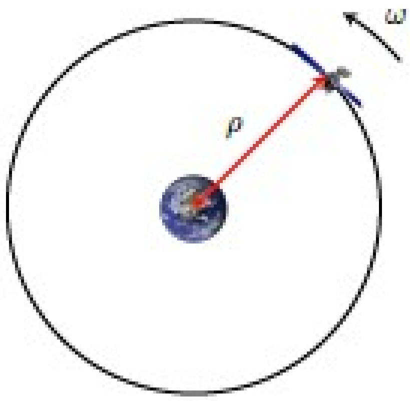
Progetto di Controlli Automatici T

Progetto Tipologia b - Traccia 2

Controllo satellite in orbita intorno alla Terra



A cura di:

Cassanelli Antonio, Magagnoli Daniele, Porrazzo Gianmiriano

Indice

1 Forma di stato e linearizzazione

Preso il nostro sistema di partenza, vogliamo rappresentarlo nella forma di stato.

Per farlo poniamo:

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ \dot{\rho} \\ \rho \end{bmatrix} \qquad u = \tau \qquad y = \omega$$

Per cui possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x_1 = \omega \\ x_2 = \dot{\rho} \\ x_3 = \rho \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{\omega} \\ \dot{x_2} = \ddot{\rho} \\ \dot{x_3} = x_2 \end{cases}$$

Sostituendo nelle formule di partenza otteniamo il sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x,u) = -\dfrac{2x_1x_2}{x_3} - \dfrac{\beta_2 x_1}{m} + \dfrac{u}{mx_3} \\ \\ \dot{x_2} = f_2(x,u) = \dfrac{1}{m}\left[-\beta_1 x_2 + m(k-1)\left(\dfrac{K_G M}{{x_3}^2} - x_3{x_1}^2\right)\right] \\ \\ \dot{x_3} = f_3(x,u) = x_2 \\ \\ y = h(x,u) = x_1 \end{cases} \tag{1}$$

Sapendo che ρ_e è un valore di equilibrio, possiamo trovare la coppia di equilibrio (x_e, u_e) in modo da poter linearizzare il sistema non lineare nell'equilibrio.

Abbiamo trovato la coppia di equilibrio:

$$\left(\begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{K_G M}{{\rho_e}^3}} \\ 0 \\ \rho_e \end{bmatrix}, \beta_2 \sqrt{\dfrac{K_G M}{\rho_e}} \right)$$

Otteniamo le matrici:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} = \begin{bmatrix} -\frac{2x_{2e}}{x_{3e}} - \frac{\beta_2}{m} & -\frac{2x_{1e}}{x_{3e}} & \frac{2x_{2e}x_{1e}}{{x_{3e}}^2} \\ -(k-1)2x_{1e}x_{3e} & -\frac{\beta_1}{m} & (k-1)\left(-2\frac{K_G M}{{x_{3e}}^2} - {x_{1e}}^2\right) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{mx_{3e}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$C = \left.\frac{\partial h(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \left.\frac{\partial h(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} = 0$$

Da cui ricaviamo il sistema linearizzato

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -\frac{\beta_2}{m}x_1 - \frac{2x_{1e}}{x_{3e}}x_2 - \frac{u_e}{mx_{3e}^2}x_3 + \frac{u}{mx_{3e}} \\ \dot{x_2} = -[(k-1)2x_{1e}x_{3e}]x_1 - \frac{\beta_1}{m}x_2 + (k-1)\left(-\frac{2K_G M}{x_{3e}^3} - x_{1e}^2\right)x_3 \\ \dot{x_3} = x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{3}$$

2 Funzione di trasferimento

Procediamo con il calcolo della funzione di trasferimento G(s).

Avendo a disposizione le matrici A ,B ,C e D usiamo la formula:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

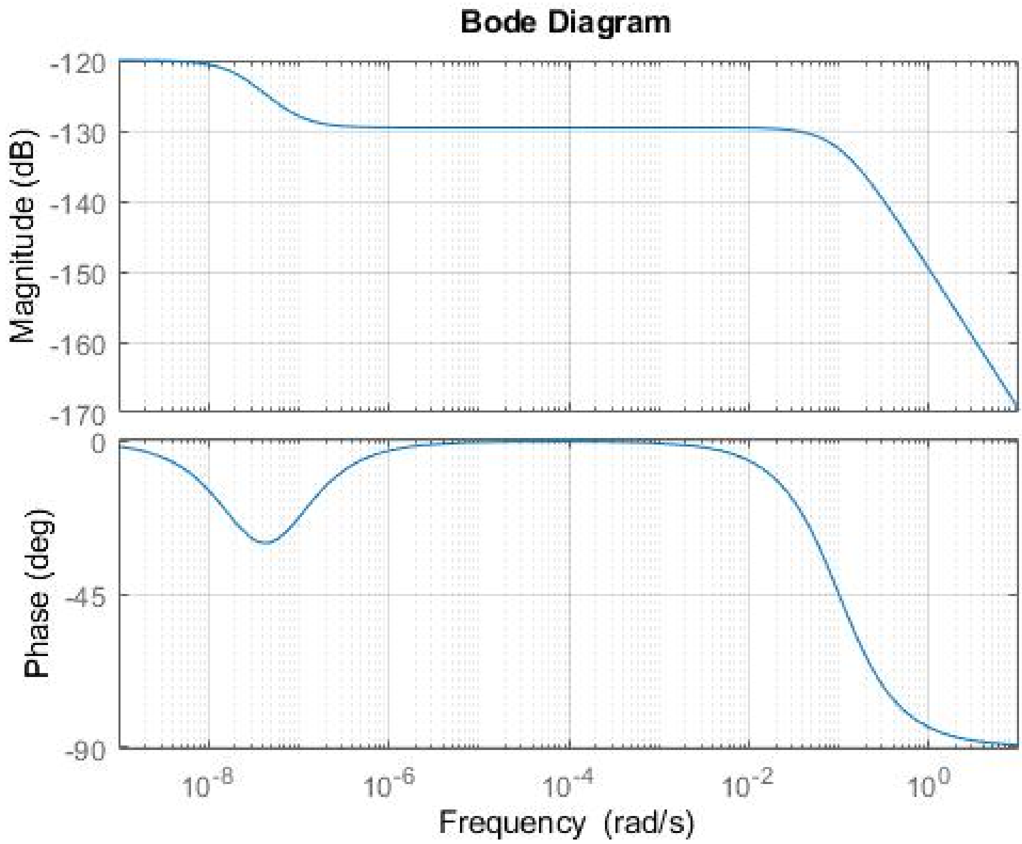
Svolgendo i calcoli otteniamo

$$G(s) = \frac{1}{mx_{3e}} \frac{s\left(s + \frac{\beta_1}{m}\right) + (k-1)\left(\frac{2K_G M}{x_{3e}^3} + x_{1e}^2\right)}{s\left(s + \frac{\beta_2}{m}\right)\left(s + \frac{\beta_1}{m}\right) - \frac{u_e}{mx_{3e}}(k-1)2x_{1e} - 4x_{1e}^2 s(k-1) + (k-1)\left(\frac{2K_G M}{x_{3e}^3} + x_{1e}^2\right)\left(s + \frac{\beta_2}{m}\right)}$$

Semplificando e sostituendo i valori si ottiene:

$$G(s) = \frac{s^2 + 0.3s + 2.21 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^7 s^3 + 1.2 \cdot 10^7 s^2 + 9 \cdot 10^5 s + 0.02}$$

La funzione presenta tre poli e due zeri, e presenta i seguenti diagrammi di bode



3 Progetto regolatore

Per progettare il regolatore dobbiamo rispettare le specifiche:

1. Errore a regime nullo prendendo come riferimento un gradino;
2. $M_f \geq 40°$;
3. $S\% \leq 1\%$;
4. $T_{a,5\%} < 0.15s$;
5. $d(t)$ deve essere abbattuto di almeno 45 dB nella banda $[0, 0.08]$;
6. $n(t)$ deve essere abbattuto di almeno 85 dB nella banda $[5 \cdot 10^4, 7.5 \cdot 10^7]$.

Il regolatore $R(s)$ sarà formato da un regolatore statico $R_s(s)$ ed uno dinamico $R_d(s)$.

Iniziamo a progettare il regolatore statico.
Sapendo che l'errore a regime deve essere nullo se consideriamo come riferimento $W = \frac{1}{s}$ possiamo dire che:

$$R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^k}$$

Da ciò sappiamo che la nostra $L(s) = R(s)G(s)$ deve avere un polo nell'origine. Affinché ciò avvenga, essendo $G(s)$ priva di poli nell'origine, $R(s)$ dovrà averne uno, per questo:

$$R_s(s) = \frac{\mu_s}{s}$$

Prima di progettare il regolatore dinamico osserviamo più attentamente le specifiche da rispettare.

Il vincolo sulla sovraelongazione si traduce in un vincolo sul margine di fase:

$$M_f \geq \xi^* \cdot 100$$

Dove ξ^* rappresenta il valore per cui viene rispettato il vincolo sulla sovraelongazione.
Da ciò otteniamo che:

$$\xi^* \geq \sqrt{\frac{\log(S^*\%)^2}{\pi^2 + log(S^*\%)^2}} \simeq 0.826$$

con $S^*\% = 1\%$

Conseguenza di questo vincolo è che:

$$M_f \geq 82.6°$$

Questo vincolo risulta essere più stringente di quello del punto 2, per cui ci possiamo basare su questo.

La specifica sul tempo di assestamento si traduce in un vincolo su $\omega_{c_{min}}$.

Usando l'approssimazione a poli dominanti di $F(s)$, ovvero supponendo $\omega_n \approx \omega_c$ e $\xi = \xi^*$, per avere $T_{a,5\%} < 0.15s$ deve valere $\xi \cdot \omega_n \geq \frac{3}{0.15}$, dunque:

$$M_f \cdot \omega_c \geq \frac{3 \cdot 100}{0.15} \Rightarrow \omega_c \geq \frac{300}{0.15 \cdot 82.6} = 24 \text{ rad/s}$$

Per rispettare il vincolo sul rumore di uscita, studiamo il contibuto di $d(t)$ sull'uscita, ovvero:

$$Y_d(s) = S(s)D(s)$$

Per soddisfare il vincolo vogliamo che:

$$|S(j\omega)|_{dB} \leq -45 \text{ dB} \qquad in \qquad [0, 0.08]$$

In questa banda inoltre $|S(j\omega)|_{dB} \approx -|L(j\omega)|_{dB}$, per cui il vincolo diventa:

$$|L(j\omega)|_{dB} \geq 45 \text{ dB} \qquad \omega \in [0, 0.08]$$

Per rispettare il vincolo sul rumore di misura, studiamo il contibuto di $n(t)$ sull'uscita, ovvero:

$$Y_n(s) = -F(s)N(s)$$

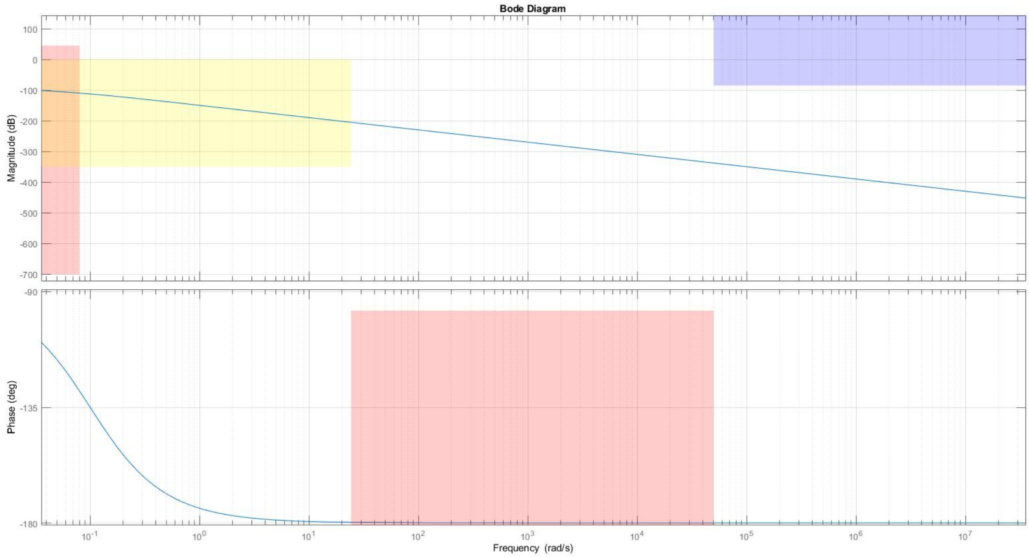
Per soddisfare il vincolo vogliamo che:

$$|F(j\omega)|_{dB} \leq -85 \text{ dB} \qquad in \qquad [5 \cdot 10^4, 7.5 \cdot 10^7]$$

In questa banda inoltre $|F(j\omega)|_{dB} \approx |L(j\omega)|_{dB}$, per cui il vincolo diventa:

$$|L(j\omega)|_{dB} \leq -85 \text{ dB} \qquad \omega \in [5 \cdot 10^4, 7.5 \cdot 10^7]$$

Tutto ciò detto finora può essere riportato nel grafico di $G_e(s) = R_s(s)G(s)$



Come si può notare dalla figura, ci troviamo in uno scenario di tipo B, poiché nell'intervallo in cui possiamo attraversare gli 0 dB la fase si trova sempre sotto al margine di fase imposto come limite.

Per questo il nostro regolatore dinamico è una rete anticipatrice

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

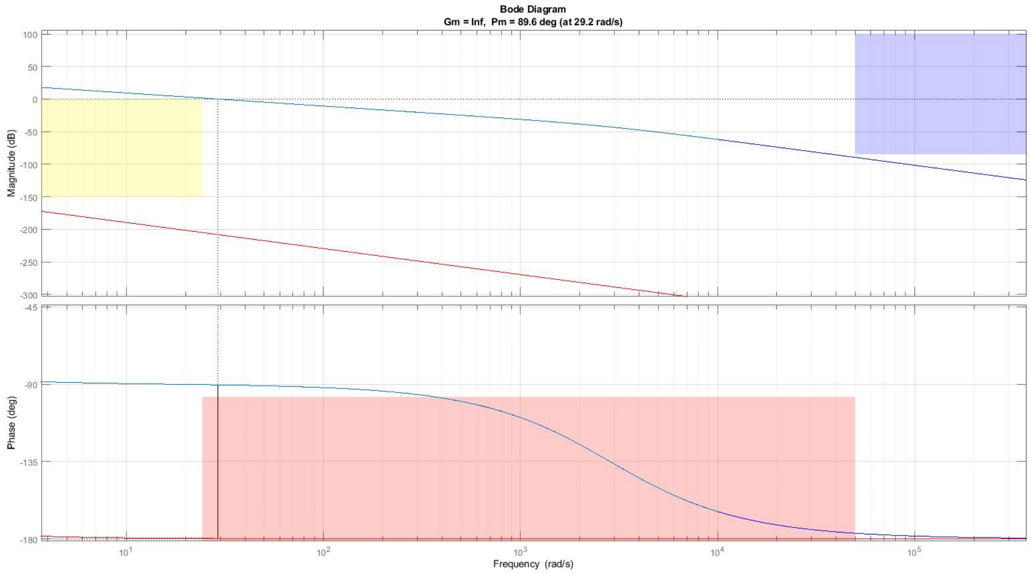
Non abbiamo vincoli su $\omega_{c_{max}}$ se non quelli dovuti a $n(t)$, mentre $\omega_{c_{min}} = 24$ rad/s in base ai vincoli precedenti.
Per questo abbiamo deciso di usare una pulsazione di attraversamento all'interno del range definito da $\omega_{c_{min}}, \omega_{c_{max}}$ (in particolare abbiamo preso $\omega_c^* = 29$ rad/s). Inoltre per essere più conservativi sul vincolo relativo al margine di fase abbiamo posto $\varphi^* = 89°$.

Procediamo calcolando M^*, φ^*, τ e $\alpha\tau$ usando le formule di inversione:

$$\begin{aligned}
\omega_c^* &= 29 \text{ rad/s} \\
M_f &= 82.6° \\
M^* &= 10^{-\frac{|G_e(j\omega_c^*)|_{dB}}{20}} \simeq 2.6 \cdot 10^{10} \\
\varphi^* &= 89° \\
\alpha\tau &= \frac{\cos\varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin\varphi^*} = 3.5 \cdot 10^{-4} \\
\tau &= \frac{M^* - \cos\varphi^*}{\omega_c^* \sin\varphi^*} = 8.8 \cdot 10^{8}
\end{aligned}$$

I valori calcolati di $\alpha\tau$ e τ definiscono il nostro regolatore dinamico.
Per verificare che i vincoli siano rispettati dobbiamo osservare il comportamnto della funzione $L(s)$:

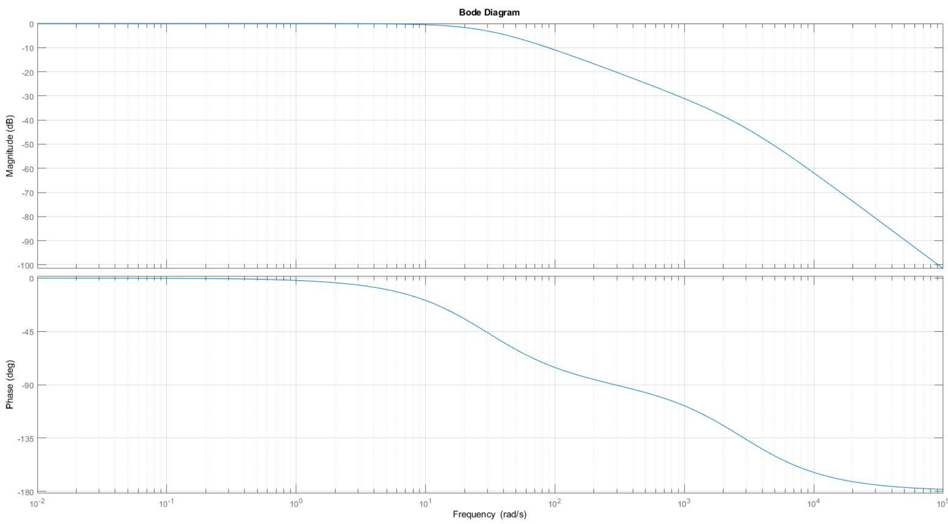
$$L(s) = R_d(s)G(s) = R_d(s)R_s(s)G(s) = R(s)G(s)$$



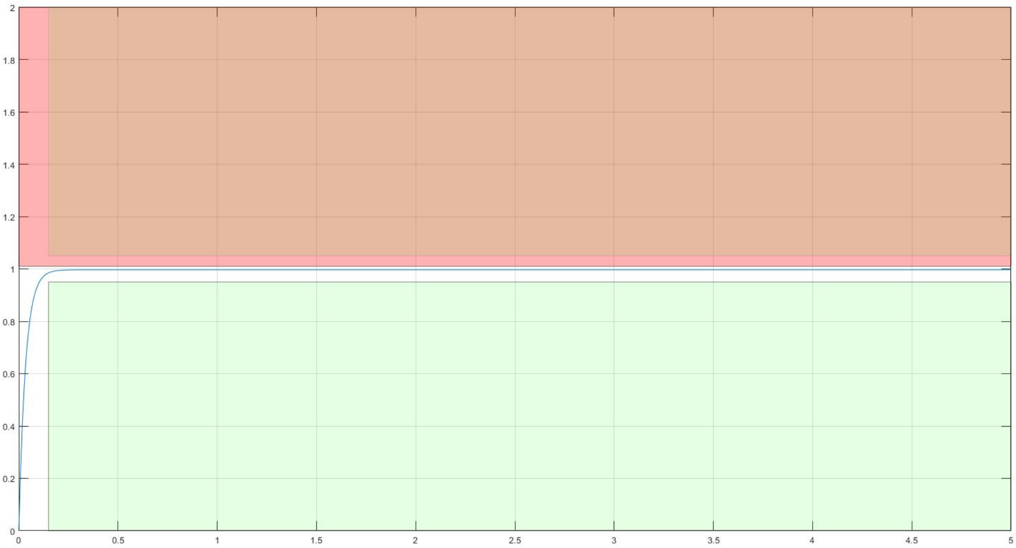
Nella figura si può osservare che la funzione di anello aperto rispetta i vincoli imposti.

Infine abbiamo verificato che il sistema in anello chiuso rispetti le specifiche.
La funzione di anello chiuso è:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$



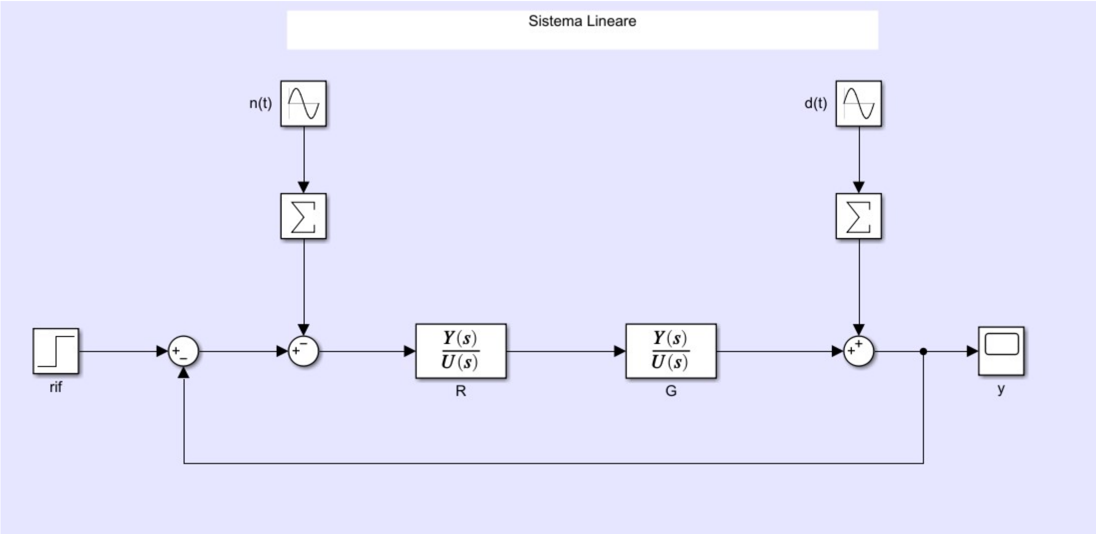
Nella figura seguente si può osservare come abbiamo testato la risposta del sistema ad un impulso di ampiezza unitaria, in termini di tempi di assestamento e sovraelongazione, per verificare che i vincoli siano rispettati.



Più nel dettaglio il patch rosso rappresenta il vincolo sulla sovraelongazione che viene rispettato, come quello sul tempo di assestamento, in verde nella figura.

4 Test sul sistema linearizzato

Per testare il sistema di controllo sul sistema linearizzato abbiamo usato simulink, ottenendo il seguente diagramma a blocchi.



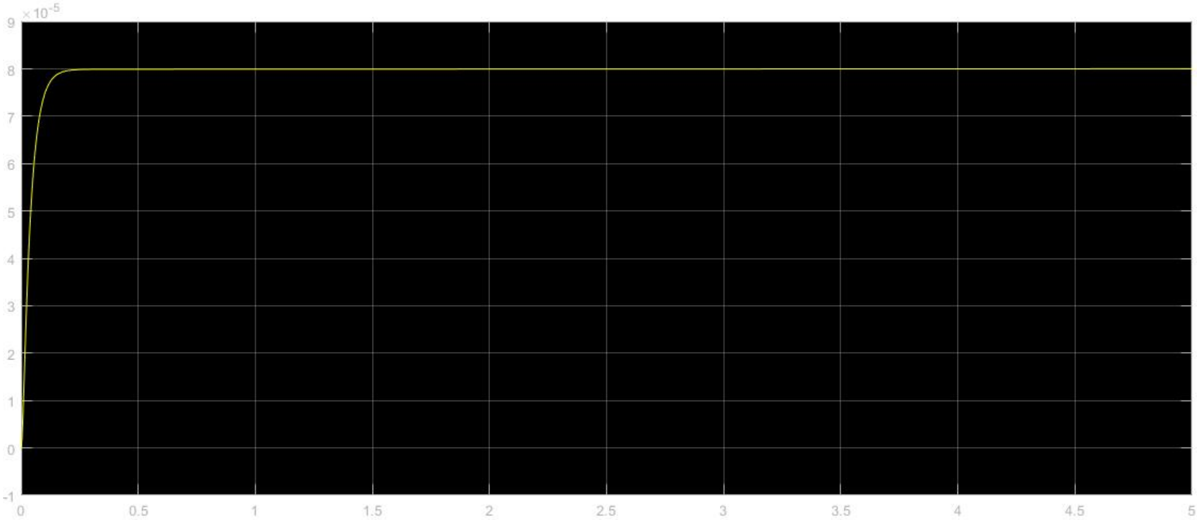
In particolare ci viene richiesto di testare il sistema con:

$$w(t) = 8 \cdot 10^{-5} \cdot 1(t)$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{4} 3 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(0.02kt)$$

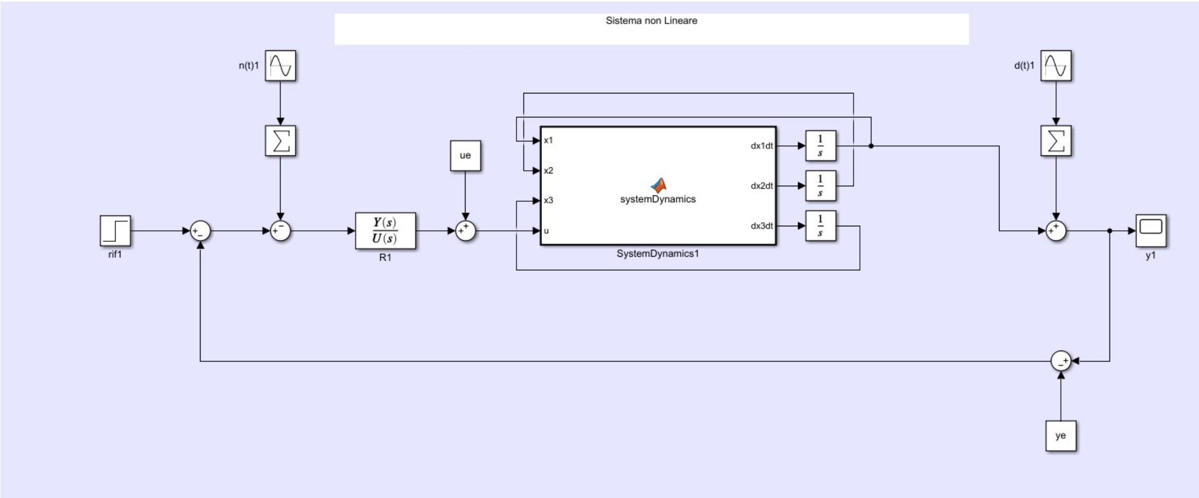
$$n(t) = \sum_{k=1}^{4} 2 \cdot 10^{-4} \cdot \sin(5 \cdot 10^{4}kt)$$

Ottenendo come risposta



5 Test sul sistema non linearizzato

Per fare il test del sistema di controllo sul sistema non linearizzato abbiamo implementato in simulink il seguente diagramma a blocchi.



Nel blocco SystemDynamics abbiamo inserito il sistema non linearizzato

```
function [dx1dt, dx2dt, dx3dt] = systemDynamics(x1, x2, x3, u)

b1=0.3;
b2=0.1;
m=1;
k=1.5;
K_G=6.67*10^(-11);
M=5.98*10^(24);

dx1dt=-(2*x1*x2)/x3-(b2*x1)/m+u/(m*x3);
dx2dt=(-b1*x2+m*(k-1)*(((K_G*M)/x3^2)-x3*(x1^2)))*1/m;
dx3dt=x2;
```

Anche in questo caso abbiamo usato come riferimento, rumore di uscita e di misura specificati nel punto precedente.
Oltre a ciò abbiamo impostato come stato iniziale del sistema lo stato di equilibrio (specificato mediante i blocchi integratori), ottenendo come risposta: