Macroeconomía II

New Keynesian Model with Price Stickiness

Carlos Rondón-Moreno

Otoño, 2024

Introduction

El modelo NK toma el modelo RBC y agrega fricciones nominales.

- Price stickiness
- Rompe la dicotomía clásica y permite que cambios/shocks nominales tengan efectos reales
- Introduce un rol para la política monetaria (política de estabilización económica)

Para introducir fricciones nominales, tendremos que asumir firmas que operan en un mercado no competitivo:

- Competencia monopolística

Más información:

- Gali, Jordi. *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework and Its Applications.* 2nd Edition

Hogares

Los hogares en esta economía: consumen, proveen trabajo, acumulan bonos/deuda, son dueños de las firmas y acumulan dinero:

$$\max_{C_t, N_t, B_{t+1}, M_t} \quad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \frac{N_t^{1+\eta}}{1+\eta} + \theta \ln \left(\frac{M_t}{P_t} \right) \right)$$

s.t

$$P_t C_t + B_{t+1} + M_t - M_{t-1} \leq W_t N_t + \Pi_t - P_t T_t + (1 + i_{t-1}) B_t$$

La restricción presupuestal

$$P_tC_t + B_{t+1} + M_t - M_{t-1} \leq W_tN_t + \Pi_t - P_tT_t + (1 + i_{t-1})B_t$$

Noten que a diferencia del RBC, esta restricción incluye precios. Esto significa que la ecuación está en términos nominales.

- P_t es el precio de los bienes en dinero
- B_t es el stock de bonos con el cuál el hogar entra en el período t
- M_{t-1} es el stock de dinero con el cuál el hogar comienza el período t.
- W_t, T_t, Π_t son todas variables nominales.
- Gobierno juega un rol como proveedor de liquidez (imprime dinero y devuelve el señoriaje al hogar en forma de un impuesto de suma fija)

Lagrangiano y Condiciones de Primer Orden

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \frac{N_t^{1+\eta}}{1+\eta} + \theta \ln\left(\frac{M_t}{P_t}\right) + \lambda_t \left(W_t N_t + \Pi_t - P_t T_t + (1+i_{t-1}) B_t - P_t C_t - B_{t+1} - M_t + M_{t-1}\right) \right]$$

Lagrangiano y Condiciones de Primer Orden

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \frac{N_t^{1+\eta}}{1+\eta} + \theta \ln\left(\frac{M_t}{P_t}\right) + \lambda_t \left(W_t N_t + \Pi_t - P_t T_t + (1+i_{t-1})B_t - P_t C_t - B_{t+1} - M_t + M_{t-1}\right) \right]$$

F.O.C.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \Leftrightarrow C_t^{-\sigma} = \lambda_t P_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = 0 \Leftrightarrow \psi N_t^{\eta} = \lambda_t W_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{t+1}} = 0 \Leftrightarrow \lambda_t = \beta E_t \lambda_{t+1}(1+i_t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M_t} = 0 \Leftrightarrow \theta \frac{1}{M_t} = \lambda_t - \beta E_t \lambda_{t+1}$$

Lagrangiano y Condiciones de Primer Orden

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \frac{N_t^{1+\eta}}{1+\eta} + \theta \ln \left(\frac{M_t}{P_t} \right) + \lambda_t \left(W_t N_t + \Pi_t - P_t T_t + (1 + i_{t-1}) B_t - P_t C_t - B_{t+1} - M_t + M_{t-1} \right) \right]$$

Lagrangiano y Condiciones de Primer Orden

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \frac{N_t^{1+\eta}}{1+\eta} + \theta \ln\left(\frac{M_t}{P_t}\right) + \lambda_t \left(W_t N_t + \Pi_t - P_t T_t + (1+i_{t-1}) B_t - P_t C_t - B_{t+1} - M_t + M_{t-1}\right) \right]$$

Eliminando el λ

$$\psi N_t^{\eta} = C_t^{-\sigma} w_t$$

$$C_t^{-\sigma} = \beta E_t C_{t+1}^{-\sigma} (1+i_t) \frac{P_t}{P_{t+1}}$$

$$\theta \left(\frac{M_t}{P_t}\right)^{-1} = \frac{i_t}{1+i_t} C_t^{-\sigma}$$

Firmas

Vamos a dividir las firmas en dos:

1. Firma representativa productora de bienes finales
2. Firma**S** productoras de bienes intermedios, operan en competencia monopolística.

La firma productora de bienes finales:

- Agrega bienes intermedios usando un *agregador* CES
- Los insumos (bienes intermedios) son sustitutos imperfectos

Firmas

Vamos a dividir las firmas en dos:

1. Firma representativa productora de bienes finales
2. Firma**S** productoras de bienes intermedios, operan en competencia monopolística.

Las firmas productoras de bienes intermedios:

- Enfrentan una demanda con pendiente negativa, por lo que tienen poder de mercado (dado que las variedades intermedias son sustitutos imperfectos)
- Existe un continuo de firmas intermedias.
- Toman todos los precios como dados, excepto el precio correspondiente a la variedad que producen

Productor de Bienes Finales

La producción está dada por un agregador tipo CES:

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

Donde $\epsilon > 1$ es la elasticidad precio de la demanda.

Productor de Bienes Finales

La producción está dada por un agregador tipo CES:

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

Donde $\epsilon > 1$ es la elasticidad precio de la demanda. El problema de maximización de la firma está dado por:

$$\max_{Y_t(j)} \quad P_t \left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} - \int_0^1 P_t(j) Y_t(j) dj$$

Productor de Bienes Finales

La producción está dada por un agregador tipo CES:

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

Donde $\epsilon > 1$ es la elasticidad precio de la demanda. El problema de maximización de la firma está dado por:

$$\max_{Y_t(j)} \quad P_t \left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} - \int_0^1 P_t(j) Y_t(j) dj$$

Y la condición de primer orden:

$$\left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{-\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon}$$

Productor de Bienes Finales

La producción está dada por un agregador tipo CES:

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

Productor de Bienes Finales

La producción está dada por un agregador tipo CES:

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

Y la condición de primer orden:

$$\left(\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{-\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon}$$

Reemplazando la FOC en la definición de producción final:

$$Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} Y_t$$

Productor de Bienes Finales

Reemplazando la FOC en la definición de producción final:

$$Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} Y_t$$

La demanda relativa para la j^{th} variedad es una función del precio relativo, la elasticidad precio de la demanda ϵ y la producción agregada, Y_t.

Disgresión: ¿Cuál es el nivel de precios de la economía?

El PIB nominal está dado por la suma de la producción de cada variedad multiplicada por su precio:

$$P_t Y_t = \int_0^1 P_t(j) Y_t(j) dj$$

Utilizando la demanda por la variedad *j*:

$$P_t Y_t = \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} P_t^{\epsilon} Y_t dj$$

Extrayendo de la integral los términos que no dependen de *j* y simplificando:

$$P_t = \left(\int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

Productor Intermedio

Para el productor intermedio asumiremos una función de producción con retornos constantes a escala y sujeta a shocks de productividad A_t

$$Y_t = A_t N_t (j)$$

Todas las firmas intermedias enfrentan un salario común W_t. Debido a una restricción nominal, las firmas no pueden elegir libremente el precio que maximiza su profit. Sin embargo, pueden minimizar el costo:

$$\min_{N_t(j)} \quad W_t N_t(j)$$

$$\text{s.t.}$$

$$A_t N_t(j) \geq \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t$$

Productor Intermedio: Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -W_t N_t(j) + \varphi_t(j) \left(A_t N_t(j) - \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} Y_t \right)$$

Acá, el multiplicador φ se interpreta como el *costo marginal* de la firma j - *"cuanto cambia el costo si uno produce una unidad adicional del bien j"*.

La condición de primer orden iguala el costo marginal al salario nominal y la productividad del trabajador:

$$\varphi_t = \frac{W_t}{A_t}$$

Productor Intermedio: Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -W_t N_t(j) + \varphi_t(j) \left(A_t N_t(j) - \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} Y_t \right)$$

Acá, el multiplicador φ se interpreta como el *costo marginal* de la firma j - *"cuanto cambia el costo si uno produce una unidad adicional del bien j"*.
La condición de primer orden iguala el costo marginal al salario nominal y la productividad del trabajador:

$$\varphi_t = \frac{W_t}{A_t}$$

Noten que todas las firmas enfrentan el mismo costo marginal nominal.

Productor Intermedio: Beneficios Reales

Los beneficios reales de la firma j son:

$$\Pi_t(j) = \frac{P_t(j)}{P_t} Y_t(j) - \frac{W_t}{P_t} N_t(j)$$

Usando la definición del costo marginal real:

$$\Pi_t(j) = \frac{P_t(j)}{P_t} Y_t(j) - mc_t Y_t(j)$$

Donde $mc_t \equiv \frac{\varphi_t}{P_t}$ es el costo marginal real.

Productor Intermedio: Fricción Nominal

Para introducir la fricción nominal, asumiremos que las firmas no son libres de ajustar el precio en cada período.

Usaremos *"Precios a la Calvo (1983)"*:

- Cada período, existe una probabilidad fija $1 - \phi$ de la firma pueda ajustar sus precios.
- La probabilidad de que una firma se quede "estancada" con un precio por un período es ϕ
- Por dos períodos: ϕ^2 ...

Dado que existe una posibilidad de que la firma se quede estancada con el mismo precio por más de un período, el problema de escoger el precio óptimo se vuelve dinámico.

Productor Intermedio: Price Setting

La firma descuenta intertemporalmente los beneficios usando $\tilde{M}_{t+s}\phi^s = \beta^s \frac{u'(C_{t+s})}{u'(C_t)}\phi^s$

El problema de maximización es:

$$\max_{P_t(j)} \quad E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s \frac{u'(C_{t+s})}{u'(C_t)} \left(\frac{P_t(j)}{P_{t+s}} \left(\frac{P_t(j)}{P_{t+s}} \right)^{-\epsilon} Y_{t+s} - mc_{t+s} \left(\frac{P_t(j)}{P_{t+s}} \right)^{-\epsilon} Y_{t+s} \right)$$

Reemplazando la definición de demanda y agrupando términos:

$$\max_{P_t(j)} \quad E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s \frac{u'(C_{t+s})}{u'(C_t)} \left(P_t(j)^{1-\epsilon} P_{t+s}^{\epsilon-1} Y_{t+s} - mc_{t+s} P_t(j)^{-\epsilon} P_{t+s}^{\epsilon} Y_{t+s} \right)$$

Productor Intermedio: Price Setting

La condición de primer orden:

$$(1-\epsilon)P_t(j)^{-\epsilon}E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\phi)^s\,u'(C_{t+s})P_{t+s}^{\epsilon-1}Y_{t+s}+\epsilon P_t(j)^{-\epsilon-1}E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\phi)^s\,u'(C_{t+s})mc_{t+s}P_{t+s}^{\epsilon}Y_{t+s}=0$$

Reorganizando términos:

$$P_t(j)=\frac{\epsilon}{\epsilon-1}\frac{E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\phi)^s\,u'(C_{t+s})mc_{t+s}P_{t+s}^{\epsilon}Y_{t+s}}{E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\phi)^s\,u'(C_{t+s})P_{t+s}^{\epsilon-1}Y_{t+s}}$$

¿De qué depende el precio óptimo para la firma *j*?

Productor Intermedio: Price Setting

Noten que nada en el lado derecho de la ecuación depende de *j*, por lo tanto el precio óptimo será el mismo para todas las firmas:

$$P_t(j) = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \frac{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s u'(C_{t+s}) mc_{t+s} P_{t+s}^{\epsilon} Y_{t+s}}{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s u'(C_{t+s}) P_{t+s}^{\epsilon-1} Y_{t+s}}$$

Este precio se conoce como el "reset price". Esencialmente es el precio que maximiza el profit teniendo en cuenta que existe la posibilidad que la firma se quede *s* períodos con el mismo precio

Productor Intermedio: Price Setting

Denotemos el "reset price" como $P_t^{\#}$, y reescribamos el numerador y el denominador como:

$$X_{1,t} = u'(C_t) mc_t P_t^{\epsilon} Y_t + \phi\beta E_t X_{1,t+1}$$

$$X_{2,t} = u'(C_t) P_t^{\epsilon-1} Y_t + \phi\beta E_t X_{2,t+1}$$

Entonces, el precio óptimo de las firmas es:

$$P_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \frac{X_{1,\,t}}{X_{2,\,t}}$$

Productor Intermedio: Price Setting

Denotemos el "reset price" como $P_t^{\#}$, y reescribamos el numerador y el denominador como:

$$X_{1,t} = u'(C_t) mc_t P_t^{\epsilon} Y_t + \phi \beta E_t X_{1,t+1}$$

$$X_{2,t} = u'(C_t) P_t^{\epsilon-1} Y_t + \phi \beta E_t X_{2,t+1}$$

Entonces, el precio óptimo de las firmas es:

$$P_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \frac{X_{1,\,t}}{X_{2,\,t}}$$

¿Qué pasa si los precios son flexibles?

Productor Intermedio: Price Setting

Si los precios son flexibles, $\phi = 0$. El precio óptimo nos queda:

$$P_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} * P_t * mc_t$$

Pero dada la definición del costo marginal real,

$$P_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} * \varphi_t$$

En este caso, el precio es una función del markup $\frac{\epsilon}{\epsilon-1}$ y el costo marginal nominal φ_t.

Gobierno y oferta de dinero

El gobierno recibe ingresos vía señoriaje. En el modelo base, el gobierno no tiene ningún rol partícular más que imprimir dinero. Por lo tanto, su restricción presupuestal es:

$$0 \leq P_t T_t + M_t - M_{t-1}$$

El cambio en la oferta de dinero, genera un ingreso nominal para el gobierno que luego transfiere a los hogares en forma de un impuesto de suma fija:

$$T_t = -\frac{M_t - M_{t-1}}{P_t}$$

Gobierno y oferta de dinero

El gobierno recibe ingresos vía señoriaje. En el modelo base, el gobierno no tiene ningún rol partícular más que imprimir dinero. Por lo tanto, su restricción presupuestal es:

$$0 \leq P_t T_t + M_t - M_{t-1}$$

El cambio en la oferta de dinero, genera un ingreso nominal para el gobierno que luego transfiere a los hogares en forma de un impuesto de suma fija:

$$T_t = -\frac{M_t - M_{t-1}}{P_t}$$

- ¿Qué pasa si la oferta crece $M_t < M_{t-1}$
- ¿Qué pasa si la oferta se contrae?

Gobierno y oferta de dinero

El gobierno recibe ingresos vía señoriaje. En el modelo base, el gobierno no tiene ningún rol partícular más que imprimir dinero. Por lo tanto, su restricción presupuestal es:

$$0 \leq P_t T_t + M_t - M_{t-1}$$

El cambio en la oferta de dinero, genera un ingreso nominal para el gobierno que luego transfiere a los hogares en forma de un impuesto de suma fija:

$$T_t = -\frac{M_t - M_{t-1}}{P_t}$$

Dado que no tenemos un B.C explícito, supondremos que la M_t sigue un proceso estocástico descrito por un AR(1):

$$\Delta \ln M_t = (1 - \rho_m)\pi + \rho_m \Delta \ln M_{t-1} + \varepsilon_{m,t}$$

Productividad

Los shocks de productividad siguen un proceso AR(1) dado por:

$$\ln A_t = \rho_a \ln A_{t-1} + \varepsilon_{a,t}$$

Equilibrio I

En equilibrio, los bonos se encuentran en "zero net supply", es decir, $B_t = 0$. Teniendo en cuenta la definición del lump tax, la restricción de presupuesto del hogar se convierte:

$$C_t = w_t N_t + \frac{\Pi}{P_t}$$

Donde $w_t = \frac{W_t}{P_t}$. Los dividendos reales que recibe el hogar son la suma de los dividendos reales de las firmas intermedias, es decir,

$$\frac{\Pi_t}{P_t} = \int_0^1 \frac{P_t(j)}{P_t} Y_t(j) - w_t \int_0^1 N_t(j) dj$$

Equilibrio II

$$\frac{\Pi_t}{P_t} = \int_0^1 \frac{P_t(j)}{P_t} Y_t(j) - w_t \int_0^1 N_t(j) dj$$

Si el mercado laboral se vacía, esto significa qué:

$$N_t = \int_0^1 N_t\,(j)$$

Por lo tanto, en agregado

$$\frac{\Pi_t}{P_t} = \int_0^1 \frac{P_t(j)}{P_t} Y_t(j) dj - w_t N_t$$

Equilibrio III

La restricción presupuestal se transforma en:

$$C_t = \int_0^1 \frac{P_t(j)}{P_t} Y_t(j) dj$$

Donde podemos reemplazar por la definición de demanda $Y_t(j)$

$$C_t = \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} P_t^{\epsilon-1} Y_t dj$$

Sacando todo lo que no depende de j de la integral

$$C_t = P_t^{\epsilon-1} Y_t \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj$$

Recordando la definición del nivel general de precios P_t:

$$C_t = Y_t$$

Equilibrio IV

Aún nos falta encontrar una definición agregada de demanda. Volviendo a la función de demanda por la variedad j

$$Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t$$

Y reemplazando la función de producción

$$A_t N_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t$$

Integrando sobre j,

$$A_t \int_0^1 N_t(j)\, dj = Y_t \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} dj$$

¿Qué tenemos aquí?

Equilibrio IV

Según el equilibrio en el mercado laboral,

$$A_t N_t = Y_t \int_0^1 \left(\frac{P_t\,(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

¿A qué se parece esto?

Equilibrio IV

Según el equilibrio en el mercado laboral,

$$A_t N_t = Y_t \int_0^1 \left(\frac{P_t\left(j\right)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

¿A qué se parece esto?

Esto se parece al equilibrio de la oferta en el modelo RBC pero nos sobra algo...

Equilibrio V

Según el equilibrio en el mercado laboral,

$$A_t N_t = Y_t \int_0^1 \left(\frac{P_t\left(j\right)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

Definamos una nueva variable v_t^p,

$$v_t^p = \int_0^1 \left(\frac{P_t\left(j\right)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

¿Qué nos dice esta variable?

Equilibrio V

Según el equilibrio en el mercado laboral,

$$A_t N_t = Y_t \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

Definamos una nueva variable v_t^p,

$$v_t^p = \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

¿Qué nos dice esta variable?

- Si $v_t^p = 1$: todas las firmas fijan el mismo precio.
- Si hay firmas que no pueden cambiar precios (rigideces nominales): $v_t^p > 1$
- Por lo tanto, v_t^p es una medida de dispersión de precios

Equilibrio VI

Dado que $v_t^p \geq 1$ y que

$$Y_t = \frac{A_t N_t}{v_t^p}$$

La dispersión de precios es la fuente de pérdidas en producto y justifica que se fijen políticas para estabilizar los precios.

Condiciones de equilibrio

El equilibrio de esta economía estará descrito por 14 ecuaciones y 14 variables agregadas: $C_t, i_t, P_t, N_t, w_t, M_t, mc_t, A_t, Y_t, v_t^p, P_t^{\#}, X_{1,t}, X_{2,t}, \Delta \ln M_t$ y dos shocks estocásticos a la productividad y la oferta monetaria.

Condiciones de equilibrio

Las condiciones de equilibrio son:

$$C_t^{-\sigma} = \beta \mathcal{E}_t C_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + i_t\right) \frac{P_t}{P_{t+1}} \tag{1}$$

$$\psi N_t^{\eta} = C_t^{-\sigma} w_t \tag{2}$$

$$\frac{M_t}{P_t} = \theta \frac{1 + i_t}{i_t} C_t^{\sigma} \tag{3}$$

$$mc_t = \frac{w_t}{A_t} \tag{4}$$

$$C_t = Y_t \tag{5}$$

$$Y_t = \frac{A_t N_t}{v_t^p} \tag{6}$$

$$v_t^p = \int_0^1 \left(\frac{P_t\left(j\right)}{P_t}\right)^{-\epsilon} dj \tag{7}$$