Macroeconomía II
Otoño 2025
Examen I
May 26, 2025

Nombre Completo:

Instrucciones

1. Tiene 2 horas para resolver el examen
2. El examen tiene un total de 100 puntos por calificar
3. El número de puntos de cada parte se indica al comienzo de cada item.
4. Asigne su tiempo de manera eficiente para dedicar suficiente tiempo a todas las preguntas. No dedique *demasiado* tiempo a ninguna de ellas. Decida con cuidado que responde primero y trate de no dejar puntos sin responder.
5. Sus respuestas deben contener pasos intermedios para que el evaluador pueda estar seguro de que llegó al resultado correcto sabiendo lo que hacía. Esto también le permitirá al evaluador darle puntaje parcial cuando no obtenga la respuesta correcta.
6. Responda cada parte en hojas distintas. Cada hoja debe indicar la parte y la pregunta que se está respondiendo.
7. Este es un examen a libro cerrado. No se permiten ayudas de ninguna especie.
8. **Importante** Al final, se deben entregar las respuestas, y este enunciado debidamente marcado.

Pregunta I. Modelo RBC Economía Cerrada (100 Puntos)

1. El planeador social de esta economía escoge una secuencia de $\{C_t, Z_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ maximiza
$$E\sum \beta^t u(C_t)$$
sujeto a le ecuación de transición del capital
$$K_{t+1} = \big[1 - \delta(Z_t)\big]K_t + A_t(Z_t k_t)^\alpha L_t^{1-\alpha}$$
el proceso estocástico de la productividad
$$log\ A_t = (1-\rho)log\ A + \rho\ log\ A_{t-1} + \varepsilon_t$$
los valores factibles para las variables
$$C_t \geq 0, K_{t+1} \geq 0, Z_t\ \epsilon\ \big[0,1\big], L_t = 1$$
con $K_0 > 0$ dado.

Los controles son C_t, K_{t+1}, y Z_t, y las variables estado son K_t y A_t.

Rúbrica *(4 puntos)*

- 1 punto por identificar todos los controles, 0.5 si identifica algunos
- 1 punto por identificar todos los estados, 0.5 si identifica algunos
- 1 punto por identificar la funcón objetivo del planeador, 0 puntos de lo contrario
- 1 punto por identificar todas las restricciones, 0.5 si identifica algunas

2. Ya sea a través del método lagrangeano o utilizando programación dinámica las condiciones de primer orden son
$$\delta'(Z_t)Z_t = \alpha A_t \frac{(K_t Z_t)^\alpha}{K_t} L_t^{1-\alpha}$$
En el óptimo, el nivel de uso del capital es tal que el costo total sobre la depreciación $(\delta'(Z_t)Z_t)$ es igual al producto marginal del capital.
$$u'(C_t) = \beta E\big[u'(C_{t+1})R_{t+1}\big]$$
con
$$R_t = 1 - \delta(Z_t) + \alpha A_t \frac{(K_t Z_t)^\alpha}{K_t} L_t^{1-\alpha}$$
En el óptimo, el costo marginal de ahorrar y no consumir en t debe ser igual al consumo adicional que se consigue en el siguiente periodo descontado por β.

Este consumo adicional es igual al consumo marginal en $t+1$ por el retorno del ahorro. A su vez, el retorno es la suma del producto marginal del capital y lo que queda de una unidad de capital, neto de depreciación.

Rúbrica *(4 puntos)*

- 1 punto por encontrar la CPO para Z_t
- 1 punto por encontrar la Ecuación de Euler
- 1 puntos por encontrar la expresión R_t o R_{t+1}, 0 punto si subíndices no son consistentes para R_t o para R_{t+1}
- 1 punto si la *mayoría* de las intuiciones detrás de las CPO tienen sentido económico.

3. Partir de la definicón de $\delta(Z_t)$, sacar la derivada, y reemplazar en la condición de primer orden de Z_t. Luego, teniendo en equilibrio, $L_t = 1$, y reorganizando se obtiene

$$Z_t^{\omega-\alpha} = \alpha A_t K_t^{\alpha-1}$$

El nivel óptimo de Z_t es función de la productividad marginal del capital, evaluada con $Z_t = 1$. Lo anterior sugiere que Z_t es procíclica dado que un choque positivo en la productividad, aumenta la productividad marginal del stock del capital, por lo que lo óptimo es hacer un mayor uso del mismo.

Rúbrica *(3 puntos)*

- 2 puntos por el proceso de encontrar la ecuación
- 1 punto por la respuesta y la argumentación de si Z_t es procíclica o no.

4. En el estado estacionario no estocástico, se cumple la condición para las variables endógenas que $X_t = X_{t+1} = X$. Además, en este modelo, se sabe que $L_t = L_{t+1} = L = 1$ y que A es el valor de la productividad en estado estacionario.

Para obtener el valor de Z, se parte que, en estado estacionario, la ecuación de Euler es

$$1 = \beta R$$

que la condición de primer orden de Z_t en estado estacionario es igual a

$$Z^{\omega} = \alpha A K^{\alpha-1} Z^{\alpha}$$

y se utiliza esta condicón en la ecuación del retorno R en estado estacionario, al simplificar se observa que

$$R = 1 + Z^{\omega}\big[1 - \frac{1}{\omega}\big]$$

Utilizando la Ecuación de Euler y esta última condición, se obtiene que

$$Z = \left[\frac{1-\beta}{\beta}\frac{\omega}{\omega-1}\right]^{\frac{1}{\omega}}$$

Sustituyendo Z en la condicón de optimalidad de Z_t en estado estacionario, y despejando para K se obtiene

$$K = \left[\frac{\alpha A}{\left[\frac{1-\beta}{\beta}\frac{\omega}{\omega-1}\right]^{\frac{\omega-\alpha}{\omega}}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Rúbrica *(4 puntos)*

- 2 puntos por el proceso de encontrar Z
- 2 puntos por el proceso de encontrar K

5. La calibración tiene dos principios: i) consideraciones de largo plazo, ii) utilizar estudios microeconómicos de individuos y firmas.

   Sustitutyendo Z del punto anterior en $\delta(Z)$ en estado estacionario, y despejando para ω, se obtiene

$$\omega = 1 + \frac{1-\beta}{\beta}\frac{1}{\delta(Z)}$$

   que es suficiente con los valores de $\beta = 0.96$ y $\delta(Z) = 0.1$ para obtener la calibración consistente de ω

   Rúbrica *(3 puntos)*

   - 1 punto por mencionar los principios de calibración
   - 2 puntos por encontrar ω en función de β y $\delta(Z)$

6. El método que se describe en el enunciado es equivocado para este modelo. La razón es que la estimación inicial del residuo de Solow omite el índice de utilización del capital. Esto implica que en la regresión de sr_t contra sr_{t-1}, z_t es una variable omitida que viola los supuestos de MCO.

   Para ver lo anterior, note que al log-linearizar la función de producción alrededor del estado estacionario se obtiene que el residuo de solow de este modelo ($\tilde{sr}_t$) es

$$\tilde{sr}_t = y_t - \alpha k_t - (1-\alpha)l_t - \alpha z_t$$

   Sustituyendo la definición de sr_t del enunciado en $\tilde{sr}_t$ se tiene que

$$\tilde{sr}_t = sr_t - \alpha z_t$$

   Ahora, el proceso AR(1) de $\tilde{sr}_t$ es igual a

$$\tilde{sr}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \tilde{sr}_{t-1} + \upsilon_t$$

Sustituyendo con $\tilde{sr}_t = sr_t - \alpha z_t$, y despejando para escribir la ecuación anterior como un AR(1) de sr_t, se obtiene que

$$sr_t = \gamma_0 + \gamma_1 sr_{t-1} + \alpha\big[\gamma_1 z_{t-1} - z_t\big] + \upsilon_t$$

Esta última ecuación muestra que al estimar el AR(1) de sr_t por MCO como lo sugiere el enunciado, el error de esta estimación es igual a la suma de υ_t y el término de $\alpha\big[\gamma_1 z_{t-1} - z_t\big]$. Dado que y_{t-1} hace parte de sr_{t-1} por construcción, y que $cov(y_{t-1}, z_{t-1}) > 0$ por la prociciclidad de z_t, la variable sr_{t-1} sufre de endogenidad, y el estimador por MCO de γ_1 está sesgado.

Rúbrica *(6 puntos)*

- 1 puntos por mencionar que el método está equivocado
- 2 puntos por explicar que el problema es de variable omitida de z_t en la construcción de sr_t
- 3 puntos por realizar de manera convincente la ilustración de por qué omitir z_t genera un problema de endogenidad en la regresión de sr_t contra sr_{t-1}

7. El sistema de ecuaciones, log-linearizadas alrededor del estado estacionario, de este modelo son 6 ecuaciones para 6 variables endógenas $\{C_t, K_{t+1}, R_t, A_t, Z_t, Y_t\}$. Denote como $\tilde{x}_t$ la desviación porcentual de cualquier variable X_t de su estado estacionario X. Dado que L_t es igual a 1 para todo t, $\tilde{l}_t$ es igual a cero.
   La Ecuación de Euler

   $$\frac{1}{C_t} = \beta E\Big[\frac{1}{C_{t+1}} R_{t+1}\Big] \rightarrow -\tilde{c}_t = -E\tilde{c}_{t+1} + E\tilde{r}_{t+1}$$

   La tasa de Retorno R_t

   $$R_t = 1-\delta(Z_t)+\alpha A_t \frac{(Z_t K_t)^\alpha}{K_t} L_t^{1-\alpha} \rightarrow \tilde{r}_t = -\frac{Z^\omega}{R}\tilde{z}_t + \alpha\frac{AZ^\alpha K^{\alpha-1}}{R}\big[\tilde{a}_t + \alpha\tilde{z}_t - (1-\alpha)\tilde{k}_t\big]$$

   La condición óptima de Z_t

   $$Z_t^{\omega-\alpha} = \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \rightarrow (\omega-\alpha)\tilde{z}_t = \tilde{a}_t - (1-\alpha)\tilde{k}_t$$

   El proceso estocástico de la productividad

   $$log\ A_t = (1-\rho) log\ A + \rho\ log\ A_{t-1} + \epsilon_t \rightarrow \tilde{a}_t = \rho\tilde{a}_{t-1} + \epsilon_t$$

   La función de producción

   $$Y_t = A_t (Z_t K_t)^\alpha L_t^{1-\alpha} \rightarrow \tilde{y}_t = \tilde{a}_t + \alpha(\tilde{k} + \tilde{z}_t)$$

La ecuación de transición del capital

$$K_{t+1} = \big[1 - \delta(Z_t)\big] K_t + Y_t - C_t \rightarrow \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t - Z^{\omega} \tilde{z}_t + \frac{Y}{K}\tilde{y}_t - \frac{C}{K}\tilde{c}_t$$

Rúbrica *(6 puntos)*

- 1 punto por cada ecuación log-linearizada de manera correcta
- Ojo que el sistema se puede escribir en 4 ecuaciones al sustituir R_t en la Ecuación de Euler, y Y_t en la ecuación de transición del capital. En ese caso, 2 puntos para la Ecuación de Euler, y 2 puntos para la Ecuacón de transición, 1 punto para cada una de las otras ecuaciónes.

Bono *(4 Puntos)*: Demuestre que la solución del Planeador Social y la de mercados descentralizados son idénticas. En su respuesta haga énfasis en las diferencias entre los dos problemas.

La respuesta debe estar perfecta para recibir los puntos del bono. Se debe indicar que, a diferencia del planificador social, la solución descentralizada trata los mercados por separado. Los precios actúan como el mecanismo de ajuste que permite formar un equilibrio.

Bien sea por programación dinámica o por el método del Lagrangiano, se deben encontrar las condiciones de primer orden para el hogar y para la firma. Luego, se deben enunciar las condiciones para que los mercados se vacíen y encontrar el sistema de ecuaciones que caracteriza el equilibrio. Este sistema debe ser idéntico al sistema de ecuaciones del planificador

¡Mucha Suerte!