Problem Set I

Macroeconomía II

April 1, 2025

Instrucciones: Estos ejercicios se pueden trabajar en grupo (altamente recomendable). Sin embargo, por favor entreguen sus respuestas individualmente. Deben entregarlo en la clase complementaria del miércoles 15 de abril.

Para sus respuestas pueden usar Matlab, Python o Julia. Los resultados deben ser enviados por email a Iris antes de clase (formato PDF) e incluir todas las imagenes como parte del documento principal.

Todas las respuestas deben ser escritas en máquina (sin excepción!). Les recomiendo que usen latex, aunque no es obligatorio, es una herramienta extremadamente útil y frecuentemente usada en el entorno de economistas. Si aún no lo usan, les va a hacer la vida más fácil de aquí en adelante (sobre todo a los que buscan hacer un Ph.D).

Ejercicio 0. Función de utilidad CES y el Logaritmo Natural. Pruebe la siguiente identidad:

$$\lim_{\sigma \to 1} \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} = \ln C_t \tag{1}$$

Ejercicio 1. Descomposición de varianza de un proceso MA(3): Considera el siguiente proceso de media móvil (MA), impulsado por dos shocks de ruido blanco no correlacionados, $\varepsilon_{1,t}$ y $\varepsilon_{2,t}$, con varianzas σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente:

$$X_t = \varepsilon_{1,t} + \theta_1 \varepsilon_{1,t-1} + \theta_2 \varepsilon_{1,t-2} + \theta_3 \varepsilon_{1,t-3} + \varepsilon_{2,t} + \alpha_1 \varepsilon_{2,t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{2,t-2} + \alpha_3 \varepsilon_{2,t-3}$$

1. Calcule la varianza total de X_t en términos de los coeficientes θ_i, α_i y las varianzas de los shocks. Es decir, derive una expresión para $\mathrm{Var}(X_t)$.

2. Usando el resultado anterior, derive la **descomposición de varianza incondicional**, es decir, calcule:
$$\frac{\mathrm{Var}(X_t \mid \varepsilon_1)}{\mathrm{Var}(X_t)} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{Var}(X_t \mid \varepsilon_2)}{\mathrm{Var}(X_t)}$$
e interprete qué representan estas expresiones.

3. Calcule el error de pronóstico en el horizonte $h = 0$ (es decir, $X_t - \mathbb{E}_{t-1} X_t$), y luego derive su varianza. Use esto para calcular la **descomposición de varianza condicional** en $h = 0$.

4. Repita el mismo procedimiento para el horizonte $h = 1$. Es decir, calcule el error de pronóstico $X_{t+1} - \mathbb{E}_{t-1}X_{t+1}$, su varianza y la descomposición de varianza condicional.

5. Repita el procedimiento para el horizonte $h = 2$.

6. ¿Qué sucede para $h \geq 3$ en términos de la varianza del error de pronóstico? ¿Por qué este caso corresponde a la descomposición incondicional? ¿Qué pasa si hubiésemos definido un proceso MA(∞)? Explique.

7. (*Opcional*) Explique cómo se pueden usar las funciones de impulso-respuesta para calcular descomposiciones de varianza en la práctica cuando la representación MA no está disponible.

Ejercicio 2. Procesos ARMA e impulsos respuesta: Suponga una variable aleatoria x_t que obedece el siguiente proceso aleatorio MA(4):

$$x_t = \epsilon_t + 0.9\epsilon_{t-1} + 0.7\epsilon_{t-2} + 0.4\epsilon_{t-3} - 0.1\epsilon_{t-4}, \quad \epsilon_t \; N(0,\, 1) \tag{2}$$

a. Calcule $E[x_t]$. Calcule $var(x_t)$

   [Matlab/Python]: Genere ϵ_t en Matlab o Python (ej, usando el comando "randn" en Matlab). Construya una base de datos con T = 300 observaciones utilizando el proceso MA(4) dado anteriormente. Suponga como condiciones iniciales que las realizaciones de todos los ϵ_t antes del inicio de la muestra son 0. Repita este proceso N = 1000 veces, lo que debería dejarle con 1000 muestras con 300 observaciones cada una.

b. Para cada una de las N muestras creadas, calcule la media y la varianza de la serie de tiempo. Al hacer esto, omita los primeros 100 períodos para limitar la influencia de las condiciones iniciales asumidas. En otras palabras, calcule la media y la varianza de las últimas 200 observaciones de cada una de las 1000 muestras artificiales. Luego, calcule la media de las medias a través de las N = 1000 muestras artificiales y la media de las varianzas a través de las N = 1000 muestras artificiales. Reporte esos valores aquí y comente qué tan cerca están de lo que se calculó en la parte (a).

c. En las últimas 200 observaciones de cada una de las N = 1000 muestras artificiales que ha creado, estime un proceso AR(p) para las siguientes diferentes longitudes de rezago: p = 1, p = 2, p = 4 y p = 8. Debe incluir siempre una constante en cualquier regresión estimada, incluso si no creen que sea necesaria (aquí, no lo es). Utilicen el modelo AR(p) estimado para construir la función de impulso respuesta (a un choque de una desviación estándar) hasta el horizonte H = 10 (la forma más sencilla de hacer esto es volver a escribir el AR(p) como un VAR(1)). Por lo tanto, para los cuatro valores diferentes de p, deberían producir una función de impulso respuesta para cada una de las N = 1000 muestras artificiales. Promedien estos impulso respuestas a través de las N muestras diferentes. Grafiquen la función de respuesta promedio para cada valor diferente de p y comenten qué tan bien aproxima este IRF estimado, al IRF teórico calculado con los parámetros conocidos del proceso MA dado anteriormente.

Ejercicio 3. The Hodrick-Prescott Filter: En este ejercicio, derivarán el filtro HP y crearán su propio código para implementarlo. Supongan que tienen una secuencia de datos y_t con $t = 1, \cdots, T$ (es decir, con T observaciones totales). El objetivo es encontrar una tendencia $\{\tau_t\}_{t=1}^{T}$ que minimice la siguiente función objetivo:

$$\min_{\tau_t} \sum_{t=1}^{T-1} (y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \left[(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})\right]^2 \tag{3}$$

Con el parámetro $\lambda \geq 0$.

a. Proporcione una interpretación verbal de esta función objetivo y a qué se está apuntando exactamente al elegir una tendencia, $\{\tau_t\}_{t=1}^{T}$.

b. Pruebe que si $\lambda = 0$, la solución es $\tau_t = y_t$. Es decir, que la tendencia y la serie de tiempo son idénticas.

c. Pruebe que si $\lambda \to \infty$, la solución es una tendencia lineal, es decir, $\tau_t = \alpha t$ para algún α.

d. En el caso en que $0 < \lambda < 0$, derive condiciones analíticas para definir la tendencia. Esto implica resolver el problema de maximización para cada t hasta T.

e. Usando Matlab/Python escriba un código que encuentre la tendencia de una serie de tiempo y_t. Para hacer esto, exprese las condiciones de primer orden en forma matricial: