A$:

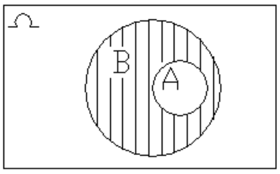
а) 

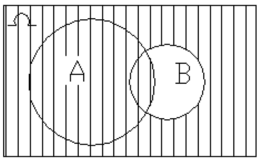
б) 

в) 

г) 

14. Установите соответствие между диаграммами Венна и действиями над событиями:

а) 

б) 

1) $B \cdot \overline{A}$

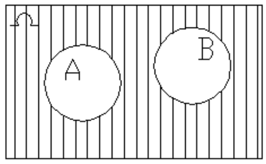
2) $A \cdot \overline{B}$

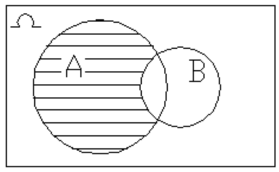
3) $\overline{A \setminus B}$

4) $\overline{B \setminus A}$

5) $A + B$

6) $\overline{A} \cdot \overline{B}$

в) 

г) 

2.2. Классическое определение вероятности

ВЕРОЯТНОСТЬ события A: $$P(A) = \frac{m}{n}$$

n – число всех элементарных исходов испытания (**равновозможных**, **несовместных, образующих полную группу**),

m – число исходов, благоприятствующих событию A (элементарные исходы, в которых событие A наступает).

1. Вероятность достоверного события равна 1.
2. Вероятность невозможного события равна 0.
3. Вероятность случайного события: $0 < P(A) < 1$.

Задача 1. В урне находятся 20 шаров: 7 белых, 4 синих и 9 черных. Шары перемешивают и наудачу, не глядя, вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынут синий шар?

Решение.

Рассмотрим событие A = {вынут синий шар}.

Всего возможных исходов опыта $n = 20$.

Исходов, благоприятствующих появлению события A, то есть выниманию одного синего шара, $m = 4$, следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{20} = 0{,}2, \quad P(A) = 0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

Задача 2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпало четное число очков.

Решение.

Событие A = {выпало четное число очков: 2, 4, 6}.

$n = 6$ – число всех равновозможных исходов опыта.

$m = 3$ – число исходов, благоприятствующих появлению события A, следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0{,}5, \quad P(A) = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Задача 3. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков.

Решение.

Рассмотрим событие

A = {сумма выпавших очков равна 6}.

При подбрасывании первой кости возможны шесть исходов. И для каждого из них возможны еще шесть – когда бросается вторая кость. Следовательно, у данного опыта – бросания двух игральных костей – всего возможных исходов: $n = 6 \cdot 6 = 36$.

Перечислим благоприятствующие исходы:

$$1+5 \qquad 2+4 \qquad 3+3 \qquad 4+2 \qquad 5+1.$$

Всего вариантов с суммой шесть очков $m = 5$.

Тогда $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}.$$

Ответ: $\frac{5}{36}$.

Задача 4. В ящике 15 деталей, из них 3 с дефектом. Сборщик наудачу берет одну деталь. Какова вероятность того, что взята деталь без дефекта?

Решение.

Рассмотрим событие B = {взята деталь без дефекта}.

Всего исходов опыта $n=15$, исходов, благоприятствующих появлению события B, $m = 15 - 3 = 12$, следовательно,

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}=0{,}8, \qquad P(B)=0{,}8.$$

Ответ: $0{,}8$.

Задача 5. В ящике 15 деталей, из них 3 с дефектом. Сборщик наудачу берет две детали. Какова вероятность того, что обе детали с дефектом?

Решение.

Событие A = {взяты 2 детали с дефектом}.

$$\begin{array}{ccc}
\text{15 деталей} & — & \text{3 с дефектом, 12 без дефекта} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{2 детали} & — & \text{2 с дефектом} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
n=C_{15}^{2} & & m=C_{3}^{2}
\end{array}$$

Если в предыдущей задаче выбиралась одна деталь, то число исходов было равно количеству соответствующих деталей. В данной задаче выбирают уже две детали, то есть нам надо рассмотреть различные комбинации по две детали. Очевидно, что эти комбинации должны отличаться хотя бы одним новым элементом, следовательно, для подсчета числа вариантов выбора нужно воспользоваться формулами комбинаторики, а именно числом сочетаний по два элемента.

Таким образом, всего исходов опыта:

$$n=C_{15}^{2}=\frac{15!}{2!\cdot 13!}=\frac{14\cdot 15}{1\cdot 2}=105,$$

исходов, благоприятствующих появлению события A:

$$m=C_{3}^{2}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=3,$$

следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2}{C_{15}^2} = \frac{3}{105} = \frac{1}{35}, \qquad P(A) = \frac{1}{35}.$$

Ответ: $\frac{1}{35}$.

Задача 6. В группе из 20 студентов, среди которых 2 отличника, надо выбрать 4 человека для участия в конференции. Найти вероятность того, что все отличники попадут на конференцию.

Решение.

Итак, на конференцию надо выбрать 4 человека, среди которых должны быть все отличники (а их 2 человека) и, следовательно, еще 2 человека – не отличники.

Рассмотрим событие:

A = {на конференцию выбраны 2 отличника и 2 не отличника}.

20 студентов	—	2 отличника,		18 не отличников
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
4 студента	—	2 отличника	***и***	2 не отличника
$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
$n = C_{20}^4$		$m_1 = C_2^2 = 1$		$m_2 = C_{18}^2$

Число всех возможных способов выбора 4 студентов на конференцию равно:

$$n = C_{20}^4 = \frac{20!}{4! \cdot 16!} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4845.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно произведению $m_1 \cdot m_2$ (выбор двух отличников и двух не отличников):

$$m = m_1 \cdot m_2 = C_2^2 \cdot C_{18}^2 = 1 \cdot \frac{18!}{2! \cdot 16!} = \frac{17 \cdot 18}{2} = 153.$$

Тогда $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{153}{4845} = \frac{3}{95}, \qquad P(A) = \frac{3}{95}.$$

Ответ: $\frac{3}{95}$.

Задача 7. На электронном замке установлено пять различных букв и четыре разных цифры. Бабушка забыла «ключ» к замку и стала нажимать кнопки замка наудачу. Найти вероятность того, что бабушка откроет дверь, если «ключ» состоит из трех разных букв и двух разных цифр, нажимаемых в определенном порядке.

Решение.

Рассмотрим событие A = {бабушка подобрала «ключ» к замку}.

Чтобы составить «ключ», нужно нажать:

3 разных буквы из 5 ***и*** 2 разных цифры из 4,

причем в *определенном порядке*. Следовательно, количество всех различных ключей равно:

$$n = A_5^3 \cdot A_4^2.$$

А откроет замок только один «ключ», то есть $m = 1$.

Искомая вероятность события A равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_5^3 \cdot A_4^2}.$$

Так как $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$, то

$$P(A) = \frac{1}{A_5^3 \cdot A_4^2} = \frac{1}{720}.$$

Ответ: $\frac{1}{720}$.

Задача 8. В классе 33 учащихся, среди них два друга – Михаил и Олег. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найти вероятность того, что Михаил и Олег окажутся в одной группе.

Решение.

Разобьем класс из 33 человек на три равные группы по 11 человек в каждой.

Допустим, Михаил попал в одну из групп, тогда для Олега существует $n = 32$ свободных места (одно уже занято Михаилом).

Но Олег хочет быть в одной группе с Михаилом. В этой группе для него есть только $m = 10$ свободных мест.

Таким образом, вероятность желаемого для Олега события равна:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$$

Ответ: 0,3125.

Задача 9. На олимпиаде по социологии участников рассаживают по трём аудиториям. В первых двух по 110 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчете выяснилось, что всего было 400 участников. Найти вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Решение.

Найдем число участников, которые попадут в запасную аудиторию:

$$400 - (110 + 110) = 180.$$

Таким образом, у случайного человека всего $n = 400$ возможностей попасть хоть на какое-нибудь место хоть в какой-то аудитории.

Благоприятствующих возможностей попасть именно в запасную аудиторию у него только $m = 180$.

Следовательно, искомая вероятность равна:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{180}{400} = \frac{45}{100} = 0{,}45.$$

Ответ: 0,45.

Задача 10. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найти вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 2, но не дойдя до отметки 5 часов.

Решение.

По условию задачи, часовая стрелка должна занять сектор, закрашенный на рисунке ниже.

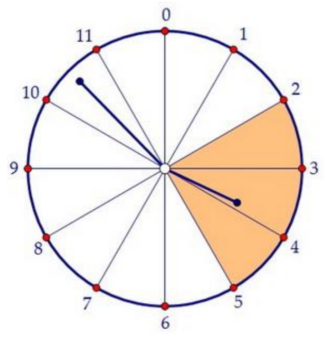


Рис. 1

Сектор состоит из трёх маленьких секторов, в то время как всего их 12 штук. Следовательно, вероятность события попасть в нужный сектор:

$$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

Задача 11. На конференцию приехали 7 ученых из Канады, 5 из Германии, 2 из Италии и 6 из России. Каждый день делается по пять докладов. Какова вероятность того, что профессор Петров из России выступит с докладом во второй день?

Решение.

Всего на конференцию приехало 20 ученых. Каждый день делается по пять докладов, следовательно, конференция длилась 4 дня.

Допустим, что ученые тянут жребий, в какой день они делают доклад: карточки с цифрами

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad 2\ 2\ 2\ 2\ 2 \quad 3\ 3\ 3\ 3\ 3 \quad 4\ 4\ 4\ 4\ 4.$$

Всего карточек 20, следовательно, число вариантов взять одну любую карточку для профессора Петрова равно $n = 20$.

Чтобы выступить с докладом во второй день, нужно вытянуть карточку с цифрой 2, а таких карточек пять. То есть число благоприятствующих исходов равно $m = 5$.

Следовательно, вероятность выступить с докладом во второй день конференции для профессора Петрова равна:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25, \qquad P = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

Задача 12. Монету подбрасывают три раза. Какова вероятность того, что только один раз выпадет герб?

Решение.

Заметим, что задачу можно сформулировать по-другому: бросили три монеты одновременно. На решение это не повлияет.

При трехкратном подбрасывании монеты возможны следующие варианты (исходы опыта):

1 –	герб	герб	герб
2 –	герб	герб	цифра

3 –	герб	цифра	герб
4 –	цифра	герб	герб
5 –	**герб**	цифра	цифра
6 –	цифра	**герб**	цифра
7 –	цифра	цифра	**герб**
8 –	цифра	цифра	цифра

Всего вариантов $n = 8$. Из них только в трех исходах (варианты 5, 6 и 7) герб появляется один раз, то есть $m = 3$.

Следовательно, вероятность выпадения одного герба при трехкратном подбрасывании монеты равна:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{3}{8} = 0{,}375, \qquad P = 0{,}375.$$

Ответ: 0, 375.

Задачи с монетами

- При подбрасывании монеты **один** раз возможны 2 исхода:

  герб или цифра,

  если монета подбрасывается **два** раза, то возможных исходов –

  $$2^2 = 4,$$

  если монета подбрасывается **три** раза, то возможных исходов –

  $$2^3 = 8,$$

следовательно,

если монета подбрасывается $\boldsymbol{n}$ раз, то возможных исходов – 2^n.

- Пусть монета подбрасывается $\boldsymbol{n}$ раз.
  Число исходов, благоприятствующих выпадению герба (цифры) $\boldsymbol{k}$ раз, равно $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Задача 13. Монету бросают четыре раза. Найти вероятность того, что орел выпадет ровно три раза.

Решение.

По условию задачи, всего бросков было $n = 4$. Требуемое число выпадений герба: $k = 3$.

Число всех исходов опыта: $2^4 = 16$.

Число благоприятствующих исходов:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4.$$

Следовательно, искомая вероятность равна:

$$P = \frac{C_4^3}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

Упражнение

Испытание – экзамен. Возможные исходы: оценки 5, 4, 3, 2 и 0 (экзамен не сдан). Можно ли применить классическое определение вероятности при подсчете вероятности сдачи или несдачи экзамена?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В урне 4 красных и 7 синих шаров. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар а) белый, б) красный, в) не белый.

2. Испытание состоит в подбрасывании игральной кости. Найти вероятность событий:

A={выпавшее на верхней грани число очков делится на 12},
B={выпавшее на верхней грани число очков равно 2},
C={выпавшее на верхней грани число очков делится на 2},
D={на верхней грани появится не более пяти очков}.

3. В группе 25 студентов, из которых 5 учатся отлично, 12 – хорошо, 6 – удовлетворительно и 2 – слабо. Найти вероятность того, что наугад выбранный студент отличник или хорошист.

4. Студент выучил 20 вопросов из 25. Найти вероятность того, что ему достанется вопрос, который он не выучил.

5. Бросаются две монеты. Найти вероятность того, что на одной выпадет герб, а на другой цифра.

6. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 27 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик имеет а) одну окрашенную грань, б) две окрашенные грани, в) три окрашенные грани.

7. Монета брошена два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз появится герб?

8. Бросается игральная кость. Найти вероятность выпадения на верхней грани двух или шести очков.

9. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших на верхних гранях очков равна 5.

10. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших на верхних гранях очков равна 5, а их разность равна 3.

11. В урне 25 шаров: 5 белых, 15 красных, 5 синих. Вынимается 1 шар. Какова вероятность вынуть цветной (красный или синий) шар?

12. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлечённая деталь окажется неокрашенной.

13. Даны числа от 1 до 30 включительно. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число является делителем числа 30?

14. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар из урны, содержащей 5 белых и 15 черных шаров, окажется белым.

15. Найти вероятность того, что второй вынутый шар из урны, содержащей 5 белых и 6 черных шаров, окажется белым, если первый, вынутый и отложенный в сторону шар, был белым.

16. Найти вероятность того, что при двух бросках игральной кости оба раза появится одинаковое число очков.

17. Найти вероятность того, что при двух бросках игральной кости сумма выпавших очков будет равна 8.

18. Найти вероятность того, что при двух бросках игральной кости произведение выпавших очков будет равно 8.

19. Бросаются три монеты. Найти вероятность событий:
A={выпадут три герба или три цифры}, B={выпадут хотя бы два герба}.

20. Найти вероятность того, что при вынимании наудачу одной карты из колоды в 36 карт будет вынут туз.

21. В колоде 36 карт. Наудачу вынимаются из колоды 2 карты. Найти вероятность того, что вторая карта туз, если первая карта оказалась валет.

22. На шести карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Две из них вынимаются одна за другой. Найти вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой.

23. В коробке 5 шаров, из которых 3 красных. Найти вероятность того, что два случайно выкатившихся шара будут красные.

24. В партии из 10 деталей имеется 6 стандартных. Найти вероятность того, что две взятых наудачу детали нестандартны.

25. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов окажется 5 отличников.

26. В магазине имеются 30 телевизоров, причем 20 из них импортных. Вероятности покупки телевизоров разных марок одинаковы. Найти вероятность того, что среди 5 проданных в течение дня телевизоров окажется 3 импортных телевизора.

27. Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются четыре билета, причем каждый может выиграть только один билет. Найти вероятность того, что среди обладателей билета окажутся а) четыре юноши, б) четыре девушки, в) два юноши и две девушки, г) три девушки и один юноша.

28. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

29. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, эти буквы рассыпал. Найти вероятность того, что он снова составит слово «книга».

30. Из шести букв разрезной азбуки составлено слово «ананас». Ребенок, не умеющий читать, эти буквы рассыпал. Найти вероятность того, что он снова составит слово «ананас».

31. Какова вероятность того, что случайным образом переставив написанные на отдельных одинаковых карточках буквы в слове «мама», получим это же слово?

32. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной из перемешанных пяти одинаковых карточек с буквами **а, м, р, т, ю** после расположения их «в одну линию» можно будет прочесть слово «юрта».

33. Слово «лотос», составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем сложены в коробку. Из коробки наугад извлекают одну за другой 3 буквы. Найти вероятность того, что получится слово «сто».

34. Абонент забыл три последние цифры номера телефона и, помня лишь, что эти цифры различны и нечётны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что он сделал это верно.

35. Абонент забыл 2 последние цифры номера телефона и, помня, что эти обе цифры различны и больше 4, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что он это сделал верно.

36. Найти вероятность того, что, вынув наудачу 3 шара из урны, содержащей 5 белых, 7 синих и 8 черных шаров, получим шары всех цветов.

37. Установите соответствие между событиями и вероятностями:

A={верно набрать 3 цифры телефонного номера, зная, что все они различные}	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$
B={вытащить 3 белых шара из урны, содержащей 5 шаров, среди которых 3 белых}	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{720}$

38. Установите соответствие между событиями и вероятностями:

A={верно набрать 3 цифры телефонного номера, зная, что все они различны и отличны от нуля}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{C_9^3}$
B={взять три нестандартных детали из ящика с 9 деталями, среди которых 6 стандартных}	$\frac{1}{A_9^3}$	0,3

39. Среди 10 мест студенческой практики 5 мест в Иркутске, 3 – в Красноярске и 2 – в Улан-Удэ. Установите соответствие между событиями и вероятностями:

A={два друга попадут на практику в один город}	$\frac{11}{120}$	$\frac{109}{120}$
B={два друга попадут на практику в разные города}	$\frac{13}{45}$	$\frac{31}{45}$
C = {три друга попадут на практику в один город}		
D = {три друга попадут на практику в разные города}	$\frac{14}{45}$	$\frac{1}{4}$

40. В урне 10 шаров: 5 белых, 3 черных и 2 синих. Все шары пронумерованы от 1 до 10. Установите соответствие между событиями и вероятностями:

A={при последовательном вытаскивании всех шаров сначала идут подряд белые, затем черные и, наконец, синие шары}	$\frac{1}{10!}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5}$
B={при последовательном вытаскивании всех шаров их номера идут в возрастающем порядке}	$\frac{5!\cdot 3!\cdot 2!}{10!}$	$\frac{5!+3!+2!}{10!}$

41. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял две детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

42. В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди трёх взятых наудачу деталей будет хотя бы одна нестандартная.

43. На тренировку пришли 22 школьника, среди них два брата – Петя и Вася. Школьников случайным образом делят на две футбольные команды по 11 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Петя и Вася окажутся в одной команде.

44. На сортировочном пути в ожидании подачи на подъездной путь стоят (без подборки) 10 вагонов для 10 различных грузовых пунктов. Определить вероятность того, что вагоны стоят в нужном для подачи порядке.

45. Через сортировочную горку на станции C проходит в сутки 4500 вагонов, из которых на назначение № 1 – 450 вагонов, № 2 – 300 вагонов, № 3 – 200, № 4 – 600, № 5 – 700. Определить вероятности следования вагонов на каждое назначение.

46. Число пассажиров мужчин и женщин, отправляемых со станции N пассажирским поездом, одинаково. Определить вероятность того, что в купе поезда будут либо одни мужчины, либо одни женщины.

47. По графику на участке X проложено 100 ниток для грузовых поездов. В среднем в сутки с этого участка прибывает 50 разборочных и 20 транзитных грузовых поездов. Определить вероятность прибытия разборочного поезда или транзитного поезда по какой-либо нитке графика.

48. В составах из 30 вагонов 5 шестиосных, а остальные – четырехосные. При расформировании составы делятся на две равные (по числу вагонов) части. Определить вероятность того, что: а) в первой половине состава будет один шестиосный вагон; б) в первой половине состава будут все четырехосные вагоны.

49. На сортировочном пути после расформирования составов накопилось 14 вагонов (из каждого состава по вагону), из которых 4 шестиосных, а остальные четырехосные. Определить вероятность того, что все шестиосные вагоны будут стоять вместе одной группой.

50. Пассажир оставил ручную кладь в автоматической камере хранения и забыл номер из 4 различных цифр, который он набрал при закрытии дверцы. Определить вероятность того, что, набирая случайно номер из 4 цифр, пассажир откроет ячейку камеры хранения.

2.3. Статистическое определение вероятности

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА (частота) события A: $W(A)=\frac{n_A}{n}$,
где n – число проведенных испытаний,
n_A – число появлений события A.

Относительная частота обладает свойством статистической устойчивости, т. е. при большом числе повторных испытаний колеблется вокруг постоянной – вероятности события:

$$W(A)\cong P(A)$$

Задача 1. Опыт провели 100 раз. Событие C произошло в этих опытах 45 раз. Найти частоту появления события C.

Решение.

Отношение числа тех опытов, в которых событие С произошло, к общему числу проведенных опытов равно

$$W(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{45}{100}=0{,}45.$$

Ответ: $0{,}45$.

Задача 2. Во время тренировки в стрельбе по цели было сделано 30 выстрелов и зарегистрировано 26 попаданий. Какова относительная частота попадания по цели в данной серии выстрелов?

Решение.

Событие A = {попадание в цель} произошло в 26 случаях, то есть $n_A=26$. Общее число испытаний $n=30$, поэтому

$$W(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{26}{30}=\frac{13}{15}.$$

Ответ: $\frac{13}{15}$.

Задача 3. В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

Решение.

Рассмотрим событие A = {рождение девочки}.

По условию задачи $n = 5000$, $n_A = 5000 - 2512 = 2488$. Тогда частота рождения девочек в городе равна

$$W(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{2488}{5000} = 0{,}498.$$

Ответ: $0{,}498$.

Задача 4. На тренировке спортсмен сделал 10 выстрелов по мишени. Относительная частота попаданий оказалась равна 0,8. Сколько раз спортсмен попал в мишень?

Решение.

Частота попаданий вычисляется по формуле: $W(A) = \frac{n_A}{n}$.

По условию задачи $W(A) = 0{,}8$, а общее число выстрелов $n = 10$, следовательно, имеем:

$$W(A) = \frac{n_A}{10} = 0{,}8,$$

откуда $n_A = W(A) \cdot n = 0{,}8 \cdot 10 = 8$ попаданий.

Ответ: 8.

Задача 5. Вероятность того, что новый принтер в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,055. В некотором городе из 1000 проданных принтеров в течение года в гарантийную мастерскую поступило 53 штуки. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Решение.

Рассмотрим событие

A = {принтер поступил на гарантийный ремонт}.

По условию задачи вероятность $P(A) = 0{,}055$.

В течение года в гарантийную мастерскую поступило 53 принтера из 1000 купленных, следовательно, частота события A равна:

$$W(A) = \frac{53}{1000} = 0{,}053.$$

Тогда разница между вероятностью и частотой события A равна:

$$P(A) - W(A) = 0{,}055 - 0{,}053 = 0{,}002.$$

Ответ: $0{,}002$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Отдел технического контроля обнаружил 3 нестандартных детали в партии из 80 случайно отобранных деталей. Найти частоту появления нестандартных деталей.

2. По цели произведено 25 выстрелов, причём было зарегистрировано 19 попаданий. Найти частоту поражения цели.

3. Найти частоту появления шестерки при 60 бросаниях игральной кости, если шестерка выпала 30 раз.

4. Относительная частота следования через станцию пассажирских поездов равна 0,2. В среднем через станцию проходит 20 пассажирских поездов. Найти количество поездов, проходящих через станцию в течение суток.

5. При испытании партии в 200 приборов относительная частота негодных оказалась равна 0,05. Найти число годных приборов в партии.

6. Через сортировочную горку в сутки проходит 300 вагонов направления № 1. Частота появления вагонов этого направления 0,15. Найти количество вагонов, в среднем проходящих через сортировочную горку в сутки.

7. По отчетным данным за август на сортировочной станции C было сформировано 1550 составов, среди которых 310 в направлении N. Найти частоту формирования составов в направлении N .

8. Какова частота появления четных чисел на отрезке натурального ряда от 1 до 20?

9. Проверяя качество 400 изделий, установили, что 20 из них относятся ко второму сорту, а остальные – к первому. Найти частоту изделий первого сорта среди 400 проверенных.

10. При стрельбе по мишени частота попаданий оказалась равна 0,75. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

11. Частота появления бракованной детали на автоматическом станке равна 0,06. Число бракованных деталей равно 15. Найти количество деталей, произведенных станком.

12. Отдел технического контроля обнаружил 8 бракованных книг в партии из случайно выбранных 56 книг. Найти частоту появления бракованных книг в этой партии.

13. Через станцию в течение суток проходят 80 поездов, из них 10 пассажирских. Какова частота следования пассажирского поезда?

14. Из 50 сотрудников фирмы 5 человек брали больничный лист в течение года. Найти частоту заболеваемости сотрудников фирмы.

15. Французский естествоиспытатель Жорж Бюффон (1707–1788) бросил монету 4040 раз, и при этом герб выпал в 2048 случаях. Английский ученый Карл Пирсон (1857–1936) бросил монету 24000 раз, при этом герб выпал 12012 раз. Найти частоту выпадения герба в каждой серии испытаний. Результаты округлить до десятых.

16. В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2480 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе.

17. Вероятность того, что пассажир выйдет на станции N, равна $0{,}35$. В субботу билет до станции N купили 30 человек из 100. На сколько отличается частота события «пассажир едет до станции N» от его вероятности?

18. Вероятность того, что новый пылесос в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,065. В некотором городе из 1000 проданных пылесосов в течение года в гарантийную мастерскую поступило 70 штук. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

19. Вероятность того, что новый телефон в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,0045. В некотором городе из 10000 проданных телефонов в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

20. Вероятность вычислительной ошибки при решении задачи В4 равна 0,37. Из 100 школьников на пробном ЕГЭ 43 человека неверно решили задание В4. На сколько отличается частота события «ошибка в задаче В4» от его вероятности?

21. Новый препарат давался 1000 пациентам, больным одной и той же болезнью. По окончании курса лечения 952 пациента исцелились. Какова относительная частота исцеления в рассмотренном исследовании?

22. По отчетным данным за декабрь на сортировочной станции было сформировано 1550 составов, из которых 310 в направлении K. Определить приближенно вероятность формирования поездов в этом направлении.

2.4. Геометрическая вероятность

Если *число исходов некоторого опыта бесконечно*, то классическое определение вероятности не может оценить степень возможности наступления того или иного события.

В этом случае пользуются геометрическим подходом к определению вероятности.

Если *пространство элементарных исходов* Ω *– некоторое множество на прямой, на плоскости или в пространстве*, то вероятность события A есть отношение меры A (длины, площади, объема) к мере Ω пространства элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

Пусть отрезок длиной l включается в отрезок длиной L.
Вероятность события

A = {наудачу брошенная точка попала на отрезок длиной l}:

$$P(A) = \frac{l}{L}.$$

Пусть плоская фигура площадью s включается в плоскую фигуру площадью S.
Вероятность события

A = {наудачу брошенная точка попала на плоскую фигуру площадью s}:

$$P(A) = \frac{s}{S}.$$

Пусть пространственная фигура объемом v включается в пространственную фигуру объемом V.

Вероятность события

A={наудачу брошенная точка попала в пространственную фигуру объемом v}:

$$P(A)=\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{V}}.$$

Задача 1. После сильного ливня на перегоне между 40-м и 70-м километрами произошел размыв железнодорожного полотна. Какова вероятность того, что размыв произошел между 50-м и 55-м километрами пути?

Решение.

Рассмотрим событие

A = {размыв ж.-д. полотна 50-м и 55-м километрами }.

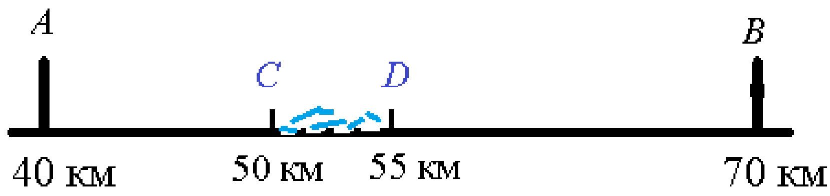


Рис. 2

Попадание точки размыва в отрезок AB соответствует множеству всех возможных исходов, а попадание точки размыва в отрезок CD благоприятствует появлению события A.

Вероятность события A равна отношению длины отрезка CD к длине отрезка AB:

$$P(A)=\frac{CD}{AB}=\frac{55-50}{70-40}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}, \qquad P(A)=\frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Задача 2. В круг радиусом R помещен меньший круг радиусом r. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в больший круг, попадет также и в меньший круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

Решение.

Рассмотрим событие:

A = {точка, брошенная в больший круг, попадет также и в меньший круг}.

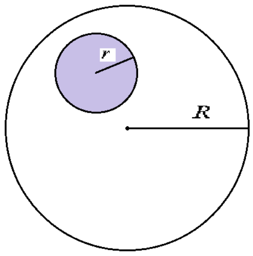


Рис. 3

Вероятность события A равна отношению площади меньшего круга к площади большего круга.

$$s = \pi r^2, \quad S = \pi R^2,$$

следовательно, $P(A) = \dfrac{s}{S} = \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} = \dfrac{r^2}{R^2}$, $\quad P(A) = \dfrac{r^2}{R^2}$.

Ответ: $\dfrac{r^2}{R^2}$.

Задача 3. (*Задача о встрече.*) Два друга условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи друзей, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любое время?

Решение.

Обозначим через x и y соответственно моменты прихода друга I и друга II. Встреча состоится, если $|x - y| \le 10$.

Если изображать x и y как декартовы координаты на плоскости, то все возможные исходы изобразятся точками квадрата со сторонами 60 (60 минут между 14.00 и 15.00).

Множество точек квадрата, удовлетворяющих условию встречи, представляет собой шестиугольную фигуру, которая получается в результате пересечения квадрата и полосы, лежащей между прямыми $x - y = 10$ и $x - y = -10$.

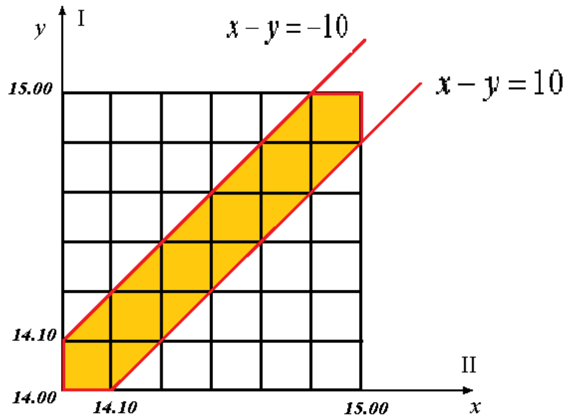


Рис. 4

Искомая вероятность события A = {друзья встретятся} равна отношению площади этого шестиугольника к площади квадрата.

Площадь квадрата равна $S = 60 \cdot 60 = 3600$.

Площадь шестиугольника равна разности между площадью квадрата и суммой площадей двух равных прямоугольных треугольников с катетами, равными 50, то есть

$$s = S_{кв} - 2S_{\Delta} = 3600 - 2 \cdot \frac{1}{2} 50 \cdot 50 = 3600 - 2500 = 1100.$$

Следовательно, вероятность события A равна:

$$P(A) = \frac{s}{S} = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}, \qquad P(A) = \frac{11}{36}.$$

Ответ: $\frac{11}{36}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вращающийся диск разделён на чётное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и чёрный цвет. По диску произведён выстрел. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры. Найти вероятность того, что пуля попадёт один из белых секторов.

2. На отрезке длиной 20 см помещен меньший отрезок, длиной 10 см. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения. Найти вероятность того, что точка, поставленная на большой отрезок, попадёт также и на меньший отрезок.

3. В круг вписан квадрат со стороной a. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в круг, попадет в квадрат?

4. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 см и 10 см соответственно. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от её расположения. Найти вероятность того, что точка, брошенная в большой круг, попадёт также и в кольцо, образованное построенными окружностями.

5. На плоскости начерчены три концентрические окружности радиусами 5, 10 и 15 см. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадает во внутреннее кольцо?

6. На участке между 50-м и 70-м км произошёл обрыв телефонной линии. Какова вероятность того, что обрыв произошёл между 55 и 60 км?

7. Автобус приходит на остановку с интервалом в 15 минут. Какова вероятность уехать в течение 3 минут?

8. Маршрутное такси ездит с интервалом в 5 минут. Какова вероятность уехать в течение 7 минут?

9. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором поочередно 1 минуту горит зелёный свет и 0,5 минуты красный. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Найти вероятность того, что он проедет перекрёсток без остановки.

10. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором поочередно 1 минуту горит зелёный свет и 0,5 минуты красный. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Найти вероятность того, что автомобилю придется затормозить у перекрестка.

11. Через точку пересечения маршрутов в горловине станции Б пропускается 20 поездов в сутки. Каждый поезд занимает маршрут 5 минут. Определить вероятность занятия маршрута передвижением

12. Два друга договорились встретиться между 10 и 11 часами. Каждый приходит в случайный момент времени и ждёт 15 минут. Какова вероятность того, что встреча состоится?

13. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу независимо друг от друга и равновозможно в течение светового дня (10 часов). Время стоянки первого парохода один час, второго – три часа. Найти вероятность того, что одному из них придётся ожидать освобождения причала.

14. Сектор А занимает половину рулетки, а ее вторая половина разделена на два одинаковых сектора Б и В. Какова вероятность того, что после раскручивания стрелка рулетки остановится: а) на секторе A; б) на секторе B?

15. На отрезке AB = 15 см произвольным образом выделен отрезок MN = 3 см. На отрезке AB случайным образом отмечается точка X. Какова вероятность того, что эта точка попадет на отрезок MN?

16. Внутри квадрата со стороной 10 см выделен круг радиусом 2 см. Случайным образом внутри квадрата отмечается точка. Какова вероятность того, что она попадет в круг?

17. Установите соответствие между событиями и вероятностями:

A = {точка, брошенная наудачу в круг, попадет в вписанный в него правильный треугольник}	$\dfrac{\pi}{9}$	$\dfrac{3}{4\pi}$
B = {точка, брошенная наудачу в правильный треугольник, попадет в вписанный в него круг}	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$	$\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

18. Установите соответствие между событиями и вероятностями:

A = {точка, брошенная наудачу в квадрат, попадет в вписанный в него круг}	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{4-\pi}{4}$
B = {точка, брошенная наудачу в круг, попадет в вписанный в него квадрат}		
C = {точка, брошенная наудачу в квадрат, не попадет в вписанный в него круг}	$\dfrac{\pi-2}{\pi}$	$\dfrac{2}{\pi}$
D ={точка, брошенная наудачу в круг, не попадет в вписанный в него квадрат}		

19. На участке между пунктами, расстояние между которыми 160 км, произошёл обрыв линии электропередачи. Установите соответствие между событиями и вероятностями:

A = {точка обрыва находится не менее чем за 60 км от каждого пункта}	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{5}{8}$
B = {точка обрыва находится не более чем за 60 км от одного или другого пункта}	0,25	0,75

20. Два друга договорились встретиться между 10 и 11 часами. Каждый приходит в случайный момент времени и ждёт 15 мин. Установите соответствие между событиями и вероятностями:

A = {встреча состоится} $\qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{1}{4}$

B = {встреча не состоится}

C = {встреча состоится после 10:30} $\qquad \frac{9}{16} \qquad \frac{7}{16}$

21. Установите соответствие между событиями и вероятностями:

A = {монета диаметра 2 см, брошенная на квадрат со стороной 10 см, пересечет сторону квадрата}

B = {монета диаметра 2 см, брошенная на квадрат со стороной 10 см, не пересечет сторону квадрата}

C = {точка, брошенная наудачу в квадрат со стороной 10 см, попадёт в монету диаметра 2 см, лежащую в квадрате}

$0{,}1\pi \qquad 0{,}01\pi$

$\frac{9}{25} \qquad \frac{16}{25}$

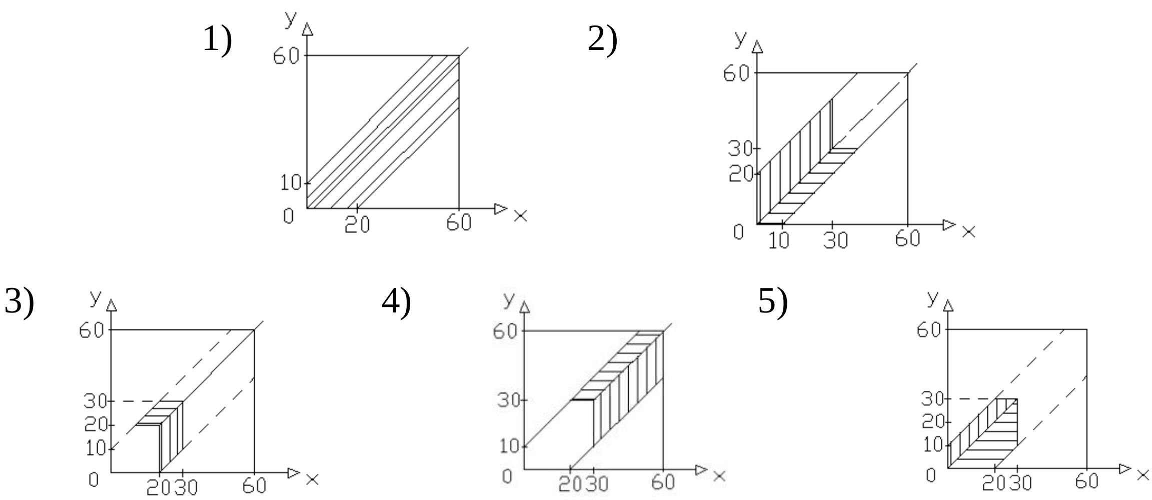
22. Мария и Иван договорились о встрече между 10 и 11 часами. Каждый приходит в случайный момент времени. Момент прихода Марии отмечается на оси OX, а Ивана – на оси OY. Установите соответствие между событиями и благоприятствующими областями (заштрихованы):

A = {встреча состоится после 10:30, если Мария ждёт 10 минут, а Иван 20 минут},

B = {встреча состоится между 10:20 и 10:30, если Мария ждёт 10 минут, а Иван 20 минут},

C = {встреча состоится не позже 10:30, если Мария ждёт 10 минут, а Иван 20 минут},

D = {встреча состоится, если Мария ждёт 10 минут, а Иван 20 минут}.



2.5. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Т.1. Вероятность суммы двух *несовместных* событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Т.2. Вероятность суммы двух *совместных* событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Следствие 1. Вероятность суммы нескольких *несовместных* событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Следствие 2. Сумма вероятностей попарно несовместных событий, образующих полную группу, равна единице:

если $A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega$, $A_1,A_2,\ldots,A_n$ – *несовместны*, то

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Следствие 3. Если A и $\overline{A}$ – *противоположные* события, то

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Следствие 4. Вероятность *противоположного* события равна:

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

- Обозначим $P(A)=p$, $P(\overline{A})=q$, тогда

$$p+q=1 \quad \text{или} \quad q=1-p.$$

Два события называются *независимыми*, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Несколько событий называются *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы.

Условная вероятность события A при условии, что событие B произошло:

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Т.3. Вероятность произведения двух *независимых* событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Т.4. Вероятность произведения двух *зависимых* событий равна произведению вероятности одного из событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A).$$

Следствие. Вероятность произведения трех *независимых* событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Следствие. Вероятность произведения трех *зависимых* событий:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B / A) \cdot P(C/AB).$$

Следствие. Вероятность появления *хотя бы одного* из нескольких независимых в совокупности событий равна разности между единицей и произведением вероятностей событий, противоположных данным:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n)$$

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n)$$

или $$P(\underbrace{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}_{\text{хотя бы одно из событий}}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n.$$

- Если $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$,

$$P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = \ldots = P(\overline{A}_n) = 1 - p = q, \text{ то}$$

$$P(\underbrace{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}_{\text{хотя бы одно из событий}}) = 1 - q^n.$$

Задача 1. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Прямоугольный треугольник», равна $0{,}35$. Вероятность того, что это вопрос на тему «Ромб», равна $0{,}2$. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение.

Рассмотрим события

A = {в билете вопрос на тему «Прямоугольный треугольник»},

B = {в билете вопрос на тему «Ромб»}.

Вероятности этих событий равны $P(A) = 0{,}35, \quad P(B) = 0{,}2$.

События несовместны, так как по условию, вопросов, которые одновременно относятся к двум темам, нет. То есть нужно найти вероятность события

$A + B$ = {в билете вопрос на тему «Вписанная окружность» *или* вопрос на тему «Параллелограмм»}.

По теореме сложения для несовместных событий получим:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}35+0{,}2=0{,}55, \quad P(A+B)=0{,}55.$$

Ответ: 0,55.

Задача 2. В урне находятся 5 синих и 7 желтых шаров. Наудачу из урны вынимают три шара. Какова вероятность того, что все шары одного цвета?

Решение.

Рассмотрим событие, вероятность которого надо найти:

A = {вынуты три шара одного цвета}.

Три шара одного цвета означает, что либо все шары синие, либо все шары желтые, поэтому рассмотрим еще два события:

A_1 = {вынуты три синих шара},

A_2 = {вынуты три желтых шара}.

Событие $A = A_1 + A_2$ (произойдет *или* A_1, *или* A_2), причем события A_1 и A_2 несовместны, следовательно, по теореме о вероятности суммы несовместных событий имеем:

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2).$$

Вероятности событий A_1 и A_2 вычислим, используя классическое определение вероятности.

1) Число всех исходов опыта:

$$n=C_{12}^3=\frac{12!}{3!\cdot 9!}=\frac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3}=10\cdot 11\cdot 2=220;$$

2) число исходов, благоприятствующих событию A_1:

$$m_1=C_5^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}=10;$$

3) число исходов, благоприятствующих событию A_2:

$$m_2=C_7^3=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=\frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}=35.$$

Тогда $\quad P(A_1)=\dfrac{m_1}{n}=\dfrac{10}{220}, \quad P(A_2)=\dfrac{m_2}{n}=\dfrac{35}{220},$

а вероятность того, что вынуты шары одного цвета, будет равна:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{10}{220} + \frac{35}{220} = \frac{45}{220} = \frac{9}{44},$$

$P(A) = \dfrac{9}{44}$.

Ответ: $\dfrac{9}{44}$.

Задача 3. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,18. Найти вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение.

Рассмотрим события

A = {кофе закончится в первом автомате},

B = {кофе закончится во втором автомате}.

Тогда

$A \cdot B$ = {кофе закончится в обоих автоматах},

$A + B$ ={кофе закончится хотя бы в одном автомате}.

По условию $P(A) = P(B) = 0{,}4$; $P(A \cdot B) = 0{,}18$.

События A и B совместные, следовательно,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}4 + 0{,}4 - 0{,}18 = 0{,}62.$$

Тогда вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна $1 - 0{,}62 = 0{,}38$.

Ответ: 0,38.

Задача 4. При расформировании составов встречаются вагоны весом $Q_1 : 20-30$ т, $Q_2 : 30-40$ т, $Q_3 : 40-50$ т, $Q_4 : 50-60$ т с вероятностями $p_1 = 0{,}10$, $p_2 = 0{,}15$, $p_3 = 0{,}15$, $p_4 = 0{,}20$. Найти вероятность появления вагона весом: а) $Q : 20-60$ т; б) меньше 20 т или больше 60 т.

Решение.

а) Рассмотрим событие Q ={появление вагона весом $20-60$ т}.

Его можно представить как сумму четырех несовместных событий:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4.$$

Следовательно, вероятность появления вагона весом $Q: 20-60$т равна:

$$P(Q) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}6.$$

б) События Q = {появление вагона весом $20-60$т} и

$\overline{Q}$ = {появление вагона весом менее 20 т или более 60 т}

взаимно противоположны, а следовательно, справедливо равенство:

$$P(Q) + P(\overline{Q}) = 1.$$

Получаем: $P(\overline{Q}) = 1 - P(Q) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Ответ: а) $0{,}6$; б) $0{,}4$.

Задача 5. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна $0{,}94$. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна $0{,}87$. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение.

Пусть A = {чайник прослужит больше года, но меньше двух лет},

B = {чайник прослужит больше двух лет},

тогда $A + B$ = {чайник прослужит больше года}.

По условию задачи $P(B) = 0{,}87$, $P(A + B) = 0{,}94$.

События A и B несовместные, вероятность их суммы равна

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Используя данные из условия, получаем

$$0{,}94 = P(A) + 0{,}87.$$

Следовательно, искомая вероятность равна:

$$P(A) = 0{,}94 - 0{,}87 = 0{,}07.$$

Ответ: $0{,}07$.

Задача 6. Если шахматист А. играет белыми, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью $0{,}57$. Если А. играет черными, то он выигрывает у Б. с вероятностью $0{,}45$. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найти вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение.

Основное событие A = {шахматист А. выиграет обе партии} можно представить через события:

A_1 = {шахматист А. выиграет первую партию}

и A_2 = {шахматист А. выиграет вторую партию},

то есть $A = A_1 \cdot A_2$.

Пусть первую партию шахматист А. играет белыми, тогда

$$P(A_1) = 0{,}57, \quad P(A_2) = 0{,}45.$$

Возможности выиграть первую и вторую партии не зависят друг от друга, следовательно, по теореме о вероятности произведения независимых событий получим:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}57 \cdot 0{,}45 = 0{,}2565, \quad P(A) = 0{,}2565.$$

Ответ: 0,2565.

Задача 7. По отзывам покупателей Петр Сергеевич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина A, равна 0,7. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина $Б$, равна 0,8. Петр Сергеевич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Решение.

Рассмотрим события

A_1 = {магазин A доставит товар},

A_2 = {магазин $Б$ доставит товар}

и противоположные им события:

$\overline{A}_1$ = {магазин A не доставит товар},

$\overline{A}_2$ = {магазин $Б$ не доставит товар}.

Вероятность того, что первый магазин не доставит товар, равна:

$$P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3,$$

вероятность того, что второй магазин не доставит товар, равна:

$$P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2\ .$$

Поскольку события $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06.$$

Ответ: 0,06.

Задача 8. В первой партии из 60 изделий содержится 8 дефектных, во второй партии из 40 изделий содержится 4 дефектных. Из каждой партии взяли по одному изделию. Найти вероятность того, что оба изделия дефектные.

Решение.

Рассмотрим событие, вероятность которого надо найти:

$$C = \{\text{оба изделия дефектные}\}.$$

Событие C сложное, может быть выражено через простые события:

$$A = \{\text{изделие из первой партии дефектное}\}$$

$$B = \{\text{изделие из второй партии дефектное}\}.$$

Так как надо найти вероятность того, что оба изделия дефектные (из первой партии, *и* из второй), то событие C равно произведению событий A и B, то есть $C = A \cdot B$.

События A и B независимые, так как партии изделий разные. Следовательно, по теореме умножения независимых событий получим

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Вычислим вероятности событий A и B.

В первой партии $n_1 = 60$ изделий, из них $m_1 = 8$ дефектных, следовательно, по классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m_1}{n_1} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}.$$

Аналогично для второй партии: $n_2 = 40$, $m_2 = 4$, следовательно,

$$P(B) = \frac{m_2}{n_2} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}.$$

Тогда вероятность события C будет равна:

$$P(C)=P(A)\cdot P(B)=\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{75},\quad P(C)=\frac{1}{75}.$$

Ответ: $\frac{1}{75}$.

Задача 9. На сортировочном пути накапливаются вагоны двух назначений мощностью $N_1=80$ вагонов и $N_2=120$ вагонов в сутки. Среднее число вагонов в отцепе $r=2$. При формировании поезда необходимо отделить вагоны разных назначений. Найти среднее число расцепок при формировании состава из $n=50$ вагонов.

Решение.

Рассмотрим события:

A={появление отцепа первого назначения},

B={появление отцепа второго назначения}.

Вероятности этих событий равны соответственно

$$p_1=\frac{N_1}{N_1+N_2}\quad \text{и} \quad p_2=\frac{N_2}{N_1+N_2}.$$

Расцепку приходится делать в случае, если один отцеп (первый или второй) имеет первое, а другой – второе назначение. Указанные события A и B независимы, поэтому вероятность появления отцепов разных назначений равна

$$P(AB)=2p_1p_2=\frac{2N_1N_2}{(N_1+N_2)^2}.$$

Среднее число отцепов в составе $n_{\text{от}}=\frac{n}{r}$,

следовательно, среднее число расцепок:

$$m_{\text{р}}=n_{\text{от}}\cdot P(AB)=\frac{2nN_1N_2}{r(N_1+N_2)^2}.$$

При указанных в задаче данных получим:

$$P(AB)=\frac{2\cdot 80\cdot 120}{(80+120)^2}=0{,}48,\qquad n_{\text{от}}=\frac{50}{2}=25,$$

среднее число расцепок $m_{\text{р}}=n_{\text{от}}\cdot P(AB)=25\cdot 0{,}48=12$.

Ответ: 12.

Задача 10. В урне 9 белых и 1 черный шар. Вынули три шара (не возвращая в урну). Какова вероятность того, что все вынутые шары белые?

Решение.

Рассмотрим события:

A={первый вынутый шар – белый},

B={второй вынутый шар – белый},

C={третий вынутый шар – белый}.

Нужно найти вероятность события

ABC={все вынутые шары белые}.

События A, B и C зависимые, так как шары в урну не возвращаются и с каждым выниманием шаров в урне становится меньше на один.

Следовательно, имеем:

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C\,/\,AB),$$

$$P(ABC) = \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8} = 0{,}7.$$

Ответ: $0{,}7$.

Замечание. Задача может быть решена по классическому определению вероятности.

Задача 11. Студент сдает зачет. Вероятность ответить на заданный вопрос равна $0{,}7$ и не зависит от номера вопроса. Какова вероятность того, что студент ответит только на третий заданный ему вопрос?

Решение.

Событие A={студент ответил на заданный вопрос}, $P(A) = 0{,}7$.

Тогда вероятность того, что студент не ответил на вопрос, равна:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$$

Так как на первые два вопроса студент не ответил, а на третий ответил, то имеем:

$$P(\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot A) = P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\cdot P(A) = 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7 = 0{,}063.$$

Ответ: $0{,}063$.

Задача 12. Для сообщения о пожаре установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при пожаре сигнализатор сработает, равна $0{,}95$ для первого сигнализатора и $0{,}8$ для второго. Найти вероятность того, что при пожаре сработает только один сигнализатор.

Решение.

Введем основное событие, вероятность которого надо найти:

$$A = \{\text{при пожаре сработает только один сигнализатор}\}.$$

Событие является сложным, очевидно, его можно выразить через простые события:

$$A_1 = \{\text{при пожаре сработает первый сигнализатор}\},$$

$$A_2 = \{\text{при пожаре сработает второй сигнализатор}\}$$

и противоположные им события:

$$\overline{A_1} = \{\text{первый сигнализатор не сработает}\},$$

$$\overline{A_2} = \{\text{второй сигнализатор не сработает}\}.$$

Событие будет равно: $A = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$.

Тогда по теоремам сложения несовместных событий ($A_1 \cdot \overline{A_2}$ и $\overline{A_1} \cdot A_2$) и произведения независимых событий ($A_1, A_2, \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$) получим:

$$P(A) = P(A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2).$$

По условию задачи $P(A_1) = 0{,}95$, $P(A_2) = 0{,}8$, следовательно,

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 0{,}05, \qquad P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 0{,}2.$$

Тогда $P(A) = 0{,}95 \cdot 0{,}2 + 0{,}05 \cdot 0{,}8 = 0{,}23$, $\quad P(A) = 0{,}23$.

Ответ: $0{,}23$.

Задача 13. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,06 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение.

Рассмотрим событие, вероятность которого нужно найти:

$$C = \{\text{хотя бы один автомат исправен}\}.$$

Событие C сложное, может быть выражено через простые события:

$$A = \{\text{первый автомат исправен}\}$$

$$B = \{\text{второй автомат исправен}\}.$$

Вероятности $P(A) = P(B) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Вероятность события C вычислим несколькими способами.

1-й способ

Событие {хотя бы один автомат исправен} означает:

первый автомат исправен A и ***второй*** *автомат сломан* $\overline{B}$

или ***первый*** *автомат сломан* $\overline{A}$ *и* ***второй*** *автомат исправен* B

или ***оба автомата*** *исправны* A и B.

Тогда событие C будет равно:

$$C = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B .$$

События $A \cdot \overline{B}$, $\overline{A} \cdot B$ и $A \cdot B$ – несовместны, события A и B – независимы. Следовательно, по теоремам сложения несовместных событий и умножения независимых событий вероятность события C равна:

$$P(C) = P(A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B) = P(A \cdot \overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B) + P(A \cdot B) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(B).$$

По условию, вероятность неисправности каждого автомата равна $0{,}06$, вероятности того, что автоматы исправны, – $0{,}94$, тогда имеем:

$$P(C) = 0{,}94 \cdot 0{,}06 + 0{,}06 \cdot 0{,}94 + 0{,}94 \cdot 0{,}94 = 0{,}9964, \quad P(C) = 0{,}9964 .$$

2-й способ

Рассмотрим событие C = {хотя бы один автомат исправен}.

Противоположным ему событием является событие:

$\overline{C}$ = {оба автомата неисправны}.

Очевидно, что $\overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, причем события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ – независимы, следовательно,

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}),$$

$$P(\overline{C}) = 0{,}06 \cdot 0{,}06 = 0{,}0036.$$

Тогда

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}0036 = 0{,}9964, \quad P(C) = 0{,}9964 .$$

3-й способ

События A = {первый автомат исправен} и B = {второй автомат исправен} – совместные и независимые.

Воспользуемся теоремой о вероятности суммы двух совместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Имеем

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$

$$= 0{,}94 + 0{,}94 - 0{,}94 \cdot 0{,}94 = 0{,}9964.$$

Ответ: 0,9964.

Задача 14. Трем клиентам назначена деловая встреча на 12 часов дня. Вероятности опоздания для каждого из них соответственно равны 0,1, 0,2 и 0,3. Найти вероятность того, что на встречу вовремя придут:

а) только один клиент; б) только два клиента; в) все три клиента;

г) хотя бы один клиент.

Решение.

Рассмотрим события:

K_i={приход на встречу без опоздания i-го клиента},

$\overline{K}_i$={опоздание на встречу i-го клиента}, $i=1,2,3$.

Соответствующие вероятности равны:

$$P(\overline{K}_1)=q_1=0{,}1, \qquad P(K_1)=p_1=1-q_1=0{,}9,$$

$$P(\overline{K}_2)=q_2=0{,}2, \qquad P(K_2)=p_2=1-q_2=0{,}8,$$

$$P(\overline{K}_3)=q_3=0{,}3, \qquad P(K_3)=p_3=1-q_3=0{,}7.$$

Выразим через K_i и $\overline{K}_i$ необходимые нам события.

а) Событие A={только один клиент придет на встречу вовремя}, то есть

	первый придет вовремя	*и*	**второй**	*и*	**третий** опоздают,
или	**второй** придет вовремя	*и*	**первый**	*и*	**третий** опоздают,
или	**третий** придет вовремя	*и*	**первый**	*и*	**второй** опоздают.

Тогда событие A может быть выражено в виде:

$$A=K_1\overline{K}_2\overline{K}_3+\overline{K}_1K_2\overline{K}_3+\overline{K}_1\overline{K}_2K_3.$$

Используем теоремы сложения для несовместных событий и умножения для независимых событий:

$$P(A)=p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3,$$

$$P(A)=0{,}9\cdot0{,}2\cdot0{,}3+0{,}1\cdot0{,}8\cdot0{,}3+0{,}1\cdot0{,}2\cdot0{,}7=$$

$$= 0{,}054 + 0{,}024 + 0{,}014 = 0{,}092.$$

Вероятность только одному клиенту прийти на встречу вовремя равна $P(A) = 0{,}092$.

б) Событие B={только два клиента придут на встречу вовремя}, то есть

	первый *и* **второй** придут вовремя	*и* **третий** опоздает,
или	**первый** *и* **третий** придут вовремя	*и* **второй** опоздает,
или	**второй** *и* **третий** придут вовремя	*и* **первый** опоздает.

Выразим событие B через K_i и $\overline{K_i}$:

$$B = K_1K_2\overline{K}_3 + K_1\overline{K}_2K_3 + \overline{K}_1K_2K_3.$$

По теоремам сложения для несовместных событий и умножения для независимых событий получим:

$$P(B) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3,$$

$$P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 =$$

$$= 0{,}216 + 0{,}126 + 0{,}056 = 0{,}398.$$

Таким образом, вероятность того, что двое из клиентов придут на встречу вовремя, равна $P(B) = 0{,}398$.

в) Событие C={все три клиента придут на встречу вовремя}, то есть

и первый, *и* второй, *и* третий придут вовремя.

Следовательно, $C = K_1K_2K_3$.

По теореме умножения для независимых событий получим:

$$P(C) = p_1p_2p_3,$$

$$P(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

Таким образом, вероятность того, что все три клиента придут на встречу вовремя, равна $P(C) = 0{,}504$.

г) Событие D={хотя бы один клиент придет на встречу вовремя} является противоположным событию

$\overline{D}$={все три клиента опоздают}, $\overline{D} = \overline{K}_1\overline{K}_2\overline{K}_3$.

Тогда $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - q_1q_2q_3,$

$$P(D) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994, \quad P(D) = 0{,}994.$$

Ответ: а) $0{,}092$, б) $0{,}398$, в) $0{,}504$, г) $0{,}994$.

Задача 16. Пассажир может доехать до своей станции поездами двух назначений. Вероятность наличия в кассе билетов на поезд первого назначения равна $0{,}7$, на поезд второго назначения – $0{,}8$. Найти вероятность того, что пассажир купил билет.

Решение.

Пусть события N_1 и N_2 – наличие билетов на поезд первого и второго назначений, а $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ – соответственно отсутствие билетов.

Указанные события, очевидно, независимы. По условию вероятности событий равны:

$$p_1 = P(N_1) = 0{,}7, \qquad p_2 = P(N_2) = 0{,}8.$$

Тогда вероятности противоположных событий ($q = 1 - p$):

$$q_1 = P(\overline{N}_1) = 0{,}3, \qquad q_2 = P(\overline{N}_2) = 0{,}2.$$

Вероятность события K = {пассажир купил билет} вычислим тремя способами.

<u>1-й способ.</u> Событие K представим как сумму несовместных событий:

A = {в наличии есть билеты на поезд первого назначения и нет билетов на поезд второго назначения},
B = {в наличии есть билеты на поезд второго назначения и нет билетов на поезд первого назначения},
C = {в наличии есть билеты на поезда первого и второго назначений}.

$$K = A + B + C = N_1\overline{N}_2 + \overline{N}_1 N_2 + N_1 N_2.$$

Используя теоремы сложения для несовместных событий и умножения для независимых событий, получим:

$$P(K) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_2,$$

$$P(K) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

<u>2-й способ.</u> Представим событие K как наличие билетов на поезд первого или второго назначения:

$$K = N_1 + N_2.$$

События N_1 и N_2 совместны, так как в наличии могут быть билеты на каждый из поездов.

По теореме сложения для совместных событий получим:

$$P(K) = P(N_1 + N_2) = P(N_1) + P(N_2) - P(N_1 N_2),$$

$$P(K) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2,$$

$$P(K) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

<u>3-й способ.</u> Для вычисления вероятности события K перейдём к противоположному событию

$\overline{K}$ = {нет билетов и на поезд первого, и на поезд второго назначения}.

Тогда $$P(K) = 1 - P(\overline{K}) = 1 - P(\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2),$$

то есть $$P(K) = 1 - q_1 \cdot q_2, \qquad P(K) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}94.$$

Итак, вероятность покупки билета равна $0{,}94$.

Ответ: $0{,}94$.

Замечание. В данной задаче объем вычислений во всех способах колеблется незначительно. Но уже при наличии билетов на поезда трёх назначений существенно важен переход к противоположному событию (3-й способ).

Задача 17. Вероятность занятости каждого пути прибывающим поездом постоянна и независима от занятости других путей. Известно, что вероятность того, что хотя бы один их четырех путей свободен, равна 0,7599. Найти вероятность занятости каждого пути.

Решение.

Введем событие A_i = {занят i-й путь}, $i = 1,2,3,4$.

Вероятность занятости i-го пути равна $P(A_i) = p$, тогда вероятность того, что i-й путь свободен, равна $P(\overline{A_i}) = q = 1 - p$.

Для события B = {хотя бы один путь свободен}
противоположное событие:

$\overline{B}$ = {все пути заняты},

поэтому $$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 1 - P(\overline{B}) =$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) \cdot P(\overline{A}_4) = 1 - p^4.$$

По условию $P(B) = 0{,}7599$, то есть $1 - p^4 = 0{,}7599$,

откуда $p^4 = 0{,}2401$, $p > 0$, следовательно, $p = 0{,}7$.

Таким образом, вероятность занятости каждого пути прибывающим поездом $p = 0{,}7$.

Ответ: $0{,}7$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента при включении прибора – 0,03, второго – 0,06. Найти вероятность того, что:

а) при включении прибора откажет только первый элемент;

б) при включении прибора откажут оба элемента;

в) при включении прибора не откажет ни один элемент.

2. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих сигнализатора. Вероятность сработать при аварии для первого сигнализатора равна 0,9, для второго сигнализатора – 0,92 и для третьего – 0,95. Найти вероятность того, что:

а) при аварии сработают три сигнализатора;

б) при аварии не сработает ни один сигнализатор;

в) при аварии сработает только один сигнализатор.

3. Вероятность сдачи студентом зачета равна 0,8. Если зачет сдан, то студент допускается к экзамену, вероятность сдачи которого равна 0,75. Найти вероятность того, что студент сдаст зачет и экзамен.

4. В урне 10 красных и 6 синих шаров. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что шары будут одноцветными?

5. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что:

а) оба студента взяли хорошие билеты;

б) оба студента взяли плохие билеты.

6. В читальном зале 6 книг по теории вероятностей, из них 3 в переплете. Наудачу взяли 2 учебника. Какова вероятность того, что оба учебника в переплете?

7. Вероятность попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,9. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

8. Какова вероятность того, что наугад вынутый шар из урны, содержащей 10 красных, 15 синих и 5 белых шаров, окажется красным или белым?

9. Круговая мишень состоит из «яблочка» и двух концентрических кругов, вероятности попадания в которые соответственно равны 0,11; 0,24; 0,35. Найти вероятность промаха при одном выстреле по мишени.

10. Первый ящик содержит 2 белых и 10 черных шаров, второй – 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что: а) оба шара белые; б) два шара разных цветов.

11. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

12. Биатлонист 7 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,85. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 4 раза попал в мишени, а последние три промахнулся. Результат округлите до сотых.

13. В торговом центре два одинаковых автомата продают шоколадки. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончатся шоколадки, равна 0,4. Вероятность того, что шоколадки закончатся в обоих автоматах, равна 0,14. Найдите вероятность того, что к концу дня шоколадки останутся в обоих автоматах.

14. Вероятность того, что на тесте по истории учащийся Т. верно решит больше 9 задач, равна 0,68. Вероятность того, что Т. верно решит больше 8 задач, равна 0,78. Найдите вероятность того, что Т. верно решит ровно 9 задач.

15. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Фортуна» по очереди играет с командами «Политех», «Енисей» и «Спарта». Найдите вероятность того, что «Фортуна» будет начинать только первую и последнюю игры.

16. Стрелок стреляет по мишени. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

17. Вероятность того, что на тесте по биологии ученик верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что ученик верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что он верно решит ровно 11 задач.

18. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,19. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

19. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

20. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель для первого стрелка – 0,9, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что оба стрелка поразят мишень.

21. Найти вероятность только одного попадания при трех выстрелах по одной мишени, если вероятность попадания при каждом выстреле равна $p = 0{,}6$.

22. Какова вероятность появления на первой кости нечетного числа очков и на второй кости пяти очков при бросании двух игральных костей?

23. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,1. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две батарейки. Найти вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

24. Если футбольная команда А играет на домашнем стадионе, то она выигрывает у футбольной команды Б с вероятностью 0,4. Если команда А играет в гостях (на домашнем стадионе команды Б), то команда А выигрывает у команды Б с вероятностью 0,3. Команды А и Б играют два матча, по одному разу на домашнем стадионе каждой из них. Найти вероятность того, что команда А выиграет оба матча.

25. Ракета поражает цель с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что цель не окажется пораженной после 4 запусков ракеты?

26. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Вероятность попадания по цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем – 0,7. Сколько выстрелов потребуется сделать для того, чтобы вероятность хотя бы одного попадания по цели была не менее 0,97?

27. Студент знает 20 вопросов из 25, для получения зачета необходимо правильно ответить на 3 вопроса. Найти вероятность получения зачета.

28. Из урны, содержащей 10 белых и 5 черных шаров, последовательно вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что:

а) вынутые 3 шара будут белые; б) первый белый, а остальные черные.

29. Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка станка, равна 0,05. Найти вероятность того, что за три смены не произойдёт ни одной неполадки.

30. Две ракеты выпущены по цели. Вероятность поражения цели одной ракетой 0,7, другой 0,8. Найти вероятность того, что хотя бы одна из ракет поразит цель, если они выпущены независимо друг от друга.

31. Три стрелка стреляют по мишени: вероятность попадания в цель для первого стрелка – 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок промахнется.

32. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при 4 выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания стрелком в цель при одном выстреле, если она не зависит от номера выстрела.

33. Завод в среднем даёт 28 % продукции высшего сорта и 70 % – первого сорта. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие будет высшего или первого сорта.

34. Автомат изготавливает однотипные детали, причём технология изготовления такова, что 5 % произведённой продукции оказывается бракованной. Из большой партии взята наудачу одна деталь для контроля. Найти вероятность того, что деталь стандартная.

35. Пассажир может доехать до своей станции поездами двух направлений. Вероятность наличия в кассе билетов на поезд первого направления равна 0,5, а на поезд второго направления – 0,7. Найти вероятность того, что пассажир купил билет.

36. У остановочной платформы на привокзальной площади останавливаются автобусы 8 маршрутов с одинаковой частотой движения. Какова вероятность того, что из двух первых автобусов один окажется нужного для данного пассажира маршрута?

37. В подаче из 15 вагонов 3 полувагона с углём. Найти вероятность того, что локомотиву, прибывшему за полувагонами, не придется переставлять вагоны.

38. Вагоны с промежуточной станции убираются сборным поездом и вывозным локомотивом. Сборный поезд вывозит их с вероятностью 0,6. Если он их не вывезет, то вывозной локомотив заберет их с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что вагоны будут убраны со станции локомотивом.

39. Под погрузку поданы платформа, полувагон и крытый вагон. Грузоподъёмность платформы используется с вероятностью 0,9, полувагона – 0,8, крытого вагона – 0,7. Найти вероятность того, что:
а) грузоподъемность всех трёх вагонов будет использована полностью;
б) грузоподъемность только одного из трёх вагонов будет использована полностью;
в) грузоподъемность двух вагонов будет использована полностью;
г) грузоподъемность трех вагонов не будет использована полностью.

40. В разборочных поездах, прибывающих с направления A, 20 отцепов. Всего за сутки с этого направления прибывает 1000 вагонов, из которых на назначение № 1 – 200 вагонов. Определить вероятность прибытия в разборочном поезде четырех отцепов назначения № 1.

41. Через точку пересечения маршрутов пропускается в одном направлении $n(A) = 40$, а в другом $n(Б) = 25$ поездов в сутки. Время занятия маршрута поездами направления A – $t(A)$ = 5 минут, направления $Б$ – $t(Б)$ = 6 минут. Определить среднее число поездов, задержанных у пересечения за сутки.

42. В перерабатываемом на сортировочной горке потоке вагонов 5 % шестиосных и 95 % четырехосных. Определить вероятность того, что в отцепе из трех вагонов будет: а) три шестиосных, б) два шестиосных, один четырехосный.

43. На участке $A – Б$ с пропускной способностью 180 поездов и размерами движения 90 поездов в сутки лопнул рельс. На замену рельса требуется 64 мин. Определить вероятность того, что а) за этот период не будет задержано ни одного поезда, б) за этот период будет задержано два и более поездов.

44. На диспетчерском участке $A – Б$ 10 станций. Каждый дежурный по станции разговаривает с диспетчером в среднем 3 раза в час по 1 минуте. Определить вероятность того, что за период T = 20 минут диспетчер не получит ни одного вызова.

45. В составе из 20 вагонов 5 вагонов одного назначения. Определить вероятность того, что: а) все вагоны в количестве 5 штук будут стоять вместе (одним отцепом); б) в составе будет не менее одного отцепа из трех и более вагонов этого назначения.

46. В приемнике радиосвязи с маневровым локомотивом имеется 2 лампы первого типа и 2 лампы второго типа. Вероятность выхода из строя в течение времени T ламп первого типа $p_1 = 0{,}02$, второго типа $p_2 = 0{,}04$. Определить вероятность выхода из строя приемника в результате выхода из строя хотя бы одной лампы.

47. В купейном вагоне пассажирского поезда 36 пассажиров едут на 5 станций: на станцию 1-ю – 4, на 2-ю – 9, на 3-ю – 4, на 4-ю – 8, на 5-ю – 11. Определить вероятность того, что при случайном распределении пассажиров по местам в одном купе окажутся пассажиры, следующие до одной станции.

48. На сортировочной платформе 8 специализированных мест. К платформе без подборки подается 8 вагонов. Определить вероятность того, что хотя бы один вагон будет стоять на своем месте.

49. При расформировании состава от толчка локомотива в сортировочный парк уходят 3 отцепа, которые «плохие бегуны» с вероятностью $p_{\text{п}} = 0{,}1$, «массовые» с вероятностью $p_{\text{м}} = 0{,}5$ и «хорошие бегуны» с вероятностью $p_{\text{х}} = 0{,}4$. Найти вероятность того, что все отцепы будут одного типа.

50. В среднем за смену на станцию прибывают скорые, пассажирские и грузовые поезда в отношениях 2:5:8 (всего не более 17 поездов за смену). Найти вероятность того, что первые поезда следуют в порядке грузовой – пассажирский – грузовой.

51. В подаче вагонов на контейнерную площадку могут находиться четырехосная платформа с вероятностью 0,3, четырехосный полувагон с вероятностью 0,1. Определить вероятность того, что выбранный наудачу вагон окажется четырехосным.

52. На станцию с тремя пунктами местной работы прибывает группа вагонов на один из них. Вероятность того, что вагоны предназначены для первого пункта, 0,4, а для второго – 0,35. Найти вероятность того, что эти вагоны предназначены для третьего пункта.

53. В графике движения на участке проложено 120 ниток для грузовых поездов. На станцию с этого участка прибывает 80 поездов в разборку. Определить вероятность прибытия двух разборочных поездов по двум соседним ниткам.

54. Под погрузку поданы платформы, полувагон и крытый вагон. Грузоподъемность платформы используется с вероятностью 0,9, полувагона – 0,8, крытого вагона – 0,7? Найти вероятность того, что грузоподъемность хотя бы одного вагона будет использоваться полностью.

55. Вагоны с промежуточной станции убираются сборными поездами и вывозным локомотивом. Первый сборный поезд вывезет их с вероятностью 0,6. Если он их не вывезет, то вывозной локомотив заберет их с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что и после локомотива вагоны остались на станции?

56. Вероятность появления в поезде вагонов: на грузовой двор – 0,2, на контейнерную площадку – 0,3, на промышленное предприятие – 0,4. Найти вероятность появления вагонов: а) на все три пункта; б) на два; в) на один; г) хотя бы на один из грузовых пунктов.

57. Состав из 20 отцепов расформировывается на сортировочной горке по программе, набранной на накопителе ГАЦ для другого состава. Определить вероятность того, что: а) все отцепы будут направлены по назначению; б) хотя бы один отцеп попадет на специализированный путь.

58. По графику на участке *Б* – *В* проложено 90 ниток для грузовых поездов. На станцию *Б* в сутки прибывает 60 поездов в разборку. Определить вероятность прибытия 3 разборочных поездов по 3 различным ниткам графика.

2.6. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Гипотезы $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$ – полная группа несовместных событий:

1) $H_1 + H_2 + H_3 + ... + H_n = \Omega$, 2) $H_i \cdot H_j = \varnothing$, $i \neq j$,

$$3)\quad \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

Событие A может наступить только при условии наступления одного из событий $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$.

Формула полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ... + P(H_n)P(A/H_n),$$

или $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

Формулы Байеса

пересчета вероятностей гипотез, если событие A уже произошло

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

или

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}, \quad P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}, \ \ldots$$

Задача 1. На ВСЖД поступает в среднем 50 % вагонов завода *К*, 30 % завода *М*, 20 % завода *С*. Вероятность того, что в течение года не потребует ремонта вагон завода *К*, равна 0,7; завода *М* – 0,8 и завода *С* – 0,9. Найти вероятность того, что для перевозки товара в Монголию наудачу выбранный вагон в течение года не потребует ремонта.

Решение.

Пусть основное событие:

A = {выбранный вагон в течение года не потребует ремонта}.

Так как вагоны выпускают три завода, то выдвинем три гипотезы:

H_1 = {вагон выбран с завода K},

H_2 = {вагон выбран с завода M},

H_3 = {вагон выбран с завода C}.

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3),$$

т. к. событие A может появиться с определенной вероятностью только после того, как совершится одна из несовместных гипотез: или K, или M, или C, образующих полную группу.

Вычислим вероятности гипотез. Из $100\ \%$ поступивших вагонов:

$50\ \%$ вагонов завода K, следовательно, $P(H_1) = \dfrac{50}{100} = 0{,}5$,

$30\ \%$ вагонов завода M, следовательно, $P(H_2) = \dfrac{30}{100} = 0{,}3$,

$20\ \%$ вагонов завода C, следовательно, $P(H_3) = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$.

(Проверка: $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$.)

Вычислим условные вероятности события A.

Вероятность того, что

вагон завода K не потребует ремонта – $P(A/H_1) = 0{,}7$,

вагон завода M не потребует ремонта – $P(A/H_2) = 0{,}8$,

вагон завода C не потребует ремонта – $P(A/H_3) = 0{,}9$.

Подставим все в формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3),$$

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}35 + 0{,}24 + 0{,}18 = 0{,}77,$$

$$P(A) = 0{,}77.$$

Ответ: $0{,}77$.

Задача 2. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,9. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение.

Рассмотрим событие

A = {выбранная батарейка забракована системой контроля}.

Возможные гипотезы:

H_1 = {батарейка неисправна},

H_2 = {батарейка исправна}.

Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате событий:

батарейка действительно неисправна *и* забракована справедливо

или батарейка исправна, но (*и*) по ошибке забракована.

Имеем: $$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2).$$

Вероятности гипотез $P(H_1) = 0{,}04$, $P(H_2) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

Условные вероятности событий:

событие A/H_1 = {неисправная батарейка забракована}, $P(A/H_1) = 0{,}9$,

событие A/H_2 = {исправная батарейка забракована}, $P(A/H_2) = 0{,}02$.

Тогда получим:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) =$$

$$= 0{,}04 \cdot 0{,}09 + 0{,}96 \cdot 0{,}02 = 0{,}0036 + 0{,}0192 = 0{,}0228.$$

Ответ: 0,0228.

Задача 3. В первой партии из 60 изделий содержится 8 дефектных, во второй партии из 40 изделий содержится 4 дефектных. Из первой партии взяли 10 изделий, из второй 6, перемешали и взяли одно изделие. Найти вероятность того, что взятое изделие дефектное.

Решение.

Пусть A = {взято дефектное изделие}.

Возможные гипотезы:

H_1 = {изделие принадлежит первой партии},

H_2 = {изделие принадлежит второй партии}.

Так как изделие вынимают из взятых 16 (10 изделий из первой партии и 6 изделий из второй), то

$$P(H_1) = \frac{10}{16}, \qquad P(H_2) = \frac{6}{16}.$$

Условные вероятности того, что

изделие, принадлежащее первой партии, дефектно – $P(A/H_1) = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$,

изделие, принадлежащее второй партии, дефектно – $P(A/H_2) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2),$$

$$P(A) = \frac{10}{16} \cdot \frac{2}{15} + \frac{6}{16} \cdot \frac{1}{10} = \frac{29}{240}, \qquad P(A) = \frac{29}{240}.$$

Ответ: $\frac{29}{240}$.

Задача 4. В первой коробке лежат 10 красных и 8 синих карандашей, во второй коробке – 6 красных и 12 синих карандашей. Не глядя из первой коробки во вторую переложили два карандаша. Затем из второй коробки достали 1 карандаш. Какова вероятность того, что этот карандаш – синий? Ответ округлите до сотых.

Решение.

Рассмотрим событие A = {из второй коробки вынут синий карандаш}.

Выдвинем гипотезы:

H_1={из первой коробки во вторую переложили 2 красных карандаша},

H_2={из первой коробки во вторую переложили 2 синих карандаша},

H_3={из первой коробки во вторую переложили 1 красный и 1 синий}.

Вероятности гипотез вычислим, используя классическое определение вероятности:

$$P(H_1)=\frac{m}{n}=\frac{C_{10}^2}{C_{18}^2}=\frac{45}{153}=\frac{5}{17},\qquad P(H_2)=\frac{m}{n}=\frac{C_8^2}{C_{18}^2}=\frac{28}{153}.$$

$$P(H_3)=\frac{m}{n}=\frac{C_{10}^1\cdot C_8^1}{C_{18}^2}=\frac{80}{153}.$$

(Проверка: $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$.)

Найдем условные вероятности события A.

Если осуществится первая гипотеза, то во второй коробке будет 20 карандашей – 8 красных и 12 синих, следовательно, вероятность вынуть синий карандаш будет равна $P(A/H_1)=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}$.

Если осуществится вторая гипотеза, то во второй коробке также будет 20 карандашей, но среди них – 6 красных и 14 синих, следовательно, вероятность вынуть синий карандаш будет равна $P(A/H_2)=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$.

Если же осуществится третья гипотеза, то во второй коробке из 20 карандашей будет 7 красных и 13 синих, следовательно, вероятность вынуть синий карандаш будет равна $P(A/H_3)=\frac{13}{20}$.

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3),$$

$$P(A)=\frac{45}{153}\cdot\frac{12}{20}+\frac{28}{153}\cdot\frac{14}{20}+\frac{80}{153}\cdot\frac{13}{20}=\frac{493}{765}\approx 0{,}64,$$

$$P(A)=0{,}64.$$

Ответ: 0,64.

Замечание. Вероятности гипотез можно было вычислить, используя теорему о произведении зависимых событий (из восемнадцати карандашей друг за другом вынимаем два без возвращения):

$P(H_1)=\frac{10}{18}\cdot\frac{9}{17}=\frac{5}{17}$ – красный и красный,

$P(H_2)=\frac{8}{18}\cdot\frac{7}{17}=\frac{28}{153}$ – синий и синий,

$$P(H_3) = \frac{10}{18} \cdot \frac{8}{17} + \frac{8}{18} \cdot \frac{10}{17} = \frac{80}{153}$$ – красный и синий или синий и красный.

Задача 5. Рабочий и его ученик выполняют одну и ту же работу. Производительность рабочего в два раза больше производительности ученика. Все детали складываются на один конвейер. Брак, допускаемый рабочим, составляет 5 %, учеником – 15 %. С конвейера наудачу взяли деталь, которая оказалась стандартной. Найти вероятность того, что эта деталь сделана учеником.

Решение.

Основное событие: A = {взятая деталь стандартная}.

Гипотезы: H_1 = {взятая деталь изготовлена рабочим},

H_2 = {взятая деталь изготовлена учеником}.

Событие A уже произошло: взята стандартная деталь. Следовательно, необходимо воспользоваться формулой Байеса и пересчитать вероятность гипотезы H_2.

Так как производительность рабочего вдвое больше, то

$$P(H_1) = \frac{2}{3}, \qquad P(H_2) = \frac{1}{3}.$$

По условию задачи вероятность брака для рабочего равна $0{,}05$ (т. е. $5\ \%$), следовательно, вероятность изготовления рабочим стандартной детали равна

$$P(A/H_1) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$$

Вероятность брака для ученика равна $0{,}15$ (т. е. $15\ \%$), следовательно, вероятность изготовления учеником стандартной детали равна

$$P(A/H_2) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

Тогда

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}95 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}85 = \frac{11}{12},$$

а по формуле Байеса вероятность гипотезы H_2 равна:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}85}{\frac{11}{12}} = \frac{17}{55} \approx 0{,}309.$$

Если первоначально вероятность $P(H_2) = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}333$ мы вычислили исходя из производительности ученика и рабочего, то с учетом того, что событие A = {взятая деталь стандартная} произошло, вероятность гипотезы изменилась.

Ответ: $0{,}309$.

Задача 6. При осмотре вагонов в парке приема сортировочной станции установлено, что вероятность отказа ходовой части у полувагона равна $0{,}12$, у платформы – $0{,}08$, у крытого вагона – $0{,}1$ и у цистерны – $0{,}14$. На сортировочную станцию прибывают полувагоны, платформы, крытые вагоны и цистерны в отношении $3:4:2:1$. Найти вероятность того, что первый из осматриваемых вагонов окажется неисправным. К какому типу вагона вероятнее всего относится данный вагон?

Решение.

Основное событие: A = {осматриваемый вагон неисправен}.

Гипотезы: H_1 = {осматривается полувагон},

H_2 = {осматривается платформа},

H_1 = {осматривается крытый вагон},

H_2 = {осматривается цистерна}.

Вероятности гипотез:

$$P(H_1) = 0{,}3, \quad P(H_2) = 0{,}4, \quad P(H_3) = 0{,}2, \quad P(H_4) = 0{,}1.$$

Условные вероятности события A:

вероятность отказа ходовой части у полувагона – $P(A/H_1) = 0{,}12$,

вероятность отказа ходовой части у платформы – $P(A/H_2) = 0{,}08$,

вероятность отказа ходовой части у крытого вагона – $P(A/H_3) = 0{,}1$,

вероятность отказа ходовой части у цистерны – $P(A/H_4) = 0{,}14$.

Тогда вероятность того, что первый из осматриваемых вагонов неисправен, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) +$$
$$+ P(H_3)P(A/H_3) + P(H_4)P(A/H_4),$$
$$P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}12 + 0{,}4 \cdot 0{,}08 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}14 = 0{,}102.$$

Теперь, используя формулы Байеса, пересчитаем вероятности гипотез при условии, что осматриваемый вагон оказался неисправным (событие A произошло).

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}12}{0{,}102}=\frac{11}{51}\approx 0{,}353,$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}08}{0{,}102}=\frac{16}{51}\approx 0{,}314,$$

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}1}{0{,}102}=\frac{10}{51}\approx 0{,}196,$$

$$P(H_4/A)=\frac{P(H_4)P(A/H_4)}{P(A)}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}14}{0{,}102}=\frac{7}{51}\approx 0{,}137.$$

Вероятнее всего, первым неисправным оказался полувагон.

Ответ: $0{,}102$; полувагон.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25 %, вторая – 35 %, третья – 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5 %, 4 % и 2 %. Найти вероятность того, что случайно выбранный из продукции болт окажется дефектным.

2. Имеются два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 чёрный шар, во втором – 1 белый и 4 чёрных шара. Наудачу выбирают один ящик и вынимают из него шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется белым.

3. В первой коробке содержится 10 карандашей, из них 5 красных; во второй 20 карандашей, из них 3 красных. Из первой коробки переложили во вторую 1 карандаш. Найти вероятность того, что карандаш, наудачу извлеченный из второй коробки, будет красным.

4. С первого автомата на сборку поступает 40 %, со второго – 30 %, с третьего – 20 %, с четвёртого – 10 % деталей. Среди деталей первого автомата 0,1 % бракованных, второго – 0,2 %, третьего – 0,25 %, четвёртого – 0,5 %. Найти долю бракованных деталей, поступающих на сборку.

5. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 70 % этих стекол, вторая – 30 %. Первая фабрика выпускает 3 % бракованных стекол, а вторая – 1 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

6. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,4. На столе лежит 10 револьверов, из них только 3 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

7. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5 % пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

8. В первой урне содержится 10 шаров, из них 2 белых; во второй урне – 20 шаров, из них 8 белых. Из каждой урны извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что он белый.

9. Группа состоит из 5 отличников, 15 хорошо успевающих и 5 занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные отметки, хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные отметки. Слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные отметки. Для сдачи наугад назван студент. Какова вероятность того, что он получит хорошую отметку?

10. В пирамиде 5 винтовок, 3 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,9; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,6. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведёт выстрел из наудачу взятой винтовки.

11. Прибор может работать в нормальном и аварийном режимах; нормальный наблюдается в 80 % всех случаев работы прибора, аварийный – в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время T в нормальном режиме – 0,1, в аварийном – 0,7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время T.

12. Приборы одного наименования изготавливают два завода: первый – 2/3 всех изделий, поступающих на производство, второй – 1/3; надежность (вероятность безотказной работы) прибора, изготовленного первым заводом, – 0,9, вторым – 0,6. Найти надежность прибора, поступившего на производство.

13. В первой урне 12 белых и 8 черных шаров, во второй – 10 белых и 10 черных шаров. Из первого ящика вынули два шара и переложили их во второй, после чего из второй урны наугад вынули один шар. Вычислить вероятность того, что вынут черный шар.

14. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки переложили в первую 1 лампу. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартная.

15. Из полного набора домино вынули одну кость и отложили в сторону. Из оставшихся костей наудачу взяли две. Найти вероятность того, что обе кости являются дублями.

16. Предположим, что 5 % всех мужчин и 0,25 % всех женщин дальтоники. Найти вероятность того, что случайно встреченный человек дальтоник (считать, что мужчин и женщин одинаковое число). Какова вероятность того, что это женщина?

17. Найти вероятность того, что выбранная наудачу деталь, оказавшаяся отличного качества, произведена первым станком, если детали производят два станка: первый в 2 раза больше, чем второй, причем первый станок производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй станок – 80 %.

18. Имеются три одинаковых по виду ящика: в первом – 20 белых шаров, во втором – 10 белых и 10 черных шаров, в третьем – 20 черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут из первого ящика.

19. Имеется 2 партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии 1 изделие бракованное. Изделие, взятое наугад из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наугад изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

20. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 25 %, вторая – 35 %, третья – 40 % всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 5 %, 4 %, 2 %. Какова вероятность того, что случайно выбранный бракованный болт изготовлен первой машиной?

21. В спартакиаде участвуют из первой группы 4 студента, из второй – 6, из третьей – 5. Студент из первой группы попадает в сборную института с вероятность 0,9, второй – 0,7, третьей – 0,8. Наудачу выбранный студент попал в сборную. Какова вероятность того, что это студент из второй группы?

22. Часы изготавливаются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 40 % продукции, второй – 45 %, третий – 15 %. В продукции первого завода спешат 30 % часов, у второго – 70 %, у третьего – 90 %. Купленные часы спешат, какова вероятность, что они изготовлены на втором заводе?

23. На сортировочную станцию прибывают полувагоны, платформы, крытые вагоны с вероятностями 0,35; 0,4; 0,25 соответственно. При осмотре их в парке приёма установлено, что вероятность неисправности полувагона равна 0,015, платформы – 0,01, крытого вагона – 0,02. Найти вероятность того, что: а) взятый наудачу вагон будет неисправен; б) неисправным окажется полувагон.

24. На станции два грузовых пункта. Один из них ежесуточно отправляет в 3 подачах по 20 вагонов, а второй – в 5 подачах по 16 вагонов. В каждой группе вагонов, сформированной первым пунктом, 4 вагона недогружены, а в группе со второго пункта 2 вагона недогружены. Найти вероятность того, что: а) взятый наудачу вагон недогружен; б) недогруженный вагон будет со второго пункта.

25. На сортировочную станцию с одного из направлений прибывает в расформирование 20 поездов в сутки, из них 2 поезда, сформированных на станции A, 5 поездов – на станции B, 4 поезда – на станции $Г$, 2 поезда – на станции $Д$, 4 поезда – на станции E и 2 поезда – на станции K. Вероятность прибытия вагонов для шестого сортировочного пути с поездами, сформированными на станции A, $P(A) = 1$, на станции B – $P(B) = 0{,}7$, на станции $Г$ – $P(Г) = 0{,}6$, на станции $Д$ – $P(Д) = 0{,}4$, на станции E – $P(E) = 0{,}2$, на станции K – $P(K) = 0{,}1$. Найти вероятность наличия вагонов для шестого сортировочного пути для наудачу взятого состава.

26. В условиях задачи 25, наложенных на вероятность, найти вероятность наличия вагонов для шестого сортировочного пути для наудачу взятого состава, если из 20 поступающих в расформирование составов 10 формировались на станции A, 2 – на станции B, 3 – на станции $Г$, 2 – на станции $Д$, 2 – на станции E, 1 – на станции K.

27. Студент решает задачу по математике. С вероятностью $0{,}15$ он неправильно перепишет условие задачи. Если он все же переписал его правильно, то с вероятностью $0{,}3$ он выберет неправильный способ решения. Если он выбрал правильный способ решения, то с вероятностью $0{,}2$ он допустит ошибку в вычислениях. Задача решена неверно. Какова вероятность того, что студент выбрал неправильный способ решения?

3. Повторение независимых испытаний. Схема Бернулли

3.1. Формула Бернулли

Пусть производятся n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$.

Тогда вероятность появления события A m раз в n испытаниях вычисляется по ***формуле Бернулли***

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- Вероятность появления события A *менее* m раз:

$$P_n(< m) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(m-1)$$

- Вероятность появления события A *не менее* m раз:

$$P_n(\geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n)$$

- Вероятность появления события A *более* m раз:

$$P_n(> m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + P_n(m+3) + \ldots + P_n(n)$$

- Вероятность появления события A *не более* m раз:

$$P_n(\leq m) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(m)$$

- Вероятность появления события A *от* m_1 *до* m_2 раз:

$$P_n(m_1; m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1+1) + P_n(m_1+2) + \ldots + P_n(m_2)$$

Наивероятнейшее число m_0 появлений события A в n независимых испытаниях:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p$$

***Задачи, приводящие к схеме Бернулли*:**

– число попаданий в цель при n выстрелах;
– число выигранных партий в шахматном турнире;
– число отказавших узлов устройства;
– число выпадений герба при многократном подбрасывании монеты;
– число испорченных изделий при транспортировке;
– число неисправных вагонов в прибывающих поездах и т. д.

Задача 1. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее:

а) выиграть две партии из четырех или три партии из шести?

б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти?

Ничьи во внимание не принимаются.

Решение.

Играют равносильные шахматисты, поэтому для каждого из них вероятность выиграть $p=\frac{1}{2}$, вероятность проигрыша также $q=\frac{1}{2}$.

Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и неважно, в какой последовательности будут выиграны партии, то можно применить формулу Бернулли $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

а) Вычислим вероятности выиграть две партии из четырех и три партии из шести:

$$P_4(2)=C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8},$$

$$P_6(3)=C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}.$$

Так как $P_4(2)>P_6(3)$, то вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.

б) Вычислим вероятность выиграть не менее двух партий из четырех, т. е. две, три или четыре: $P_4(2\le m\le 4)=P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)$.

Вероятность выиграть две партии из четырех уже вычислена:

$$P_4(2)=\frac{6}{16}.$$

По формуле Бернулли:

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{16},$$

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

Таким образом, $P_4(2;4) = \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}.$

Аналогично вычислим вероятность выиграть не менее трех партий из пяти, т. е. три, четыре или пять:

$$P_5(3;5) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q + C_5^5 p^5 q^0.$$

Вычисляя сочетания, получим

$$P_5(3;5) = 10 p^3 q^2 + 5 p^4 q + p^5,$$

где $p = q = \frac{1}{2}$; $P_5(3;5) = 16 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2}.$

Имеем: $P_4(2;4) = \frac{11}{16}$, $P_5(3;5) = \frac{1}{2}$, то есть $P_4(2;4) > P_5(3;5)$,

следовательно, вероятнее выиграть не менее двух партий из четырех, чем не менее трех из пяти.

Ответ: а) вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести; б) вероятнее выиграть не менее двух партий из четырех, чем не менее трех из пяти.

Задача 2. Отрезок AB длины L разделен точкой C в отношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C, а две правее. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

Решение.

Используя геометрическое определение вероятности, определим вероятность p попадания точки левее C, то есть на отрезок AC, и вероятность q попадания правее C, то есть на отрезок CB.

Рис. 5

Так как точка C делит отрезок AB в отношении $2{:}1$, то длина отрезка AC равна $\frac{2}{3}L$ и, стало быть, вероятность попадания точки на отрезок AC равна $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$.

Для определения вероятности попадания двух точек из четырех используем формулу Бернулли:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2, \quad P_4(2) = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

Таким образом, искомая вероятность $P_4(2) = \frac{8}{27}$.

Ответ: $\frac{8}{27}$.

Задача 3. При осмотре составов в каждом из них с вероятностью $0{,}2$ есть вагоны, требующие ремонта. Определить наивероятнейшее число составов, в которых есть такие вагоны, если в сутки со станции отправляется 9 поездов.

Решение.

Наивероятнейшее число составов m_0, в которых есть вагоны, требующие ремонта, можно определить из соотношения

$$np - q \le m_0 \le np + p,$$

справедливого в схеме Бернулли.

Действительно, испытания обследования каждого из $n = 9$ составов независимо друг от друга выявляют в составе неисправные вагоны с постоянной вероятностью $p = 0{,}2$.

Стало быть, $np = 9 \cdot 0{,}2 = 1{,}8$, $\quad q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$,

$$1{,}8 - 0{,}8 \le m_0 \le 1{,}8 + 0{,}2,$$

$$1 \le m_0 \le 2, \text{ то есть } m_0 = 1 \text{ или } m_0 = 2.$$

По формуле Бернулли вероятности такого количества составов равны:

$$P_9(1) = C_9^1 pq^8 = 9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^8, \qquad P_9(2) = C_9^2 p^2 q^7 = C_9^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^7.$$

Ответ: 1 или 2.

Задача 4. Сколько нужно сделать независимых выстрелов, чтобы наивероятнейшее число промахов было равно 25, если вероятность попадания при каждом выстреле равна $0,6$?

Решение.

По условию наивероятнейшее число промахов $m_0 = 25$. Вероятность промаха $p = 0,4$, так как известна вероятность попадания в цель $q = 0,6$. Воспользуемся оценкой для наивероятнейшего числа появления события:

$$np - q \le m_0 \le np + p\,.$$

Таким образом, наивероятнейшее число промахов $m_0 = 25$ удовлетворяет двойному неравенству:

$$0,4n - 0,6 \le 25 \le 0,4n + 0,4\,,$$

то есть $\begin{cases} 0,4n - 0,6 \le 25, \\ 0,4n + 0,4 \ge 25; \end{cases}$ $\begin{cases} 0,4n \le 25,6, \\ 0,4n \ge 24,6; \end{cases}$ $\dfrac{24,6}{0,4} \le n \le \dfrac{25,6}{0,4}.$

Итак, число выстрелов $61,5 \le n \le 64$, n – целое, т. е. искомое число выстрелов может быть 62, 63 и 64.

Ответ: 62, 63 и 64.

Задача 5. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в момент включения прибора $0,2$. Найти: а) наивероятнейшее число отказавших элементов;

б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов;

в) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы четыре элемента.

Решение.

При включении прибора может отказать от 0 до 5 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа каждого из них постоянна $p = 0,2$. Для подсчета вероятностей используем формулу Бернулли: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0, 1, \ldots, n$.

а) Наивероятнейшее число m_0 появления событий в схеме Бернулли удовлетворяет двойному неравенству

$$np - q \le m_0 \le np + p\,.$$

В условиях задачи число независимых испытаний $n = 5$; вероятность отказа элемента $p = 0,2$. Вероятность, что прибор не откажет при включении, $q = 0,8$. Стало быть, $np = 1$, и наивероятнейшее число отказавших элементов

$$1-0{,}8 \le m_0 \le 1+0{,}2, \quad 0{,}2 \le m_0 \le 1{,}2, \quad m_0 \text{ – целое}, \quad m_0 = 1.$$

б) Вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов

$$P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096.$$

в) Прибор откажет, если отказавших элементов при включении будет хотя бы 4, т. е. 4 или 5:

$$P_{\text{отк}} = P_5(4) + P_5(5).$$

Вероятности считаем по формуле Бернулли:

$$P_{\text{отк}} = C_5^4 p^4 q + C_5^5 p^5 q^0 = C_5^4 p^4 q + p^5,$$

$$P_{\text{отк}} = p^4(5q + p), \quad p = 0{,}2, \quad q = 0{,}8,$$

$$P_{\text{отк}} = 0{,}2^4(5 \cdot 0{,}8 + 0{,}2) = 0{,}0016 \cdot 4{,}2 = 0{,}00672.$$

Таким образом, вероятность отказа прибора при включении

$$P_{\text{отк}} = 0{,}2^4(5 \cdot 0{,}8 + 0{,}2) = 0{,}0016 \cdot 4{,}2 = 0{,}00672.$$

Ответ: а) 1, б) 0,4096, в) 0,00672.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Бросаются пять монет. Какова вероятность того, что выпадет три герба?

2. Игральный кубик подбрасывается 7 раз. Найти вероятность того, что событие A = {выпало число очков, равное 4} наступит ровно 3 раза.

3. Монету подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что событие A = {выпал герб} наступит ровно 4 раза.

4. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Найти вероятность того, что при 6 бросках 3 кольца окажутся на колышке, если броски считать независимыми.

5. На самолёте имеются четыре одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полёте равна 0,9. Найти вероятность того, что в полёте могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

6. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре из 30 дней бывает в среднем 12 дождливых дней. Найти вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней 3 дня окажутся дождливыми.

7. Случайно встреченное лицо с вероятностью 0,3 может оказаться блондином. Найти вероятность того, что среди пяти случайно встреченных лиц не менее четырех блондинов.

8. Случайно встреченное лицо с вероятностью 0,1 может оказаться рыжим. Найти вероятность того, что среди пяти случайно встреченных лиц хотя бы один рыжий.

9. Найти вероятность двукратного появления герба при подбрасывании монеты 10 раз.

10. Найти вероятность того, что из 6 взятых наудачу деталей 4 окажутся стандартными, если вероятность изготовления на станке стандартной детали равна 0,9.

11. Прибор состоит из 5 узлов. Вероятность безотказной работы в течение времени t для каждого узла равна 0,7, узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t

а) откажет ровно 1 узел;
б) откажут ровно 2 узла;
в) откажут не более двух узлов;
г) откажет хотя бы 1 узел.

12. Что вероятнее: выиграть две игры из четырех или три игры из шести при игре двух равносильных футбольных команд (ничьи во внимание не принимаются)?

13. Найти вероятность того, что из четырех вынутых подряд шаров окажется 2 белых, если в урне 20 белых и 10 черных шаров, причем каждый вынутый шар возвращали в урну перед извлечением следующего, а шары в урне перемешивали.

14. В ГАИ дают 5 вопросов, которые имеют по 3 ответа: 2 правильных и 1 неправильный. Для получения водительских прав необходимо верно ответить хотя бы на 3 вопроса из пяти. Найти вероятность получения прав.

15. Перед началом волейбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Байкал» по очереди играет с командами «Амур», «Енисей», «Вилюй», «Иртыш». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах право первой владеть мячом выиграет команда «Байкал».

16. Биатлонист попадает в мишень с вероятностью 0,8. Он стреляет пять раз. Найдите вероятность того, что он попадет в мишень ровно три раза.

17. Вероятность поступления с каждым поездом вагонов для грузового двора равна 0,3. Найти вероятность того, что во взятых трёх составах только в двух есть вагоны для грузового двора; только в одном есть вагоны для грузового двора.

18. В парке приёма 7 путей, вероятность занятости каждого из них прибывающими поездами равна 0,7. Найти вероятность занятости четырёх путей.

19. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,85. Найти наивероятнейшее число попаданий, если произведено 25 независимых выстрелов.

20. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре из 30 дней бывает в среднем 12 дождливых дней. Найти наиболее вероятное число солнечных дней в первые 20 дней этого месяца.

21. Известно, что вероятность прорастания семян данной партии пшеницы 0,95. Найти необходимое количество семян из этой партии, чтобы наивероятнейшее число взошедших семян равнялось 100.

22. Найти наивероятнейшее число появлений белого шара при извлекании из урны 20 шаров (с возвратом каждого вынутого шара), если в урне 100 белых и 80 черных шаров.

23. Найти наивероятнейшее число появлений события A в серии из 11 испытаний, где вероятность появления события A в каждом из испытаний равна $p = 0{,}3$.

24. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 150 изделий, если при данном технологическом процессе 85 % всей произведенной продукции – высшего сорта.

25. Местные вагоны убирают с грузовых пунктов десятью группами. Вероятность уборки каждой группы к моменту завершения накопления составов равна 2/3. Найти наивероятнейшее число наступления события $A = \{$своевременной уборки группы вагонов$\}$ в 10 испытаниях.

26. При осмотре составов в парке отправления в каждом из них с вероятностью 0,1 есть вагоны, требующие ремонта. Найти наивероятнейшее число составов, в которых нет таких вагонов, если в сутки со станции отправляется 120 поездов.

27. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, 0,02. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 855 пассажиров.

28. Вероятность поступления вагонов с каждым поездом для грузового двора 0,3. Найти вероятность того, что во взятых 3 составах в каждом а) есть вагоны для грузового двора; б) нет таких вагонов; в) есть в одном; г) двух составах.

29. Под погрузкой находятся n вагонов. После погрузки каждый вагон имеет недогруз с вероятностью 0,1. Установить наличие хотя бы одного вагона, имеющего недогруз.

30. На сортировочной станции за один час расформировывается 4 поезда. С вероятностью 0,2 вагоны поступают на 5-й сортировочный путь. Найти вероятность того, что на этот путь вагоны прибудут только с двумя поездами.

31. В парке приема 9 путей, вероятность занятости каждого из них прибывающими поездами 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент в парке занято составами 5 путей.

32. Вероятность нахождения в каждом прибывшем составе вагонов на данное назначение 0,2. Какова вероятность того, что в трех из пяти прибывших в течение часа поездах будут вагоны данного назначения?

33. В подаче порожних вагонов с вероятностью 0,1 каждый из них требует очистки. Найти вероятность того, что из 6 вагонов очистке будет подвергнуто не более 2 вагонов.

34. Вероятность своевременного прибытия каждого поезда равна 0,9. Найти вероятность того, что из семи последовательно прибывших поездов прибудут без опоздания: а) пять; б) более пяти.

35. В натурных листах, получаемых станцией по телетайпу, из-за различных помех встречаются ошибки. В среднем на 10 листов приходится один с ошибками. Определить вероятность того, что из 5 переданных листов в 2 будут ошибки.

3.2. Теорема Пуассона

Пусть производятся n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$.

Теорема Пауссона

(закон редких явлений, $n \to \infty$, $p \to 0$)

Вероятность появления события A m раз в n испытаниях равна:

$$P_n(m) \cong P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \text{где} \quad \lambda = np.$$

Задача 1. Завод отправил на базу 5000 изделий. Вероятность того, что в пути изделие испортится, равна $p = 0{,}0002$. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение.

Число испорченных в пути изделий подчиняется закону Пуассона, так как число изделий $n = 5000$ велико, а вероятность $p = 0{,}0002$ мала.

Так как $\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$, то искомая вероятность будет равна:

$$P_3(1) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} \cong 0{,}0613.$$

Ответ: $0{,}0613$.

Задача 2. Вероятность поступления сигнала в течение часа на коммутатор, обслуживающий 1000 абонентов, равна $3 \cdot 10^{-3}$. Найти вероятность того, что в течение одного часа воспользуются телефоном два абонента.

Решение.

Так как $\lambda = np = 1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 3$, то вероятность того, что в течение одного часа воспользуются телефоном два абонента, равна:

$$P_2(3) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} \cong 0{,}224.$$

Ответ: $0{,}224$.

Задача 3. Какова вероятность того, что в группе из 30 человек никто не родился в июне?

Решение.

В году 12 месяцев, поэтому вероятность рождения человека в конкретном месяце, например в июне, $p = \frac{1}{12}$ и вероятность рождения не в этом месяце $q = \frac{11}{12}$.

Непосредственное вычисление вероятности того, что из 30 человек никто не родился в июне, т. е. все родились не в июне, дает следующий результат: $P_{30}(0) = q^{30} = \left(\frac{11}{12}\right)^{30} \approx 0{,}07351.$

Так как вероятность $0 < p = \frac{1}{12} < 0{,}1$, то воспользуемся предельной теоремой Пуассона:

$$P_n(m) \cong P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \text{где} \quad \lambda = np.$$

В условии задачи $n = 30$, $p = \frac{1}{12}$, $\lambda = 30 \cdot \frac{1}{12} = 2{,}5$, и оценка вероятности по формуле Пуассона равна:

$$P_0(2{,}5) = \frac{2{,}5^0}{0!} e^{-2{,}5}, \text{ т. е. } P_0(2{,}5) \cong e^{-2{,}5} \approx 0{,}0821.$$

Относительная погрешность вычислений (в сравнении с непосредственным вычислением вероятности) составляет около 11,7 %, что на первый взгляд кажется много. Но следует отметить, что число испытаний $n = 30$ не так уж и велико, а вероятность $p = \frac{1}{12} < 0{,}1$, но и не слишком мала.

Ответ: 0,0821.

Задача 4. В парк приема станции в сутки прибывает 2000 вагонов. Вероятность нахождения среди них неисправного вагона $p = 0{,}005$. Найти вероятность того, что в данные сутки будет обнаружено неисправных вагонов: а) два; б) не менее двух; в) не более одного; г) по крайней мере один.

Решение.

Число неисправных вагонов в силу маленькой вероятности $p = 0{,}005$ подчиняется теореме Пуассона (закону редких явлений, предельный закон в схеме Бернулли):

$$P_n(m) \cong P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 2000.$$

В условиях задачи $n = 2000$, $p = 0{,}005$, следовательно,

$$\lambda = np = 10, \quad P_m(10) = \frac{10^m}{m!} e^{-10}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 2000.$$

а) Вероятность прибытия двух неисправных вагонов

$$P_2(10) = \frac{10^2}{2!} e^{-10} = 50 e^{-10} \approx 0{,}00227.$$

б) Вероятность прибытия не менее двух неисправных вагонов

$$P_{m\geq 2}(10) = P_2(10) + P_3(10) + \ldots + p_{2000}(10) =$$

$$= \sum_{m=2}^{2000} P_m(10) = 1 - P_0(10) - P_1(10),$$

$$P_{m\geq 2}(10) = 1 - e^{-10} - 10e^{-10} = 1 - 11e^{-10} \approx 0{,}9995.$$

в) Вероятность прибытия не более одного неисправного вагона, т. е. одного или ни одного, равна:

$$P_0(10) + P_1(10) = 11e^{-10} \approx 0{,}0005.$$

г) Для вычисления вероятности появления хотя бы одного неисправного вагона перейдем к противоположному событию:

$$P_{m\geq 1}(10) = 1 - P_0(10) = 1 - e^{-10} \approx 0{,}99995.$$

Ответ: а) $0{,}00227$, б) $0{,}9995$, в) $0{,}0005$, г) $0{,}99995$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Станция техобслуживания поставила 10000 сигнализаций на автомобили. Вероятность выхода из строя сигнализации в течение месяца p = 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажут две сигнализации.

2. Найти вероятность того, что среди ста наугад выбранных человек не окажется ни одного левши, если среди 1000 человек приблизительно 8 левшей.

3. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна p = 0,003. Какова вероятность того, что за время t откажут: а) 3 элемента, б) хотя бы один элемент?

4. При ремонте вагонов в поездах в парке отправления у отдельных вагонов приходится менять головку автосцепки. На станции C на 1000 отправленных вагонов приходится в среднем 2 таких случая. Найти вероятность того, что в составе из 60 вагонов потребуется замена головки автосцепки у двух вагонов.

5. При осмотре состава в парке приема сортировочной станции на каждую тысячу вагонов в среднем выявляется 5 неисправных. Определить вероятность того, что в составе из 60 вагонов будет: а) 3 неисправных вагона; б) от 2 до 4 неисправных.

6. В парк приема станции прибывает ежесуточно 500 вагонов. Вероятность нахождения среди них неисправного вагона 0,002. Какова вероятность того, что в данные сутки будет обнаружено более трех неисправных вагонов?

7. Учебник издан тиражом 200000 экземпляров. Вероятность того, что он сброшюрован неправильно, p = 0,00015. Найти среднее число бракованных книг.

8. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету p = 0,01. Сколько нужно купить билетов, чтобы вероятность выигрыша хотя бы по одному билету была не меньше 0,95?

9. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка разобьется, p = 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит: а) ровно 2 разбитых бутылки, б) не менее двух разбитых бутылок, в) хотя бы две разбитые бутылки.

10. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, в течение минуты поступит: а) ровно 4 вызова, б) хотя бы 4 вызова, в) хотя бы 1 вызов.

3.3. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа

Пусть производятся n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$ $(n \to \infty,\ 0{,}1 \le p \le 0{,}9)$.

Локальная теорема Муавра – Лапласа

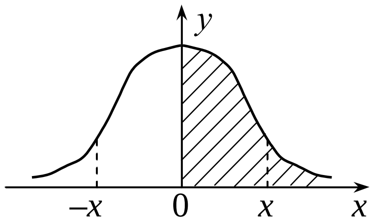
Вероятность появления события A m раз в n испытаниях равна

$$P_n(m) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса.

Функция Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



1. $\varphi(x) > 0$
2. $\varphi(-x) = \varphi(x)$
3. $\varphi_{\max} = \varphi(0) = 0{,}3989$
4. $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$

   $\varphi(3{,}99) = 0{,}0001$, $\varphi(x) \cong 0$ при $x \geq 4$
5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$
6. $\varphi(x)$ – табулирована (приложение 1)

Пусть производятся n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$ $(n \to \infty,\ 0{,}1 \leq p \leq 0{,}9)$.

Интегральная теорема Муавра – Лапласа

Вероятность того, что событие A произойдет от m_1 до m_2 раз в n испытаниях, равна:

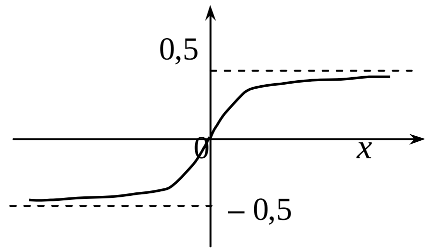
$$P(m_1 \leq x \leq m_2) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_2),$$

где $$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ – функция Лапласа.

Функция Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$



1. $\Phi(0)=0$
2. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$
3. $\Phi(x)\to 0{,}5$ при $x\to+\infty$

   $\Phi(x)\to -0{,}5$ при $x\to-\infty$

   $\Phi(4)=0{,}49968$, $\Phi(x)\cong 0{,}5$ при $x\geq 4$
4. $\Phi(x)$ – табулирована (приложение 2)

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности в n независимых испытаниях

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Задача 1. Вероятность того, что поезд прибудет на станцию с отклонением от графика, $p=0{,}2$. Найти вероятность того, что из $n=400$ случайно отобранных поездов прибудут не по графику: а) ровно 70 поездов; б) от 70 до 100 поездов; в) не менее 70; г) не более 69.

Решение.

По условию вероятность прибытия поезда с отклонением от графика постоянна и равна $p=0{,}2$ для каждого из поездов независимо друг от друга. Можем использовать схему Бернулли. Однако непосредственное вычисление вероятностей с использованием формулы Бернулли: $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ неоправданно.

Использование этой формулы для определения вероятности отклонения от графика для 70 поездов из 400 даёт следующий результат:

$$P_{400}(70) = C_{400}^{70} \cdot 0{,}2^{70} \cdot 0{,}8^{330} \approx 0{,}023384.$$

Вероятность же того, что от 70 до 100 поездов прибудут с отклонением от графика, равна:

$$P_{400}(70;100) = \sum_{m=70}^{100} P_{400}(m).$$

Так как n велико, то для вычисления первой вероятности используем локальную теорему Муавра – Лапласа, а для второй – интегральную теорему.

а) Локальная теорема Муавра – Лапласа: n велико, $0{,}1 \le p \le 0{,}9$,

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \text{где} \quad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса, табулирована, четная:

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

В условиях задачи:

$$n = 400,\ p = 0{,}2,\ q = 0{,}8,\ np = 80,\ npq = 64,\ \sqrt{npq} = 8,$$

$$m = 80, \quad x = \frac{70-80}{8} = -1{,}25,$$

$$P_{400}(70) = \frac{1}{8}\varphi(-1{,}25) = \frac{1}{8}\varphi(1{,}25) \approx 0{,}022831.$$

Предлагаем читателю убедиться, что относительная погрешность вычислений (в сравнении с формулой Бернулли) приблизительно 2,4 %.

б) Интегральная теорема Муавра – Лапласа:

n велико, $0{,}1 \le p \le 0{,}9$, $\qquad P_n(m_1; m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,

$$\text{где } x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = 1, 2.$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – функция Лапласа, табулирована, нечётная:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Используем вышеприведённые расчёты:

$$m_1 = 70 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1{,}25;$$
$$m_2 = 100 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2{,}5.$$

Таким образом,

$$P_{400}(70;\,100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

Используя таблицу Лапласа, получаем:

$$P_{400}(70;\,100) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

в) Отклонение от графика будет в количестве поездов не менее 70, т. е. от 70 до 400 с вероятностью:

$$P_{400}(70;\,400) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{70-80}{8} = -1{,}25; \qquad x_2 = \frac{400-80}{8} = 4,$$

т. е. $$P_{400}(70;\,400) \approx \Phi(4) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(4) + \Phi(1{,}25).$$

Практически:

$$P_{400}(70;\,400) \approx 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944.$$

г) Аналогично, $P_{400}(0;\,69) = 1 - P_{400}(70;\,400)$.

$$P_{400}(0;\,69) = 0{,}1056.$$

Ответ: а) 0,22831, б) 0,8882, в) 0,8944, г) 0,1056.

Задача 2. Вероятность того, что деталь будет бракованной, равна 0,2. Найти вероятность, что среди 400 случайно отобранных деталей окажутся бракованными от 70 до 100 деталей.

Решение.

По условию $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $n = 400$.

Тогда $np = 400 \cdot 0{,}2 = 80$;

$$x_1 = \frac{70-80}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25, \; x_2 = \frac{100-80}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}25.$$

По таблице значений функции Лапласа получаем

$$P_{400}(70 < m < 100) \cong \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}8882.$$

Ответ: 0,8882.

Задача 3. Вероятность того, что в прибывшем на станцию поезде есть неисправные вагоны, $p = 0{,}05$. Найти вероятность того, что в случайно отобранных 300 поездах относительная частота появления неисправных вагонов отклонится от вероятности по абсолютной величине не более чем на $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение.

Искомая вероятность определяется формулой:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

По условию $p = 0{,}05$; $q = 0{,}95$; $n = 300$, $\varepsilon = 0{,}01$.

Тогда получим:

$$P\left(\left|\frac{m}{300} - 0{,}05\right| < 0{,}01\right) = 2\Phi\left(0{,}01 \cdot \sqrt{\frac{300}{0{,}05 \cdot 0{,}95}}\right) = 2\Phi(0{,}79) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}2852 = 0{,}5704.$$

Ответ: вероятность указанного отклонения равна $0{,}5704$, то есть в $57{,}04$ % случаев.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Произведено 100 независимых испытаний. Найти вероятность того, что событие А наступит 78 раз, если вероятность появления этого в каждом испытании равна 0,8.

2. При ремонте вагонов в поездах в парке отправления у отдельных вагонов приходится менять головку автосцепки. На станции С на 100 отправленных вагонов приходится в среднем 2 таких случая. Определить вероятность того, что в составе из 64 вагонов потребуется замена головки автосцепки у двух вагонов.

3. В 400 разборочных поездах, прибывающих за 5 суток на станцию, вероятность появления местных вагонов равна 0,2. Какова вероятность того, что местные вагоны прибывают в 80 поездах?

4. Вероятность того, что поезд прибудет на станцию с отклонением от графика, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 400 случайно отобранных поездов 70 прибудут не по графику.

5. Вероятность безотказной работы автосцепного оборудования цистерны равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 обследованных вагонов автосцепное оборудование не требует ремонта у 380 вагонов.

6. Вероятность того, что поезд прибудет на станцию с отклонением от графика, равна 0,2. Какова вероятность того, что из 400 случайно отобранных поездов от 70 до 100 прибудут не по графику?

7. Вероятность того, что деталь будет бракованной, равна 0,6. Найти вероятность, что среди 200 случайно отобранных деталей окажутся бракованными от 120 до 150 деталей.

8. При перевозке хрупких изделий в среднем ломаются пять изделий из 50. Найти вероятность того, что при перевозке 1000 изделий сломаются от 70 до 100 изделий.

9. Вероятность того, что в прибывшем на станцию поезде есть неисправные вагоны, $p = 0{,}1$. Найти процент того, что в случайно отобранных 576 поездах относительная частота появления неисправных вагонов отклонится от вероятности по абсолютной величине не более чем на $\varepsilon = 0{,}01$.

10. В парке порожних вагонов с вероятностью 0,9 каждый из них требует очистки. Сколько следует проверить вагонов, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения частоты требующих очистки вагонов от вероятности того, что вагон требует очистки, не превысит 0,01?

Ответы

1. Элементы комбинаторики

1.1. Правила суммы и произведения

1. 256. **2.** 100. **3.** 168. **4.** 20. **5.** 3360. **6.** 20. **7.** 25; 20. **8.** 768. **9.** 15. **10.** 147. **11.** 63. **12.** 480. **13.** 21. **14.** 22. **15.** 189. **16.** 12. **17.** 31. **18.** 8. **19.** 90.

1.2. Перестановки

1. $P_7 = 7! = 5040$. **2.** $P_3 = 3! = 6$. **3.** $P_4 = 4! = 24$. **4.** $P_3 = 3! = 6$. **5.** $P_8 = 8! = 40320$. **6.** $P_5 = 5! = 120$. **7.** $P_4 = 4! = 24$. **8.** $P_5 = 5! = 120$. **9.** $P_4 = 4! = 24$. **10.** $P_6 = 6! = 720$; $P_8 = 8! = 40320$. **11.** $4! = 24$. **12.** $\frac{5!}{2} = 60$. **13.** $5! - 2 \cdot 4! = 72$. **14.** $2 \cdot 4! = 48$. **15.** $\frac{7!}{2 \cdot 7} = \frac{6!}{2} = 360$. **16.** $\frac{18!}{5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 2 \cdot 18} = \frac{17!}{5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 2} = 408408$. **17.** $\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$. **18.** $6! \cdot 9!$. **19.** $6! \cdot 9! \cdot 7$. **20.** $\frac{15!}{4! \cdot 8! \cdot 3!} = 225225$. **21.** $\frac{28!}{(7!)^4}$. **22.** $\frac{8!}{(2!)^3} = 7! = 5040$. **23.** $2! \cdot (3!)^2 = 72$. **24.** $3 \cdot (5!)^2 = 43200$.

1.3. Размещения

1. $A_{10}^7 = 604800$. **2.** $A_{30}^2 = 870$. **3.** $A_5^3 = 60$. **4.** $3A_4^2 = 36$. **5.** $A_5^3 = 60$. **6.** $A_5^2 = 20$. **7.** $A_7^3 = 210$. **8.** $3A_6^2 = 90$. **9.** $A_{10}^3 = 720$. **10.** $A_{20}^5 = 1860480$. **11.** $A_{30}^4 = 657720$. **12.** $A_5^2 = 20$. **13.** $A_4^3 \cdot A_5^3 \cdot A_6^3 = 172800$. **14.** $A_{13}^4 = 17160$. **15.** $A_{10}^7 = 604800$. **16.** $A_7^2 \cdot A_8^5 = 282240$. **17.** $A_8^5 = 6720$. **18.** $A_5^3 \cdot 5! = 7200$. **19.** $\frac{A_{10}^5}{2^2} = 7560$. **20.** $A_{12}^6 = 665280$. **21.** $A_{10}^4 = 5040$. **22.** $A_8^4 = 1680$.

1.4. Сочетания

1. $C_5^3 = C_5^2 = 10$. **2.** $C_{30}^3 = 4060$. **3.** $C_{60}^3 = 34220$. **4.** $C_5^2 = C_5^3 = 10$. **5.** $C_{10}^5 = 252$. **6.** $C_{12}^4 = 495$. **7.** $C_{15}^6 = 5005$. **8.** $C_{16}^2 = 120$. **9.** $C_5^2 + C_3^2 + C_2^2 = 14$. **10.** $C_5^3 \cdot C_{20}^3 = 11400$. **11.** $C_2^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{10}^3 = 5040$. **12.** $C_7^2 \cdot C_5^2 = 210$. **13.** $C_4^3 \cdot C_{32}^6 = 4C_{32}^6 = 3624768$. **14.** $C_5^3 + C_5^2 \cdot C_6^1 = 70$. **15.** $C_{10}^4 = 210$. **16.** $C_5^1 \cdot C_{11}^2 + C_{11}^1 \cdot C_5^2 = 385$. **17.** $C_{14}^3 = 364$. **18.** $C_3^2 \cdot C_7^3 = 105$.

19. $C_6^3 = 20$. **20.** $C_{15}^3 + C_{18}^3 = 2087$. **21.** $C_5^1 \cdot C_4^2 = 30$. **22.** $C_8^2 \cdot C_4^2 = 168$.
23. $C_{12}^4 = 495$. **24.** $C_{14}^3 \cdot C_8^3 = 20384$. **25.** $C_5^3 = 10$; $C_4^2 = 6$.

2. Вероятность случайного события

2.1. Случайные события. Алгебра событий

1. *г*. **2.** *г*. **3.** *б*, *в*. **4.** *б*. **5.** *б*, *г*. **6.** *а*. **7.** *б*, *в*, *д*. **8.** *б*, *в*, *г*, *ж*.
9. *а*) 3; *б*) $2^3 - 1 = 7$; *в*) 1; *г*) 3. **12.** *в*. **13.** *в*. **14.** *а* - 1, *б* - 4, *в* - 6, *г* - 2.

2.2. Классическое определение вероятности

1. 0; $\frac{4}{11}$; 1. **2.** 0; $\frac{1}{6}$; 0,5; $\frac{5}{6}$. **3.** $\frac{17}{25}$. **4.** 0,2. **5.** 0,5. **6.** $\frac{2}{9}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{8}{27}$. **7.** 0,75.
8. $\frac{1}{3}$. **9.** $\frac{1}{9}$. **10.** $\frac{1}{18}$. **11.** 0,8. **12.** 0,9. **13.** $\frac{4}{15}$. **14.** 0,25. **15.** 0,4. **16.** $\frac{1}{6}$.
17. $\frac{5}{36}$. **18.** $\frac{1}{18}$. **19.** 0,25; 0,5. **20.** $\frac{1}{9}$. **21.** $\frac{4}{35}$. **22.** 0,5. **23.** 0,3. **24.** $\frac{2}{15}$.
25. $\frac{14}{55}$. **26.** 0,35999. **27.** $\frac{21}{1265}$; $\frac{273}{2530}$; $\frac{189}{506}$; $\frac{91}{253}$. **28.** 0,5. **29.** $\frac{1}{120}$.
30. $\frac{1}{60}$. **31.** $\frac{1}{6}$. **32.** $\frac{1}{120}$. **33.** $\frac{1}{30}$. **34.** $\frac{1}{60}$. **35.** 0,05. **36.** $\frac{14}{57}$.
37. $\frac{1}{720}$; $\frac{1}{10}$. **38.** $\frac{1}{A_9^3}$; $\frac{1}{C_9^3}$. **39.** $\frac{14}{45}$; $\frac{31}{45}$; $\frac{11}{120}$; $\frac{1}{4}$ **40.** $\frac{5!\cdot 3!\cdot 2!}{10!}$; $\frac{1}{10!}$. **41.** $\frac{2}{3}$.
42. $\frac{17}{24}$. **43.** $\frac{10}{21}$. **44.** $\frac{1}{10!}$. **45.** 0,1; $\frac{1}{15}$; $\frac{2}{45}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{7}{45}$. **46.** $\frac{2C_{n/2}^4}{C_n^4}$.
47. 0,7. **48.** $\frac{25}{174}$; $\frac{11}{522}$. **49.** $\frac{11}{C_{14}^4} = \frac{1}{91}$. **50.** $\frac{1}{A_{10}^4} = \frac{1}{5040}$.

2.3. Статистическое определение вероятности

1. 0,0375. **2.** 0,76. **3.** 0,5. **4.** 100. **5.** 190. **6.** 2000. **7.** 0,2. **8.** 0,5. **9.** 0,85.
10. 30. **11.** 250. **12.** $\frac{1}{7}$. **13.** 0,125. **14.** 0,1. **15.** 0,5. **16.** 0,504. **17.** 0,05.
18. 0,005. **19.** 0,0006. **20.** 0,006. **21.** 0,952. **22.** 0,2.

2.4. Геометрическая вероятность

1. 0,5. **2.** 0,5. **3.** $\frac{2}{\pi}$ **4.** 0,75. **5.** $\frac{1}{3}$. **6.** 0,25. **7.** 0,2. **8.** 1. **9.** $\frac{2}{3}$.

10. $\frac{1}{3}$. **11.** $\frac{5}{72}$. **12.** $\frac{7}{16}$. **13.** 0,16. **14.** 0,5; 0,25. **15.** 0,2. **16.** $0{,}04\pi$.
17. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **18.** $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2}{\pi}$; $\frac{4-\pi}{4}$; $\frac{\pi-2}{\pi}$. **19.** 0,25; 0,75. **20.** $\frac{7}{16}$; $\frac{9}{16}$; 0,25.
21. $\frac{9}{25}$; $\frac{16}{25}$; $0{,}01\pi$. **22.** 4; 3; 5; 1.

2.5. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. 0,0282; 0,0018; 0,9118. **2.** 0,7866; 0,0004; 0,0158. **3.** 0,6. **4.** 0,5.
5. $\frac{1}{30}$; $\frac{19}{30}$. **6.** 0,2. **7.** 0,5. **8.** 0,5. **9.** 0,3. **10.** $\frac{1}{9}$; $\frac{11}{18}$. **11.** 0,027.
12. 0,00176. **13.** 0,34. **14.** 0,1. **15.** 0,125. **16.** 0,91. **17.** 0,07. **18.** 0,99314.
19. 0,24. **20.** 0,72. **21.** 0,288. **22.** $\frac{1}{12}$. **23.** 0,81. **24.** 0,12. **25.** 0,0001.
26. 4. **27.** $\frac{57}{115}$. **28.** $\frac{24}{91}$; $\frac{20}{273}$. **29.** 0,8574. **30.** 0,94. **31.** 0,46.
32. 0,8 **33.** 0,98. **34.** 0,95. **35.** 0,85. **36.** $\frac{15}{64}$. **37.** $\frac{1}{455}$. **38.** 0,36.
39. 0,504; 0,092; 0,398; 0,006. **41.** 16. **42.** 0,000125; 0,007125. **44.** $\frac{1}{1024}$.
45. $\frac{1}{969}$; $\frac{1}{380}$. **46.** 0,114895. **47.** $\frac{16}{1785}$. **48.** $1-\left(\frac{7}{8}\right)^8$. **49.** 0,19. **50.** $\frac{4}{39}$.
51. 0,4. **52.** 0,25. **53.** $\frac{158}{357}$. **54.** 0,994. **55.** 0,04. **56.** 0,024; 0,188; 0,452; 0,664. **58.** $1-\left(\frac{19}{20}\right)^{20}$. **59.** $\frac{1711}{5874}$.

2.6. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

1. 0,0345. **2.** $\frac{13}{30}$. **3.** $\frac{1}{6}$. **4.** 0,002. **5.** 0,024. **6.** 0,48. **7.** 0,0545. **8.** 0,3.
9. $\frac{11}{30}$. **10.** 0,78. **11.** 0,22. **12.** 0,8. **13.** 0,49091. **14.** 0,9. **15.** $\frac{1}{18}$.
16. 0,02625; $\frac{1}{21}$. **17.** 0,6. **18.** $\frac{2}{3}$. **19.** $\frac{13}{132}$. **20.** $\frac{5}{69}$. **21.** $\frac{21}{59}$. **22.** $\frac{63}{114}$.
23. 0,01425; $\frac{7}{19}$. **24.** $\frac{49}{320}$; $\frac{25}{49}$. **25.** 0,485. **26.** 0,725. **27.** $\frac{15}{32}$.

3. Повторение независимых испытаний. Схема Бернулли

3.1. Формула Бернулли

1. 0,3125. **2.** 0,078143. **3.** 0,15625. **4.** 0,18522. **5.** 0,2916. **6.** 0,27869. **7.** 0,03078. **8.** 0,40951. **9.** 0,04395. **10.** 0,098415. **11.** 0,36015; 0,3087; 0,83692; 0,83193. **12.** 0,375; 0,3125. **13.** 0,2963. **14.** 0,79012. **15.** 0,375. **16.** 0,2048. **17.** 0,189; 0,441. **18.** 0,22689. **19.** 22. **20.** 12. **21.** 105. **22.** 11. **23.** 3. **24.** 128. **25.** 7. **26.** 108. **27.** 17. **28.** 0,027; 0,343; 0,441; 0,189. **29.** $1-0{,}9^n$. **30.** 0,1536. **31.** 0,17153. **32.** 0,0512. **33.** 0,98415. **34.** 0,8503056. **35.** 0,0729.

3.2. Теорема Пуассона

1. $2e^{-2}$. **2.** $e^{-0{,}8}$. **3.** $1-e^{-3}$. **4.** $0{,}0072\,e^{-0{,}12}$. **5.** $0{,}0045e^{-0{,}3}$; $0{,}04983753e^{-0{,}3}$. **6.** $1-\frac{8}{3}e^{-1}$. **7.** 30. **8.** $n \geq 300$. **9.** $4{,}5e^{-3}$; $1-4e^{-3}$; $1-4e^{-3}$. **10.** $3{,}375e^{-3}$; $1-13e^{-3}$; $1-e^{-3}$.

3.3. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа

1. 0,088025. **2.** 0,2903. **3.** 0,0498625. **4.** 0,022825. **5.** 0,0005(3). **6.** 0,8882. **7.** 0,5 **8.** 0,49931. **9.** 57,62 %. **10.** 3458.

Библиографический список

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М. : Высшая школа, 2004. – 479 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М. : Высшее образование, 2008. – 404 с.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М. : Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.
4. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М. : Наука, 1982. – 160 с.
5. Зубков А. М., Севастьянов Б. А. Чистяков В. П. Сборник задач по теории вероятностей. – М. : Наука, 1989. – 320 с.
6. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М. : Юнити-Дана, 2004. – 573 с.
7. Лаппо Л. Д. ЕГЭ-2014. Математика. Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ. – М. : Экзамен, 2014. – 70 с.
8. Лыткина Е. М., Чихачев С. А. Теория вероятностей. – Иркутск : ИрГУПС, 2013. – 119 с.
9. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012. Элементы теории вероятностей и статистики / под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону : Легион-М, 2011. – 32 с.
10. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М. : Наука, 1989. – 320 с.
11. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4: Теория вероятностей. Математическая статистика / под общ. редакцией А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – М. : Издательство физико-математической литературы, 2003. – 432 с.
12. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. – М. : Наука, 1982. – 256 с.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0002	0003	0003	0003	0003	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	**1,00**	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	**0,70**	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	**0,40**	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	**1,10**	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,636	0,48	0,1844	**0,80**	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	**0,50**	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	0,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	**1,20**	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	**0,90**	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	**0,60**	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,58	0,4948
1,30	04032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	**2,60**	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	**2,00**	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	**2,70**	0,4965
1,37	0,4147	**1,70**	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	**2,10**	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	**2,80**	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	**2,20**	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	04868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	**2,90**	0,4981
1,47	0,4292	**1,80**	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	**2,30**	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	**3,00**	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	**2,40**	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	**4,00**	0,49968
1,57	0,4418	**1,90**	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	**5,00**	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	**2,50**	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

Учебное пособие

Толстых Ольга Дмитриевна

Медведева Ирина Петровна

Теория вероятностей (случайные события)

Сборник типовых задач по дисциплине «Математика»

Редактор *Ф.А. Ильина*
Компьютерная верстка *И.П. Медведевой*

Подписано в печать 27.04.2015.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,75. Уч.-изд. л. 8,47.
План 2015 г. Тираж 500 экз. Заказ

Типография ИрГУПС, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15