# Macroeconomía II

# New Keynesian Model with Price Stickiness

Carlos Rondón-Moreno

Otoño, 2024

# Introduction

El modelo NK toma el modelo RBC y agrega fricciones nominales.

- Price stickiness
- Rompe la dicotomía clásica y permite que cambios/shocks nominales tengan efectos reales
- Introduce un rol para la política monetaria (política de estabilización económica)

Para introducir fricciones nominales, tendremos que asumir firmas que operan en un mercado no competitivo:

- Competencia monopolística

Más información:

- Gali, Jordi. *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework and Its Applications.* 2nd Edition

# Hogares

Los hogares en esta economía: consumen, proveen trabajo, acumulan bonos/deuda, son dueños de las firmas y acumulan dinero:

$$\max_{C_t, N_t, B_{t+1}, M_t} \quad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left( \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \frac{N_t^{1+\eta}}{1+\eta} + \theta \ln\left(\frac{M_t}{P_t}\right)\right)$$

s.t

$$P_t C_t + B_{t+1} + M_t - M_{t-1} \leq W_t N_t + \Pi_t - P_t T_t + (1 + i_{t-1}) B_t$$

# La restricción presupuestal

$$P_tC_t + B_{t+1} + M_t - M_{t-1} \leq W_tN_t + \Pi_t - P_tT_t + (1 + i_{t-1})B_t$$

Noten que a diferencia del RBC, esta restricción incluye precios. Esto significa que la ecuación está en términos nominales.

- $P_t$ es el precio de los bienes en dinero
- $B_t$ es el stock de bonos con el cuál el hogar entra en el período $t$
- $M_{t-1}$ es el stock de dinero con el cuál el hogar comienza el período t.
- $W_t$, $T_t$, $\Pi_t$ son todas variables nominales.
- Gobierno juega un rol como proveedor de liquidez (imprime dinero y devuelve el señoriaje al hogar en forma de un impuesto de suma fija)

# Lagrangiano y Condiciones de Primer Orden

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \frac{N_t^{1+\eta}}{1+\eta} + \theta \ln\left(\frac{M_t}{P_t}\right) + \lambda_t \left( W_t N_t + \Pi_t - P_t T_t + (1+i_{t-1}) B_t - P_t C_t - B_{t+1} - M_t + M_{t-1} \right) \right]$$

# Lagrangiano y Condiciones de Primer Orden

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \frac{N_t^{1+\eta}}{1+\eta} + \theta \ln\left(\frac{M_t}{P_t}\right) + \lambda_t \left( W_t N_t + \Pi_t - P_t T_t + (1+i_{t-1})B_t - P_t C_t - B_{t+1} - M_t + M_{t-1} \right) \right]$$

F.O.C.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \Leftrightarrow C_t^{-\sigma} = \lambda_t P_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = 0 \Leftrightarrow \psi N_t^{\eta} = \lambda_t W_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{t+1}} = 0 \Leftrightarrow \lambda_t = \beta E_t \lambda_{t+1}(1+i_t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M_t} = 0 \Leftrightarrow \theta \frac{1}{M_t} = \lambda_t - \beta E_t \lambda_{t+1}$$

# Lagrangiano y Condiciones de Primer Orden

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \frac{N_t^{1+\eta}}{1+\eta} + \theta \ln\left(\frac{M_t}{P_t}\right) + \lambda_t \left( W_t N_t + \Pi_t - P_t T_t + (1+i_{t-1}) B_t - P_t C_t - B_{t+1} - M_t + M_{t-1} \right) \right]$$

# Lagrangiano y Condiciones de Primer Orden

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \frac{N_t^{1+\eta}}{1+\eta} + \theta \ln \left( \frac{M_t}{P_t} \right) + \lambda_t \left( W_t N_t + \Pi_t - P_t T_t + (1+i_{t-1}) B_t - P_t C_t - B_{t+1} - M_t + M_{t-1} \right) \right]$$

Eliminando el $\lambda$

$$\psi N_t^{\eta} = C_t^{-\sigma} w_t$$

$$C_t^{-\sigma} = \beta E_t C_{t+1}^{-\sigma} (1+i_t) \frac{P_t}{P_{t+1}}$$

$$\theta \left( \frac{M_t}{P_t} \right)^{-1} = \frac{i_t}{1+i_t} C_t^{-\sigma}$$

# Firmas

Vamos a dividir las firmas en dos:

1. Firma representativa productora de bienes finales
2. Firma**S** productoras de bienes intermedios, operan en competencia monopolística.

*La firma productora de bienes finales:*

- Agrega bienes intermedios usando un *agregador* CES
- Los insumos (bienes intermedios) son sustitutos imperfectos

# Firmas

Vamos a dividir las firmas en dos:

1. Firma representativa productora de bienes finales
2. Firma**S** productoras de bienes intermedios, operan en competencia monopolística.

*Las firmas productoras de bienes intermedios:*

- Enfrentan una demanda con pendiente negativa, por lo que tienen poder de mercado (dado que las variedades intermedias son sustitutos imperfectos)
- Existe un continuo de firmas intermedias.
- Toman todos los precios como dados, excepto el precio correspondiente a la variedad que producen

# Productor de Bienes Finales

La producción está dada por un agregador tipo CES:

$$Y_t = \left( \int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

Donde $\epsilon > 1$ es la elasticidad precio de la demanda.

# Productor de Bienes Finales

La producción está dada por un agregador tipo CES:

$$Y_t = \left( \int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon - 1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}}$$

Donde $\epsilon > 1$ es la elasticidad precio de la demanda. El problema de maximización de la firma está dado por:

$$\max_{Y_t(j)} \quad P_t \left( \int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon - 1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}} - \int_0^1 P_t(j) Y_t(j) dj$$

# Productor de Bienes Finales

La producción está dada por un agregador tipo CES:

$$Y_t = \left( \int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

Donde $\epsilon > 1$ es la elasticidad precio de la demanda. El problema de maximización de la firma está dado por:

$$\max_{Y_t(j)} \quad P_t \left( \int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} - \int_0^1 P_t(j) Y_t(j) dj$$

Y la condición de primer orden:

$$\left( \int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{-\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} Y_t(j) = \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon}$$

# Productor de Bienes Finales

La producción está dada por un agregador tipo CES:

$$Y_t = \left( \int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

# Productor de Bienes Finales

La producción está dada por un agregador tipo CES:

$$Y_t = \left( \int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

Y la condición de primer orden:

$$\left( \int_0^1 Y_t(j)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} dj \right)^{-\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} Y_t(j) = \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon}$$

Reemplazando la FOC en la definición de producción final:

$$Y_t(j) = \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} Y_t$$

# Productor de Bienes Finales

Reemplazando la FOC en la definición de producción final:

$$Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t$$

La demanda relativa para la $j^{th}$ variedad es una función del precio relativo, la elasticidad precio de la demanda $\epsilon$ y la producción agregada, $Y_t$.

# Disgresión: ¿Cuál es el nivel de precios de la economía?

El PIB nominal está dado por la suma de la producción de cada variedad multiplicada por su precio:

$$P_t Y_t = \int_0^1 P_t(j) Y_t(j) dj$$

Utilizando la demanda por la variedad *j*:

$$P_t Y_t = \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} P_t^{\epsilon} Y_t dj$$

Extrayendo de la integral los términos que no dependen de *j* y simplificando:

$$P_t = \left( \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

# Productor Intermedio

Para el productor intermedio asumiremos una función de producción con retornos constantes a escala y sujeta a shocks de productividad $A_t$

$$Y_t = A_t N_t(j)$$

Todas las firmas intermedias enfrentan un salario común $W_t$. Debido a una restricción nominal, las firmas no pueden elegir libremente el precio que maximiza su profit. Sin embargo, pueden minimizar el costo:

$$\min_{N_t(j)} \quad W_t N_t(j)$$

$$\text{s.t.}$$

$$A_t N_t(j) \geq \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t$$

# Productor Intermedio: Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -W_t N_t(j) + \varphi_t(j) \left( A_t N_t(j) - \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} Y_t \right)$$

Acá, el multiplicador $\varphi$ se interpreta como el *costo marginal* de la firma *j* - *¸cuanto cambia el costo si uno produce una unidad adicional del bien j"*.

La condición de primer orden iguala el costo marginal al salario nominal y la productividad del trabajador:

$$\varphi_t = \frac{W_t}{A_t}$$

# Productor Intermedio: Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -W_t N_t(j) + \varphi_t(j) \left( A_t N_t(j) - \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} Y_t \right)$$

Acá, el multiplicador $\varphi$ se interpreta como el *costo marginal* de la firma *j* - *¸cuanto cambia el costo si uno produce una unidad adicional del bien j"*.

La condición de primer orden iguala el costo marginal al salario nominal y la productividad del trabajador:

$$\varphi_t = \frac{W_t}{A_t}$$

Noten que todas las firmas enfrentan el mismo costo marginal nominal.

# Productor Intermedio: Beneficios Reales

Los beneficios reales de la firma $j$ son:

$$\Pi_t(j) = \frac{P_t(j)}{P_t} Y_t(j) - \frac{W_t}{P_t} N_t(j)$$

Usando la definición del costo marginal real:

$$\Pi_t(j) = \frac{P_t(j)}{P_t} Y_t(j) - mc_t Y_t(j)$$

Donde $mc_t \equiv \frac{\varphi_t}{P_t}$ es el costo marginal real.

# Productor Intermedio: Fricción Nominal

Para introducir la fricción nominal, asumiremos que las firmas no son libres de ajustar el precio en cada período.

Usaremos *"Precios a la Calvo (1983)"*:

- Cada período, existe una probabilidad fija $1 - \phi$ de la firma pueda ajustar sus precios.
- La probabilidad de que una firma se quede .estancadaçon un precio por un período es $\phi$
- Por dos períodos: $\phi^2$ ...

Dado que existe una posibilidad de que la firma se quede estancada con el mismo precio por más de un período, el problema de escoger el precio óptimo se vuelve dinámico.

# Productor Intermedio: Price Setting

La firma descuenta intertemporalmente los beneficios usando $\tilde{M}_{t+s}\phi^s = \beta^s \frac{u'(C_{t+s})}{u'(C_t)}\phi^s$

El problema de maximización es:

$$\max_{P_t(j)} \quad E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s \frac{u'(C_{t+s})}{u'(C_t)} \left( \frac{P_t(j)}{P_{t+s}} \left( \frac{P_t(j)}{P_{t+s}} \right)^{-\epsilon} Y_{t+s} - mc_{t+s} \left( \frac{P_t(j)}{P_{t+s}} \right)^{-\epsilon} Y_{t+s} \right)$$

Reemplazando la definición de demanda y agrupando términos:

$$\max_{P_t(j)} \quad E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s \frac{u'(C_{t+s})}{u'(C_t)} \left( P_t(j)^{1-\epsilon} P_{t+s}^{\epsilon-1} Y_{t+s} - mc_{t+s} P_t(j)^{-\epsilon} P_{t+s}^{\epsilon} Y_{t+s} \right)$$

# Productor Intermedio: Price Setting

La condición de primer orden:

$$(1-\epsilon)P_t(j)^{-\epsilon}E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\phi)^s\,u'(C_{t+s})P_{t+s}^{\epsilon-1}Y_{t+s}+\epsilon P_t(j)^{-\epsilon-1}E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\phi)^s\,u'(C_{t+s})mc_{t+s}P_{t+s}^{\epsilon}Y_{t+s}=0$$

Reorganizando términos:

$$P_t(j)=\frac{\epsilon}{\epsilon-1}\frac{E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\phi)^s\,u'(C_{t+s})mc_{t+s}P_{t+s}^{\epsilon}Y_{t+s}}{E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\phi)^s\,u'(C_{t+s})P_{t+s}^{\epsilon-1}Y_{t+s}}$$

¿De qué depende el precio óptimo para la firma *j*?

# Productor Intermedio: Price Setting

Noten que nada en el lado derecho de la ecuación depende de *j*, por lo tanto el precio óptimo será el mismo para todas las firmas:

$$P_t(j) = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \frac{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s \, u'(C_{t+s}) mc_{t+s} P_{t+s}^{\epsilon} Y_{t+s}}{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s \, u'(C_{t+s}) P_{t+s}^{\epsilon-1} Y_{t+s}}$$

Este precio se conoce como el reset price". Esencialmente es el precio que maximiza el profit teniendo en cuenta que existe la posibilidad que la firma se quede *s* períodos con el mismo precio

# Productor Intermedio: Price Setting

Denotemos el reset priceçomo $P_t^{\#}$, y reescribamos el numerador y el denominador como:

$$X_{1,t} = u'(C_t) mc_t P_t^{\epsilon} Y_t + \phi \beta E_t X_{1,t+1}$$

$$X_{2,t} = u'(C_t) P_t^{\epsilon-1} Y_t + \phi \beta E_t X_{2,t+1}$$

Entonces, el precio óptimo de las firmas es:

$$P_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \frac{X_{1,\,t}}{X_{2,\,t}}$$

# Productor Intermedio: Price Setting

Denotemos el reset priceçomo $P_t^{\#}$, y reescribamos el numerador y el denominador como:

$$X_{1,t} = u'(C_t) mc_t P_t^{\epsilon} Y_t + \phi \beta E_t X_{1,t+1}$$

$$X_{2,t} = u'(C_t) P_t^{\epsilon-1} Y_t + \phi \beta E_t X_{2,t+1}$$

Entonces, el precio óptimo de las firmas es:

$$P_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \frac{X_{1,\,t}}{X_{2,\,t}}$$

¿Qué pasa si los precios son flexibles?

# Productor Intermedio: Price Setting

Si los precios son flexibles, $\phi = 0$. El precio óptimo nos queda:

$$P_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} * P_t * mc_t$$

Pero dada la definición del costo marginal real,

$$P_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} * \varphi_t$$

En este caso, el precio es una función del markup $\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}$ y el costo marginal nominal $\varphi_t$.

# Gobierno y oferta de dinero

El gobierno recibe ingresos vía señoriaje. En el modelo base, el gobierno no tiene ningún rol partícular más que imprimir dinero. Por lo tanto, su restricción presupuestal es:

$$0 \leq P_t T_t + M_t - M_{t-1}$$

El cambio en la oferta de dinero, genera un ingreso nominal para el gobierno que luego transfiere a los hogares en forma de un impuesto de suma fija:

$$T_t = -\frac{M_t - M_{t-1}}{P_t}$$

## Gobierno y oferta de dinero

El gobierno recibe ingresos vía señoriaje. En el modelo base, el gobierno no tiene ningún rol partícular más que imprimir dinero. Por lo tanto, su restricción presupuestal es:

$$0 \leq P_t T_t + M_t - M_{t-1}$$

El cambio en la oferta de dinero, genera un ingreso nominal para el gobierno que luego transfiere a los hogares en forma de un impuesto de suma fija:

$$T_t = -\frac{M_t - M_{t-1}}{P_t}$$

- ¿Qué pasa si la oferta crece $M_t < M_{t-1}$
- ¿Qué pasa si la oferta se contrae?

# Gobierno y oferta de dinero

El gobierno recibe ingresos vía señoriaje. En el modelo base, el gobierno no tiene ningún rol partícular más que imprimir dinero. Por lo tanto, su restricción presupuestal es:

$$0 \leq P_t T_t + M_t - M_{t-1}$$

El cambio en la oferta de dinero, genera un ingreso nominal para el gobierno que luego transfiere a los hogares en forma de un impuesto de suma fija:

$$T_t = -\frac{M_t - M_{t-1}}{P_t}$$

Dado que no tenemos un B.C explícito, supondremos que la $M_t$ sigue un proceso estocástico descrito por un AR(1):

$$\Delta \ln M_t = (1 - \rho_m)\pi + \rho_m \Delta \ln M_{t-1} + \varepsilon_{m,t}$$

# Productividad

Los shocks de productividad siguen un proceso AR(1) dado por:

$$\ln A_t = \rho_a \ln A_{t-1} + \varepsilon_{a,t}$$

# Equilibrio I

En equilibrio, los bonos se encuentran en "zero net supply", es decir, $B_t = 0$. Teniendo en cuenta la definición del lump tax, la restricción de presupuesto del hogar se convierte:

$$C_t = w_t N_t + \frac{\Pi}{P_t}$$

Donde $w_t = \frac{W_t}{P_t}$. Los dividendos reales que recibe el hogar son la suma de los dividendos reales de las firmas intermedias, es decir,

$$\frac{\Pi_t}{P_t} = \int_0^1 \frac{P_t(j)}{P_t} Y_t(j) - w_t \int_0^1 N_t(j) dj$$

# Equilibrio II

$$\frac{\Pi_t}{P_t} = \int_0^1 \frac{P_t(j)}{P_t} Y_t(j) - w_t \int_0^1 N_t(j) dj$$

Si el mercado laboral se vacía, esto significa qué:

$$N_t = \int_0^1 N_t\left(j\right)$$

Por lo tanto, en agregado

$$\frac{\Pi_t}{P_t} = \int_0^1 \frac{P_t(j)}{P_t} Y_t(j) dj - w_t N_t$$

# Equilibrio III

La restricción presupuestal se transforma en:

$$C_t = \int_0^1 \frac{P_t(j)}{P_t} Y_t(j) dj$$

Donde podemos reemplazar por la definición de demanda $Y_t\,(j)$

$$C_t = \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} P_t^{\epsilon-1} Y_t dj$$

Sacando todo lo que no depende de $j$ de la integral

$$C_t = P_t^{\epsilon-1} Y_t \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} dj$$

Recordando la definición del nivel general de precios $P_t$:

$$C_t = Y_t$$

# Equilibrio IV

Aún nos falta encontrar una definición agregada de demanda. Volviendo a la función de demanda por la variedad $j$

$$Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t$$

Y reemplazando la función de producción

$$A_t N_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t$$

Integrando sobre $j$,

$$A_t \int_0^1 N_t(j)\, dj = Y_t \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} dj$$

¿Qué tenemos aquí?

# Equilibrio IV

Según el equilibrio en el mercado laboral,

$$A_t N_t = Y_t \int_0^1 \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

¿A qué se parece esto?

# Equilibrio IV

Según el equilibrio en el mercado laboral,

$$A_t N_t = Y_t \int_0^1 \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

¿A qué se parece esto?

Esto se parece al equilibrio de la oferta en el modelo RBC pero nos sobra algo...

# Equilibrio V

Según el equilibrio en el mercado laboral,

$$A_t N_t = Y_t \int_0^1 \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

Definamos una nueva variable $\nu_t^p$,

$$\nu_t^p = \int_0^1 \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

¿Qué nos dice esta variable?

# Equilibrio V

Según el equilibrio en el mercado laboral,

$$A_t N_t = Y_t \int_0^1 \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

Definamos una nueva variable $\nu_t^p$,

$$\nu_t^p = \int_0^1 \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj$$

¿Qué nos dice esta variable?

- Si $\nu_t^p = 1$: todas las firmas fijan el mismo precio.
- Si hay firmas que no pueden cambiar precios (rigideces nominales): $\nu_t^p > 1$
- Por lo tanto, $\nu_t^p$ es una medida de dispersión de precios

# Equilibrio VI

Dado que $\nu_t^p \geq 1$ y que

$$Y_t = \frac{A_t N_t}{\nu_t^p}$$

La dispersión de precios es la fuente de pérdidas en producto y justifica que se fijen políticas para estabilizar los precios.

# Condiciones de equilibrio

El equilibrio de esta economía estará descrito por 14 ecuaciones y 14 variables agregadas: $C_t, i_t, P_t, N_t, w_t, M_t, mc_t, A_t, Y_t, \nu_t^p, P_t^{\#}, X_{1,t}, X_{2,t}, \Delta \ln M_t$ y dos shocks estocásticos a la productividad y la oferta monetaria.

# Condiciones de equilibrio I

Las condiciones de equilibrio son:

$$C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t C_{t+1}^{-\sigma} (1 + i_t) \frac{P_t}{P_{t+1}} \tag{1}$$

$$\psi N_t^{\eta} = C_t^{-\sigma} w_t \tag{2}$$

$$\frac{M_t}{P_t} = \theta \frac{1 + i_t}{i_t} C_t^{\sigma} \tag{3}$$

$$mc_t = \frac{w_t}{A_t} \tag{4}$$

$$C_t = Y_t \tag{5}$$

$$Y_t = \frac{A_t N_t}{\nu_t^p} \tag{6}$$

$$\nu_t^p = \int_0^1 \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\epsilon} dj \tag{7}$$

# Condiciones de equilibrio II

$$P_t^{1-\epsilon} = \int_0^1 P_t\,(j)^{1-\epsilon}\, dj \tag{8}$$

$$P_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \frac{X_{1,\,t}}{X_{2,\,t}} \tag{9}$$

$$X_{1,\,t} = C_t^{-\sigma} mc_t P_t^{\epsilon} Y_t + \phi\beta\mathbb{E}_t X_{1,\,t+1} \tag{10}$$

$$X_{2,\,t} = C_t^{-\sigma} P_t^{\epsilon-1} Y_t + \phi\beta\mathbb{E}_t X_{2,\,t+1} \tag{11}$$

$$\ln A_t = \rho_a \ln A_{t-1} + \epsilon_{a,\,t} \tag{12}$$

$$\Delta \ln M_t = (1 - \rho_m)\pi + \rho_m \Delta \ln M_{t-1} + \epsilon_{m,\,t} \tag{13}$$

$$\Delta \ln M_t = \ln M_t - \ln M_{t-1} \tag{14}$$

# Reescribiendo las condiciones de equilibrio

En su estado actual, las condiciones de equilibrio tienen tres problemas:

- Las ecuaciones aún tienen heterogeneidad (índice $j$ aparece en varias ecuaciones)
- El nivel de precios sigue apareciendo, lo que implica que el modelo puede no ser estacionario.
- La oferta de dinero $M_t$ no es estacionaria

# Reescribiendo las condiciones de equilibrio II

Para solucionarlo, debemos:

- Reescribir las ecuaciones en términos de inflación $\pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$ (eliminando el nivel de precios)
- Eliminar la heterogeneidad usando los supuestos de Calvo (1983)
- Reescribir la oferta monetaria en términos de *saldos reales*: $m_t \equiv \frac{M_t}{P_t}$

Noten que transformar la ecuación de Euler es trivial, pasemos directamente al nivel y la dispersión de precios.

# Nivel y dispersión de precios

El nivel de precios está dado por:

$$P_t^{1-\epsilon} = \int_0^1 P_t(j)^{1-\epsilon} \, dj$$

En cada período, una fracción $(1-\phi)$ actualizará el precio a $P_t^{\#}$. Una fracción $\phi$ mantendrá el precio fijado en el período anterior.

$$P_t^{1-\epsilon} = \int_0^{1-\phi} P_t^{\#,\,1-\epsilon} dj + \int_{1-\phi}^1 P_{t-1}(j)^{1-\epsilon} \, dj$$

$$P_t^{1-\epsilon} = (1-\phi) P_t^{\#,\,1-\epsilon} + \int_{1-\phi}^1 P_{t-1}(j)^{1-\epsilon} \, dj$$

# Nivel y dispersión de precios II

Siguiendo a Calvo (1983), debido a que las empresas que pueden actualizar se eligen al azar, y debido a que hay un gran número (continuo) de empresas, la integral de los precios individuales sobre algún subconjunto del intervalo unitario será simplemente proporcional a la integral sobre todo el intervalo unitario. En este caso, la proporción es igual al subconjunto del intervalo unitario sobre el cual se toma la integral. Por lo tanto,

$$\int_{1-\phi}^{1} P_{t-1}(j)^{1-\epsilon}\, dj = \phi \int_{0}^{1} P_{t-1}(j)^{1-\epsilon}\, dj = \phi P_{t-1}^{1-\epsilon}$$

Por lo que el nivel de precios queda:

$$P_t^{1-\epsilon} = (1-\phi) P_t^{\#,\,1-\epsilon} + \phi P_{t-1}^{1-\epsilon}$$

# Nivel y dispersión de precios III

Sin embargo, aún seguimos teniendo el nivel de precios en la ecuación. Definamos "*reset inflation*"como $\pi_t^{\#} = \frac{P_t^{\#}}{P_{t-1}} - 1$, dividiendo la ecuación anterior por $P_{t-1}$ a ambos lados:

$$(1+\pi_t)^{1-\epsilon} = (1-\phi)\left(1+\pi_t^{\#}\right) + \phi$$

# Nivel y dispersión de precios IV

Ahora podemos aplicar la misma lógica a la dispersión de precios:

$$\nu_t^p = \int_0^1 \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} dj$$

$$\nu_t^p = \int_0^{1-\phi} \left(\frac{P_t^{\#}}{P_t}\right)^{-\epsilon} dj + \int_{1-\phi}^1 \left(\frac{P_{t-1}(j)}{P_t}\right)^{-\epsilon} dj$$

$$\nu_t^p = (1-\phi)\left(1+\pi_t^{\#}\right)^{-\epsilon}(1+\pi_t)^{\epsilon} + (1+\pi_t)^{\epsilon} \int_{1-\phi}^1 \left(\frac{P_{t-1}(j)}{P_{t-1}}\right)^{-\epsilon} dj$$

$$\nu_t^p = (1-\phi)\left(1+\pi_t^{\#}\right)^{-\epsilon}(1+\pi_t)^{\epsilon} + (1+\pi_t)^{\epsilon}\phi\nu_{t-1}^p$$

# Reset inflation

Definamos $x_{1,\,t} \equiv \frac{X_{1,\,t}}{P_t^{\epsilon}}$ y $x_{2,\,t} \equiv \frac{X_{2,\,t}}{P_t^{\epsilon-1}}$, entonces:

$$x_{1,\,t} = C_t^{-\sigma} mc_t Y_t + \phi\beta\mathbb{E}_t \frac{X_{1,\,t+1}}{P_{t+1}^{\epsilon}} \left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)^{\epsilon}$$

$$x_{2,\,t} = C_t^{-\sigma} Y_t + \phi\beta\mathbb{E}_t \frac{X_{1,\,t+1}}{P_{t+1}^{\epsilon-1}} \left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)^{\epsilon-1}$$

En términos de inflación:

$$x_{1,\,t} = C_t^{-\sigma} mc_t Y_t + \phi\beta\mathbb{E}_t \left(1+\pi_t\right)^{\epsilon} x_{1,\,t+1}$$

$$x_{2,\,t} = C_t^{-\sigma} Y_t + \phi\beta\mathbb{E}_t \left(1+\pi_t\right)^{\epsilon-1} x_{2,\,t+1}$$

# Reset inflation II

Recordemos que $x_{1,t} \equiv \frac{X_{1,t}}{P_t^{\epsilon}}$ y $x_{2,t} \equiv \frac{X_{2,t}}{P_t^{\epsilon-1}}$, entonces $\frac{X_{1,t}}{X_{2,t}} = P_t \frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}$:

$$P_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} P_t \frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}$$

Dividiendo por $P_{t-1}$,

$$1 + \pi_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} (1 + \pi_t) \frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}$$

# Saldos reales

El crecimiento de los saldos reales está dado por:

$$\Delta \ln m_t \equiv \ln m_t - \ln m_{t-1}$$

Teniendo en cuenta la definición de $m_t$, esto es lo mismo que:

$$\Delta \ln m_t = \ln M_t - \ln P_t - \ln M_{t-1} + \ln Pt - 1 = \ln M_t - \ln M_{t-1} - \pi_t$$

O lo que es lo mismo:

$$\Delta \ln M_t = \Delta \ln m_t + \pi_t$$

Lo que implica que el proceso AR(1) para la oferta monetaria puede escribirse como:

$$\Delta \ln m_t = (1 - \rho_m)\,\pi - \pi_t + \rho_m \Delta \ln m_{t-1} + \rho_m \pi_{t-1} + \epsilon_{m,\,t}$$

# Condiciones de equilibrio III

$$C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t C_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + i_t\right) \left(1 + \pi_{t+1}\right)^{-1} \tag{15}$$

$$\psi N_t^{\eta} = C_t^{-\sigma} w_t \tag{16}$$

$$m_t = \theta \frac{1 + i_t}{i_t} C_t^{\sigma} \tag{17}$$

$$mc_t = \frac{w_t}{A_t} \tag{18}$$

$$C_t = Y_t \tag{19}$$

$$Y_t = \frac{A_t N_t}{\nu_t^p} \tag{20}$$

$$\nu_t^p = (1 - \phi) \left(1 + \pi_t^{\#}\right)^{-\epsilon} \left(1 + \pi_t\right)^{\epsilon} + \left(1 + \pi_t\right)^{\epsilon} \phi \nu_{t-1}^p \tag{21}$$

# Condiciones de equilibrio IV

$$(1+\pi_t)^{1-\epsilon} = (1-\phi)\left(1+\pi_t^{\#}\right) + \phi \tag{22}$$

$$1+\pi_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon-1}(1+\pi_t)\frac{x_{1,\,t}}{x_{2,\,t}} \tag{23}$$

$$x_{1,\,t} = C_t^{-\sigma} mc_t Y_t + \phi\beta\mathbb{E}_t (1+\pi_t)^{\epsilon} x_{1,\,t+1} \tag{24}$$

$$x_{2,\,t} = C_t^{-\sigma} Y_t + \phi\beta\mathbb{E}_t (1+\pi_t)^{\epsilon-1} x_{2,\,t+1} \tag{25}$$

$$\ln A_t = \rho_a \ln A_{t-1} + \epsilon_{a,\,t} \tag{26}$$

$$\Delta \ln m_t = (1-\rho_m)\pi - \pi_t + \rho_m \Delta \ln m_{t-1} + \rho_m \pi_{t-1} + \epsilon_{m,\,t} \tag{27}$$

$$\Delta \ln m_t = \ln m_t - \ln m_{t-1} \tag{28}$$

# Estado estacionario

$$A = 1 \tag{29}$$

$$Y = C = \frac{N}{\nu^p} \tag{30}$$

$$\pi = \pi^* \tag{31}$$

$$\Delta \ln m_t = 0 \tag{32}$$

$$i = \frac{1}{\beta}(1+\pi) - 1 \tag{33}$$

$$\pi^{\#} = \left(\frac{(1+\pi)^{1-\epsilon} - \phi}{1-\phi}\right)^{\frac{1}{1-\epsilon}} - 1 \tag{34}$$

$$\nu^p = \left(\frac{1-\phi}{1-(1+\pi)^{\epsilon}\phi}\right)\left(\frac{1+\pi}{1+\pi^{\#}}\right)^{\epsilon} \tag{35}$$

# Estado estacionario II

De acuerdo a la ecuación (34), podemos notar las siguientes regularidades:

- Si $\pi = 0 \Rightarrow \pi^{\#} = \pi = 0$
- Si $\pi > 0 \Rightarrow \pi^{\#} > \pi$
- Si $\pi < 0 \Rightarrow \pi^{\#} > \pi$

Así mismo, según la ecuación (35):

- Si $pi = 0 \Rightarrow \nu^{p} = 1$
- Si $pi \neq 0 \Rightarrow \nu^{p} > 1$

# Estado estacionario III

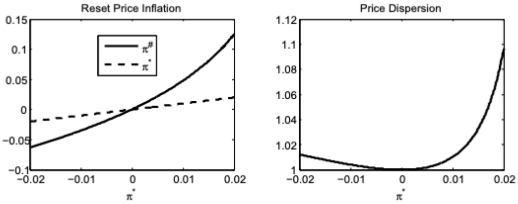



Figura: Reset price y dispersión de precios. Calculados con $\phi = 0{,}75$ y $\epsilon = 10$

Noten que si $\pi^* < 0 \Rightarrow \pi^\# < \pi^*$ y que si $\pi^* > 0 \Rightarrow \pi^\# > \pi^*$. De la gráfica de dispersión de precios vemos que $\nu^p > 1 \ \forall \ \pi^* \neq 0$

# Estado estacionario IV

$$mc = \left( \frac{1 - \phi\beta \left(1+\pi\right)^{\epsilon}}{1 - \phi\beta \left(1+\pi\right)^{\epsilon-1}} \right) \left( \frac{1+\pi^{\#}}{1+\pi} \right) \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \tag{36}$$

$$w = mc \tag{37}$$

$$N = \left( \frac{1}{\psi} (\nu^{p})^{\sigma} mc \right)^{\frac{1}{\eta+\sigma}} \tag{38}$$

$$m = \theta \frac{1+i}{i} Y^{\sigma} \tag{39}$$

# Estado estacionario V

La ecuación (36) nos dice que el costo marginal real es igual al inverso del markup de precio. De acá podemos sacar la siguiente generalización:

- Si $\pi = 0 \Rightarrow mc = \frac{\epsilon-1}{\epsilon}$
- Si $\pi \neq 0 \Rightarrow mc < \frac{\epsilon-1}{\epsilon}$

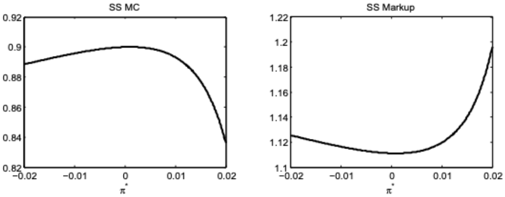



Figura: Evolución del costo marginal real y del markup. Calculado con $\beta = 0{,}99$, $\epsilon = 10$, $\phi = 0{,}75$

# Equilibrio de precios flexibles

Más adelante, será de gran utilidad considerar un equilibrio donde tengamos precios flexibles. Dicho equilibrio está caracterízado por el siguiente sistema de ecuaciones. Noten que si los precios son flexibles, shocks nominales no tienen ningún efecto sobre variables reales.

$$\pi = 0, \; \pi^{\#} = \pi \tag{40}$$

$$\nu_t^{f,\,p} = 1 \tag{41}$$

$$mc_t^f = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \tag{42}$$

$$w_t^f = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} A_t \tag{43}$$

$$N_t^f = \left( \frac{\epsilon - 1}{\psi \epsilon} A_t^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma + \eta}} \tag{44}$$

$$Y_t^f = A_t N_t^f \tag{45}$$

# Análisis cuantitativo: ¿Cómo calibrar el parámetro $\phi$?

Recordemos que $\phi$ es la probabilidad de que la firma **NO** pueda ajustar precios en el período actual, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[P_t \neq P_{t-1},\ t = 1] &= 1 - \phi \\
\mathbb{P}[P_{t+1} \neq P_{t-1},\ t = 2] &= \phi\,(1 - \phi) \\
\mathbb{P}[P_{t+2} \neq P_{t-1},\ t = 3] &= \phi^2\,(1 - \phi) \\
&\vdots \\
\textsc{Expected Duration} &= (1 - \phi)\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1} j
\end{aligned}$$

# Análisis cuantitativo: ¿Cómo calibrar el parámetro $\phi$?

Recordemos que $\phi$ es la probabilidad de que la firma **NO** pueda ajustar precios en el período actual, por lo tanto:

$$\textsc{Expected Duration} = (1-\phi)\sum_{j=1}^{\infty}\phi^{j-1}j$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
S &= 1 + 2\phi + 3\phi^2 + 4\phi^3 + \cdots \\
S\phi &= \phi + 2\phi^2 + 3\phi^3 + \cdots \\
(1-\phi)S &= 1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \cdots \\
S &= \frac{1}{(1-\phi)^2} \\
\textsc{Expected Duration} &= \frac{1}{1-\phi}
\end{aligned}$$

# Análisis cuantitativo: ¿Cómo calibrar el parámetro $\phi$?

$$\textsc{Expected Duration} = \frac{1}{1-\phi}$$

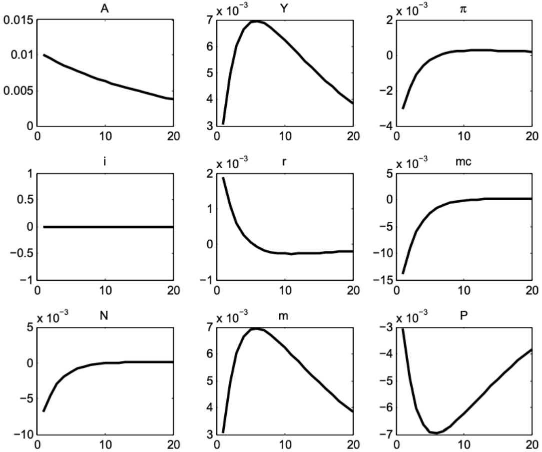
Brian y Klenow (2004, JPE) usando microdatos de precios calcularon la duración promedio entre cambios de precios para diferentes tipos de bienes y servicios. Los autores encuentran que, en promedio, los precios cambian cada seis meses ($\phi = 0{,}5$). Sin embargo, para que estos modelos produzcan respuestas realistas a choques de política monetaria, $\phi$ debe ser mucho más alto (del orden de 0.75).

1. Este es un tema importante de investigación ya que empíricamente hay resultados recientes indicando una curva de Phillips relativamente plana y el poder de la política monetaria en estos modelos radica en la inflexibilidad de los precios (ver por ejemplo, Hazell, et Al, 2022, QJE).

# Análisis cuantitativo: Shock de productividad

Para solucionar el modelo, se pueden usar los siguientes parámentros:

$\phi = 0{,}75,\ \sigma = 1,\ \eta = 1,\ \psi = 1,\ \epsilon = 10,\ \theta = 1,\ \rho_a = 0{,}95,\ \rho_m = 0{,}0,\ \phi = 0$



# Análisis cuantitativo: Shock de productividad II

Definamos .ºutput gapçomo $\ln X_t = \ln Y_t - \ln Y_t^f$

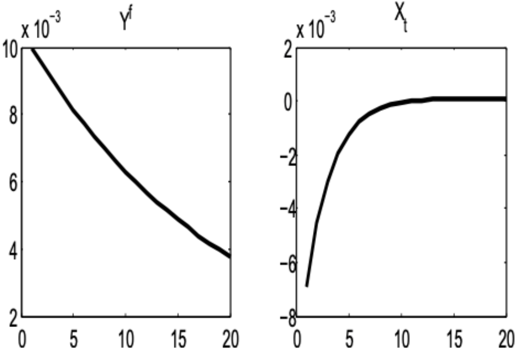



Figura: Equilibrio de precios flexibles ante un shock de productividad

# Análisis cuantitativo: Shock de política monetaria

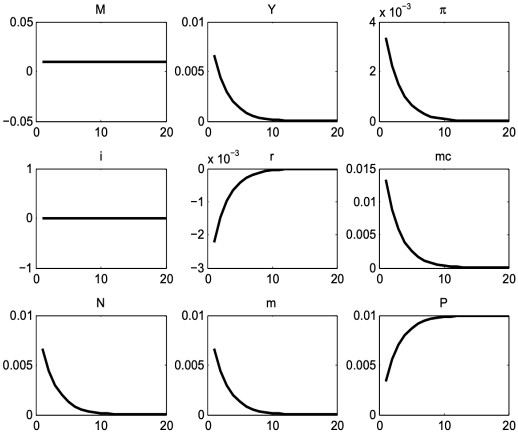



Figura: IRFs modelo NK: Shock de monetario

# Análisis cuantitativo: Shock de política monetaria II

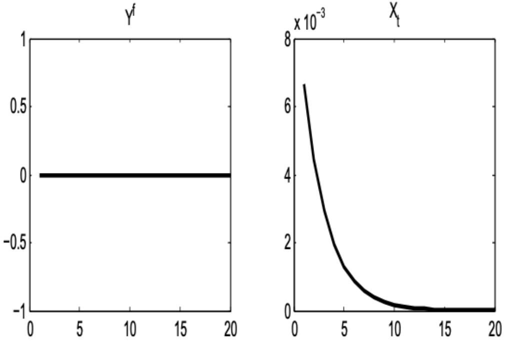



Figura: Equilibrio de precios flexibles ante un shock monetario

# Modelo Log-linearizado (alrededor de $\pi^* = 0$)

$$\tilde{Y}_t = \mathbb{E}_t \tilde{Y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{i}_t - \mathbb{E}_t \tilde{\pi}_{t+1}\right) \tag{46}$$

$$\tilde{\pi}_t = \frac{(1-\phi)(1-\phi\beta)}{\phi}(\sigma+\eta)\left(\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_t^f\right) + \beta \mathbb{E}_t \tilde{\pi}_{t+1} \tag{47}$$

$$\tilde{Y}_t^f = \frac{1+\eta}{\sigma+\eta}\tilde{A}_t \tag{48}$$

$$\tilde{A}_t = \rho_a \tilde{A}_{t-1} + \epsilon_{a,\,t} \tag{49}$$

$$\Delta \tilde{m}_t = -\tilde{\pi}_t + \rho_m \tilde{\pi}_{t-1} + \rho_m \Delta \tilde{m}_{t-1} + +\epsilon_{m,\,t} \tag{50}$$

$$\Delta \tilde{m}_t = \tilde{m}_t - \tilde{m}_{t-1} \tag{51}$$

$$\tilde{m}_t = \left(1 - \frac{\beta}{1-\beta}\right)\tilde{i}_t + \sigma \tilde{Y}_t \tag{52}$$

# La Regla de Taylor

Hasta el momento, el modelo ha caracterizado la política monetaria con una regla exógena para el crecimiento del dinero. Esto no es muy realista.

1. B.C. (modernos) no piensan en términos de agregados monetarios.
2. B.C. (modernos) usan instrumentos financieros (es decir, tasas de interés)

Pero, ¿Qué tipo de regla podrían seguir los B.C. para establecer su política monetaria?

# La Regla de Taylor

Hasta el momento, el modelo ha caracterizado la política monetaria con una regla exógena para el crecimiento del dinero. Esto no es muy realista.

1. B.C. (modernos) no piensan en términos de agregados monetarios.
2. B.C. (modernos) usan instrumentos financieros (es decir, tasas de interés)

Pero, ¿Qué tipo de regla podrían seguir los B.C. para establecer su política monetaria? Taylor (1993): Una regla de política monetaria debe especificar una tasa interés nominal que reaccione (de forma suficiente) a variables endógenas como la *inflación* o el *producto*.

$$i_t = (1-\rho_i)\, i + \rho_i i_{t-1} + (1-\rho_i)\left(\phi_\pi(\pi_t - \pi) + \phi_x(\ln X_t - \ln X)\right) + \epsilon_{i,t} \tag{53}$$

# La Regla de Taylor

Hasta el momento, el modelo ha caracterizado la política monetaria con una regla exógena para el crecimiento del dinero. Esto no es muy realista.

1. B.C. (modernos) no piensan en términos de agregados monetarios.
2. B.C. (modernos) usan instrumentos financieros (es decir, tasas de interés)

Pero, ¿Qué tipo de regla podrían seguir los B.C. para establecer su política monetaria?

# La Regla de Taylor

Hasta el momento, el modelo ha caracterizado la política monetaria con una regla exógena para el crecimiento del dinero. Esto no es muy realista.

1. B.C. (modernos) no piensan en términos de agregados monetarios.
2. B.C. (modernos) usan instrumentos financieros (es decir, tasas de interés)

Pero, ¿Qué tipo de regla podrían seguir los B.C. para establecer su política monetaria?

Taylor (1993): Una regla de política monetaria debe especificar una tasa interés nominal que reaccione (de forma suficiente) a variables endógenas como la *inflación* o el *producto*.

$$i_t = (1-\rho_i)\, i + \rho_i i_{t-1} + (1-\rho_i)\left(\phi_\pi(\pi_t - \pi) + \phi_x (\ln X_t - \ln X)\right) + \epsilon_{i,\,t} \tag{54}$$

# La Regla de Taylor II

Las condiciones de equilibrio que describen la economía son:

$$C_t^{-\sigma} = \beta E_t C_{t+1}^{-\sigma}(1+i_t)(1+\pi_{t+1})^{-1}$$

$$\psi N_t^{\eta} = C_t^{-\sigma} w_t$$

$$m_t = \theta \frac{1+i_t}{i_t} C_t^{\sigma}$$

$$mc_t = \frac{w_t}{A_t}$$

$$C_t = Y_t$$

$$Y_t = \frac{A_t N_t}{v_t^p}$$

$$v_t^p = (1-\phi)(1+\pi_t^{\#})^{-\epsilon}(1+\pi_t)^{\epsilon} + (1+\pi_t)^{\epsilon}\phi v_{t-1}^p$$

$$(1+\pi_t)^{1-\epsilon} = (1-\phi)(1+\pi_t^{\#})^{1-\epsilon} + \phi$$

$$1+\pi_t^{\#} = \frac{\epsilon}{\epsilon-1}(1+\pi_t)\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}$$

# La Regla de Taylor II

Pero, ahora, nos deshacemos de la variable para el crecimiento de demanda por saldos reales $\Delta \ln m_t$,

$$x_{1,t} = C_t^{-\sigma} mc_t Y_t + \phi\beta E_t (1+\pi_{t+1})^{\epsilon} x_{1,t+1}$$

$$x_{2,t} = C_t^{-\sigma} Y_t + \phi\beta E_t (1+\pi_{t+1})^{\epsilon-1} x_{2,t+1}$$

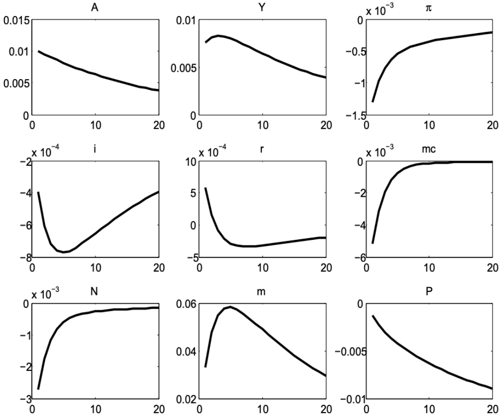
$$\ln A_t = \rho_a \ln A_{t-1} + \varepsilon_{a,t}$$

$$i_t = (1-\rho_i)i + \rho_i i_{t-1} + (1-\rho_i)\left(\phi_\pi(\pi_t - \pi) + \phi_x\left(\ln X_t - \ln X\right)\right) + \varepsilon_{i,t}$$

Lo que implica que ahora tenemos una variable (y una ecuación menos).

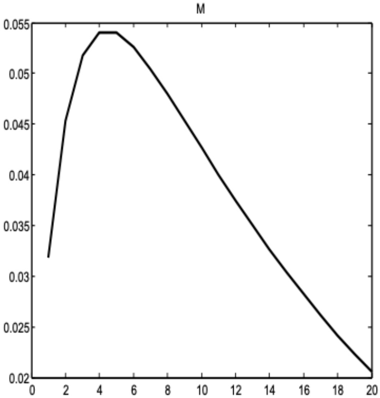
# La Regla de Taylor: Análisis Cuantitativo

Vamos a dynare y resolvamos el modelo para $\rho_i = 0$, $\phi_x = 0$ y $\phi_\pi = 1{,}5$



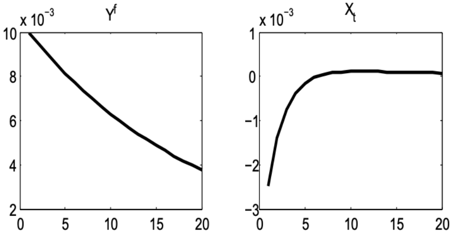
# La Regla de Taylor: Análisis Cuantitativo II

A diferencia de la especificación anterior, la oferta monetaria bajo una regla de Taylor si reacciona a choques de productividad.



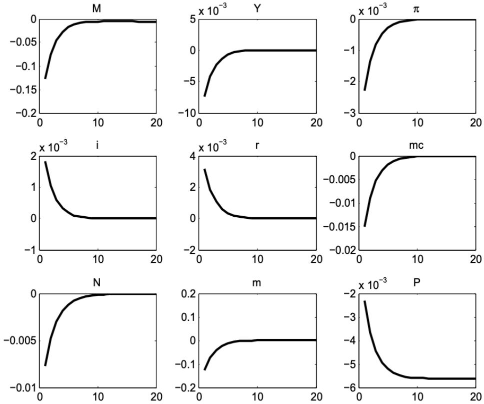
# La Regla de Taylor: Análisis Cuantitativo IV

Dado que la oferta monetaria es endógena, el producto responde más que con la especificación anterior. Ahora, la demanda por saldos reales no depende solamente de los precios para ajustarse ($M_t$ también puede cambiar). Esto hace que la caída en el output gap sea menor que antes.



# La Regla de Taylor: Análisis Cuantitativo V

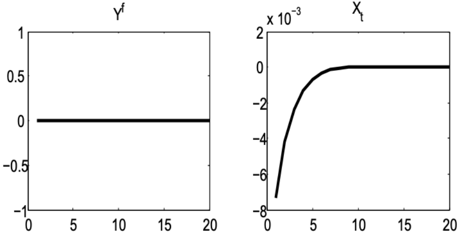
¿Qué pasa ante un shock que incremente la tasa de interés?




Noten que esto coincide con un shock que reduzca la oferta monetaria. Es decir, que un incremento de la tasa de interés es análogo a una contracción en los agregados monetarios.

# La Regla de Taylor: Análisis Cuantitativo VI

¿Cómo reacciona la oferta con un shock monetario?




Como el producto de precios flexibles $Y_t^f$ no reacciona a variables nominales, se mantiene constante. El output gap por otro lado se vuelve negativo ya que el choque es contraccionario para la demanda.

# El modelo Neo-Keynesiano en 3 ecuaciones

Ahora que agregamos una regla de política para la tasa de interés, el dinero en el modelo es una variable redundante. Podemos simplificar el sistema de ecuaciones aún más. Para ello, comencemos por eliminar $\tilde{A}_t$, del modelo:

$$\tilde{Y}_t^f = \omega \tilde{A}_t$$
$$\tilde{Y}_t^f = \omega \left( \rho_a \tilde{A}_{t-1} + \epsilon_{a,\, t} \right)$$
$$\tilde{Y}_t^f = \omega \left( \rho_a \frac{\tilde{Y}_{t-1}^f}{\omega} + \epsilon_{a,\, t} \right)$$

$$\tilde{Y}_t^f = \rho_a \tilde{Y}_{t-1}^f + \omega \epsilon_{a,\, t} \tag{55}$$

Donde $\omega = \frac{1+\eta}{\sigma+\eta}$. Noten que esto implica que $\tilde{Y}_t^f$ es exógeno y que obedece el mismo proceso AR(1) que $\tilde{A}_t$ pero escalado por un factor $\omega$.

# El modelo Neo-Keynesiano en 3 ecuaciones

La curva IS/Euler también la podemos reescribir en términos del output gap $\tilde{X}_t$. Esto lo podemos hacer substrayendo $\tilde{Y}_t^F$ y $\mathbb{E}_t \tilde{Y}_{t+1}^F$ a ambos lados de la Euler equation:

$$
\begin{aligned}
\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_t^F - \mathbb{E}_t \tilde{Y}_{t+1}^F &= -\tilde{Y}_t^F + \mathbb{E}_t \tilde{Y}_{t+1} - \mathbb{E}_t \tilde{Y}_{t+1}^F - \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{i}_t - \mathbb{E}_t \tilde{\pi}_{t+1}\right) \\
\tilde{X}_t &= \mathbb{E}_t \tilde{X}_{t+1} + \mathbb{E}_t \tilde{Y}_{t+1}^F - \tilde{Y}_t^F - \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{i}_t - \mathbb{E}_t \tilde{\pi}_{t+1}\right)
\end{aligned}
$$

# El modelo Neo-Keynesiano en 3 ecuaciones

La curva IS/Euler también la podemos reescribir en términos del output gap $\tilde{X}_t$. Esto lo podemos hacer substrayendo $\tilde{Y}_t^F$ y $\mathbb{E}_t\tilde{Y}_{t+1}^F$ a ambos lados de la Euler equation:

$$\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_t^F - \mathbb{E}_t\tilde{Y}_{t+1}^F = -\tilde{Y}_t^F + \mathbb{E}_t\tilde{Y}_{t+1} - \mathbb{E}_t\tilde{Y}_{t+1}^F - \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{i}_t - \mathbb{E}_t\tilde{\pi}_{t+1}\right)$$

$$\tilde{X}_t = \mathbb{E}_t\tilde{X}_{t+1} + \mathbb{E}_t\tilde{Y}_{t+1}^F - \tilde{Y}_t^F - \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{i}_t - \mathbb{E}_t\tilde{\pi}_{t+1}\right)$$

La ecuación de Fisher nos dice que $\tilde{r}_t = \tilde{i}_t - \mathbb{E}_t\tilde{\pi}_{t+1}$. En un mundo con precios flexibles ($\tilde{X}_t = 0$), podemos resolver para una tasa de interés hipótetica de precios flexibles $(\tilde{r}_t^f)$:

$$0 = +\mathbb{E}_t\tilde{Y}_{t+1}^F - \tilde{Y}_t^F - \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{r}_t^f\right)$$

$$\tilde{r}_t^f = \sigma\left(\mathbb{E}_t\tilde{Y}_{t+1}^F - \tilde{Y}_t^F\right)$$

# El modelo Neo-Keynesiano en 3 ecuaciones

La ecuación de Fisher nos dice que $\tilde{r}_t = \tilde{i}_t - \mathbb{E}_t \tilde{\pi}_{t+1}$. En un mundo con precios flexibles $(\tilde{X}_t = 0)$, podemos resolver para una tasa de interés hipótetica de precios flexibles $\left(\tilde{r}_t^f\right)$:

$$0 = \mathbb{E}_t \tilde{Y}_{t+1}^F - \tilde{Y}_t^F - \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{r}_t^f\right)$$
$$\tilde{r}_t^f = \sigma\left(\mathbb{E}_t \tilde{Y}_{t+1}^F - \tilde{Y}_t^F\right)$$

En otras palabras, la tasa de interés "natural"(a veces llamada, "neutral"), es proporcional a la tasa de crecimiento esperada del producto de precios flexibles. Poniendo todo conjuntamente, nos queda la nueva ecuación de Euler es:

$$\tilde{X}_t = \mathbb{E}_t \tilde{X}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{i}_t - \mathbb{E}_t \tilde{\pi}_{t+1} - \tilde{r}_t^f\right) \tag{56}$$

# El modelo Neo-Keynesiano en 3 ecuaciones

Recordemos que $\mathbb{E}_t \tilde{Y}_t^f = \rho_a \tilde{Y}_t^f$ entonces,

$$\tilde{r}_t^f = \sigma(\rho_a - 1)\tilde{Y}_t^f$$

Si sustituimos en el proceso AR(1) que derivamos para $\tilde{Y}_t^f$, nos queda:

$$\tilde{r}_t^f = \rho_a \tilde{r}_{t-1}^f + \sigma(\rho_a - 1)\omega\epsilon_{a,t} \tag{57}$$

# El modelo Neo-Keynesiano en 3 ecuaciones

Si juntamos las ecuaciones (47), (54, log-linearizada), (56) y (57), obtenemos el modelo neo-keynesiano en tres ecuaciones (aunque en realidad sean 4):

$$\tilde{X}_t = \mathbb{E}_t \tilde{X}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{i}_t - \mathbb{E}_t \tilde{\pi}_{t+1} - \tilde{r}_t^f\right) \tag{58}$$

$$\tilde{\pi}_t = \frac{(1-\phi)(1-\phi\beta)}{\phi}(\sigma+\eta)\tilde{X}_t + \beta \mathbb{E}_t \tilde{\pi}_{t+1} \tag{59}$$

$$\tilde{i}_t = \rho_i \tilde{i}_{t-1}(1-\rho_i)\left(\phi_\pi \tilde{\pi}_t + \phi_x \tilde{X}_t\right) + \epsilon_{i,\,t} \tag{60}$$

$$\tilde{r}_t^f = \rho_a \tilde{r}_{t-1}^f + \sigma(\rho_a - 1)\omega\epsilon_{a,\,t} \tag{61}$$

La primera ecuación es la curva IS/Euler, la segunda es la curva de Phillips, y la tercera es la regla de Taylor (regla de política). La cuarta ecuación describe el proceso exógeno para $\tilde{r}_t^f$.