

ISSN 1729-5459

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Международный рецензируемый научно-образовательный и прикладной журнал
ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ
ЧЕРНОМОРСКОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОТРУДНИЧЕСТВА (ЧЭС)

International Peer-Reviewed Research, Educational and Applied Journal
ECOLOGICAL BULLETIN
OF RESEARCH CENTERS
OF THE BLACK SEA ECONOMIC COOPERATION (BSEC)

2024 · Том 21 · № 2

Международный рецензируемый научно-образовательный и прикладной журнал

ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЕРНОМОРСКОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОТРУДНИЧЕСТВА (ЧЭС)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52730 от 8 февраля 2013 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. ISSN 1729-5459. Основан в 2003 году. Выходит 4 раза в год. Подписной индекс по каталогу «АРЗИ» Э46477. Возрастное ограничение: для лиц, старше 12 лет

Главный редактор, председатель редколлегии

В. А. Бабешко, акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия.

Редакционная коллегия

Н. М. Богатов, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **А. О. Ватульян**, проф., д-р физ.-мат. наук, Южный федеральный университет, Россия; **С. А. Вызуллин**, проф., д-р физ.-мат. наук, Краснодарское высшее военное училище им. генерала армии С.М. Штеменко, Россия; **Е. А. Демёхин**, профессор, д-р физ.-мат. наук, Краснодарский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, Россия; **О. В. Евдокимова**, доцент, д-р физ.-мат. наук, Южный научный центр РАН, Россия; **М. В. Зарецкая**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **В. А. Исаев**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **Е. Н. Калайдин**, проф., д-р физ.-мат. наук, Краснодарский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, Россия; **В. В. Калинчук**, член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, Южный научный центр РАН, Россия; **В. И. Колесников**, акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, Ростовский государственный университет путей сообщения, Россия (зам. главного редактора); **Е. А. Левашов**, проф., д-р техн. наук, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Россия; **Л. С. Лунин**, проф., д-р физ.-мат. наук, Южный научный центр РАН, Россия; **В. И. Минкин**, акад. РАН, д-р хим. наук, Южный федеральный университет, Россия; **А. В. Павлова**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **Е. Н. Тумаев**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **В. Б. Широков**, проф., д-р физ.-мат. наук, Южный федеральный университет, Россия; **Н. А. Яковенко**, проф., д-р техн. наук, Кубанский государственный университет, Россия.

Редакционный совет

А. Е. Алоян, проф., д-р физ.-мат. наук, Институт вычислительной математики РАН, Россия; **О. Г. Ашхотов**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Россия; **А. К. Беляев**, член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский политехнический университет им. Петра Великого, Россия; **Ю. Каплунов**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кильский Университет, Великобритания; **Е. В. Кириллова**, проф., Вест-Баденский университет, Германия; **Д. М. Климов**, акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, Институт проблем механики РАН, Россия; **Г. Ф. Копытов**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **В. П. Матвеенко**, акад. РАН, д-р геогр. наук, Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, Россия; **Г. Г. Матишов**, член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, Южный научный центр РАН, Россия; **М. Ф. Мехтиев**, акад. НАН Азербайджана, д-р физ.-мат. наук, Бакинский государственный университет, Азербайджан; **Н. Ф. Морозов**, акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия; **А. Солынин**, профессор, Университет Техас Тек, США; **М. Х. Уртепов**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия; **Е. А. Щербаков**, проф., д-р физ.-мат. наук, Кубанский государственный университет, Россия.

Ответственный редактор: **Д. А. Хрипков**. Научный редактор: **А. В. Павлова**. Технический редактор: **Е. М. Горшкова**.

Учредители

ФГБОУ ВО «Адыгейский государственный университет», Республика Адыгея, Майкоп, Россия; ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет», Республика Дагестан, Махачкала, Россия; ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный технический университет», Республика Дагестан, Махачкала, Россия; ФГБУН «Институт прикладной механики Российской академии наук», Москва, Россия; ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», Республика Кабардино-Балкария, Нальчик, Россия; ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Краснодар, Россия; ФГБОУ ВО «Ростовский государственный университет путей сообщения», Ростов-на-Дону, Россия; ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», Ростов-на-Дону, Россия.

Издатель

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Краснодар, Россия.

Адрес издателя

Кубанский государственный университет, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Адрес редакции

Редакция журнала «Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества», Кубанский государственный университет, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Сайт: vestnik.kubsu.ru. E-mail: vestnik@kubsu.ru. Тел.: +7 (918) 0886651

Содержание

МАТЕМАТИКА

О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для
одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка ... 6
Абдурагимов Г. Э.

Вычислительные аспекты расчета вертикальной скорости в модели ветровой
циркуляции 14
Кочергин В. С., Кочергин С. В.

МЕХАНИКА

Исследование композитов в виде слоистых ортотропных оболочек 23
Великанов П. Г., Артюхин Ю. П.

Исследование задачи термоупругости для трансверсально-изотропного тела вращения . 35
Иванычев Д. А.

Гибридный полуаналитический метод моделирования плоских колебаний слоистых
волноводов с присоединенными элементами 46
Ханазарян А. Д.

Схлопывание осесимметричной каверны при медленных движениях цилиндра
в жидкости после отрывного удара 62
Норкин М. В.

К исследованию напряженно-деформируемого состояния упругого основания при
наличии в нем вертикальных и горизонтальных инъекторов 70
Телятников И. С., Капустин М. С., Павлова А. В., Рубцов С. Е.

ФИЗИКА

Электрофорез микрочастицы с гидрофобной поверхностью в сильном электрическом
поле 80
Франц Е. А., Крылов А. А., Демёхин Е. А.

Оптические свойства многокомпонентных боратных стекол, легированных
трехвалентным ионами тербия 93
Хаммуд А., Исаев В. А.

Информация об авторах 103
К сведению авторов 105

International Peer-Reviewed Research, Educational and Applied Journal

ECOLOGICAL BULLETIN OF RESEARCH CENTERS OF THE BLACK SEA ECONOMIC COOPERATION (BSEC)

Certificate of registration № ФС77-52730 d/d Feb 8 2013 by Federal Agency of Supervision in Sphere of Association, Information Technology and Mass Communications. ISSN 1729-5459. Founded in 2003. Published 4 times a year. Subscription index 346477 in the ARZI catalogue.

Editor-in-Chief, Editorial Board Chairman

prof. **V. A. Babeshko**, acad., Kuban State University, Russia.

Editorial Board

prof. **N. M. Bogatov**, Kuban State University, Russia; prof. **A. O. Vatulyan**, South Federal University, Russia; prof. **S. A. Vyzulin**, Krasnodar Higher Military School, Russia; prof. **E. A. Demekhin**, Krasnodar branch of Financial University under Government of the Russian Federation, Russia; **O. V. Evdokimova**, South Scientific Center, Russian Academy of Science, Russia; prof. **M. V. Zaretskaya**, Kuban State University, Russia; prof. **V. A. Isaev**, Kuban State University, Russia; prof. **E. N. Kalaydin**, Krasnodar branch of Financial University under Government of the Russian Federation, Russia; prof. **V. V. Kalinchuk**, corresp. member of RAS, South Federal University, Russia; prof. **V. I. Kolesnikov**, acad., Rostov State Transport University, Russia (*Deputy Editors-in-Chief*); prof. **E. A. Levashov**, National Research Technological University "Moscow Institute of Steel and Alloys", Russia; prof. **L. S. Lunin**, South Scientific Center, Russian Academy of Science, Russia; prof. **V. I. Minkin**, acad., South Federal University, Russia; prof. **A. V. Pavlova**, Kuban State University, Russia; prof. **E. N. Tumaev**, Kuban State University, Russia; prof. **V. B. Shirokov**, South Federal University, Russia; prof. **N. A. Yakovenko**, Kuban State University, Russia.

Editorial Council

prof. **A. E. Aloyan**, Institute of Computational Mathematics of Russian Academy of Sciences, Russia; prof. **O. G. Ashkhotov**, Kabardino-Balkarian State University, Russia; prof. **A. K. Belyaev**, corresp. member of RAS, Peter Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia; prof. **J. Kaplunov**, Member of European Academy of Sciences prof., Keele University, United Kingdom; prof. **E. V. Kirillova**, RheinMain University of Applied Sciences, Germany; prof. **D. M. Klimov**, acad., Institute of the Problems in Mechanics, Russia; prof. **G. F. Kopitov**, Kuban State University, Russia; prof. **V. P. Matveenko**, acad., Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Russia; prof. **G. G. Matishov**, corresp. member of RAS, Southern Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Russia; prof. **M. F. Mekhtiev**, acad., Baku State University, Azerbaijan; prof. **N. F. Morozov**, acad., St. Petersburg State University, Russia; prof. **A. Solynin**, Texas Tech University, USA; prof. **M. H. Urtenov**, Kuban State University, Russia; prof. **E. A. Shcherbakov**, Kuban State University, Russia.

Executive Editor: **D. A. Khripkov**. Science Editor: **A. V. Pavlova**. Editorial Assistant: **E. M. Gorshkova**

Founders

Adygeya State University, Maykop, Adygeya Republic, Russia; **Dagestan State University**, Makhachkala, Dagestan Republic, Russia; **Dagestan State Technical University**, Makhachkala, Dagestan Republic, Russia; **Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences**, Moscow, Russia; **Kabardino-Balkarian State University**, Nalchik, Kabardino-Balkarskaya Republic, Russia; **Kuban State University**, Krasnodar, Russia; **South Federal University**, Rostov-on-Don, Russia; **Rostov State Transport University**, Rostov-on-Don, Russia

Publisher

Kuban State University, Krasnodar, Russia

Publisher address

Kuban State University, 149 Stavropolskaya str., Krasnodar, Russia, 350040

Editorial address

Kuban State University, 149 Stavropolskaya str., Krasnodar, Russia, 350040

Journal "Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation"

web: vestnik.kubsu.ru, e-mail: vestnik@kubsu.ru, tel.: +7 918 0886651

Table of Contents

MATHEMATICS

On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for One Nonlinear Functional Differential Equation of Third Order	6
<i>by Abduragimov G. E.</i>	
Computational Aspects of Calculating Vertical Velocity in a Wind Circulation Model	14
<i>by Kochergin V. S., Kochergin S. V.</i>	

MECHANICS

Investigation of a Composites in the Form of a Layered Orthotropic Shell	23
<i>by Velikanov P. G., Artyukhin Yu. P.</i>	
Study of the Thermoelasticity Problem for a Transversally Isotropic Body of Rotation	35
<i>by Ivanychev D. A.</i>	
Hybrid Semi-Analytical Approach to Modeling In-Plane Motion of Layered Waveguides with Bonded Composite Joints	46
<i>by Khanazaryan A. D.</i>	
Collapse of an Axisymmetric Cavity During Slow Movements of a Cylinder in a Liquid After a Separation Impact	62
<i>by Norkin M. V.</i>	
To the Study of the Stress-strain State of an Elastic Foundation in the Presence of Vertical and Horizontal Injectors	70
<i>by Telyatnikov I. S., Kapustin M. S., Pavlova A. V., Rubtsov S. E.</i>	

PHYSICS

Electrophoresis of Microparticle with Hydrophobic Surface in Strong Electric Field	80
<i>by Frants E. A., Krylov A. A., Demekhin E. A.</i>	
Optical Properties of Multicomponent Borate Glasses Doped with Trivalent Terbium Ions ..	93
<i>by Hammoud A., Isaev V. A.</i>	
Author's Information	103
Author's Guide	108

УДК 517.927.4

EDN: AUGWCQ DOI: 10.31429/vestnik-21-2-6-13

О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка

Г. Э. Абдурагимов  

Дагестанский государственный университет, ул. Магомеда Гаджиева 43-а, Махачкала, 367000, Россия

✉ Абдурагимов Гусен Эльдерханович; ORCID 0000-0001-7095-932X; SPIN 9245-5007; e-mail: gusen_e@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка с симметричными граничными условиями. С помощью теоремы Красносельского о неподвижной точке конуса установлены достаточные условия существования по меньшей мере одного положительного решения рассматриваемой задачи. В сублинейном случае доказана и единственность такого решения. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: положительное решение, краевая задача, конус, функция Грина.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 6–13. EDN: AUGWCQ. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-6-13

Поступила 26 марта 2024 г. После доработки 1 мая 2024 г. Принято 13 мая 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for One Nonlinear Functional Differential Equation of Third Order

Г. Е. Абдурагимов 

Dagestan State University, st. Magomed Gadzhiev 43-a, Makhachkala, 367000, Russia

✉ Gusein E. Abduragimov; ORCID 0000-0001-7095-932X; e-mail: gusen_e@mail.ru

Abstract. The boundary value problem is considered

$$\begin{aligned}x'''(t) + f(t, (Tx)(t)) &= 0, \quad 0 < t < 1, \\x(0) = x(1) &= 0, \\x''(0) = x''(1),\end{aligned}$$

where T — linear positive continuous operator. Using the Green's function and Krasnoselsky's fixed point theorem, we formulate and prove the existence of positive solutions to the above boundary value problem for a third-order nonlinear functional differential equation. Next, in the sublinear case, using the fixed point principle, we establish the uniqueness of a positive solution to the problem under study. In addition, an example is given to illustrate the results obtained.

Keywords: positive solution, boundary value problem, cone, Green's function.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Abduragimov, G. E., On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear functional differential equation of third order. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 6–13. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-6-13

Received 26 March 2024. Revised 1 May 2024. Accepted 13 May 2024. Published 28 June 2024.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

Краевым задачам для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ, в которых рассматриваются вопросы существования положительных решений, их поведения, асимптотики и т.д., причем естественным орудием исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. Впоследствии методы исследования положительных решений операторных уравнений были развиты М. А. Красносельским и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.

Одним из наиболее часто используемых инструментов для доказательства существования положительных решений интегральных уравнений и краевых задач является теорема Красносельского о конусном расширении и сжатии и различные модификации этой известной теоремы. Уравнения третьего порядка возникают в различных областях прикладной математики и физики, таких как отклонение изогнутой балки, имеющей постоянное или переменное поперечное сечение, задачи для трехслойной балки, электромагнитных волн или гравитационных потоков и т.д. Существует большое количество работ, посвященных проблеме существования положительных решений краевых задач. Однако лишь в немногих работах рассматривалась задача для дифференциальных уравнений третьего порядка (например, [1–8]). Во всех упомянутых выше работах авторы использовали теорему Красносельского о неподвижной точке теории конуса или индекса неподвижной точки.

Насколько нам известно, вопросы существования и единственности положительных решений нелинейных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений третьего порядка мало изучены; в основном, результаты касаются уравнений с запаздывающим аргументом (например, [9, 10] и ссылки в них). В предлагаемой статье предпринята попытка в некоторой мере обобщить разрозненные частные результаты и устранить обозначенный выше пробел. С помощью известной теоремы Го–Красносельского получены достаточные условия существования по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка. В сублинейном случае на основе принципа сжатых отображений установлена и единственность положительного решения.

1. Постановка задачи и основные результаты

Обозначим через \mathbb{C} пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций, \mathbb{L}_p ($1 < p < \infty$) — пространство суммируемых на $[0, 1]$ со степенью $p \in (1, \infty)$ функций и \mathbb{W}^3 — пространство вещественных функций с абсолютно непрерывной второй производной, определенных на $[0, 1]$.

Рассмотрим краевую задачу

$$x'''(t) + f(t, (Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.1)$$

$$x(0) = x(1) = 0, \quad (1.2)$$

$$x''(0) = x''(1), \quad (1.3)$$

где $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}_p$ — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t, u)$ неотрицательна на $[0, 1] \times [0, \infty)$, монотонна по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Под положительным решением задачи (1.1)–(1.3) будем подразумевать функцию $x \in \mathbb{W}^3$, положительную в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющую почти всюду на указанном интервале уравнению (1.1) и краевым условиям (1.2)–(1.3).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1.1)–(1.3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1.4)$$

где $G(t, s)$ — функция Грина оператора $-d^3/dt^3$ с краевыми условиями (1.2)–(1.3)

$$G(t, s) = \begin{cases} \left(s - \frac{s^2}{2}\right)t - \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq s, \\ \frac{s^2}{2}(1-t), & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что имеют место следующие свойства:

$$\max_{0 \leq t \leq 1} G(t, s) = \psi(s), \quad s \in [0, 1] \quad (1.5)$$

и

$$G(t, s) \geq \psi(s)\varphi(t), \quad (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (1.6)$$

где

$$\psi(s) = \frac{1}{2} \left(s - \frac{s^2}{2}\right), \quad \varphi(t) = \min\{t, 1-t\}.$$

Предположим, что при почти всех $t \in [0, 1]$ и $u \geq 0$ функция $f(t, u)$ удовлетворяет условию

$$f(t, u) \leq bu^{p/q}, \quad (1.7)$$

где $b > 0$, $q \in (1, \infty)$.

В операторной форме уравнение (1.4) можно записать так:

$$x = GNTx,$$

где $N: \mathbb{L}_p \rightarrow \mathbb{L}_q$ — оператор Немыцкого, $G: \mathbb{L}_q \rightarrow \mathbb{C}$ — оператор Грина.

Оператор A , определяемый равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, (Tx)(s))ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций и вполне непрерывен [11, с. 161].

Определим конус K пространства \mathbb{C} следующим образом:

$$K = \{x \in \mathbb{C}: x(t) \geq 0, x(t) \geq \varphi(t)\|x\|_{\mathbb{C}}\}.$$

Лемма 1. Оператор A оставляет инвариантным конус K .

Доказательство. В силу (1.5) при $x \in K$ имеем

$$\|Ax\|_{\mathbb{C}} = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s)f(s, (Tx)(s))ds \leq \int_0^1 \psi(s)f(s, (Tx)(s))ds. \quad (1.8)$$

С другой стороны, в силу (1.6) и (1.8) при $x \in K$ соответственно получим

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, (Tx)(s))ds \geq \varphi(t) \int_0^1 \psi(s)f(s, (Tx)(s))ds \geq \varphi(t)\|Ax\|_{\mathbb{C}}.$$

□

В дальнейшем для доказательства существования по крайней мере одного положительного решения задачи (1.1)–(1.3) нам понадобится следующая известная теорема Красносельского [12].

Теорема 1. Пусть X — банахово пространство и $P \subset X$ — конус в X . Предположим, что Ω_1, Ω_2 — открытые подмножества в X с $0 \in \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ и $\mathcal{A} : P \rightarrow P$ — вполне непрерывный оператор такой, что

- (i) $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_1$ и $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_2$, или
- (ii) $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_1$ и $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_2$.

Тогда \mathcal{A} имеет неподвижную точку в $P \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

Введем обозначения:

$$\Omega_r = \{u \in K : \|u\|_{\mathbb{C}} < r\}, \quad \Omega_R = \{u \in K : \|u\|_{\mathbb{C}} < R\},$$

$$\partial\Omega_r = \{u \in K : \|u\|_{\mathbb{C}} = r\}, \quad \partial\Omega_R = \{u \in K : \|u\|_{\mathbb{C}} = R\},$$

$$\Omega = \overline{\Omega}_R \setminus \Omega_r,$$

где $r, R > 0$, причем $r < R$.

Кроме того, для удобства выкладок целесообразно введение следующих обозначений:

$$f_0 = \lim_{u \rightarrow 0^+} \text{vrai} \inf_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u}, \quad f_\infty = \lim_{u \rightarrow +\infty} \text{vrai} \inf_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u}.$$

Теорема 2. Предположим, что вместе с (1.7) выполнены условия

- 1) $p \neq q$;
- 2) $f_0 = \infty$ при $p < q$;
- 3) $f_\infty = \infty$ при $p > q$;
- 4) $\min_{t \in [0,1]} (T\chi)(t) > 0$, где $\chi(t) \equiv 1$.

Тогда краевая задача (1.1)–(1.3) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство. Рассмотрим случай $p < q$. Покажем выполнение условия (ii) теоремы 1. Для этого, в частности, укажем такое число $r > 0$, что при $x \in \partial\Omega_r$

$$\|Ax\|_{\mathbb{C}} \geq \|x\|_{\mathbb{C}}. \quad (1.9)$$

В силу условия 2 настоящей теоремы найдется такое число $L > 0$, что

$$\text{vrai} \inf_{t \in [0,1]} f(t,u) \geq \delta u, \quad 0 < u \leq L, \quad (1.10)$$

где $\delta \geq \frac{2}{\int_0^1 \psi(s)(T\varphi)(s) ds} > 0$.

При $x \in \partial\Omega_r$, выбрав $0 < r \leq \frac{L}{\max_{t \in [0,1]} (T\chi)(t)}$, имеем

$$(Tx)(t) \leq \|x\|_{\mathbb{C}} (T\chi)(t) \leq r \max_{t \in [0,1]} (T\chi)(t) \leq L, \quad t \in [0,1].$$

В силу (1.6) и (1.10) для $x \in \partial\Omega_r$ имеем

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, (Tx)(s)) ds \geq \delta \varphi(t) \int_0^1 \psi(s)(Tx)(s) ds \geq \delta \varphi(t) \int_0^1 \psi(s)(T\varphi)(s) ds \cdot \|x\|_{\mathbb{C}}.$$

После нормировки обеих частей последнего неравенства, принимая во внимание ограничения на δ , придем к соотношению (1.10).

Подберем теперь такое число $R > 0$, что при $x \in \partial\Omega_R$ выполнено условие

$$\|Ax\|_{\mathbb{C}} \leq \|x\|_{\mathbb{C}}. \quad (1.11)$$

Действительно, в силу (1.5) и (1.7), воспользовавшись неравенством Гёльдера, при $x \in \partial\Omega_R$ имеем

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &= \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds \leq b \int_0^1 \psi(s) (Tx)^{\frac{p}{q}}(s) ds \leq \\ &\leq b \|\psi\|_{\mathbb{L}_{q'}} \|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \leq b \|\psi\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}} \|x\|_{\mathbb{C}}^{\frac{p}{q}} = b \|\psi\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}} R^{\frac{p}{q}-1} \|x\|_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

где τ — норма оператора T ,

$$\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1.$$

Взяв теперь в качестве R такое положительное число, что

$$R \leq \left(\frac{1}{b \|\psi\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}}} \right)^{\frac{q}{p-q}}, \quad (1.12)$$

очевидным образом гарантируем выполнение (1.11).

Следовательно, вполне непрерывный оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в Ω , что в свою очередь равносильно существованию хотя бы одного положительного решения краевой задачи (1.1)–(1.3) в указанной области. По аналогичной схеме несложно доказать справедливость теоремы и в случае $p > q$. Как легко видеть, для этого необходимо убедиться в выполнении условия (i) теоремы 1. Теорема доказана. \square

В предположении справедливости теоремы 2 запишем неравенство (1.10), вытекающее из условия 2 теоремы 2, следующим образом:

$$\text{vrai } \inf_{t \in [0, 1]} f(t, u) \geq \delta L^{1-\frac{p}{q}} u^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < u \leq L. \quad (1.13)$$

В силу (1.4), (1.6) и (1.13) для $x \in K$ имеем

$$x(t) \geq \varphi(t) \delta L^{1-\frac{p}{q}} \int_0^1 \psi(s) (Tx)^{\frac{p}{q}}(s) ds \geq \varphi(t) \delta L^{\frac{q-p}{q}} \|x\|_{\mathbb{C}}^{\frac{p}{q}} \int_0^1 \psi(s) (T\varphi)^{\frac{p}{q}}(s) ds.$$

Откуда после нормировки, разрешив полученное неравенство, получим априорную оценку

$$\|x\|_{\mathbb{C}} \geq \xi, \quad (1.14)$$

где

$$\xi = L \left(\frac{\delta}{2} \int_0^1 \psi(s) (T\varphi)^{\frac{p}{q}}(s) ds \right)^{\frac{q}{q-p}}.$$

Теорема 3. Предположим, что выполнены условия теоремы 2, функция $f(t, u)$ дифференцируема по второму аргументу, а частная производная $f'_u(t, u)$ монотонно убывает по u . Кроме того, допустим, что

$$\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} < \frac{4}{\tau}, \quad (1.15)$$

где

$$\theta(t) = f'_u(t, \zeta), \quad \zeta = \xi \min_{0 \leq t \leq 1} (T\chi)(t), \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$

Тогда краевая задача (1.1)–(1.3) имеет единственное положительное решение.

Доказательство. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — различные положительные решения задачи (1.1)–(1.3). Согласно формуле конечных приращений Лагранжа

$$f(s, (Tx_1)(s)) - f(s, (Tx_2)(s)) = f'_u(t, \tilde{u}(s))(Ty)(s), \quad (1.16)$$

где функция $\tilde{u}(t)$ принимает значения промежуточные между $(Tx_1)(t)$ и $(Tx_2)(t)$. При этом заметим, что соотношение (1.14) влечет оценку

$$\tilde{u}(t) \geq \zeta, \quad (1.17)$$

где $\zeta = \xi \min_{0 \leq t \leq 1} (T\chi)(t) > 0$.

Ввиду монотонности $f'_u(t, u)$, (1.5) и (1.17) с учетом того, что $\max_{0 \leq s \leq 1} \psi(s) = 1/4$, для любого $x \in K$ имеем

$$\begin{aligned} \|Ax_1 - Ax_2\|_{\mathbb{C}} &\leq \frac{1}{4} \int_0^1 |f'_u(s, \tilde{u}(s))| |(Ty)(s)| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^1 |f'_u(s, \zeta)| |(Ty)(s)| ds \leq \frac{1}{4} \|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} \|Ty\|_{\mathbb{L}_p} \leq \frac{1}{4} \|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} \tau \|y\|_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

где

$$\theta(t) \equiv f'_u(t, \zeta), \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$

Следовательно, в силу условия (1.15) теоремы из принципа сжатых отображений следует, что краевая задача (1.1)–(1.3) имеет единственное положительное решение. \square

В заключение приведен пример, иллюстрирующий выполнение полученных результатов.

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения:

$$x'''(t) + \alpha(t+1)^{\beta} \sqrt{\int_0^1 x(s) ds} = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.18)$$

$$x(0) = x(1), \quad x''(0) = x''(1), \quad (1.19)$$

где $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$.

Здесь, $p/q = 1/2$ и $f(t, u) = \alpha(t+1)^{\beta} \sqrt{u}$. Для определенности положим $p = 2$ и $q = 4$. В качестве $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}_2$ взят линейный интегральный оператор, определенный равенством

$$(Tx)(t) = \int_0^1 x(s) ds.$$

Имеем

$$(T\varphi)(t) = \int_0^1 \varphi(s) ds = \frac{1}{4}.$$

Потребуем теперь выполнение условия (1.10) теоремы 2:

$$\alpha\sqrt{u} \geqslant \delta u, \quad u \in (0, L],$$

где $\delta \geqslant 48$. Отсюда легко видеть, что последнее неравенство выполняется, например, при $L = (\alpha/\delta)^2$. Следовательно, следуя схеме доказательства теоремы 2, в качестве в качестве r , можно взять его верхнюю границу, т.е. число $4(\alpha/\delta)^2$.

В свою очередь для нахождения R рассмотрим неравенство (1.12). Несложно видеть, что $\tau = 1$. В неравенстве (1.7) соответственно положим $b = \alpha 2^\beta$. Тогда имеем

$$R \leqslant \alpha^2 4^\beta \left(\int_0^1 \psi^{\frac{4}{3}}(s) ds \right)^{\frac{3}{2}} \approx 0,03 \alpha^2 4^\beta.$$

Взяв в качестве R пограничное значение, нетрудно убедиться, что для любых $\delta \geqslant 48$ независимо от выбора α и β выполнено условие $0 < r < R$. Следовательно, в силу теоремы 2 краевая задача (1.18)–(1.19) имеет по меньшей мере одно положительное решение.

Докажем теперь единственность положительного решения задачи (1.18)–(1.19). Функция

$$f'_u(t, u) = \frac{1}{2\alpha(t+1)^\beta \sqrt{u}},$$

очевидно, монотонно убывает по второму аргументу. Неравенство (1.15) соответственно запишется

$$\|\theta\|_{L_2} < 4, \tag{1.20}$$

где

$$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha(t+1)^\beta \sqrt{\zeta}}, \quad \zeta = \frac{\xi}{2}.$$

В силу (1.14) имеем

$$\xi = \frac{\alpha^2}{16} \left(\int_0^1 \psi(s) ds \right)^2 = \frac{\alpha^2}{288}.$$

Тогда $\theta(t) = \frac{12}{\alpha^2(t+1)^\beta}$ и соответственно

$$\|\theta\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 \theta^2(s) ds} = \frac{24}{\alpha^2} \cdot \frac{2^{1-2\beta} - 1}{1 - 2\beta}.$$

Следовательно, неравенство (1.20) окончательно примет вид

$$\frac{2^{1-2\beta} - 1}{1 - 2\beta} < \frac{\alpha^2}{6}.$$

Таким образом, выполнение последнего неравенства гарантирует единственность положительного решения задачи (1.18)–(1.19).

Заключение

В работе рассматривается краевая задача для нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка с нелинейной и нелокальной добавкой. Граничными условиями для искомой функции $x(t)$ являются симметричные соотношения $x(0) = x(1) = 0$ и $x''(0) = x''(1)$. Решение задачи ищется в классе положительных на $(0, 1)$ функций с абсолютно непрерывной второй производной. С помощью функции Грина обращается дифференциальная часть и рассматриваемая задача сводится к равносильному нелинейному интегральному уравнению. Далее, используя теорему Красносельского о конусном расширении (сжатии), доказывается наличие по крайней мере одного положительного решения исследуемой задачи. Единственность такого решения установлена только в сублинейном случае.

Литература [References]

1. Yao, Q., Feng, Y., The existence of solution for a third-order two-point boundary value problem. *Appl. Math. Lett.*, 2002, vol. 15, no. 2, pp. 227–232. DOI: [10.1016/S0893-9659\(01\)00122-7](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(01)00122-7)
2. Liu, Z., Ume, J.S., Kang, S.M., Positive solutions of a singular nonlinear third order two-point boundary value problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 326, no. 1, pp. 589–601. DOI: [10.1016/j.jmaa.2006.03.030](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.03.030)
3. El-Shahed, M., Positive solutions for nonlinear singular third order boundary value problem. *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2009, vol. 14, no. 2, pp. 424–429. DOI: [10.1016/j.cnsns.2007.10.008](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2007.10.008)
4. Qu, H., Positive solutions of boundary value problems of nonlinear third-order differential equations. *Int. J. Math. Anal.*, 2010, vol. 4, no. 17, pp. 855–860.
5. Gao, Y., Wang, F., Existence of solutions of nonlinear mixed two-point boundary value problems for third-order nonlinear differential equation. *J. Appl. Math.*, 2012, vol. 2012, pp. 1–12. DOI: [10.1155/2012/262139](https://doi.org/10.1155/2012/262139)
6. Cheng, Z., Existence of positive periodic solutions for third-order differential equation with strong singularity. *Adv. Differ. Equ.*, 2014, vol. 2014, no. 162, pp. 1–12. DOI: [10.1186/1687-1847-2014-162](https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-162)
7. Almuthaybiri, S. S., Tisdell, C., Sharper existence and uniqueness results for solutions to third-order boundary value problems. *MMA*, 2020, vol. 25, no. 3, pp. 409–420. DOI: [10.3846/mma.2020.11043](https://doi.org/10.3846/mma.2020.11043)
8. Murty, K. N., Sailaja, P., Existence and uniqueness of solutions to three-point boundary value problems associated with third order non-linear fuzzy differential equations. *IJECS*, 2023, vol. 12, no. 2, pp. 25648–25653. DOI: [10.18535/ijecs/v12i02.4719](https://doi.org/10.18535/ijecs/v12i02.4719)
9. Jankowski, T., Existence of positive solutions to third order differential equations with advanced arguments and nonlocal boundary conditions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2012, vol. 75, no. 2, pp. 913–923. DOI: [10.1016/j.na.2011.09.025](https://doi.org/10.1016/j.na.2011.09.025)
10. Ardjouni, A., Djoudi, A., Existence of positive periodic solutions for third-order nonlinear delay differential equations with variable coefficients. *Mathematica Moravica*, 2019, vol. 23, no. 2, pp. 17–28. DOI: [10.5937/MatMor1902017A](https://doi.org/10.5937/MatMor1902017A)
11. Крейн, С. Г., *Функциональный анализ*. Москва, Наука, 1972. [Crane, S.G., Funktsional'nyy analiz = Functional analysis. Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
12. Zhou, W.X., Zhang, J.G., Li, J.M., Existence of multiple positive solutions for singular boundary value problems of nonlinear fractional differential equations. *Adv. Differ. Equ.*, 2014, vol. 97, pp. 1–15. DOI: [10.1186/1687-1847-2014-97](https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-97)

УДК 519.63

EDN: KCACPH DOI: 10.31429/vestnik-21-2-14-22

Вычислительные аспекты расчета вертикальной скорости в модели ветровой циркуляции

В. С. Кочергин  **С. В. Кочергин** 

Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия
Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; SPIN 9479-0245; e-mail: vskocher@gmail.com

Аннотация. В работе для упрощенной трехмерной стационарной модели ветровых течений жидкости в водоеме рассматриваются различные аспекты вычисления компонент скорости. Представлено широкое параметрическое семейство разностных схем для интегрирования уравнения для функции тока, обладающее определенными свойствами при различных значениях параметров. Реализованы различные подходы при вычислении вертикальной скорости. Показано преимущество подхода использующего метод прогонки.

Ключевые слова: модель ветровой циркуляции, метод прогонки, вертикальная скорость, численная дискретизация.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме FNNN-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

Цитирование: Кочергин В. С., Кочергин С. В. Вычислительные аспекты расчета вертикальной скорости в модели ветровой циркуляции // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 14–22. EDN: KCACPH. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-14-22

Поступила 27 мая 2024 г. После доработки 11 июня 2024 г. Принято 21 июня 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Computational Aspects of Calculating Vertical Velocity in a Wind Circulation Model

V. S. Kochergin  **S. V. Kochergin**

Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia
Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. Qualitative calculation of the vertical component of the velocity does not lose its relevance even today. Basically, the results obtained are compared by calculations using other models and with a priori information about the dynamics of waters in the studied area. More accurate testing of calculation methods can be carried out if there is an accurate analytical solution to the problem. For these purposes, a three-dimensional analytical solution to the problem of wind circulation in a rectangular reservoir with a flat bottom is used for a given wind effect. Analytical expressions for the barotropic and additional three-dimensional components of the velocity field are obtained. The expression for the vertical component of the velocity field in this paper is used for comparison with the values calculated from the continuity equation. The vertical velocity was calculated in various ways: by standard integration of the vertical continuity equation and by the run-through method. In addition, in this work, when integrating the equation for the current function, a family of difference discretizations obtained for solving a similar class of problems is used. As the results of numerical experiments presented in the tables have shown, even with a sufficiently accurate solution of the problem for the current function, the calculation of the horizontal components of the total flow can lead to significant errors if the specifics of the problem are not taken into account. The algorithms used give a fairly good accuracy of reproducing the solution of the equation for the current function. On a fine grid, the error is hundredths of a percent of the norm used. The technique used in this work allows, within the framework of a single approach, to solve the problem for the current function

and calculate the derivatives of this solution, which guarantees the accuracy of determining the horizontal components of the total flow. The paper shows that the use of the run-through method in calculating vertical velocity significantly improves the calculation results. The results of the work can be used in modeling dynamic processes in the sea.

Keywords: wind circulation model, run-through method, vertical velocity, numerical discretization.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment on the topic FNNN-2021-0005 “Comprehensive interdisciplinary studies of oceanological processes that determine the functioning and evolution of ecosystems in the coastal zones of the Black and Azov Seas” (code “Coastal research”).

Cite as: Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Computational aspects of calculating vertical velocity in a wind circulation model. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 14–22. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-14-22

Received 27 May 2024. Revised 11 June 2024. Accepted 21 June 2024. Published 28 June 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

Качественное вычисление вертикальной компоненты скорости [1] не теряет своей актуальности и в наши дни. В основном получаемые результаты сравниваются с расчетами по другим моделям и с априорной информацией о динамике вод в исследуемом районе. Более точное тестирование методов расчета можно осуществить при наличии точного аналитического решения задачи [2]. Для этих целей в работе [3] построено трехмерное аналитическое решение задачи ветровой циркуляции [4, 5] в водоеме прямоугольной формы с плоским дном при заданном ветровом воздействии. Получены аналитические выражения для баротропной и добавочной трехмерной составляющей поля скорости. Выражение для вертикальной компоненты поля скорости в данной работе используются для сравнения со значениями, вычисленными из уравнения неразрывности. Вертикальная скорость вычислялась различными способами: стандартным интегрированием уравнения неразрывности по вертикали и методом прогонки [6]. В данной работе при интегрировании уравнения для функции тока используется семейство разностных дискретизаций, полученное для решения подобного класса задач [7].

1. Постановка задачи

Рассмотрим решение для упрощенной трехмерной стационарной модели ветровых течений жидкости в водоеме. Жидкость однородна и в модели отсутствуют механизмы адвекции и горизонтальной диффузии. Такая модель относится к классу моделей Экмановского типа [8], которые используются для описания картины течений в некотором приближении. Если для таких моделей удается найти аналитические решения, то их использование для тестирования численных методов и соответствующих алгоритмов оказывается весьма полезным.

Рассмотрим задачу в безразмерной постановке. Пусть поверхность рассматриваемого водоема в плоскости xOy имеет прямоугольную форму

$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q], \quad (1.1)$$

глубина его $H > 0$ — постоянна. Оси координат направлены следующим образом: Ox — на восток, Oy — на север, Oz — вертикально вниз. В трехмерной области

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega_0, 0 \leq z \leq H\} \quad (1.2)$$

рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} -\ell v = -\frac{\partial P^s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \ell u = -\frac{\partial P^s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v}{\partial z} \right), & (x, y, z) \in \Omega^0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} \left\{ z = 0, (x, y) \in \Omega_0^0 \right\} : k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, w = 0; \\ \left\{ z = H, (x, y) \in \Omega_0^0 \right\} : k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b, w = 0; \\ \{0 \leq z \leq H, (x, y) \in \partial \Omega_0\} : Un_x + Vn_y = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Горизонтальные компоненты полного потока определяются следующим образом:

$$U(x, y) = \int_0^H u(x, y, z) dz, \quad V(x, y) = \int_0^H v(x, y, z) dz, \quad (1.5)$$

на дне придонное трение определено выражение

$$\tau_x^b = \mu U, \quad \tau_y^b = \mu V, \quad \mu \equiv \text{const} > 0. \quad (1.6)$$

Следуя работам Стommела [4, 5, 9], имеем

$$\ell = \ell_0 + \beta y, \quad k \equiv \text{const} > 0. \quad (1.7)$$

Компоненты касательного напряжения трения ветра зададим формулами

$$\begin{cases} \tau_x = [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y); \\ \tau_y = [G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y), \end{cases} \quad (1.8)$$

в которых приняты обозначения

$$\begin{aligned} r_l &= \frac{\pi l}{r}; & r_s &= \frac{\pi s}{r}; & q_m &= \frac{\pi m}{q}; & q_p &= \frac{\pi p}{q}; \\ l, s &= 0, 1, 2, \dots; & m, p &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

Таким образом, модель ветра содержит ряд параметров, выбор которых дает возможность описать достаточно общую ветровую ситуацию. Отметим, что Стommел использовал модель ветра следующего вида

$$\tau_x = -F \cos\left(\frac{\pi y}{q}\right), \quad \tau_y = 0, \quad (1.10)$$

— которая следует из (1.8), (1.9) при

$$F_1 = -F, \quad F_2 = G_1 = G_2 = 0, \quad l = 0, \quad m = 1.$$

2. Численный метод решения уравнения для функции тока

Численный метод решения с использованием проекционного варианта интегро-интерполяционного метода предложен в работе [10] и исследован в монографии [11]. Этот подход позволяет получать разностные схемы для численного интегрирования задачи и соответствующие формулы для аппроксимации производных от самого решения. Последнее обычно используется при вычисления U и V по формулам

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2.1)$$

где $\Psi(x, y)$ — интегральная функция тока.

Обозначим

$$f(x, y) \equiv \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Для задачи (1.1)–(1.7) имеем следующую постановку для определения $\Psi(x, y)$:

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega_0^0, \\ \Psi = 0, & (x, y) \in \partial \Omega_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Рассмотрим в $\Omega_0 = [0, r] \times [0, q]$ вычислительную сетку вида

$$\omega_h \equiv \left\{ \begin{array}{l} (x_i, y_j) | x_i = (i - 1)\Delta x, y_j = (j - 1)\Delta y; \\ i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k}; \Delta x = \frac{r}{n - 1}; \Delta y = \frac{q}{k - 1} \end{array} \right\}. \quad (2.4)$$

Пусть на ней определяется сеточная функция $\{\Psi_{i,j}\}$, которая состоит из приближенных значений для величин $\{\Psi(x_i, y_j)\}$ — точного решения. Для вычисления значений $\{\Psi_{i,j}\}$ рассмотрим следующее семейство разностных дискретизаций:

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) + \\ + \beta \left(\frac{1 + \theta_{i,j}}{2} \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta x} + \frac{1 - \theta_{i,j}}{2} \frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j}}{\Delta x} \right) = f(x_i, y_j), \\ i = \overline{2, n - 1}; j = \overline{2, k - 1}; \\ \Psi_{i,j} = 0, i, j \in \partial \omega_h, \theta_{i,j} \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Здесь $\theta_{i,j}$ — набор параметров, который определяет аппроксимацию производных $\partial \Psi / \partial x$, $\partial \Psi / \partial y$ в узле сетки (x_i, y_j) . Преобразуем это семейство следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{\beta \Delta x}{2\mu} (1 + \theta_{i,j}) \right) \Psi_{i+1,j} + \frac{\mu}{\Delta x^2} \left(1 - \frac{\beta \Delta x}{2\mu} (1 - \theta_{i,j}) \right) \Psi_{i-1,j} + \\ + \frac{\mu}{\Delta y^2} (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) = \left(\frac{2\mu}{\Delta y^2} + \frac{2\mu}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{\beta \Delta x}{2\mu} \theta_{i,j} \right) \right) \Psi_{i,j} + f_{i,j}; \\ i = \overline{2, n - 1}; j = \overline{2, k - 1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Согласованные аппроксимации производных для внутренних узлов области можно выписать следующим образом:

$$\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial y} = \frac{1}{2} (D_y^+ \Psi_{i,j} + D_y^- \Psi_{i,j}), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x} = \frac{1 - \theta}{2} [1 + R(\theta + 1)] D_x^+ \Psi_{i,j} + \frac{1 + \theta}{2} \cdot [1 + R(\theta - 1)] D_x^- \Psi_{i,j}.$$

Определим величину $R \equiv \beta \Delta x / (2\mu)$. Последнюю задачу (2.5) будем решать итерационно. Параметры $\theta_{i,j}$ являются функциями от числа R . Функцию $\theta(R)$ можно выбирать в частности следующим образом:

1. $\theta(R) = 0$ — схема с центральной разностью [11];

2. $\theta(R) = \text{sign}(R)$ — схема с направленной разностью [11];

3. $\theta(R) = \frac{|R|}{1 + |R|} \cdot \text{sign}(R)$ — схема Самарского А.А. [12];

4. $\theta(R) = \frac{|R|}{1 + |R| + |R|^2} \cdot R$ — схема Булеева Н.И., Тимухина Г.И. [13];

5. $\theta(R) = \frac{1+2|R|}{3+3|R|+2|R|^2} \cdot R$ — схема Булеева Н.И. [14];
6. $\theta(R) = \operatorname{cth}(R) - \frac{1}{R}$ — схема Ильина А.М. [15, 16].

Выбор функции $\theta(R)$ с использованием вариантов 2–6 гарантирует однозначную разрешимость системы уравнений (2.3), так как в этом случае сеточный оператор этой системы будет оператором монотонного вида [17].

3. Алгоритмы вычисления вертикальной скорости

Пусть горизонтальные скорости представлены в виде

$$u = U + \hat{u}, \quad v = V + \hat{v}, \quad (3.1)$$

где U, V — компоненты баротропной составляющей, \hat{u}, \hat{v} — добавочные трехмерные компоненты скорости, которые при условии бароклиности модели называются бароклиническими.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.2)$$

Для U, V выполняется равенство

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3.3)$$

поэтому из (1.2) можно записать выражение

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0. \quad (3.4)$$

В дальнейшем применим уравнение (3.4) для улучшения качества расчета w и уменьшения ошибок при ее вычислении. Проинтегрируем (3.2) от 0 до z с учетом краевых условий $w(0) = 0$, $w(H) = 0$, где H — глубина моря, 0 — соответствует его поверхности. В результате получим выражение

$$w(z) = - \int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz. \quad (3.5)$$

Аналогично из (3.4) получаем

$$w(z) = - \int_0^z \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) dz. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.2), следуя [2], можно записать со вторым порядком аппроксимации

$$\frac{w_{k+1} - w_k}{\Delta z_{k+1/2}} = \frac{\bar{f}_{k+1} + \bar{f}_k}{2}, \quad \Delta z_{k+1/2} = z_{k+1} - z_k \quad (3.7)$$

или

$$\frac{w_k - w_{k-1}}{\Delta z_{k-1/2}} = \frac{\bar{f}_k + \bar{f}_{k-1}}{2}, \quad \Delta z_{k-1/2} = z_k - z_{k-1}, \quad (3.8)$$

где

$$\bar{f} = S_x D_x u + S_y D_y v \quad (3.9)$$

или

$$\bar{f} = S_y D_x u + S_x D_y v. \quad (3.10)$$

В (3.9) и (3.10) используется следующие разностные операторы

$$D_x \Phi(x, y) = \frac{\Phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y\right) - \Phi\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y\right)}{\Delta x}, \quad (3.11)$$

$$D_y \Phi(x, y) = \frac{\Phi\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}\right) - \Phi\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y}, \quad (3.12)$$

$$S_x \Phi(x, y) = \frac{\Phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y\right) + \Phi\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y\right)}{2}, \quad (3.13)$$

$$S_y \Phi(x, y) = \frac{\Phi\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}\right) + \Phi\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}\right)}{2}, \quad (3.14)$$

где $\Phi(x, y)$ — некоторая функция.

Вычтем из (3.7) выражение (3.8), тогда имеем

$$\frac{1}{\Delta z_{k+1/2}} w_{k+1} - \left(\frac{1}{\Delta z_{k+1/2}} + \frac{1}{\Delta z_{k-1/2}} \right) w_k + \frac{1}{\Delta z_{k-1/2}} w_{k-1} = \frac{1}{2} (\bar{f}_{k+1} - \bar{f}_{k-1}). \quad (3.15)$$

Используя (3.9), получаем для f центрально-разностную дискретизацию. Отметим, что (3.15) реализуется при помощи метода прогонки [6] с учетом обоих краевых условий для w на поверхности и на дне.

Для контроля качества вычисления вертикальной компоненты скорости будем сравнивать полученные значения w с точным аналитическим решением \bar{w} . В работе [3] получено аналитическое решение трехмерной задачи ветровой циркуляции при заданном ветровом воздействии в бассейне прямоугольной формы с плоским дном. Сравнение будем производить в следующих нормах:

$$NC\Phi = \frac{\max |\Phi - \bar{\Phi}|_\Omega \cdot 100\%}{\max |\bar{\Phi}|_\Omega}, \quad NL\Phi = \frac{\sum_\Omega |\Phi - \bar{\Phi}| \cdot 100\%}{\sum_\Omega \bar{\Phi}}, \quad (3.16)$$

где $\bar{\Phi}$ — аналитическое значение, Φ — оценка функции, получаемая тем или иным способом.

4. Результаты численных экспериментов

Для анализа результатов в качестве модельного объекта рассмотрим прямоугольный водоем с плоским дном со следующими характерными размерами:

$$\begin{aligned} a &= 11 \cdot 10^7 \text{ (см)} = 1100 \text{ (км)}, \\ b &= 5 \cdot 10^7 \text{ (см)} \approx 500 \text{ (км)}, \\ D &= 2 \cdot 10^5 \text{ (см)} = 2000 \text{ (м)}, \\ R &= 0,02 \text{ (см/сек)}, \quad G = 0,1 \text{ (Па)}, \\ E &= 1 \text{ (см}^2/\text{сек}), \quad \rho_0 = 1 \text{ (г/см}^3), \\ \ell_0 &= 10^{-4} \left(\frac{1}{\text{сек}} \right), \quad \beta = 2 \cdot 10^{-13} \left(\frac{1}{\text{см} \cdot \text{сек}} \right). \end{aligned}$$

Выберем характерные масштабы

$$L = 10^7 \text{ (см)}, \quad h = 2 \cdot 10^5 \text{ (см)}, \quad u_0 = 10 \text{ (см/сек)}.$$

Тогда получим

Таблица 1. Значения погрешностей для различных дискретизаций при вычислении функции тока

Table 1. Error values for different discretizations in calculating the current function

	Схема направленных разностей	Схема центральных разностей	Схема Самарского	Схема Тимухина, Булеева	Схема Булеева	Схема Ильина
NC Ψ	6,9467	0,60586	0,87911	0,29147	0,15405	0,15376
NL Ψ	0,25649	0,03833	0,54748	0,030001	0,031229	0,024101

Таблица 2. Значения погрешностей для различных дискретизаций при вычислении скоростей

Table 2. Error values for different discretizations in calculating velocities

	Схема направленных разностей	Схема центральных разностей	Схема Ильина
NCU	0,92748	0,49380	0,49380
NLU	0,39095	0,49342	0,49342
NCV	23,335	3,3475	0,23083
NLV	9,5639	1,6699	0,23085

$$\begin{aligned} r &= 11, \quad q = 5, \quad H = 1, \quad k = 0,05; \\ \ell_0 &= 1, \quad \beta = 0,02; \\ F &= \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-3}, \quad \mu = 0,001; \quad w_0 = 0,2. \end{aligned}$$

Найдя решение задачи (1.1)–(1.5), решение размерной задачи определяем по формулам

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}(Lx, Ly, hz) = u_0 u(x, y, z), \\ \bar{v} &= \bar{v}(Lx, Ly, hz) = u_0 v(x, y, z), \\ \bar{w} &= \bar{w}(Lx, Ly, hz) = w_0 w(x, y, z), \quad w_0 = \frac{h u_0}{L}, \end{aligned}$$

где чертой обозначены компоненты вектора скорости для размерной задачи.

Расчеты показали, что наилучший результат в смысле норм (3.16) при вычислении функции тока имеем при использовании схемы Ильина. Сравнение значений норм представлено в табл. 1.

В дальнейшем при вычислении функции тока будем применять именно эту схему, а компоненты полного потока (2.1) будем определять с использованием различных схем. Из табл. 2 видно, что использование схемы Ильина при аппроксимации производных приводит к существенному улучшению результатов расчетов при заданных значениях входных параметров модели.

Численные эксперименты показали, что наихудший результат при расчете вертикальной скорости из уравнения неразрывности (1.5) получается с использованием полных скоростей. Реализация формулы (3.6) приводит к некоторому улучшению результатов расчетов, которые представлены в табл. 3.

Использование алгоритма прогонки по формуле (3.15) приводит к существенному уменьшению указанных норм отклонений.

Таблица 3. Значения погрешностей для различных методов при вычислении вертикальной скорости

Table 3. Error values for different methods in calculating vertical speed

	Формула (3.5)	Формула (3.6)	Прогонка (3.15)
NCW	26,832	26,476	2,115
NLW	24,733	22,330	3,5452

Заключение

Как показали результаты численных экспериментов, представленные в таблицах, даже при достаточно точном решении задачи для функции тока (табл. 1), вычисление горизонтальных компонент полного потока (табл. 2) может приводить к существенным ошибкам, если не учитывать специфику задачи. Используемые алгоритмы дают достаточно хорошую точность воспроизведения решения уравнения для функции тока. На мелкой сетке ошибка составляет сотые доли процента в используемой норме. Реализованная в данной работе методика позволяет, в рамках единого подхода, решать задачу для функции тока и вычислять производные от этого решения, что гарантирует точность определения горизонтальных компонент полного потока. В работе показано, что использование метода прогонки при вычислении вертикальной скорости существенно улучшает результаты расчетов. Результаты работы могут быть использованы при моделировании динамических процессов в море.

Литература [References]

1. Марчук, Г.И., Саркисян, А.С., *Математическое моделирование циркуляции океана*. Москва, Наука, 1988. [Marchuk, G.I., Sarkisyan, A.S., *Matematicheskoe modelirovanie tsirkulyatsii okeana = Mathematical modeling of ocean circulation*. Moscow, Nauka, 1988. (in Russian)]
2. Еремеев, В.Н., Кочергин, В.П., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., *Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов*. Севастополь, «Экоси-гидрофизика», 2002. [Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnykh basseynov = Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins*. Sevastopol, «Ekosi-gidrofizika», 2002. (in Russian)]
3. Кочергин, В.С., Кочергин, С. В., Скляр, С.Н., Аналитическая тестовая задача ветровых течений. *Процессы в геосредах*, № 2(20), 2019, с. 198–203. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical test problem of wind currents. *Protsessy v geosredakh = Processes in geoenvironments*, No. 2(20), 2019, pp. 198–203. (in Russian)]
4. Stommel, H., *The Gulf Stream. A Physical and Dynamical Description*. University of California Press, 1965.
5. Стommel, Г., *Гольфстрим*. Москва, ИЛ, 1965. [Stommel, G., *Gol'fstrom = Gulf Stream*. Moscow, IL, 1965. (in Russian)]
6. Годунов, С.К., Рябенъкий, В.С., *Разностные схемы. Введение в теорию*. Москва, Наука, 1977. [Godunov, S.K., Ryabenkiy, V.S., *Raznostnye skhemy. Vvedenie v teoriyu = Difference Schemes. Introduction to Theory*. Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)]
7. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Вычисление компонент полного потока в моделях ветрового движения жидкости. *Морской гидрофизический журнал*, 2023, т. 39, № 3, с. 299–313. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Calculation of the components of the total flow in models of wind-induced fluid motion. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Marine Hydrophysical Journal*, 2023, vol. 39, no. 3, pp. 299–313.] EDN: RUBXPZ. DOI: 10.29039/0233-7584-2023-3-299-313
8. Ekman, V.W., On the influence of the Earth rotation on ocean currents. *Arkiv Mat., Astron., or Fysik*, 1905, bd. 2, no. 11, pp. 1–52.
9. Stommel, H., The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1948, vol. 29, pp. 202–206.
10. Sklyar, S.N., A projective version of the integral-interpolation method and its application for the discretization of the singular perturbation problems. *Proc. of the Int. Conf. “Advanced Mathematics: Computations and Applications” (AMCA-95)*. NCC Publisher, Novosibirsk, 1995, pp. 380–385.
11. Роуч, П., *Вычислительная гидродинамика*. Москва, Мир, 1980. [Roach, P., *Vychislitel'naya gidrodinamika = Computational Fluid Dynamics*. Moscow, Mir, 1980. (in Russian)]
12. Самарский, А.А., *Теория разностных схем*. Москва, Наука, 1983. [Samarskii, A.A., *Theory of difference schemes*. Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]
13. Булеев, Н.И., Тимухин, Г.И., О составлении разностных уравнений гидродинамики вязкой неоднородной среды. *Численные методы механики сплошной среды*, 1972, т. 3, № 4, с. 19–26. [Buleev, N.I., Timukhin, G.I., On the formulation of difference equations for the hydrodynamics of a viscous inhomogeneous medium. *Chislennye metody mekhaniki sploshnoy sredy = Numerical Methods of Continuum Mechanics*, 1972, vol. 3, no. 4, pp. 19–26. (in Russian)]

14. Булеев, Н.И., *Пространственная модель турбулентного обмена*. Москва, Наука, 1983. [Buleev, N.I., *Prostranstvennaya model' turbulentnogo obmena = Spatial model of turbulent exchange*. Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]
15. Ильин, А.М., Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Математические заметки*, 1969, т. 6, вып. 2, с. 237–248. [Ilyin, A.M., Difference scheme for a differential equation with a small parameter at the highest derivative. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*, 1969, vol. 6, iss. 2, pp. 237–248. (in Russian)]
16. Дулан, Э., Миллер, Дж., Шилдерс, У., *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем*. Москва, Мир, 1983. [Doolan, E., Miller, J., Shilders, W., *Ravnomernye chislennye metody resheniya zadach s pogranichnym sloem = Uniform Numerical Methods for Solving Boundary Layer Problems*. Moscow, Mir, 1983. (in Russian)]
17. Коллатц, Л., *Функциональный анализ и вычислительная математика*. Москва, Мир, 1969. [Collatz, L., *Funktional'nyy analiz i vychislitel'naya matematika = Functional Analysis and Computational Mathematics*. Moscow, Mir, 1969. (in Russian)]

УДК 531.39

EDN: YPNJFT DOI: 10.31429/vestnik-21-2-23-34

Исследование композитов в виде слоистых ортотропных оболочек

П. Г. Великанов¹✉, Ю. П. Артюхин²

¹ Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ,
ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия

² Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия

✉ Великанов Петр Геннадьевич; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Аннотация. Для исследования композитов в виде слоистых ортотропных оболочек в условиях различного преобладания жесткости армирования волокон продемонстрированы возможности ряда упрощающих методик по переходу от системы дифференциальных уравнений в частных производных к одному дифференциальному уравнению в частных производных относительно функции прогиба.

Ключевые слова: композиты, слоистые ортотропные оболочки, модель оболочки типа Тимошенко, пологие ортотропные оболочки.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Великанов П. Г., Артюхин Ю. П. Исследование композитов в виде слоистых ортотропных оболочек // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 23–34. EDN: YPNJFT. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-23-34

Поступила 2 февраля 2024 г. После доработки 15 апреля 2024 г. Принято 19 апреля 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Вклад каждого соавтора в процесс написания статьи на разных этапах ее создания: идея работы (Артюхин Ю.П.), вычисления и расчеты (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.), написание статьи, внесение правок и утверждение окончательного варианта (Великанов П.Г.). Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Investigation of a Composites in the Form of a Layered Orthotropic Shell

P. G. Velikanov¹✉, Yu. P. Artyukhin²

¹ Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia

² Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya st., Kazan, 420008, Russia

✉ Peter G. Velikanov; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Abstract. To study composites in the form of layered orthotropic shells under conditions of different predominance of fiber reinforcement stiffness, the possibilities of a number of simplifying techniques for the transition from a system of partial differential equations to a single partial differential equation with respect to the deflection function are demonstrated. Studies show that the phenomenon of cross-shear compliance strongly affects the operation of structures made of orthotropic fiber-reinforced materials. In particular, this applies to the problems of the effect of local loads on orthotropic shells, because near the concentrated load, the shell experiences significant transverse deformations. A technique has been demonstrated that allowed a system of five differential equations with respect to displacement components and rotation angles of the section to lead to one resolving equation with respect to deflection. From the obtained equation for layered orthotropic shells, as a special case, an equation for layered transversely isotropic shells can be obtained. The test tasks were solved under conditions of different predominance of fiber reinforcement stiffness. Also, with the help of a complex representation of the equations of the theory of shells, the problem of bending a flat orthotropic shell by a transverse load was solved.

Keywords: composites, layered orthotropic shells, Timoshenko-type shell model, shallow orthotropic shells.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Velikanov, P. G., Artyukhin, Yu. P., Investigation of a composites in the form of a layered orthotropic shell. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 23–34. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-23-34

Received 2 February 2024. Revised 15 April 2024. Accepted 19 April 2024. Published 28 June 2024.

The contribution of each co-author to the process of writing an article at different stages of its creation: the idea of the work (Y.P. Artyukhin), calculations (Y.P. Artyukhin, P.G. Velikanov), writing the article, making edits and approving the final version (Y.P. Artyukhin, P.G. Velikanov). The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

Разработка и расчет конструкций, сочетающих в себе легкость и экономичность, с одной стороны, и высокую прочность, жесткость, устойчивость и надежность, с другой стороны, является актуальным для современных ответственных слоистых тонкостенных элементов, применяемых в авиа-, судостроении, в химическом машиностроении и др. Для успешного сочетания вышеперечисленных свойств вполне оправданным представляется использование в конструкциях ортотропных пластин и оболочек, изготовленных из композиционных материалов [1–10].

Сечения, нормальные к срединной поверхности, тонкостенной оболочки, изготовленной из композиционных материалов, до деформации, в процессе деформации отклоняются от нормали на некоторый угол поперечного сдвига. Это связано тем, что оболочка имеет слоистую структуру, причем каждый слой при изгибе сдвигается относительно соседнего слоя из-за малой податливости связующего (смолы, клея) в касательном направлении. Чем больше податливость, тем хуже выполняются гипотезы Кирхгофа–Лява и тем обоснованнее становится использование модели оболочки типа Тимошенко.

Исследования показывают, что явление податливости поперечному сдвигу сильно влияет на работу конструкции из ортотропных материалов, армированных волокнами. Вышесказанное является особенно важным для задач в условиях действия локальных нагрузок на ортотропные оболочки, т.к. вблизи сосредоточенной нагрузки оболочка испытывает значительные поперечные деформации.

В статье продемонстрированы возможности ряда упрощающих методик по переходу от системы дифференциальных уравнений в частных производных к одному дифференциальному уравнению в частных производных относительно прогиба для трансверсально-изотропных и ортотропных оболочек.

Проверка правильности предложенных методик была продемонстрирована на исследовании прогибов свободно опертой по торцам ортотропной оболочки в условиях различного преобладания жесткости армирования волокон при действии нагрузки по малой площадке. Полученные результаты мало отличаются от результатов, полученных с помощью комплексных уравнений, что подтверждает их пригодность для инженерных расчетов в силу их компактности. Также приводится методика решения задачи изгиба пологой ортотропной оболочки под действием поперечной нагрузки с помощью комплексного представления уравнения теории оболочек.

1. Предварительные сведения

В тонкостенных конструкциях, изготовленных из композиционных материалов, сечения, нормальные к срединной поверхности до деформации, в процессе деформации отклоняются от нормали на некоторый угол, называемый углом поперечного сдвига. Это объясняется тем, что оболочка имеет слоистую структуру (волокна в эпоксидной смоле), причем каждый слой при изгибе сдвигается относительно соседнего слоя по причине малой податливости смолы (клея) в касательном направлении. Такая податливость характеризуется отношением модуля упругости Юнга (модуля упругости первого рода) к модулю поперечного сдвига (модулю упругости второго рода) E_j/\tilde{G}_{jz} ($j = 1, 2$), которая для стеклопластиков может быть равной от 10 до 50, а для боропластиков может доходить и до 100. Причем, чем больше это отношение, тем хуже выполняются гипотезы Кирхгофа–Лява. Учет существенной анизотропии материала требует отказа от принятых схем решения для изотропных и слабо анизотропных оболочек.

Исследования показывают, что явление податливости поперечному сдвигу сильно влияет на работу конструкции из ортотропных материалов, армированных волокнами. В частности,

вышесказанное относится к задачам о действии локальных нагрузок на ортотропные оболочки, т.к. вблизи сосредоточенной нагрузки оболочка испытывает значительные поперечные деформации.

2. Постановка задачи

Отказ от кинематической (геометрической) гипотезы Кирхгофа-Лява приводит к созданию различных моделей оболочки, наиболее распространенной среди которых считается модель оболочки типа Тимошенко, имеющей дополнительные степени свободы — два независимых угла поворота сечения ϕ и ψ

$$\phi = \gamma_{13} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u}{R_1}; \quad \psi = \gamma_{23} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{v}{R_2}, \quad (2.1)$$

где A_j — параметры Ляме; R_j — главные радиусы кривизны поверхности; γ_{j3} — осредненные по толщине углы поперечного сдвига между нормалью к срединной поверхности оболочки и направлением α_j ($j = 1, 2$); u , v и w — тангенциальные перемещения и прогиб соответственно. Углы ϕ и ψ представляют собой полные углы поворота нормального сечения оболочки в результате изгиба и поперечного сдвига. Если эпюру касательных напряжений τ_{j3} ($j = 1, 2$) аппроксимировать параболой (аналог формулы Журавского Д.И. для балок), то перерезывающие (поперечные) силы по закону Гука можно записать в виде

$$Q_1 = K_1 \gamma_{13}; \quad Q_2 = K_2 \gamma_{23}, \quad (2.2)$$

где

$$K_j = \frac{5}{6} \tilde{G}_{j3} h \quad (j = 1, 2).$$

Компоненты изменения кривизн в ортотропной цилиндрической оболочке ($A_1 = A_2 = R$; $\alpha_1 = \alpha$; $\alpha_2 = \beta$) представимы в виде

$$\kappa_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}; \quad \kappa_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \beta}; \quad 2\tau = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right). \quad (2.3)$$

Соотношения упругости для ортотропных оболочек имеют вид [11]

$$\begin{aligned} T_1 &= B_1 (\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2) \underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{(1,2)}} S = \tilde{G} h \omega; \\ M_1 &= D_1 (\kappa_1 + \nu_2 \kappa_2) \underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{(1,2)}} H = \left(\tilde{G} h^3 / 6 \right) \tau, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$B_1 = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad D_1 = \frac{E_1 h^3}{12 (1 - \nu_1 \nu_2)}.$$

Здесь B_1 и D_1 — жесткости ортотропной оболочки на растяжение и изгиб соответственно; символ $\underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{(1,2)}}$ означает, что последующее выражение получается из предыдущего путем перестановки индексов; \tilde{G} — модуль сдвига; E_j , ν_j — модули упругости и коэффициенты Пуассона j -го направления; T_j , $S(M_j, H)$ — тангенциальные усилия (моменты) j -го направления; ε_j , ω — тангенциальные деформации j -го направления.

К вышеприведенным соотношениям упругости (2.4) необходимо добавить также уравнения (2.2).

Уравнения равновесия круговой цилиндрической оболочки в координатах α , β запишутся следующим образом (q — нагрузка):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} &= 0; \quad \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} - Q_2 = 0; \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} + T_2 &= R q; \quad \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \beta} = R Q_1; \quad \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial \alpha} = R Q_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тангенциальные деформации выражаются через касательные перемещения u, v и прогиб w

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right); \quad \omega = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right). \quad (2.6)$$

Если решать задачу в перемещениях и углах поворота, то система (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), (2.6) сводится к пяти дифференциальным уравнениям десятого порядка относительно u, v, w, ϕ, ψ . Приведем эту систему к одному разрешающему уравнению относительно прогиба w [12, 13]. Сделаем предварительно ряд упрощений, которые вносят погрешность, не превышающую погрешности, присущей теории тонких оболочек.

Интегрируя второе уравнение (2.5) по β , найдем

$$T_2 = \int \left(Q_2 - \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) d\beta. \quad (2.7)$$

В этом уравнении Q_2 является второстепенным по сравнению с остальными членами и поэтому может быть опущен (он характеризует непологость оболочки). Его влияние посредством выражения (2.7) будет отражено в последующем в третьем уравнении (2.5). Систему (2.5) заменим следующей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} &= 0; \quad \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0; \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial \beta^2} - RT_2 &= -R^2 q. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Первым двум уравнениям (2.8) удовлетворим с помощью функции усилий F , определяемой выражениями

$$T_1 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}, \quad T_2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}, \quad S = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}. \quad (2.9)$$

Учитывая (2.7), (2.9) и допуская, что M_2 намного больше H , запишем третье уравнение (2.8) в виде

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial \beta^2} + M_2 - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = -R^2 q. \quad (2.10)$$

Здесь член уравнения M_2 учитывает непологость оболочки.

Преобразуем уравнения совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2},$$

подставляя в него соотношения упругости

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1 h R^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \right); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E_2 h R^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} - \nu_2 \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \right); \\ \omega &= -\frac{1}{\tilde{G} h R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} + 2\lambda_1 \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \theta \frac{\partial^4 F}{\partial \beta^4} = R E_2 h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad (2.11)$$

где

$$2\lambda_1 = \frac{E_2}{\tilde{G}} - 2\nu_2; \quad \theta = \delta = \frac{E_2}{E_1}.$$

Введем новые функции ξ и η , связанные с функциями углов поворота следующим образом:

$$\phi = \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \eta}{\partial \beta}; \quad \psi = \frac{\partial \xi}{\partial \beta} - \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}, \quad (2.12)$$

где ξ — потенциальная (деформационная) составляющая углов поворота, η — вихревая составляющая углов поворота (характеризует жесткий поворот).

Рассмотрим сначала случай, когда оболочка изготовлена из трансверсально-изотропного материала. Тогда

$$K_1 = K_2; \quad \lambda_1 = \theta = 1; \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu; \quad D_1 = D_2 = D.$$

При этом уравнение (2.11) перейдет в следующее:

$$\nabla^4 F - REh \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (2.13)$$

Используя соотношения упругости и (2.12), из (2.10) получим

$$\mu_1 \nabla^4 \xi = \nabla^2 \xi + (\nabla^2 + 1) \frac{w}{R}; \quad \mu_1 = \frac{D_1}{K_1 R^2}. \quad (2.14)$$

Два других уравнения относительно ξ, η получим из уравнений моментов (2.5), выразив их через ϕ, ψ, w с учетом (2.12), используя во второстепенных членах уравнения приближенное равенство (условие нерастяжимости кольца $\varepsilon_2 \approx 0$)

$$v \approx - \int w d\beta.$$

Затем, дифференцируя по α и β полученные выражения, складывая и вычитая одно из другого, найдем

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{2} \mu_1 \nabla^4 \eta &= \nabla^2 \eta - \frac{1}{R} \int \frac{\partial w}{\partial \alpha} d\beta; \\ \nabla^4 \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} &= -\frac{R^3 q}{D} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Сделаем оценку членов в уравнениях (2.14), (2.15)

$$\nabla^4 \xi \sim \nabla^2 w; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta} \sim \nabla^{-4} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}.$$

Следовательно, влияние функции ξ в уравнении (2.15) по сравнению с функцией η таково же, как соотношение операторов ∇^6 и $(\dots)_{\alpha\alpha}$. Ввиду того, что функция прогибов в цилиндрической оболочке является существенно возрастающей при дифференцировании по окружной координате, влиянием функции η в последнем уравнении (2.15) можно пренебречь. Исключая затем из полученных уравнений функции F и ξ , получим разрешающее уравнение относительно прогиба

$$\nabla^6 (\nabla^2 + 1)^2 w - (1-\nu) \nabla^4 (\nabla^2 + 1) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - 4b^4 (\mu_1 \nabla^2 - 1) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} \nabla^2 w = -\frac{R^4}{D} \nabla^6 (\mu_1 \nabla^2 - 1) q.$$

Как показано Морли [14] подчеркнутым членом в этом уравнении на основании вышеизложенного можно пренебречь. Поэтому окончательно получаем

$$\nabla^4 (\nabla^2 + 1)^2 w - 4b^4 (\mu_1 \nabla^2 - 1) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} = -\frac{R^4}{D} \nabla^4 (\mu_1 \nabla^2 - 1) q + f; \quad (2.16)$$

$$\nabla^2 f = 0; \quad 4b^4 = 12(1-\nu^2) \gamma^2.$$

Уравнение (2.16) при $\mu_1 = 0, f = 0$ переходит в уравнение Морли [14], при отбрасывании единицы в первом члене уравнения, которая существенна для длинных оболочек, — в уравнение Нагди [15].

По аналогии со случаем трансверсально-изотропного тела проведем такие же преобразования для ортотропной оболочки. Принимая во внимание вышеприведенные упрощения, получим

$$\begin{aligned} \nabla_2^* \left[\nabla_1^* + \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \right] (\nabla^2 + 1) w - 4b_1^4 (\mu_1 \nabla_K^4 - \nabla^2) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} = \\ = - \frac{R^4}{D_1} \nabla_2^* (\mu_1 \nabla_K^4 - \nabla^2) q, \quad (2.17) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} 4b_1^4 &= 12(1 - \nu_1 \nu_2) \theta \gamma^2; \quad \nabla_K^4 = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + (1 + K_0) \delta_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \theta K_0 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}; \\ \nabla_1^* &= \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \theta \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}; \quad \nabla_2^* = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2\lambda_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \theta \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}; \\ \nabla_1^4 &= \nabla_1^* + \theta \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \quad \nabla_2^4 = \nabla_2^* + \theta \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \quad K_0 = \frac{K_1}{K_2}; \quad \delta_1 = \nu_2 + \frac{2\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1}. \end{aligned}$$

Сделаем следующие преобразования на основе соображений, описанных при выводе уравнения (2.16)

$$\nabla_2^* \left[\nabla_1^* + \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \right] (\nabla^2 + 1) \approx \nabla^2 \nabla_1^4 \nabla_2^4; \quad \nabla_K^4 \approx \nabla^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \theta K_0 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right).$$

Тогда уравнение (2.17) примет окончательный вид

$$\begin{aligned} \nabla_1^4 \nabla_2^4 w - 4b_1^4 \left[\mu_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \theta K_0 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) - 1 \right] \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} = \\ = - \frac{R^4}{D_1} \nabla_2^* \left(\mu_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \theta K_0 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) - 1 \right) q + f; \quad (2.18) \\ \nabla^2 f = 0. \end{aligned}$$

Для проверки уравнения (2.18) были проведены вычисления прогибов свободно опертой по торцам ортотропной оболочки при действии нагрузки по малой площадке:

при $\alpha = 0; \alpha = \alpha_1 = L/R; w = 0; M_1 = 0; \psi = 0; v = 0; T_1 = 0$.

Прогибы под действием сосредоточенной силы имеют логарифмическую особенность, поэтому приходится распределить равномерно эту нагрузку q по площади $2a \times 2\beta_1 R$ с центром $\xi_0 = \frac{x_0}{R}$.

Решение для прогиба в этом случае имеет вид

$$w^*(\alpha, \beta, \xi_0) = - \frac{12(1 - \nu_1 \nu_2) \gamma^3}{\pi \alpha_1} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[w_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2w_{mn} \frac{\sin(n\beta_1)}{n\beta_1} \cos(n\beta) \right] \times \right. \\ \left. \times \sin(\lambda_m \xi_0) \frac{\sin(\lambda_m a_1)}{\lambda_m a_1} \sin(\lambda_m \alpha) \right\}, \quad (2.19)$$

где

$$w^* = \frac{w E_1}{4qa\beta_1}; \quad a_1 = \frac{a}{R}; \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{\alpha_1};$$

$$\begin{aligned} w_{mn} = & (\lambda_m^4 + 2\lambda_1 \lambda_m^2 n^2 + \theta n^4) [\mu_1 (\theta K_0 n^2 + \lambda_m^2) + 1] \operatorname{div} \\ & \operatorname{div} \{ [\lambda_m^4 + 2\delta_1 \lambda_m^2 n^2 + \theta n^2 (n^2 - 1)] [\lambda_m^4 + 2\lambda_1 \lambda_m^2 n^2 + \theta n^2 (n^2 - 1)] + \\ & + 4b_1^4 [\mu_1 (\lambda_m^2 + \theta K_0 n^2) + 1] \lambda_m^4 \}, \end{aligned}$$

Таблица 1. Свойства однонаправленных композитов на основе эпоксидной смолы (волокна занимают порядка 60% всего объема композита) [18]

	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	ν_1	ν_2	G , ГПа	$N_{\text{матер}}$
Углепластик (волокна AS)	140	8,96	0,3	0,0192	7,1	1
Углепластик (волокна IM6)	200	11,1	0,32	0,01776	8,35	2
Органопластик (волокна кевлар-49)	76	5,5	0,33	0,023882	2,33	3

Таблица 2. Сравнение прогибов для цилиндрической оболочки в условиях различного преобладания жесткости армирования волокон

$N_{\text{матер}}$	$1 (\delta = 0,064)$	$1 (\delta = 15,625)$	$2 (\delta = 0,056)$	$2 (\delta = 18)$	$3 (\delta = 0,07)$	$3 (\delta = 13,8)$
$ w_{0M} $	86095	2652,7	98013	2497,4	95346	3307
$ w_0 $	86045	2651,8	97932	2496,1	95141	3303

для случая трансверсально-изотропной оболочки

$$w_{mn} = \frac{(\lambda_m^2 + n^2)^2 [\mu_1 (\lambda_m^2 + n^2) + 1]}{\left[(\lambda_m^2 + n^2)^2 - n^2 \right]^2 + 4b_1^4 [\mu_1 (\lambda_m^2 + n^2) + 1] \lambda_m^4}.$$

При отсутствии поперечных сдвигов $\mu_1 = 0$ и действии сосредоточенной нагрузки P из (2.19) следует:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \frac{\sin(n\beta_1)}{n\beta_1} &= 1; \quad \lim_{a_1 \rightarrow 0} \frac{\sin(\lambda_m a_1)}{\lambda_m a_1} = 1; \\ f &= 0 \text{ и } \xi_0 = \frac{\alpha_1}{2}; \quad \alpha = \frac{\alpha_1}{2}; \quad \beta = 0; \\ w_{0M} = \frac{wE_1R}{P} &= -\frac{12(1 - \nu_1\nu_2)\gamma^3}{\pi\alpha_1} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_0^n) \bar{w}_{mn}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$\bar{w}_{mn} = \frac{\sin^2(m\pi/2) (\lambda_m^4 + 2\lambda_1\lambda_m^2 n^2 + \theta n^4)}{[\lambda_m^4 + 2\delta_1\lambda_m^2 n^2 + \theta n^2 (n^2 - 1)] [\lambda_m^4 + 2\lambda_1\lambda_m^2 n^2 + \theta n^2 (n^2 - 1)] + 4b_1^4 \lambda_m^4}.$$

Проведем вычисления ряда (2.20) для однонаправленного композита на основе табл. 1 при следующей геометрии $R/h = \gamma = 100$, $\xi_1 = L/R = 1$, $m_{\max} = n_{\max} = 191$, что дает при $\delta < 1$ три верных знака, а при $\delta > 1$ четыре верных знака (операции с успехом реализуемые, например, в пакете символьной математики Wolfram Mathematica [16, 17]).

Результаты вычислений материалов из табл. 1 представлены в табл. 2. Эти результаты мало отличаются от результатов, полученных с помощью комплексных уравнений, что подтверждает их пригодность для инженерных расчетов в силу их компактности.

Уравнения (2.18), (2.19) представляют удобство для определения напряженно-деформированного состояния оболочки, в которой можно не учитывать влияние торцов. Достаточно найти частное решение (2.19), удовлетворяющее уравнению (2.18) и условию затухания прогиба по длине оболочки, причем можно положить $f = 0$. Тогда порядок уравнений будет равен восьми, как и в классической теории оболочек.

Форма уравнений (2.18) позволяет делать вычисления для любых значений μ_1 , в том числе и для значения $\mu_1 = 0$. Исходная система уравнений (2.5) не позволяла этого сделать в виду предельного перехода $K_j \rightarrow \infty$, $\gamma_{j3} \rightarrow 0$, ($j = 1, 2$).

Вычисления по формуле (2.19) показывают, что влияние поперечных сдвигов на увеличение прогибов существенны для более толстых (средней толщины) оболочек $\gamma \leq 50$ и $\mu_1 \geq 10$. Причем значения эти превосходят максимальные прогибы при $\mu_1 = 0$ в несколько раз. Например,

для $\gamma = 40$, $\mu_1 = 40$ это увеличение составляет 1,5, а при $\gamma = 20$, $\mu_1 = 40$ уже 2,1, при $\gamma = 20$, $\mu_1 = 60$ отношение равно 2,7, при $\gamma = 10$, $\mu_1 = 40$ отношение равно 3,9.

В то же время, для тонких оболочек $\gamma \geq 100$ влияние поперечных сдвигов незначительно.

3. Изгиб пологой ортотропной оболочки поперечной нагрузкой

Пусть пологая ортотропная оболочка изгибаются произвольной поперечной нагрузкой q_3 . Решение задачи о жесткости такой оболочки сводится к отысканию функции \tilde{F} из уравнения вида [11, 19, 20]

$$\frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \xi^4} + 2\lambda k_*^2 \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \delta k_*^4 \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \eta^4} + \frac{ia^2}{c} \left(k_2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} + k_1 k_*^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \eta^2} \right) + 2\varepsilon k_*^2 \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = -i \frac{a^4 q_3}{c}. \quad (3.1)$$

Здесь введены безразмерные координаты

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b}; \quad k_* = \frac{a}{b};$$

a, b — размеры оболочки в плане.

Зная \tilde{F} , можно найти комплексные усилия

$$\tilde{T}_1 = -\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \eta^2}; \quad \tilde{T}_2 = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2}; \quad \tilde{S} = \frac{1}{ab} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi \partial \eta},$$

причем

$$w = -\frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \tilde{F}; \quad T_1 = -\frac{1}{b^2} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \eta^2}; \quad T_2 = -\frac{1}{a^2} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2}; \quad S = \frac{1}{ab} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Один из недостатков комплексного представления уравнения теории оболочек — это трудность формулировки граничных условий в комплексном виде. Для некоторых видов граничных условий это удается сделать.

При расчете оболочек часто приходится иметь дело с задачей сопряжения двух оболочек. Если границей сопряжения является линия $\xi = \operatorname{const}$, то на этой линии должны выполняться условия непрерывности восьми величин: u, v, w , угла поворота $\partial w / \partial \xi$, усилий S, T_1 , момента M_1 и обобщенной перерезывающей (поперечной) силы. Это требование может быть заменено четырьмя условиями для комплексных величин, требуя непрерывности $\tilde{F}, \partial \tilde{F} / \partial \xi, \partial^2 \tilde{F} / \partial \xi^2, \partial^3 \tilde{F} / \partial \xi^3$.

В случае свободного опирания точек контура оболочки достаточно выполнить на краю $\xi = \operatorname{const}$ условия

$$\tilde{F} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (3.2)$$

которые дают

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \quad T_1 = T_2 = 0; \quad S \neq 0.$$

Условия при $\xi = \operatorname{const}$

$$\tilde{F} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi} = 0 \quad (3.3)$$

позволяют удовлетворить скользящему защемлению

$$w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = T_1 = S = 0; \quad u \neq 0, \quad v \neq 0.$$

Предполагая края оболочки свободно опертыми, построим решение уравнения (3.1) в виде двойного тригонометрического ряда [21]

$$\tilde{F} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta). \quad (3.4)$$

Нагрузка представляется разложением

$$q_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta),$$

где

$$q_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 q_3 \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta) d\xi d\eta.$$

Если на оболочку в точке (ξ_0, η_0) действует сила P , то

$$q_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin(m\pi\xi_0) \sin(n\pi\eta_0).$$

Для равномерной нагрузки эта величина равна

$$q_{mn} = \frac{16q}{mn\pi^2} (m, n = 1, 3, 5, \dots).$$

Коэффициенты ряда (3.4) имеют вид

$$F_{mn} = \frac{c_{mn}}{\Delta_{mn}} \left[a_{mn}^{(2)} - i \left(a_{mn}^{(1)} + b_{mn} \right) \right], \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} a_{mn}^{(1)} &= \pi^4 (m^4 + 2\lambda k_*^2 m^2 n^2 + \delta k_*^4 n^4); \quad a_{mn}^{(2)} = \frac{\pi^2 a^2}{c} (k_2 m^2 + k_1 k_*^2 n^2); \\ b_{mn} &= 2\varepsilon k_*^2 m^2 n^2 \pi^4; \quad \Delta_{mn} = \left(a_{mn}^{(1)} \right)^2 + \left(a_{mn}^{(2)} \right)^2 - b_{mn}^2; \quad c_{mn} = \frac{a^4 q_{mn}}{c}. \end{aligned}$$

Для гладкой нагрузки ряд (3.4) сходится довольно быстро и для практических расчетов достаточно взять несколько членов ряда. Иначе ведет себя решение в случае сосредоточенной нагрузки: сходимость ряда оказывается настолько медленной, что m и n достигают сотен членов. При определении моментов ряды придется дважды дифференцировать, что еще больше ухудшает его сходимость. Причем в точке приложения нагрузки ряд для моментов будет расходящимся. Такое несоответствие с напряжениями в реальной конструкции, вытекающее из-за абстрагирования нагрузки в виде точечной силы, можно устранить распределением силы по некоторой малой площадке, что и будет соответствовать реальному нагружению.

Наличие в уравнении (3.1) комплексно-сопряженной функции затрудняет решение задачи при краевых условиях, отличных от свободного опирания. Желательно выяснить значимость члена с ε . Решим предыдущую задачу другим методом. Применим метод последовательных приближений, считая в первом приближении $\varepsilon = 0$, уточняя правую часть (3.1) в последующих приближениях.

В первом приближении получаем

$$F_{mn}^{(1)} = -\frac{ic_{mn}}{a_{mn}^{(1)} - ia_{mn}^{(2)}};$$

во втором приближении:

$$F_{mn}^{(2)} = -\frac{ic_{mn} (1 + g_{mn})}{a_{mn}^{(1)} - ia_{mn}^{(2)}}, \text{ где } g_{mn} = \frac{b_{mn}}{a_{mn}^{(1)} + ia_{mn}^{(2)}};$$

в третьем приближении будем иметь

$$F_{mn}^{(3)} = F_{mn}^{(1)} (1 + g_{mn} + g_{mn} \bar{g}_{mn}).$$

Увеличивая число приближений до бесконечности, можно составить следующий бесконечный ряд

$$F_{mn} = F_{mn}^{(2)} \sum_{s=0}^{\infty} (g_{mn} \bar{g}_{mn})^s.$$

Замечая, что

$$g_{mn} \bar{g}_{mn} = \frac{4\varepsilon^2 k_*^4 m^4 n^4 \pi^8}{\left(a_{mn}^{(1)}\right)^2 + \left(a_{mn}^{(2)}\right)^2} < \left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)^2 < 1,$$

ряд дает сумму

$$F_{mn} = \frac{F_{mn}^{(2)}}{1 - g_{mn} \bar{g}_{mn}} = -\frac{ic_{mn}}{\Delta_{mn}} \left(a_{mn}^{(1)} + b_{mn} + ia_{mn}^{(2)} \right),$$

что не отличается от (3.5).

Вычисления максимального прогиба под равномерной нагрузкой (операции с успехом реализуемые, например, в пакете символьной математики Wolfram Mathematica [16, 17]), действующей на квадратную в плане пологую сферическую оболочку, изготовленную из углепластика с волокнами AS дают во втором приближении погрешность 2 %, в третьем приближении всего 0,5 %.

Заключение

В статье было проведено исследование ряда упрощающих методик по переходу от системы дифференциальных уравнений в частных производных к одному дифференциальному уравнению в частных производных относительно прогиба для трансверсально-изотропных и ортотропных оболочек.

Отработка предложенной методики была реализована при вычислении прогибов свободно опертой по торцам ортотропной оболочки в условиях различного преобладания жесткости армирования волокон при действии нагрузки по малой площадке. Полученные результаты мало отличаются от результатов, полученных с помощью комплексных уравнений, что подтверждает их пригодность для инженерных расчетов в силу их компактности. Также приводится методика решения задачи изгиба пологой ортотропной оболочки под действием поперечной нагрузки с помощью комплексного представления уравнения теории оболочек. Вычисления максимального прогиба под равномерной нагрузкой, действующей на квадратную в плане пологую ортотропную сферическую оболочку, изготовленную из углепластика с волокнами AS, уже в третьем приближении дают погрешность 0,5 %.

Литература [References]

1. Артюхин, Ю.П., Грибов, А.П., *Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов*. Казань, Фэн, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Gribov, A.P., *Reshenie zadach nelineynogo deformirovaniya plastin i pologikh obolochek metodom granichnykh elementov = Solving problems of nonlinear deformation of plates and flat shells by the boundary element method*. Kazan, Feng, 2002. (in Russian)]
2. Великанов, П.Г., Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропной пластины, лежащей на сложном двухпараметрическом упругом основании. *Известия Саратовского университета. Серия «Математика. Механика. Информатика»*, 2008, т. 8, вып. 1, с. 36–42. [Velikanov, P.G., The method of boundary integral equations for solving bending problems of an isotropic plate lying on a complex two-parameter elastic base. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya “Matematika. Mekhanika. Informatika” = Proc. of the Saratov University. The series “Mathematics. Mechanics. Informatics”*, 2008, vol. 8, iss. 1, pp. 36–42. (in Russian)]
3. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Куканов, Н.И., Решение задачи изгиба анизотропной пластины методом граничных элементов. В сб. *Материалы Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы механики сплошных сред – 2020»*, с. 105–111. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Kukanov, N.I., The solution of an anisotropic plate bending problem by the boundary element method. *Materialy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii “Aktual’nye problemy mekhaniki sploshnykh sred – 2020”*

- = Proc. of the All-Russian Scientific Conference “Actual Problems of Continuum Mechanics - 2020”, pp. 105–111. (in Russian)]
4. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М. Нелинейное деформирование цилиндрической панели ступенчато-переменной жесткости на упругом основании методом граничных элементов. В сб. *Материалы Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы механики сплошных сред – 2020»*, с. 111–115. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., Nonlinear deformation of a cylindrical panel of step-variable stiffness on an elastic base by the method of boundary elements. *Materialy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii “Aktual’nye problemy mekhaniki sploshnykh sred – 2020”* = Proc. of the All-Russian Scientific Conference “Actual Problems of Continuum Mechanics - 2020”, pp. 111–115. (in Russian)]
 5. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Использование непрямого метода граничных элементов для расчета изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака-Власова. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 33–47. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., Using the indirect boundary element method for calculating isotropic plates on an elastic base of Winkler and Pasternak-Vlasov. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* = Bull. of Samara University. Natural Science Series, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 33–47. (in Russian)]
 6. Великанов, П.Г., Халитова, Д.М., Решение задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек методом граничных элементов. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 48–61. [Velikanov, P.G., Khalitova, D.M., Solving problems of nonlinear deformation of anisotropic plates and shells by the method of boundary elements. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* = Bull. of Samara University. Natural Science Series, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 48–61. (in Russian)]
 7. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть I. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022, т. 28, № 1–2, с. 46–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part I. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* = Bull. of Samara University. Natural Science Series, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 46–54. (in Russian)]
 8. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть II. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022, т. 28, № 3–4, с. 40–52. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part II. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* = Bull. of Samara University. Natural Science Series, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 40–52. (in Russian)]
 9. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивости и колебаний ортотропных пластин и оболочек. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 3, с. 47–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Mathematical analogies for solving problems of strength, stability and vibrations of orthotropic plates and shells. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 47–54. (in Russian)] EDN: JYHGZJI DOI: 10.31429/vestnik-19-3-47-54
 10. Velikanov, P., Solution of contact problems of anisotropic plates bending on an elastic base using the compensating loads method. *E3S Web of Conferences*, 2023, vol. 402 (International Scientific Siberian Transport Forum – TransSiberia 2023), art. 11010. DOI: 10.1051/e3sconf/202340211010
 11. Амбарцумян, С.А., Теория анизотропных оболочек. Москва, Физматгиз, 1961. [Ambartsumyan, S.A., *Teoriya anizotropnykh obolochek* = Theory of anisotropic shells. Moscow, Fizmatgiz, 1961. (in Russian)]
 12. Артюхин, Ю.П., Саченков, А.В., К расчету ортотропных пластин и оболочек. В сб. *Исследования по теории пластин и оболочек*, вып. 5. Казань, Изд-во КГУ, 1967, с. 300–310. [Artyukhin, Yu.P., Savchenkov, A.V., To the calculation of orthotropic plates and shells. In: *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek* = Research on the theory of plates and shells, iss. 5, Kazan, Publ. of KSU, 1967, pp. 300–310. (in Russian)]
 13. Саченков, А.В., О сведении расчета ортотропных пластин и оболочек. В сб. *Исследования по теории пластин и оболочек*, вып. 11. Казань, Изд-во КГУ, 1975, с. 180–185. [Sachenkov, A.V., On the introduction of calculation of orthotropic plates and shells. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek* = Research on the theory of plates and shells, iss. 11. Kazan, Publ. of KSU, 1975, pp. 180–185. (in Russian)]
 14. Morley, L., An improvement on Donnell’s approximation for thin-walled circular cylinders. *Quart. J.*

- Mech. Appl. Math.*, 1959, vol. 12, no. 1, p. 263. DOI: [10.1093/qjmam/12.1.89](https://doi.org/10.1093/qjmam/12.1.89)
- 15. Cooper, R.M., Cylindrical shell under line load. *J. Appl. Mech.*, 1957, vol. 24, № 4, p. 553–558. DOI: [10.1115/1.4011600](https://doi.org/10.1115/1.4011600)
 - 16. Артюхин, Ю.П., Гурьянов, Н.Г., Котляр, Л.М., *Система Математика 4.0 и ее приложения в механике*. Казань, Казанское математическое общество, Изд-во КамПИ, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Guryanov, N.G., Kotlyar, L.M., *Sistema Matematika 4.0 i ee prilozheniya v mekhanike = The Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics*. Kazan, Kazan Mathematical Society, Publ, of CamPI, 2002. (in Russian)]
 - 17. Великанов, П.Г., *Основы работы в системе Mathematica*. Казань, Издательство Казанского гос. техн. ун-та, 2010. [Velikanov, P.G., *Osnovy raboty v sisteme Mathematica = Fundamentals of work in the Mathematics system*. Kazan, Publ. of Kazan State Technical University, 2010. (in Russian)]
 - 18. Мэттьюз, Ф., Роллингс, Р., *Композитные материалы. Механика и технология*. Москва, Техносфера, 2004. [Matthews, F., Rawlings, R., *Kompozitnye materialy. Mekhanika i tekhnologiya = Composite materials. Mechanics and technology*. Moscow, Technosphere, 2004. (in Russian)]
 - 19. Артюхин, Ю.П., Расчет однослойных и многослойных ортотропных оболочек на локальные нагрузки. В сб. *Исследования по теории пластин и оболочек*, вып. 4. Казань, Издательство КГУ, 1966, с. 91–110. [Artyukhin, Yu.P., Calculation of single-layer and multilayer orthotropic shells for local loads. In: *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek = Research on the theory of plates and shells*, vol. 4. Kazan, Publ. of KSU, 1966. pp. 91–110. (in Russian)]
 - 20. Stanescu, K. Vissarion, V., A static-geometric analogy for thin elastic shells with orthotropy of the material and its application to the calculation of flat shells and cylindrical shells of circular cross-section. *Revue de mécanique appliquée (RPR)*, 1958, vol. 3, no. 1.
 - 21. Саченков, А.А., *Цикл лекций по теории пластин и оболочек*. Казань, Издательство Казанского университета, 2014. [Sachenkov, A.A., *Tsikl lektsiy po teorii plastin i obolochek = Lecture series on the theory of plates and shells*. Kazan, Kazan University Press, 2014. (in Russian)]

УДК 539.3

EDN: IBBWFD DOI: 10.31429/vestnik-21-2-35-45

Исследование задачи термоупругости для трансверсально-изотропного тела вращения

Д. А. Иваничев  

Липецкий государственный технический университет, ул. Интернациональная, 5, Липецк, 398600, Россия
 ☎ Иваничев Дмитрий Алексеевич; ORCID 0000-0002-7736-9311; SPIN 5839-4063; e-mail: Lsivdmal@mail.ru

Аннотация. В работе представлена математическая модель построения термоупругих полей для анизотропного цилиндрического тела конечной длины. Цилиндр находится в равновесии под действием установившегося поля температур, при отсутствии дополнительных источников тепла. Материал цилиндра обладает прямолинейной трансверсальной изотропией. Модель строится на основе энергетического метода граничных состояний. Базис пространства внутренних состояний в составе метода граничных состояний формируется согласно общему представлению, выражающему пространственное напряженно-деформированное состояние через совокупность плоских вспомогательных состояний. В качестве таких состояний выступают плоские решения термоупругой задачи. После формирования базиса внутренних состояний проводится его ортогонализация, искомые характеристики термоупругого поля раскладываются в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса, где в качестве коэффициентов выступают квадратуры. Приведено решение термоупругой задачи для кругового в плане цилиндра из гипотетического трансверсально-изотропного материала. Представлены явные и косвенные признаки сходимости решения задачи и результат представлен в графическом виде.

Ключевые слова: термоупругость, метод граничных состояний, трансверсально-изотропные материалы, пространственная задача.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Иваничев Д. А. Исследование задачи термоупругости для трансверсально-изотропного тела вращения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 35–45. EDN: IBBWFD. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-35-45

Поступила 13 мая 2024 г. После доработки 30 мая 2024 г. Принято 5 июня 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Study of the Thermoelasticity Problem for a Transversally Isotropic Body of Rotation

D. A. Ivanychev 

Lipetsk State Technical University, Internationalnaya st., 5, Lipetsk, 398600, Russia
 ☎ Dmitry A. Ivanychev; ORCID 0000-0002-7736-9311; e-mail: Lsivdmal@mail.ru

Abstract. The paper presents a mathematical model for constructing thermoelastic fields for an anisotropic cylindrical body of finite length. The cylinder is in equilibrium under the influence of a steady temperature field, in the absence of additional heat sources. The material of the cylinder has rectilinear transversal isotropy. The model is built on the basis of the energy method of boundary states. The basis of the space of internal states as part of the boundary states method is formed according to the general representation, expressing the spatial stress-strain state through a set of plane auxiliary states. Such states are plane solutions of the thermoelastic problem. After forming the basis of internal states, it is orthogonalized, and the desired characteristics of the thermoelastic field are expanded into a Fourier series according to the elements of the orthonormal basis, where quadratures act as coefficients. A solution to the thermoelastic problem for a circular cylinder made of a hypothetical transversally isotropic material is presented. Explicit and indirect signs of convergence of the solution to the problem are presented and the result is presented in graphical form.

Keywords: thermoelasticity, boundary state method, transversally isotropic materials, spatial problem.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Ivanychev, D. A., Study of the thermoelasticity problem for a transversally isotropic body of rotation. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 35–45. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-35-45

Received 13 May 2024. Revised 30 May 2024. Accepted 5 June 2024. Published 28 June 2024.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Современное машиностроение с целью оптимизации формы деталей, возможности использования современных материалов, таких как композиты, полимерные материалы и др., предъявляет высокое требование к прочностным расчетам тел, изготовленных из этих материалов. Зачастую дополнительно эти тела пребывают в экстремальных температурных условиях, что вкупе со сложностью структуры (анизотропия упругих свойств) материала усложняет расчет их напряженно-деформированного состояния. Температурные поля в объектах машиностроения определяют характер распределения температурных напряжений и деформаций, которые при известных условиях могут вывести деталь из строя. Важность решения задачи о величине и характере распределения температурных напряжений в телах из усложненных по свойствам материалов очевидна.

Решению задач термоупругости для анизотропных тел, с той или иной симметрией упругих свойств, посвящено множество работ. Например, в работе [1] исследуется задачи термомеханики для неоднородных анизотропных сред. Предлагаемый подход решения задачи предполагает разбиения на подзадачи структурного и параметрического синтеза, каждая из которых решается разными методами. В работе [2] рассмотрена плоская стационарная задача Дирихле, когда на границе тела заданы перемещения и температура. Задача сводится к системе интегральных уравнений, и, если граница принадлежит классу Ляпунова, то система разрешима по Фредгольму. В работе [3] рассмотрена осесимметрическая задача по определению напряжений в полом цилиндрическом пулансоне при горячем деформировании заготовок. Построению матриц Грина трехмерной теории термоупругости посвящена работа [4]. Представлены интегральный и полиномиальный подходы формирования матриц Грина как часть гранично-элементного моделирования, а также подход на основе двойных рядов Фурье. Ряд работ посвящен исследованию задач термоупругости для слоистых анизотропных материалов, например, в работе [5] представлена неклассическая модель связанный задачи термоупругого деформирования слоистых анизотропных оболочек и пластин. В пространстве изображений по Лапласу строится пространственный функционал, который, с учетом допущений, удалось свести к двумерному и вывести из него корректные дифференциальные уравнения и связанные краевые условия. В работе [6] представлен метод отсчетных поверхностей для анализа стационарных задач термоупругости для слоистых анизотропных пластин, подвергающихся термической нагрузке. В работе [7] методом граничных элементов рассматривается трехмерная линейная математическая теория термоупругости. Выписаны граничные интегральные уравнения и гранично-элементная схема их решения. В работе [8] исследуется влияние скачкообразного изменения температуры на напряженное состояние многосвязной анизотропной бесконечной пластинки. Приближенные решения получены численными методами. В работе [9] рассмотрен термоупругий осесимметрический изгиб колышевых пластин, изготовленных из разносопротивляющихся ортотропных материалов, обладающих к тому же цилиндрической анизотропией. Приведена система сложных неоднородных уравнений и результаты их исследования с помощью метода конечных разностей.

В работе [10] представлено решение задачи по определению осесимметричного термоупругого поля для трансверсально-изотропного тела вращения средствами метода граничных состояний. Решение строилось на основе плоской задачи теории термоупругости. Приведено решение для ступенчатого кругового цилиндра, находящегося в установившемся поле температур, осесимметричном относительно оси вращения. А в работе [11] осесимметричная задача термоупругости решена в совокупности с задачей эластостатики и с задачей по определению упругого поля от действия массовых сил. Общее решение представляет собой суммы решений частных задач.

Целью настоящей работы является развитие аналитического метода определения напряженно-деформированного состояния, предложенного в работе [10], на класс неосесимметричных термоупругих задач для анизотропных тел вращения.

1. Постановка задачи

Рассматривается термоупругое равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения (рис. 1) и находящийся под действием неосесимметричного поля установившихся температур T , заданных по циклическому закону. Ось анизотропии трансверсально-изотропного тела совпадает с геометрической осью вращения z . Принята цилиндрическая система координат. Массовые силы отсутствуют. Поверхность тела свободна от усилий и ограничений кинематического характера. Область тела не имеет вырезов и пустот. Материал однороден.

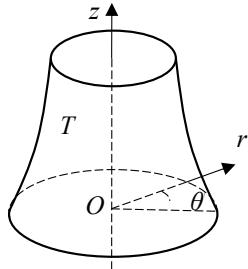


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения

Fig. 1. Transversally isotropic body of rotation

Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в теле, под действием заданного поля температур.

2. Дифференциальные и интегральные соотношения для анизотропной среды

Дифференциальные уравнение равновесия при отсутствии объемных сил [12]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Соотношения Коши [12]

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad (2.2)$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

Уравнения совместности деформаций [13]

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} &= 0; \\ -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\varepsilon_{z\theta})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta \partial z} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta} \right) = 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial r \partial z} = 0. \end{aligned}$$

Обобщенный закон Гука [12]

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z + \alpha_r T; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha_z T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z + \alpha_r T; \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Уравнение теплопроводности [12]

$$\frac{k_r}{k_z} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \tag{2.5}$$

Здесь: u, v, w — компоненты вектора перемещения вдоль осей r, θ, z соответственно; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{zr}, \gamma_{z\theta}$ — компоненты тензора деформаций; $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{zr}, \tau_{z\theta}$ — компоненты тензора напряжений; E_z и E_r — модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии; ν_z — коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль оси r при растяжении вдоль оси z ; ν_r — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости; G_r и G_z — модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярной к ней; k_z и k_r — коэффициенты теплопроводности в направлении оси симметрии и перпендикулярно к ней; α_z и α_r — коэффициентов температурного расширения в направлении осей z и r соответственно.

3. Метод решения

В работе [12] методом интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженно-деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела вращения и некоторыми вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных). Ось η перпендикулярна плоскости zy . В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_\eta^{pl}, u_z^{pl}\}$, возникающая в бесконечных цилиндрах, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости zy (направление η).

Переход к пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta + \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \\ v_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta - \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \\ w_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_z^{pl} \cos(n\beta) d\beta; \quad y = r \cos(\beta); \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta) + u_n \sin(n\theta)]; \\ v &= \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta) + v_n \cos(n\theta)]; \\ w &= \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta) + w_n \sin(n\theta)]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Деформации вычисляются через соотношения Коши (2.2), а напряжения через закон Гука (2.4).

Установившееся температурное поле $T^{pl}(z, y)$ плоского вспомогательного состояния с отсутствующими внутри источниками тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности [12]

$$\left(k_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_r \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T^{pl}(z, y) = 0,$$

где:

$$T^{pl} = \frac{g_0}{E_z} \operatorname{Re}[\phi'_0(\varsigma_0)], \quad \varsigma_0 = z/\gamma_0 + iy, \quad \gamma_0 = \sqrt{k_z/z_r},$$

$$g_0 = \frac{(E_z - \nu_z^2 E_r)(\gamma_1^2 - \gamma_0^2)(\gamma_2^2 - \gamma_0^2)}{\gamma_0^2(\alpha_z E_z + \alpha_r \nu_z E_r) - \alpha_r E_z(1 + \nu_r)}.$$

Перемещения и напряжения, соответствующие температурному полю [12]

$$\begin{aligned} u_z^{pl} &= \operatorname{Re}[p_0 \phi_0(\varsigma_0)]; \quad u_y^{pl} = \operatorname{Re}[iq_0 \phi_0(\varsigma_0)]; \quad u_\eta^{pl} = 0; \\ \sigma_z^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_0^2 \phi'_0(\varsigma_0)]; \quad \sigma_y^{pl} = \operatorname{Re}[\phi'_0(\varsigma_0)]; \\ \sigma_{zy}^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_0 \phi'_0(\varsigma_0)]; \quad \sigma_\eta^{pl} = \operatorname{Re}[(1 - \varepsilon_0) \phi'_0(\varsigma_0)], \end{aligned} \quad (3.3)$$

где p_0, q_0, ε_0 — постоянные, зависящие от упругих констант и коэффициентов температурного расширения α_z и α_r , $\phi_0(\varsigma_0)$ — некоторая аналитическая функция переменной ς_0 .

Переход от плоских температурных состояний к пространственным производится по зависимостям (3.1) и (3.2).

Определение упругого состояния анизотропного тела осуществляется средствами, схожими со средствами метода граничных состояний (МГС) [14]. В качестве базиса в пространстве внутренних состояний Ξ принимаются наборы

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad \xi_k = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}, T_i^{(k)}\}.$$

Базис пространства Ξ можно сконструировать, придавая функции ϕ_0 в (3.3) следующие значения:

$$\phi_0 = \varsigma_0^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ортонормирование базиса пространства Ξ осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [15], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимаются (например, для 1-го и 2-го состояния)

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V T_1 T_2 \, dV,$$

После восстановления поля температур, удовлетворяющего уравнению теплопроводности (2.5), определяются вектор перемещения, тензоры деформаций и напряжений, соответствующих

Таблица 1. Функции температуры в ортонормированных базисных элементах

Table 1. Temperature functions in orthonormal basis elements

	T
ξ_1	$0,564r \cos \theta$
ξ_2	$0,488rz \cos \theta$
ξ_3	$(-0,611 - 0,029r^3 + 0,473rz^2) \cos \theta$
ξ_4	$(-1,061rz - 0,086r^3z + 0,473rz^3) \cos \theta$

температурному состоянию. Каждому базисному вектору T_k соответствуют вектор перемещения и тензоры деформаций и напряжений, в совокупности образующие внутреннее состояние от действия поля температур ξ_k .

Решение представляет собой ряд Фурье

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \quad c_k = \int_V T_k T \, dV, \quad (3.4)$$

где T_k — температура в базисном элементе ξ_k , T — заданное поле температур.

В развернутом виде:

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}; \quad T = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T^{(k)}. \quad (3.5)$$

4. Решение задачи

Рассмотрим круговой в плане цилиндр из гипотетического трансверсально-изотропного материала, по свойствам схожего с алевролитом [16]. Задача решается в обезразмеренном виде; упругие и термомеханические характеристики материала, область тела и заданная функция температуры подлежат процедуре обезразмеривания [17]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи, упругие характеристики материала: $E_z = 6,21$; $E_r = 5,68$; $G_r = 2,29$; $G_z = 2,55$; $\nu_z = 0,22$; $\nu_r = 0,24$; область цилиндра $V = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -2 \leq z \leq 2\}$; коэффициенты теплопроводности по осям координат [18]: $k_z = 1,6$, $k_r = 6,5$; коэффициенты температурного расширения [19]: $\alpha_z = 6,7$, $\alpha_r = 8,64$. Заданное поле температур описывается функцией $T = rz^4 \cos \theta$.

При построении базиса внутренних состояний рекомендации, описанные в работах [20] и [21], пригодны и для построения такового в задаче термоупругости. Так как заданная температура зависит только от косинуса, то базис пространства внутренних состояний будем формировать из левых частей выражений (3.2)

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta)]; \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta)], \quad (4.1)$$

Причем, так как в заданном поле температур при угловой координате $n = 1$, то в выражениях (4.1) $a = b = 1$.

После построения базиса внутренних состояний по соотношениям (3.1) и (3.2), проводится ортонормирование его элементов, которое включает в себя исключение линейно зависимых элементов, а также элементов для которых $T = 0$. Функции температуры в ортонормированных базисных элементах представлены в табл. 1 (показано 4 элемента).

Для решения задачи потребовался базис внутренних состояний из 50 элементов. Коэффициенты Фурье (3.4) $c_k = \{5,6718; 0; 7,2467; 0; 2,1447; 0, -0,0778; 0; -0,11246; 0; -0,0871 \dots\}$. Решение формируется рядами (3.5).

Хотя и косвенно, но исследовать полученные ряды на сходимость возможно, используя «насыщение» (рис. 2) суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя).

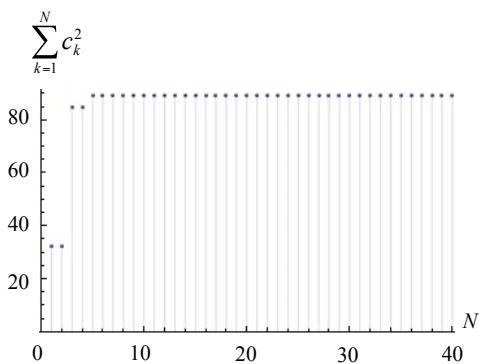


Рис. 2. Сумма Бесселя

Fig. 2. Bessel sum

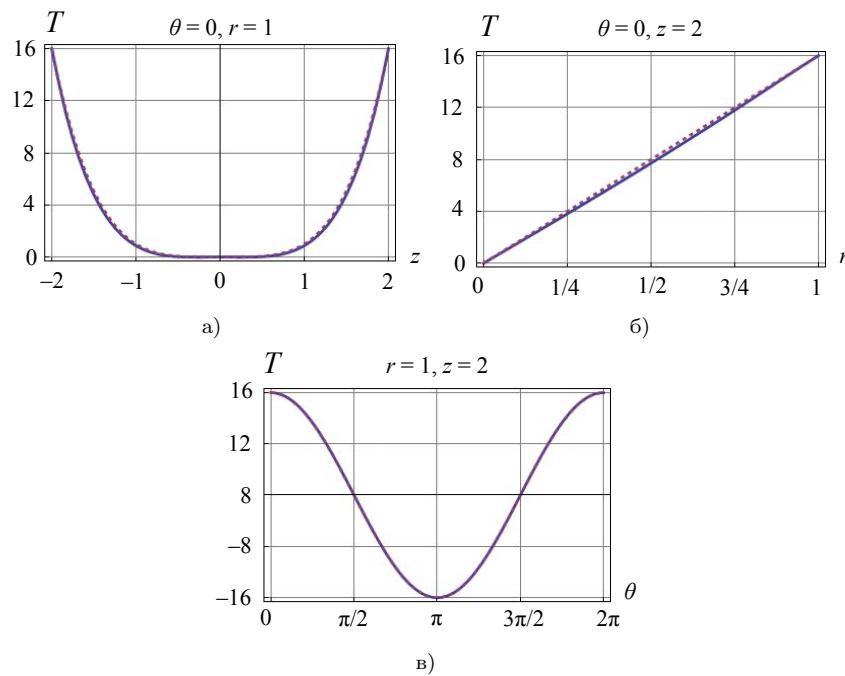


Рис. 3. Верификация решения

Fig. 3. Verification of solution

Также оценка точности осуществляется верификацией заданной функции температуры с полученной в результате решения. На рис. 3 приведено сравнение функций температур на границе тела. Заданная функция — штриховая линия; восстановленная — сплошная линия.

Анализ полученного решения показал, что максимальная относительная погрешность составила 3,6 % (средний график, координаты точки: $r = 0,5, \theta = 0, z = 2$). Точность решения задачи повышается при увеличении числа используемых элементов базиса внутренних состояний.

Компоненты термоупругого поля показаны на рис. 4 в виде изолиний. В силу симметрии компонент напряженно-деформированного состояния (НДС) относительно плоскости $z = 0$, показано меридианное сечение с $\theta = 0$ и $0 \leq z \leq 2$. Значения на графике указаны в масштабе с масштабным коэффициентом κ , т.е истинное значение показанной характеристики НДС равно значению на графике, умноженному на κ . Все характеристики показаны для меридианного сечения с угловой координатой $\theta = 0$.

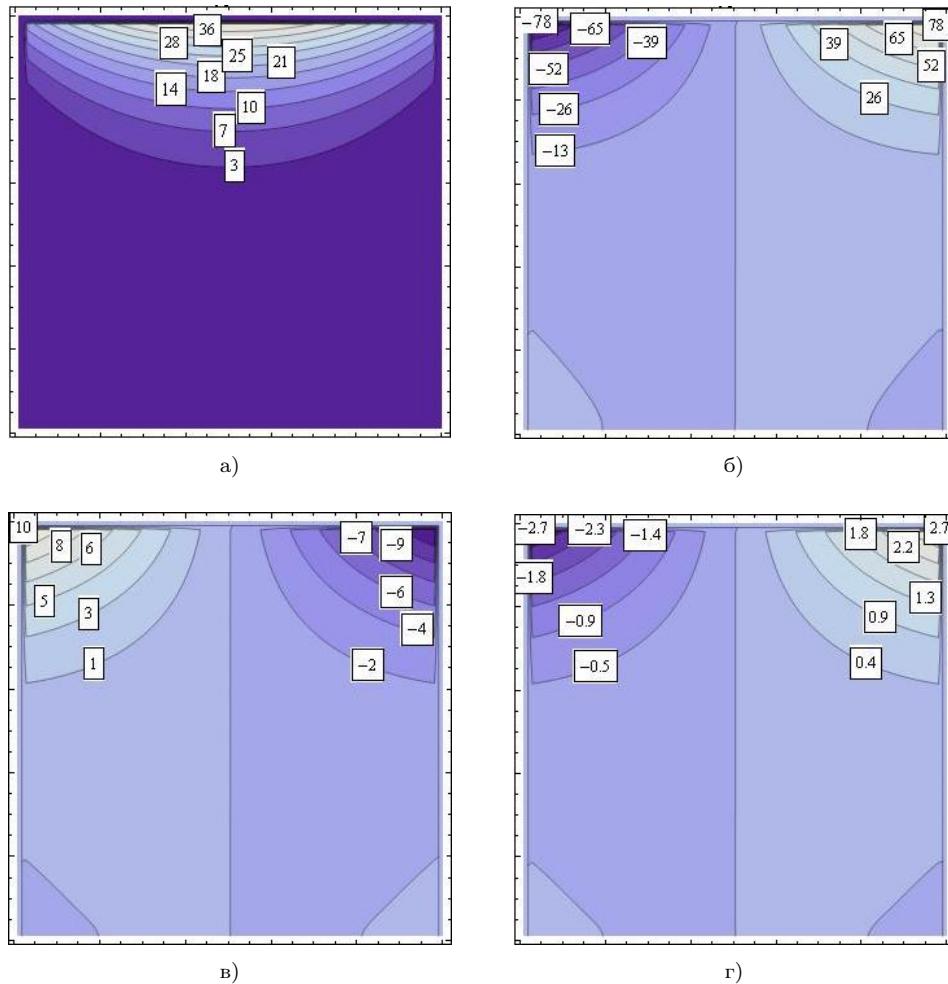


Рис. 4. Изолинии: а) перемещение u , $\kappa = 1$, б) перемещение w , $\kappa = 1$, в) напряжение σ_{rr} , $\kappa = 10^2$, г) напряжение σ_{zz} , $\kappa = 10^2$

Fig. 4. Isolines: a) displacement u , $\kappa = 1$, b) displacement w , $\kappa = 1$, c) stress σ_{rr} , $\kappa = 10^2$, d) stress σ_{zz} , $\kappa = 10^2$

Компоненты упругого состояния v , $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ зависят от $\sin \theta$, поэтому их изолинии представим в сечении с $\theta = \pi/2$ (рис. 5). На рис. 5г представлен контур деформированного состояния тела.

Полученные компоненты термоупругого поля строго удовлетворяют соотношениям (2.1)–(2.5).

Выводы

Таким образом, в работе сформулирован подход решения задачи по определению напряженно-деформированного состояния анизотропного тела, вызванного действием поля температур, заданных по циклическому закону. Компоненты упругого поля зависят от всех трех координат и носят неосесимметричный характер.

Однако предложенная методика не является общей для любого класса рассматриваемых областей (односвязных и многосвязных) и вида заданной функции, описывающей температурное поле внутри тела; если эту функцию возможно разложить на том или ином промежутке в тригонометрический ряд по косинусам или синусам, то, не исключая принцип независимости действия сил, данная методика вполне применима.

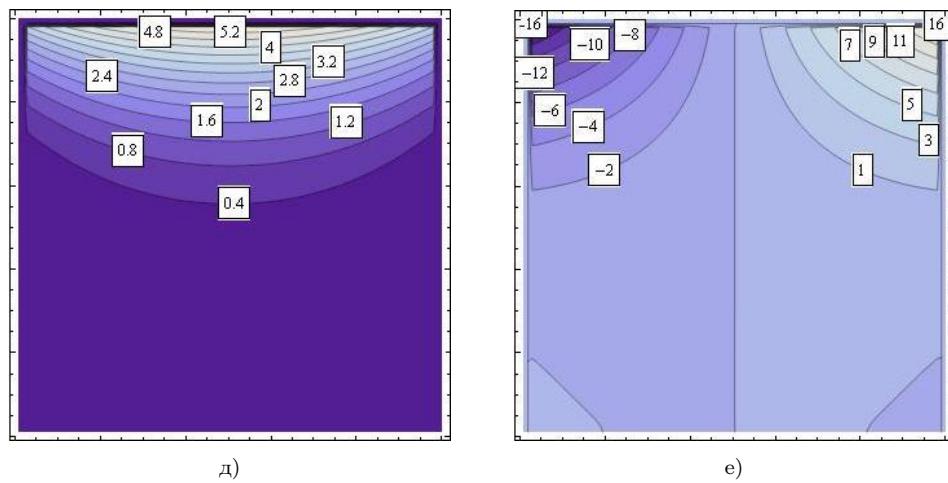


Рис. 4. Изолинии: д) напряжение τ_{rz} , $\kappa = 10^2$, е) температура T , $\kappa = 1$

Fig. 4. Isolines: d) stress τ_{rz} , $\kappa = 10^2$, e) temperature T , $\kappa = 1$

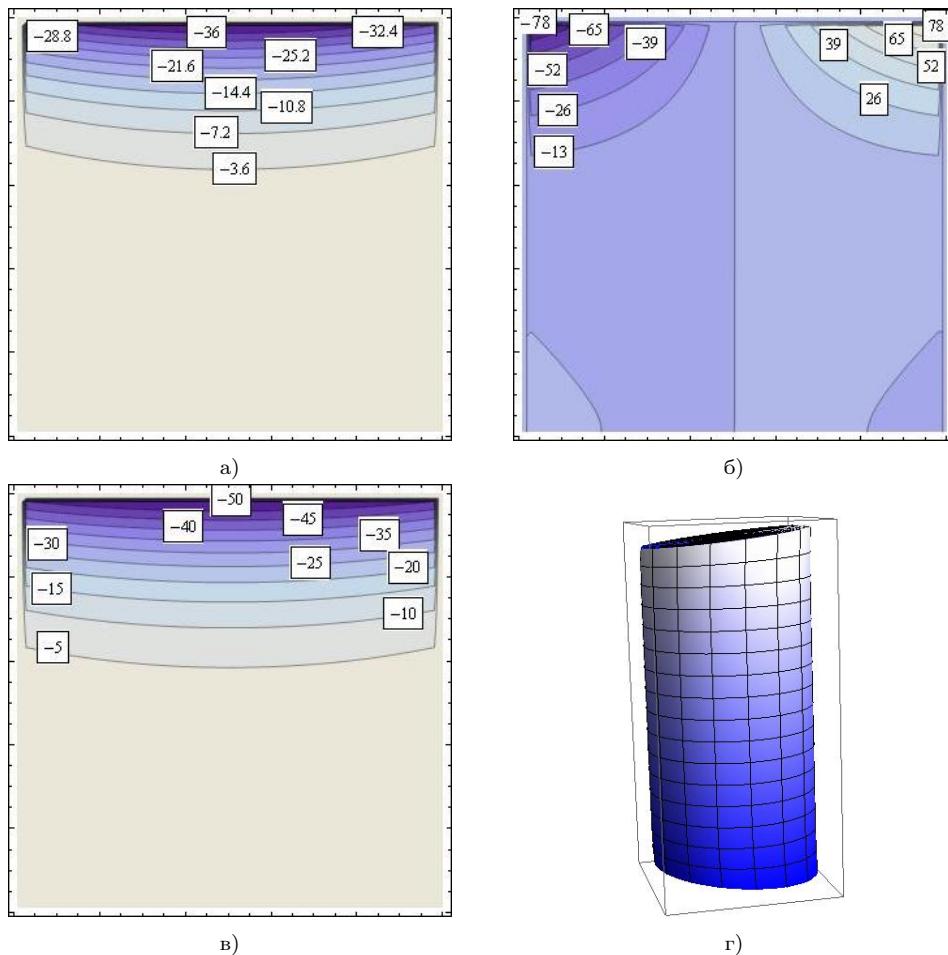


Рис. 5. Изолинии: а) перемещение v , $\kappa = 1$, б) напряжение $\sigma_{r\theta}$, $\kappa = 1$, в) напряжение $\sigma_{z\theta}$, $\kappa = 10^2$, г) контур деформированного состояния тела

Fig. 5. Isolines: a) displacement v , $\kappa = 1$, b) stress $\sigma_{r\theta}$, $\kappa = 1$, c) stress $\sigma_{z\theta}$, $\kappa = 10^2$, g) contour of the deformed state of the body

Полученное решение имеет аналитический вид, что позволяет легко проводить анализ полученных характеристик напряженно-деформированного состояния деталей, применяемых в машиностроении.

Литература [References]

1. Ломазов, В.А., Ломазова, В.И., Построение математической модели при решении задач термоупругости. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2011, № 4(4), с. 1582–1584. [Lomazov, V.A., Lomazova V.I., Construction of a mathematical model for solving problems of thermoelasticity. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo = Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4(4), pp. 1582–1584. (in Russian)]
2. Богдан, Ю.А., Задача Дирихле в двумерной стационарной анизотропной термоупругости. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*, 2010, № 5(21), с. 64–71. [Bogdan, Yu.A., Dirichlet problem in two-dimensional stationary anisotropic thermoelasticity. *Vestnik samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskiye nauki = Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2010, no. 5(21), pp. 64–71. (in Russian)]
3. Фатеев, В.И., Термоупругие напряжения в полом осесимметричном водоохлаждаемом пуансоне горячего деформирования. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*, 2009, № 1-1, с. 98–104. [Fateev, V.I., Thermoelastic stresses in a hollow axisymmetric water-cooled punch of hot deformation]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki = Izvestiya Tula State University*, 2009, no. 1-1, pp. 98–104. (in Russian)]
4. Пазин, В.П., Сравнительный анализ подходов к построению матрицы Грина трехмерной теории термоупругости. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2014, № 4(1), с. 250–253. [Pazin, V.P., Comparative analysis of approaches to constructing the Green's matrix of the three-dimensional theory of thermoelasticity. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo = Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2014, no. 4(1), pp. 250–253. (in Russian)]
5. Андреев, А.Н., Математическая модель термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин. *Известия Алтайского государственного университета*, 2014, вып. 1, № 1(81), с. 19–21. [Andreyev, A.N., Mathematical model of thermoelastic deformation of layered composite shells and plates. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta = Izvestiya of Altai State University*, 2014, iss. 1, no. 1(81), pp. 19–21. (in Russian)]
6. Kulikov, G.M., Mamontov, A.A., Three-dimensional thermoelastic analysis of laminated anisotropic plates. *Вестник ТГТУ*, 2013, т. 19, № 4, с. 853–863. [Kulikov, G.M., Mamontov, A.A., Three-dimensional thermoelastic analysis of laminated anisotropic plates. *Vestnik TGTU = Transactions of the TSTU*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 853–863. (in Russian)]
7. Ратаушко, Я.Ю., Анализ термоупругой динамики трехмерных тел методом граничных элементов. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2011, № 4(4), с. 1736–1737. [Rataushko, Ya.Yu., Analysis of thermoelastic dynamics of three-dimensional bodies using the boundary element method. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo = Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4(4), pp. 1736–1737. (in Russian)]
8. Глушанков, Е.С., Приближенное решение задачи термоупругости для многосвязной анизотропной пластинки при скачках температуры на контурах. *Журнал теоретической и прикладной механики*, 2022, № 3(80), с. 3–13. [Glushankov, Ye.S., Approximate solution of the thermoelasticity problem for a multiply connected anisotropic plate with temperature jumps on the contours. *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mehaniki = Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, no. 3(80), pp. 3–13. (in Russian)] DOI: 10.24412/0136-4545-2022-3-5-13
9. Самсоненко, Г.И., Трешёв, А.А., Термоупругий изгиб колецевых пластин средней толщины из ортотропных разноопротивляющихся материалов. *Известия ТулГУ. Технические науки*, 2012, вып. 1, с. 238–244. [Samsonenko, G.I., Treshchov A.A., Thermoelastic bending of medium-thick annular plates made of orthotropic materials of different resistance. *Izvestiya Tula State University*, 2012, iss. 1, pp. 238–244. (in Russian)]
10. Иванычев, Д.А., Решение задач термоупругости для анизотропных тел вращения. *Труды МАИ*, 2019, № 106, с. 1–19. [Ivanychev, D.A., Solution of thermoelasticity problems for anisotropic bodies of rotation. *Trudy MAI*, 2019, no. 106, pp. 1–19. (in Russian)]
11. Ivanychev, D.A., Levina, E.Yu., Solution of thermoelasticity problems for solids of revolution with transversal isotropic feature and a body force. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1348,

- art. 012058. DOI: [10.1088/1742-6596/1348/1/012058](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012058)
12. Александров, А.Я., Соловьев, Ю.И., *Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного)*. Москва, Наука, 1978. [Aleksandrov, A.Ya., Solovev, Yu.I., *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funkciy kompleksnogo peremennogo)* = Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable). Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)]
 13. Лурье, А.И., *Пространственные задачи теории упругости*. Москва, Госиздат технико-теоретической литературы, 1955. [Lurye, A.I., *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* = Spatial problems of the theory of elasticity. Moscow, Gosizdat tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1955. (in Russian)]
 14. Пеньков, В.Б., Пеньков, В.В., Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. *Дальневосточный математический журнал*, 2001, т. 2, № 2, с. 115–137. [Penkov, V.B., Penkov V.V., The boundary state method for solving linear mechanics problems. *Dalnevostochnyj matematicheskij zhurnal* = Far Eastern Mathematical Journal, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137. (in Russian)]
 15. Саталкина, Л.В., Наращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений. В *Сб. тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета*. Липецк, ЛГТУ, 2007, с. 130–131. [Satalkina, L.V., Building up the basis of the state space with hard constraints on the energy intensity of computations. In: *Sbornik tezisov dokladov nauchnoj konferencii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta* = Collection of theses of reports of the scientific conference of students and graduate students of Lipetsk State Technical University, Lipetsk, LGTU, 2007, pp. 130–131. (in Russian)]
 16. Лехницкий, С.Г., *Теория упругости анизотропного тела*. Москва, Наука, 1977. [Lekhnitskiy, S.G., *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* = Theory of elasticity of anisotropic body. Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)]
 17. Левина, Л.В., Новикова, О.С., Пеньков, В.Б., Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела. *Вестник ЛГТУ*, 2016, № 2(28), с. 16–24. [Levina, L.V., Novikova, O.S., Penkov, V.B., Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body. *Vestnik LGTU* = Bulletin of Lipetsk State Technical University, 2016, no. 2(28), pp. 16–24. (in Russian)]
 18. Юдин, В.А., Королёв, А.В., Афанаскин, И.В., Вольгин, С.Г., *Теплоёмкость и теплопроводность пород и флюидов баженовской свиты – исходные данные для численного моделирования тепловых способов разработки*. Москва, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2015. [Yudin, V.A., Korolyov, A.V., Afanaskin, I.V., Volpin, S.G., *Teployomkost i teploprovodnost porod i flyuidov bazhenovskoj svity – isходные данные для численного моделирования тепловых способов разработки* = Heat capacity and thermal conductivity of rocks and fluids of the Bazhenov formation are the initial data for the numerical simulation of thermal methods of development. Moscow, FGU FNCz NIISI RAN, 2015. (in Russian)]
 19. Дортман, Н.Б. (под ред.), *Физические свойства горных пород и полезных ископаемых (петрофизика)*. Справочник геофизика. Москва, Недра, 1984. [Dortman, N.B. (ed.), *Fizicheskiye svoystva gornykh porod i poleznykh iskopayemykh (petrofizika)*. Spravochnik geofizika = Physical properties of rocks and minerals (petrophysics). Geophysicist's Handbook. Moscow, Nedra, 1984. (in Russian)]
 20. Иванычев, Д.А., Решение неосимметричной задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела вращения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 2(101), с. 4–21. [Ivanychev, D.A., Solution of a non-axisymmetric elastostatics problem for a transversely isotropic body of rotation. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Yestestvennyye nauki* = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences, 2022, no. 2(101), pp. 4–21. (in Russian)] DOI: [10.18698/1812-3368-2022-2-4-21](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-4-21)
 21. Иванычев, Д.А., Левина, Л.В., Определение неосимметричных упругих полей в анизотропных телах вращения, вызванных действием объемных сил. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 4(103), с. 22–38. [Ivanychev, D.A., Levina, L.V. Determination of non-axisymmetric elastic fields in anisotropic bodies of rotation caused by the action of body forces. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Yestestvennyye nauki* = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences, 2022, no. 3(103), pp. 22–38. (in Russian)] DOI: [10.18698/1812-3368-2022-4-22-38](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-4-22-38)

УДК 539.3

EDN: JQKJSV DOI: 10.31429/vestnik-21-2-46-61

Гибридный полуаналитический метод моделирования плоских колебаний слоистых волноводов с присоединенными элементами

А. Д. Ханазарян  

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Ханазарян Артур Дереникович; ORCID 0000-0003-4609-2900; SPIN 9109-0799; e-mail: artur97.10@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе предложен гибридный метод на основе метода спектральных элементов (МСЭ) и полуаналитического метода конечных элементов (ПАМКЭ) для изучения плоских колебаний составной структуры в частотной области. Такой подход дает возможность представить решение в протяженном волноводе в виде суперпозиции нормальных мод с помощью ПАМКЭ, а смежные области дискретизировать с помощью МСЭ. На общей для двух областей границе задаются условия непрерывности перемещений и напряжений. Для сопряжения решений вводится вспомогательная функция перемещений, которая раскладывается по тем же базисным функциям, что применяются в МСЭ и ПАМКЭ. Результаты моделирования сравниваются с расчетами в конечноэлементном пакете COMSOL Multiphysics, демонстрируется хорошее совпадение.

Ключевые слова: гибридный метод, упругие волны, плоские колебания, составные структуры, метод спектральных элементов, полуаналитический метод.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00261).

Цитирование: Ханазарян А. Д. Гибридный полуаналитический метод моделирования плоских колебаний слоистых волноводов с присоединенными элементами // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 46–61. EDN: JQKJSV. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-46-61

Поступила 3 июня 2024 г. После доработки 24 июня 2024 г. Принято 25 июня 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Hybrid Semi-Analytical Approach to Modeling In-Plane Motion of Layered Waveguides with Bonded Composite Joints

A. D. Khanazaryan  

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Artur D. Khanazaryan; ORCID 0000-0003-4609-2900; e-mail: artur97.10@mail.ru

Abstract. To study in-plane motion of a composite structure in the frequency domain, a hybrid scheme based on the spectral element method (SEM) and the semi-analytical finite element method (SAFEM) is proposed. The hybrid approach represents the solution in a waveguide via the SAFEM as a sum of normal modes and the adjacent regions are discretized using the SEM. On the common boundary for two domains, the continuity boundary conditions are specified for displacement and traction vectors. To couple solutions in the two domains, an unknown auxiliary displacement function is introduced, which is approximated using the same basis functions that are used in the SEM and the SAFEM. The simulation results are compared with the results obtained using the finite element commercial software COMSOL Multiphysics and a good agreement is demonstrated.

Keywords: hybrid method, elastic waves, in-plane motion, joint, spectral element method, semi-analytical method.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (project 22-11-00261).

Cite as: Khanazaryan, A. D., Hybrid semi-analytical approach to modeling in-plane motion of layered waveguides with bonded composite joints. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 46–61. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-46-61

Received 3 June 2024. Revised 24 June 2024. Accepted 25 June 2024. Published 28 June 2024.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

Для разработки надежных методов обнаружения дефектов с помощью упругих волн требуются эффективные математические модели и алгоритмы. В случае сложных структур, содержащих области простой формы, можно оптимизировать вычислительные ресурсы, применяя комбинацию различных методов. Подобные гибридные подходы, объединяющие преимущества нескольких методов, часто применяются для решения задач математической физики [1, 2].

Наиболее распространенным прямым численным методом решения волновых задач является метод конечных элементов (МКЭ) [3]. Ключевой недостаток как МКЭ, так и родственного ему метода спектральных элементов (МСЭ) [4, 5], предполагающий использование многочленов высоких порядков, — необходимость увеличения числа степеней свободы/элементов для достижения приемлемой точности решения. Это приводит к значительному увеличению вычислительных затрат при анализе протяжённых структур, таких как волноводы. Подобный недостаток, хотя в несколько меньшей степени, имеют метод граничных элементов (МГЭ) [6] и метод масштабируемых граничных конечных элементов (ММГКЭ) [7]. В МГЭ численная дискретизация проводится на компакте размерностью на единицу меньшей, чем размерность пространства задачи, что при наличии аналитических представлений для матрицы Грина приводит к меньшим затратам машинного времени.

Разновидности метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) [8–10], а также полуаналитический метод конечных элементов (ПАМКЭ) [11] позволяют эффективно рассчитывать волновые поля в слоистых волноводах, но не могут напрямую описывать составные структуры сложной формы. Поэтому в тех случаях, когда в исследуемых структурах имеются протяженные области (волноводы), для изучения которых применимы полуаналитические подходы, прибегают к гибридным схемам. Так, в волновых задачах распространение получили гибридные методы, в рамках которых в протяженной области, в том числе неограниченной, решение строится с использованием полуаналитического метода, а смежные области дискретизируются одним из прямых численных методов, например, [12–18].

Так как ПАМКЭ предполагает конечно-элементную дискретизацию только поперечного сечения волновода на основе МСЭ, то ПАМКЭ и МСЭ были взяты в качестве основы при разработке предлагаемого в данной работе гибридного метода для исследования динамического поведения структуры, состоящей из протяженного слоистого волновода конечной длины и прилегающей к нему области прямоугольной формы. В случае областей произвольных форм достаточно стандартной модификации в МСЭ (см. [2, 20]), поэтому для простоты изложения она здесь не приводится. Предлагаемый гибридный метод обращается к ПАМКЭ для описания распространения волн в упругом протяженном волноводе [11] и к МСЭ для моделирования динамических колебаний в областях конечных размеров [19–21]. Настоящая работа является продолжением предыдущего исследования [22], где рассматривался скалярный случай (антитропоскопические колебания). Поэтому в работе рассматривается уже векторный случай (плоские колебания) и представляется общая схема построения решения путем «шивки» решений для каждой из смыкающихся областей с помощью метода Галеркина. Приводятся численные результаты предлагаемого гибридного подхода и его сравнение с МКЭ. Демонстрируется хорошее совпадение.

1. Постановка задачи

Рассматриваются плоские установившиеся гармонические колебания составной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. При этом область $\Omega_2 = \{0 \leq x_1 \leq d_2, h_3 \leq x_2 \leq h_3 + h_2\}$ представляет собой протяженный волновод заданной толщины h_2 , а Ω_1 может быть произвольной формы и имеет общую границу S_c с областью Ω_2 . Соответствующая задача теории упругости формулируется в декартовой системе координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$. Уравнения движения для гармонических колебаний в плоской постановке с круговой частотой $\omega = 2\pi f$ в p -й области Ω_p записываются в терминах тензора напряжений σ_{ij} и вектора перемещений с двумя ненулевыми компонентами

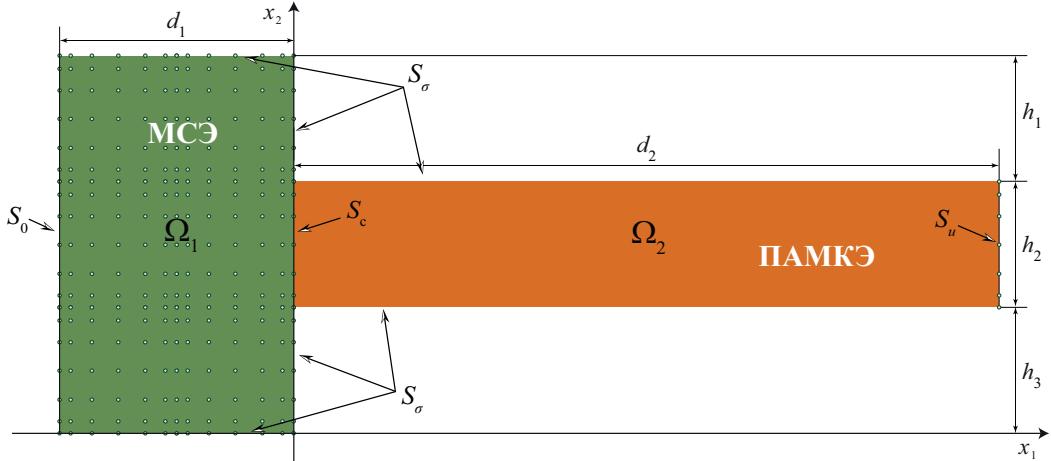


Рис. 1. Геометрия задачи в случае прямоугольной области Ω_1

Fig. 1. Geometry of the problem in the case of a rectangular region Ω_1

$\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}$ следующим образом:

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}^{(p)}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \rho^{(p)} \omega^2 u_i^{(p)}(\mathbf{x}) = 0, \quad p = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_p. \quad (1.1)$$

Уравнения состояния

$$\sigma_{ij}^{(p)}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}^{(p)} \frac{\partial u_k^{(p)}(\mathbf{x})}{\partial x_l}, \quad p = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_p \quad (1.2)$$

связывают компоненты тензора напряжений σ_{ij} и вектора перемещений u_k . Здесь $C_{ijkl}^{(p)}$ и $\rho^{(p)}$ — компоненты тензора упругих постоянных и плотность p -го материала соответственно. Подстановка уравнений (1.2) в (1.1) позволяет переписать уравнения движения в терминах вектора перемещений для p -й области Ω_p

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl}^{(p)} \frac{\partial^2 u_k^{(p)}(\mathbf{x})}{\partial x_l \partial x_j} + \rho^{(p)} \omega^2 u_i^{(p)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_p. \quad (1.3)$$

Внешняя граница области Ω разбивается на несколько частей $S = (\partial\Omega) = S_0 \cup S_u \cup S_\sigma$ в зависимости от типа граничных условий. На границе S_0 задается условие жесткого защемления

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0, \quad (1.4)$$

на границе S_u перемещения приравниваются к константе $u_0 \neq 0$

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) = u_0, \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad (1.5)$$

а граница S_σ свободна от напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma. \quad (1.6)$$

Здесь и далее $\mathbf{n} = \{n_1, n_2\}$ — вектор нормали. На внутренней границе $S_c = \Omega_1 \cap \Omega_2$ ставятся условия непрерывности перемещений и напряжений

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in S_c. \quad (1.7)$$

Геометрия задачи, которая обсуждается в настоящей работе, приведена на рис. 1. Здесь в качестве области Ω_1 без потери общности рассматривается область прямоугольной формы $\Omega_1 = [-d_1, 0] \times [0, h_1 + h_2 + h_3]$.

2. Общая схема решения

Для построения решения с применением гибридной схемы необходимо сначала рассмотреть решение двух вспомогательных задач для областей Ω_1 и Ω_2 , в которых неизвестная функция перемещений на общей границе S_c предполагается известной, и решение строится соответственно с помощью МСЭ и ПАМКЭ. Таким образом, для «сшивки» двух решений на внутренней границе вводится вспомогательная неизвестная функция перемещений

$$u_k^{(1)}(\mathbf{x}) = u_k^{(2)}(\mathbf{x}) = q_k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S_c. \quad (2.1)$$

2.1. Метод спектральных элементов (МСЭ)

Для области Ω_1 рассматривается вариационная формулировка уравнения (1.1)

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_1} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x})}{\partial x_j} v_{k'i}^{(1)}(\mathbf{x}) dV + \rho^{(1)} \omega^2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1} u_i^{(1)}(\mathbf{x}) v_{k'i}^{(1)}(\mathbf{x}) dV = 0. \quad (2.2)$$

вместе с граничными условиями (1.4)–(1.6) на тех границах, которые относятся к Ω_1 , и условием (2.1), где функция перемещений предполагается известной. Применяя первую формулу Грина, уравнение (2.2) можно переписать в слабой постановке

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_{\partial\Omega_1} \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}) v_{k'i}^{(1)}(\mathbf{x}) n_j dl - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_1} \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\partial v_{k'i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\partial x_j} dV + \\ + \rho^{(1)} \omega^2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_1} u_i^{(1)}(\mathbf{x}) v_{k'i}^{(1)}(\mathbf{x}) dV = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В МСЭ в качестве базисных функций для аппроксимации $u_i^{(1)}(\mathbf{x})$ используются интерполяционные полиномы $C^{i_k}(\xi_k^{l_k})$ на узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто [21]. Для прямоугольной области Ω_1 , производится разбиение на прямоугольные элементы (на M_1 по оси x_1 и на $M_2 = M_2^1 + M_2^2 + M_2^3$ по оси x_2)

$$\Omega_1 = \bigcup_{l_1=1}^{M_1} \left[x_1^{l_1}, x_1^{l_1+1} \right] \times \bigcup_{l_2=1}^{M_2} \left[x_2^{l_2}, x_2^{l_2+1} \right].$$

При этом глобальная система координат x_k связана с локальной системой координат $\xi_k^{l_k}$ на каждом элементе l_k соотношениями вида

$$\begin{aligned} \xi_k^{l_k} &= \frac{2x_i - x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}{x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}, \quad x_i = \frac{x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}{2} \xi_k^{l_k} + \frac{x_k^{l_k+1} + x_k^{l_k}}{2}, \\ \frac{d}{dx_k} &= S^{l_k} \frac{d}{d\xi_k^{l_k}}, \quad S^{l_k} = \frac{2}{x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда решение уравнения (1.1) можно представить как

$$u_k^{(1)}(\mathbf{x}) = \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} y_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) = \sum_{I_1=1}^{2G_1} y^{I_1} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}), \quad k = 1, 2, \quad (2.4)$$

где функция $I_1(k, l_1, l_2, i_1, i_2) = (k-1)G_1 + (i_1-1)(M_2N+1) + (M_2N+1)N(l_1-1) + N(l_2-1) + i_2$ используется для индексации узлов, а величина $G_1 = (M_1N+1)(M_2N+1)$ – это общее количество узлов. В узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто χ_j значения интерполяционных полиномов совпадают с дельта-символом Кронекера

$$C^i(\chi_j) = \delta_{ij},$$

а значения производной $dC^i(\chi_j)/d\xi$ вычисляются аналитически [21] и обозначаются как D_j^i .

Для дискретизации уравнения (2.3) применяется метод Бубнова–Галеркина, согласно которому тестовые функции $v_{k'i}^{(1)}(\mathbf{x})$ берутся совпадающими с базисными функциями

$$v_{k'i}^{(1)}(x_1, x_2) = \delta_{k'i} C^{i'}(\xi_1^{i'}) C^{i'}(\xi_2^{i'}), \quad (2.5)$$

которые в соответствии с условием (1.4) на границе S_0 равны нулю

$$v_{k'i}^{(1)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0. \quad (2.6)$$

В дальнейшем, для краткости, тестовые функции нумеруются индексом $I'_1(k', l'_1, l'_2, i'_1, i'_2)$ по аналогии с индексом $I_1(k, l_1, l_2, i_1, i_2)$.

Интегралы в (2.3) при использовании (2.4)–(2.6) могут быть вычислены на узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто χ_k с помощью квадратуры Лобатто [5]

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^{N+1} w_k f(\chi_k).$$

После подстановки (2.4) и (2.5) в (2.3) и учета условия (2.6) формируется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{I_1=1}^{2G_1} A_{I'_1 I_1}^1 y^{I_1} = \eta^{I'_1},$$

где

$$A_{I'_1 I_1}^1 = \delta_{l_1 l'_1} \delta_{l_2 l'_2} \left(-C_{k' 1 k 2}^{(1)} w_{i_1} D_{i_1}^{i'_1} w_{i'_2} D_{i_2}^{i_2} - C_{k' 2 k 1}^{(1)} w_{i'_1} D_{i'_1}^{i_1} w_{i_2} D_{i_2}^{i'_2} - C_{k' 1 k 1}^{(1)} \frac{S^{l_1}}{S^{l_2}} w_{i_2} \delta_{i_2 i'_2} \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} D_{k_1}^{i_1} D_{k_1}^{i'_1} - C_{k' 2 k 2}^{(1)} \frac{S^{l_2}}{S^{l_1}} w_{i_1} \delta_{i_1 i'_1} \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2}^{i_2} D_{k_2}^{i'_2} + \rho^{(1)} \omega^2 \frac{1}{S^{l_1} S^{l_2}} w_{i_1} w_{i_2} \delta_{k k'} \delta_{i_1 i'_1} \delta_{i_2 i'_2} \right) \quad (2.7)$$

и $\eta^{I'_1}$ — компоненты вектора столбца, которые равны нулю, за исключением тех, что соответствуют узлам на границе S_c

$$\eta^{I'_1} = \begin{cases} q_k(x_2), & k = 1, 2, l'_1 = M_1, i'_1 = N + 1, l'_2 \in [M_2^1 + 1, M_2^1 + M_2^2], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом условие (1.6) дает нулевой вклад контурного интеграла в (2.3), а для выполнения условия (1.4) необходимо изменить соответствующие строки матрицы:

$$A_{I'_1(k', 1, l'_2, 1, i'_2) I_1}^1 = 0, \quad A_{I'_1(k', 1, l'_2, 1, i'_2) I'_1(k', 1, l'_2, 1, i'_2)}^1 = 1.$$

2.2. Полуаналитический метод конечных элементов (ПАМКЭ) для протяженных слоистых волноводов

Для области Ω_2 , по аналогии с Ω_1 , используется вариационная формулировка уравнения (1.3) с граничными условиями (1.4)–(1.6) на тех границах, которые относятся к Ω_2 , и условием

(2.1). При этом к (1.3), согласно ПАМКЭ, предварительно применяется прямое преобразование Фурье по x_1 с параметром преобразования α , что приводит к уравнению

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 \left(C_{i2k2}^{(2)} \int_{h_3}^{h_2+h_3} \frac{\partial^2 U_k(\alpha, x_2)}{\partial x_2^2} v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 - i\alpha \left(C_{i2k1}^{(2)} + C_{i1k2}^{(2)} \right) \int_{h_3}^{h_2+h_3} \frac{\partial U_k(\alpha, x_2)}{\partial x_2} v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 - \right. \\ \left. - \alpha^2 C_{i1k1}^{(2)} \int_{h_3}^{h_2+h_3} U_k(\alpha, x_2) v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 \right) + \int_{h_3}^{h_2+h_3} \rho^{(2)} \omega^2 U_i(\alpha, x_2) v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 = 0 \quad (2.8)$$

относительно преобразования Фурье для перемещений

$$U_k(\alpha, x_2) = \mathcal{F}_{x_1} \left[u_k^{(2)}(x_1, x_2) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} u_k^{(2)}(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1, \quad k = 1, 2.$$

С учетом (1.2) можно переписать граничное условие (1.6) относительно Фурье-символа $U_k(\alpha, x_2)$

$$\sigma_{i2}^{(2)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^2 \left(C_{i2k1}^{(2)} \frac{\partial u_k^{(2)}(\mathbf{x})}{\partial x_1} + C_{i2k2}^{(2)} \frac{\partial u_k^{(2)}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) = \\ = \sum_{k=1}^2 \left(-i\alpha C_{i2k1}^{(2)} U_k(\alpha, x_2) + C_{i2k2}^{(2)} \frac{\partial U_k(\alpha, x_2)}{\partial x_2} \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma. \quad (2.9)$$

Интегрируя по частям и подставляя условие (2.9), уравнение (2.8) приводится к слабой постановке

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 \left(-C_{i2k2}^{(2)} \int_{h_3}^{h_2+h_3} \frac{\partial U_k(\alpha, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial v_{k'i}^{(2)}(x_2)}{\partial x_2} dx_2 + \right. \\ \left. + i\alpha C_{i2k1}^{(2)} \left(U_k(\alpha, h_2 + h_3) v_{k'i}^{(2)}(h_2 + h_3) - U_k(\alpha, h_3) v_{k'i}^{(2)}(h_3) \right) - \right. \\ \left. - i\alpha \left(C_{i2k1}^{(2)} + C_{i1k2}^{(2)} \right) \int_{h_3}^{h_2+h_3} \frac{\partial U_k(\alpha, x_2)}{\partial x_2} v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 - \alpha^2 C_{i1k1}^{(2)} \int_{h_3}^{h_2+h_3} U_k(\alpha, x_2) v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 \right) + \\ + \rho^{(2)} \omega^2 \sum_{i=1}^2 \int_{h_3}^{h_2+h_3} U_i(\alpha, x_2) v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 = 0. \quad (2.10)$$

Поскольку предполагается осуществить «спивку» решений двух подзадач с помощью гибридной схемы, Фурье-символ $U_k(\alpha, x_2)$ и вспомогательную функцию $q_k(x_2)$ целесообразно разложить по тем же самым базисным функциям

$$U_k(\alpha, x_2) = \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls}(\alpha) C^s(\xi^l), \quad k = 1, 2, \quad (2.11)$$

$$q_k(x_2) = \sum_{r=1}^{M_2^2} \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_k^{rj} C^j(\xi^r) = \sum_{I_2=1}^{2G_2} \gamma^{I_2} C^j(\xi^r), \quad k = 1, 2, \quad (2.12)$$

где $I_2(k, l, s) = (k-1)G_2 + N(l-1) + s$ используется для индексации узлов в поперечном сечении волновода, а величина $G_2 = M_2^2 N + 1$ – это общее количество узлов.

Для дискретизации уравнения (2.10) снова применяется метод Бубнова–Галеркина. Согласно ему тестовые функции $v_{k' i}^{(2)}(x_2)$ берутся совпадающими с базисными функциями

$$v_{k' i}^{(2)}(x_2) = \delta_{k' i} C^{s'}(\xi^{l'}). \quad (2.13)$$

В дальнейшем индекс $I'_2(k', l', s')$ используется для нумерации тестовых функций таким же образом, как и индекс $I_2(k, l, s)$. С учетом подстановки представлений (2.11) и (2.13) в (2.10), а также условия (1.6) формируется СЛАУ относительно вектора неизвестных β

$$\sum_{I_2=1}^{2G_2} \left(-K_{I'_2 I_2}^0 - i\alpha K_{I'_2 I_2}^1 - \alpha^2 K_{I'_2 I_2}^2 + \omega^2 M_{I'_2 I_2} \right) \beta^{I_2} = 0, \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} K_{I'_2 I_2}^0 &= C_{k' 2k2}^{(2)} S_l \delta_{ll'} \sum_{n=1}^{N+1} w_n D_n^s D_n^{s'}, \\ K_{I'_2 I_2}^1 &= \left(C_{k' 2k1}^{(2)} + C_{k' 1k2}^{(2)} \right) \delta_{ll'} w_{s'} D_{s'}^s - C_{k' 2k1}^{(2)} \left(\delta_{sN+1} \delta_{lM_2^2} \delta_{s' N+1} \delta_{l'M_2^2} - \delta_{s1} \delta_{l1} \delta_{s' 1} \delta_{l' 1} \right), \\ K_{I'_2 I_2}^2 &= C_{k' 1k1}^{(2)} \frac{1}{S_l} \delta_{ll'} w_s \delta_{ss'}, \\ M_{I'_2 I_2} &= \rho^2 \frac{1}{S_l} \delta_{ll'} w_s \delta_{ss'} \delta_{kk'}. \end{aligned}$$

Уравнение (2.14) не сводится напрямую к задаче на собственные значения относительно вектора неизвестных β , поэтому рассматривается эквивалентная система уже относительно вектора неизвестных $\mathbf{b} = \{\beta, \lambda\beta\}^T$

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}_{4G_2 \times 4G_2}) \mathbf{b} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{E}_{2G_2 \times 2G_2} \\ (\mathbf{K}^2)^{-1}(\mathbf{K}^0 - \omega^2 \mathbf{M}) & (\mathbf{K}^2)^{-1}\mathbf{K}^1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где $\lambda = i\alpha$, а \mathbf{E} – единичная матрица соответствующей размерности. Тогда взаимосвязь между волновым числом $\alpha = -i\lambda$ и частотой ω , необходимая для построения различных дисперсионных характеристик волновода, может быть получена путем решения характеристического (дисперсионного) уравнения относительно частоты ω :

$$\det(\mathbf{B}(\omega) - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (2.15)$$

Полученные при решении задачи (2.15) собственные числа α и собственные вектора β используются для построения решения в протяженном волноводе Ω_2

$$\begin{aligned} u_k^{(2)}(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{2G_2} c_n^m U_k(\alpha_n^m, x_2, \beta_k^{nm}) e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1)} = \\ &= \sum_{\tilde{I}_2=1}^{4G_2} c^{\tilde{I}_2} U_k(\alpha^{\tilde{I}_2}, x_2, \beta_k^{\tilde{I}_2}) e^{i\alpha^{\tilde{I}_2}(x_1^m - x_1)}, \quad k = 1, 2, \quad x_1^1 = 0, \quad x_1^2 = d_2, \quad (2.16) \end{aligned}$$

где $\tilde{I}_2(m, n) = 2G_2(m-1) + n$. Предварительно необходимо отсортировать α и соответствующие им β так, чтобы $\text{Im}(\alpha) \leq 0$ при $m = 1$ и $\text{Im}(\alpha) \geq 0$ при $m = 2$. Следует также отметить, что для реализации гибридной схемы, по сути, уже достаточно представления (2.16), так как неизвестные значения коэффициентов разложения могут быть найдены подстановкой в граничные условия на торцах волновода с использованием проекционных методов.

Таблица 1. Значения волновых чисел для упругого слоя из алюминия толщиной 1 мм при различных значениях спектральных элементов на частоте $f = 10$ МГц

Table 1. Wave number values for an elastic aluminum layer 1 mm thick for different values of spectral elements at a frequency of $f = 10$ MHz

Спектральные элементы	$N = 3$, $M_2^2 = 1$, $G_2 = 4$	$N = 5$, $M_2^2 = 1$, $G_2 = 6$	$N = 13$, $M_2^2 = 1$, $G_2 = 14$	$N = 5$, $M_2^2 = 2$, $G_2 = 11$	$N = 4$, $M_2^2 = 5$, $G_2 = 21$	$N = 6$, $M_2^2 = 6$, $G_2 = 37$
Волновое число α_1^1 , мм^{-1} моды A0						
МГИУ	21,6522					
ПАМКЭ	20,4597	21,1951	21,6522	21,5717	21,6427	21,6522
ε , %	5,83	2,16	$1,18 \cdot 10^{-5}$	0,37	0,04	$7,62 \cdot 10^{-6}$
Волновое число α_2^1 , мм^{-1} моды S0						
МГИУ	21,6429					
ПАМКЭ	20,405	21,0058	21,6429	21,5614	21,6333	21,6429
ε , %	6,07	3,03	$3,25 \cdot 10^{-6}$	0,38	0,04	$7,67 \cdot 10^{-6}$

Расчитанные с помощью ПАМКЭ волновые числа α и медленности $s = \alpha/\omega$ для упругого слоя из алюминия толщиной $h_2 = 1$ мм на частоте $f = 10$ МГц сравниваются с аналогичными расчетами МГИУ в табл. 1 и на рис. 2. Относительная погрешность ε в табл. 1 рассчитывалась по формуле

$$\varepsilon = \frac{|\alpha_{\text{МГИУ}} - \alpha_{\text{ПАМКЭ}}|}{|\alpha_{\text{ПАМКЭ}}|} \times 100.$$

Из табл. 1 видно хорошее совпадение волновых чисел моды A0 и S0 на частоте $f = 10$ МГц, рассчитанных с помощью МГИУ и ПАМКЭ при достаточно высоком порядке интерполяционных полиномов ($N = 13$). Однако можно добиться близкой точности при меньшем порядке интерполяционных полиномов, например, при $N = 7$ и $M_2^2 = 2$ (рис. 2). Также из рис. 2 видно, что для частот до 1 МГц достаточно минимального количества узлов ($N = 3$, $M_2^2 = 1$) для получения близких с МГИУ результатов.

2.3. Гибридная схема

Для построения решения рассматриваемой задачи (1.3)–(1.6), согласно гибридной схеме, вводится неизвестная функция перемещений на общей границе S_c . При этом необходимо обеспечить непрерывность перемещений и напряжений (1.7) на интерфейсе. В случае МСЭ и области Ω_1 это приводит к изменению строк матрицы \mathbf{A}^1 , соответствующих узлам на границе S_c :

$$A_{I'_1(k', M_1, l'_2, N+1, i'_2) I_1}^1 = 0, \quad A_{I'_1(k', M_1, l'_2, N+1, i'_2) I'_1(k', M_1, l'_2, N+1, i'_2)}^1 = 1,$$

и к формированию матрицы \mathbf{A}^2 размера $2G_1 \times 2G_2$, элементы которой равны нулю, за исключением тех, что также соответствуют узлам на границе S_c :

$$A_{I'_1 I_2}^2 = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, l'_1 = M_1, i'_1 = N + 1, l'_2 \in [M_2^1 + 1, M_2^1 + M_2^2], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда можно выписать следующее уравнение:

$$\mathbf{A}^1 \mathbf{y} = \mathbf{A}^2 \boldsymbol{\gamma},$$

и в области Ω_2 будут выполняться граничные условия (1.5), (1.7) и (2.1), если здесь к нахождению решения применить метод Галеркина.

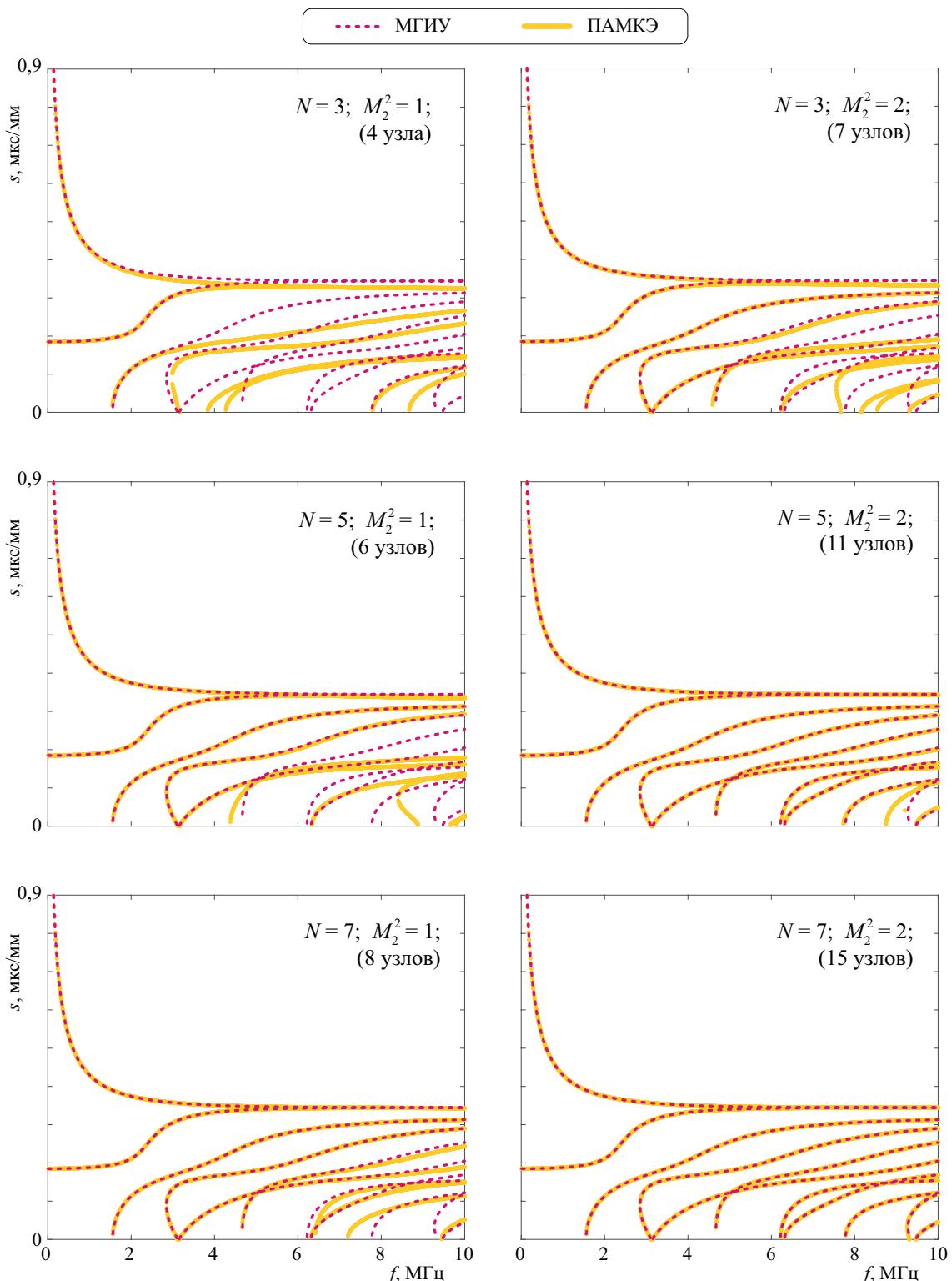


Рис. 2. Медленности, рассчитанные для упругого слоя из алюминия толщиной 1 мм при различных значениях спектральных элементов

Fig. 2. Slownesses calculated for an elastic layer of aluminum 1 mm thick for different values of spectral elements

Тестовые функции в виде (2.13), а также подстановка разложений (2.12) и (2.16) в условия (1.5) и (2.1) позволяют получить следующие соотношения с помощью метода Галеркина

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{2G_2} c_n^m e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1^1)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_{k'}^{ls(n)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ll'} \delta_{ss'} - \sum_{r=1}^{M_2^2} \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_{k'}^{rj} \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{rl'} \delta_{js'} = 0, \\ \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{2G_2} c_n^m e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1^2)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_{k'}^{ls(n)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ll'} \delta_{ss'} = u_0 \frac{1}{S^l} w_{s'}, \\ B_{I'_2 \tilde{I}_2}^1 = e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1^1)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_{k'}^{ls(n)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ll'} \delta_{ss'}, \\ B_{I'_2 \tilde{I}_2}^2 = e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1^2)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_{k'}^{ls(n)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ll'} \delta_{ss'}, \\ B_{I'_2 I_2}^3 = \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{rl'} \delta_{js'}, \\ g^{I'_2} = u_0 \frac{1}{S^l} w_{s'}. \end{cases}$$

Аналогично с учетом тестовых функций (2.13) условие непрерывности напряжений на интерфейсе (1.7) представляется в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} y_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \sum_{k=1}^2 \left(C_{i1k1}^{(1)} D_{N+1}^{i_1} \delta_{l_1 M_1} \frac{S^{l_1}}{S^{l_2}} w_{s'} \delta_{i_2 s'} \delta_{l_2 l'} + C_{i1k2}^{(1)} \delta_{i_1 N+1} \delta_{l_1 M_1} w_{s'} \delta_{l_2 l'} D_{s'}^{i_2} \right) - \\ & - \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{2G_2} c_n^m \sum_{k=1}^2 \left(- C_{i1k1}^{(2)} i\alpha_n^m e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1^1)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ss'} \delta_{ll'} + \right. \\ & \left. + C_{i1k2}^{(2)} e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1^1)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) w_{s'} \delta_{ll'} D_{s'}^{i_2} \right) = 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Q_{I'_2 I_1}^{i1} &= \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \sum_{k=1}^2 \left(C_{i1k1}^{(1)} D_{N+1}^{i_1} \frac{S^{l_1}}{S^{l_2}} w_{s'} \delta_{i_2 s'} + C_{i1k2}^{(1)} \delta_{i_1 N+1} w_{s'} D_{s'}^{i_2} \right), \\ Q_{I'_2 \tilde{I}_2}^{i2} &= \sum_{k=1}^2 \left(- C_{i1k1}^{(2)} i\alpha_n^m e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1^1)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ss'} \delta_{ll'} + \right. \\ & \left. + C_{i1k2}^{(2)} e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1^1)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) w_{s'} \delta_{ll'} D_{s'}^{i_2} \right). \end{aligned}$$

В результате проделанных выше преобразований для составной области Ω в случае гибридного подхода к решению формируется СЛАУ относительно коэффициентов разложений $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ и q_k соответственно в виде (2.4), (2.16) и (2.12), или в краткой записи

$$\mathbf{A}^1 \mathbf{y} = \mathbf{A}^2 \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{B}^1 \mathbf{c} = \mathbf{B}^3 \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{B}^2 \mathbf{c} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{Q}^{i1} \mathbf{y} = \mathbf{Q}^{i2} \mathbf{c}.$$

Вид уравнений позволяет «свернуть» и упростить эту систему уравнений для численных расчетов путем исключения коэффициентов разложения для искусственно введенной неизвестной функции перемещений q_k . В результате система

$$\mathbf{A}^1 \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{A}}^2 \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{B}^2 \mathbf{c} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{Q}^{i1} \mathbf{u} = \mathbf{Q}^{i2} \mathbf{c}.$$

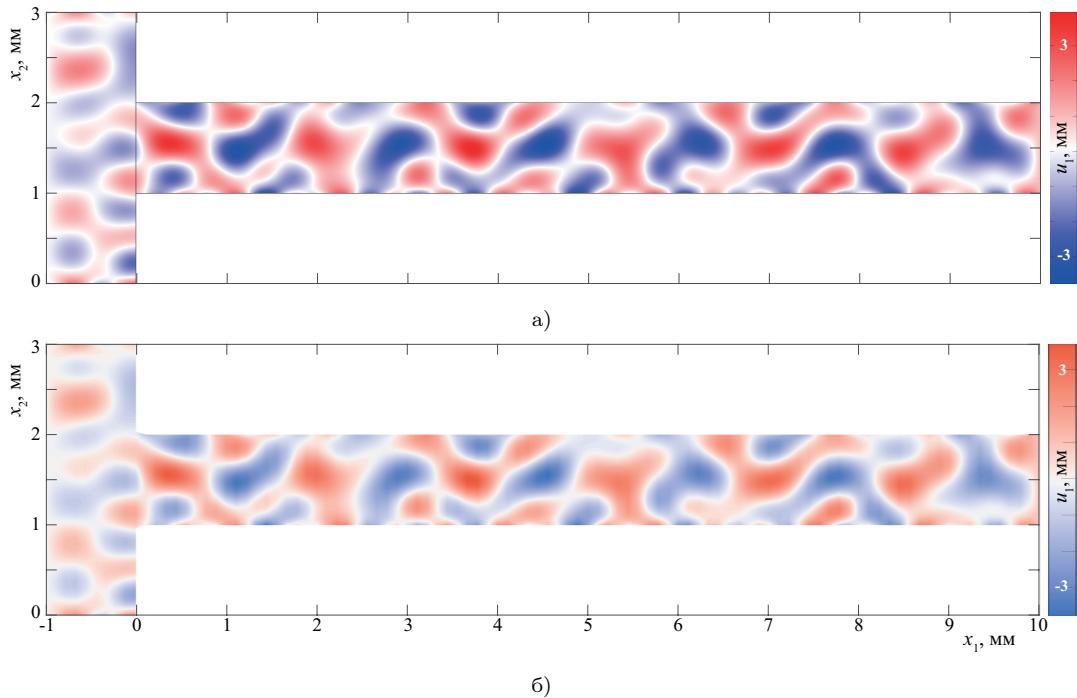


Рис. 3. Перемещения $u_1(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

Fig. 3. Displacements $u_1(x_1, x_2)$ calculated using FEM (a) and hybrid scheme (b) at $f = 5$ MHz and $h_3 = 1$ mm

содержит только коэффициенты разложений для $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}$, где $\tilde{\mathbf{A}}^2 = \mathbf{A}^2(\mathbf{B}^3)^{-1}\mathbf{B}^1$.

3. Численный анализ

Компьютерная реализация полуаналитического гибридного метода выполнена в пакете прикладных программ MATLAB. Основные характеристики исследуемой составной структуры приведены в табл. 2. Задаваемые на границе S_u перемещения равнялись: $u_0 = 1$ мм. Результаты, полученные с помощью реализованного гибридного метода, сравниваются с МКЭ (COMSOL Multiphysics). В конечноэлементном пакете COMSOL использовались полиномы пятой степени (Quintic Lagrange discretization).

На рис. 3–4 изображены перемещения u_1, u_2 , а на рис. 5–7 напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ во всей составной области Ω , вычисленные с помощью гибридной схемы при $N = 7, M_1 = M_2^2 = 4$ (рис. 3б–4б и 5б–7б) и с помощью МКЭ (рис. 3а–4а и 5а–7а) для большой частоты $f = 5$ МГц. Можно видеть хорошее совпадение с расчетом МКЭ.

Таблица 2. Свойства материалов и геометрические параметры волноводной структуры

Table 2. Material properties and geometric parameters of the waveguide structure

Область	Материал	Параметры Ламе, ГПа	ρ_i , кг/м ³	d_i , мм	h_1 , мм	h_2 , мм	h_3 , мм
Ω_1	Сталь	$\lambda = 104,4; \mu = 80$	7850	1	1	1	1
Ω_2	Алюминий	$\lambda = 55,5; \mu = 26,1$	2700	10	–	1	–

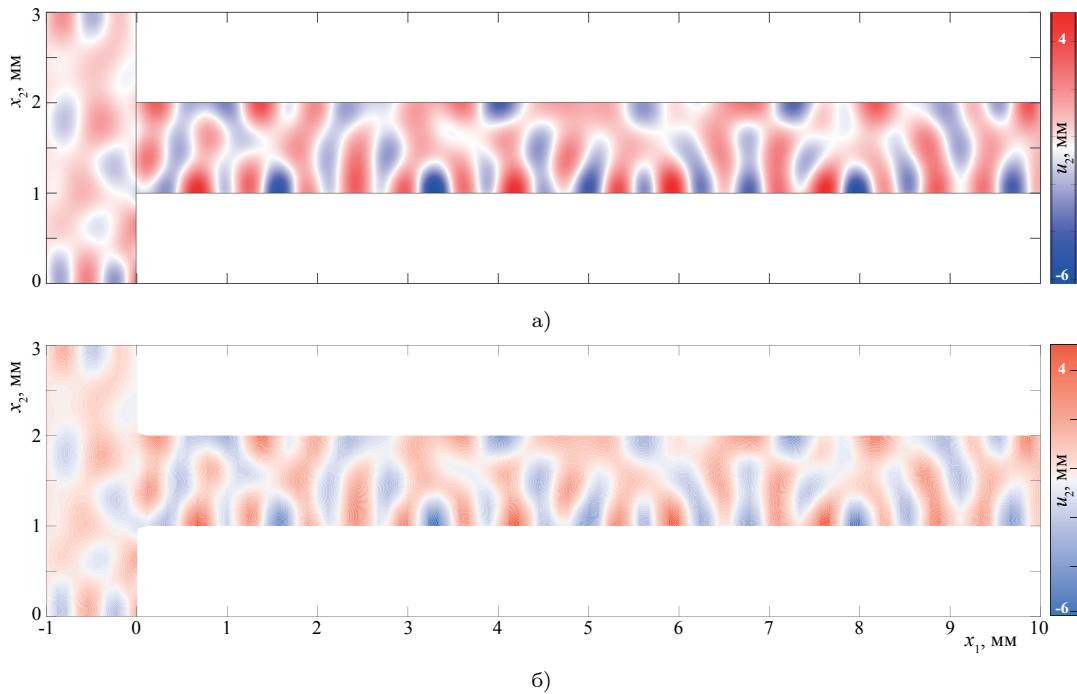


Рис. 4. Перемещения $u_2(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

Fig. 4. Displacements $u_2(x_1, x_2)$ calculated using FEM (a) and hybrid scheme (б) at $f = 5$ MHz and $h_3 = 1$ mm

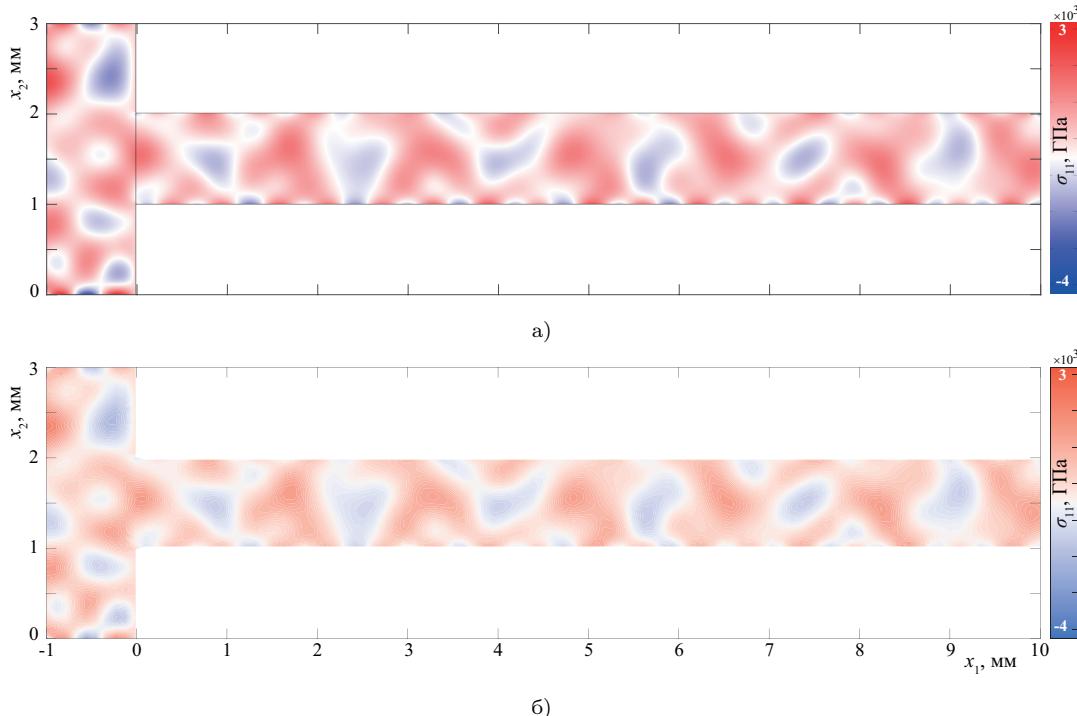


Рис. 5. Напряжения $\sigma_{11}(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

Fig. 5. Stresses $\sigma_{11}(x_1, x_2)$ calculated using FEM (a) and hybrid circuit (б) at $f = 5$ MHz and $h_3 = 1$ mm

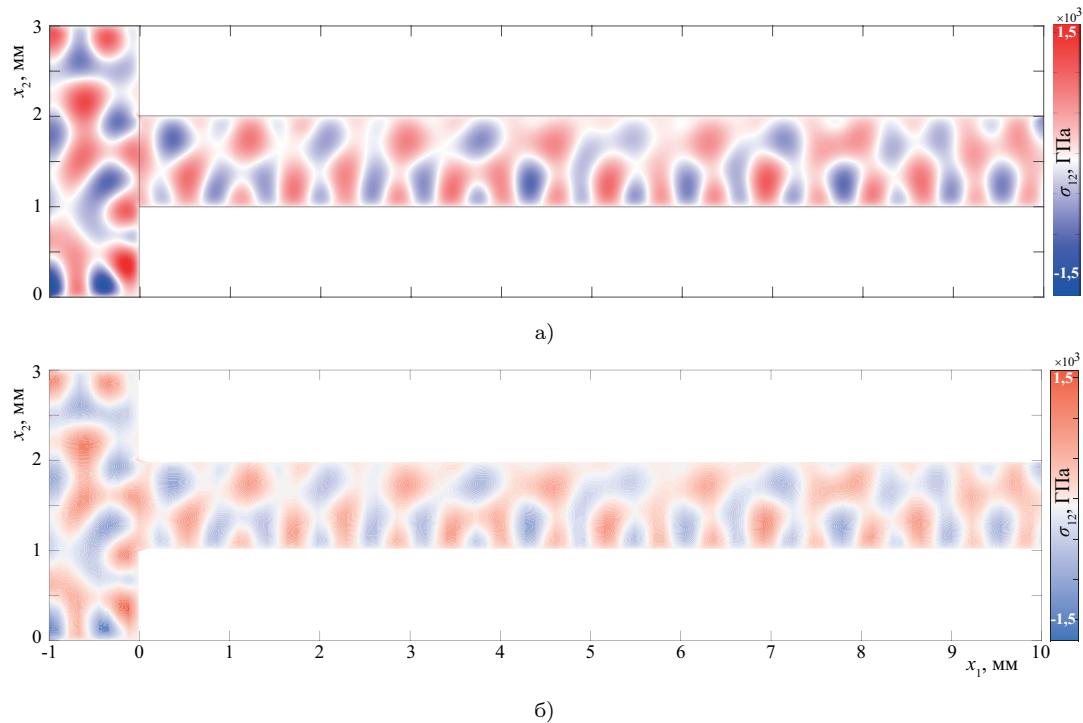


Рис. 6. Напряжения $\sigma_{12}(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

Fig. 6. Stresses $\sigma_{12}(x_1, x_2)$ calculated using FEM (a) and hybrid circuit (б) at $f = 5$ MHz and $h_3 = 1$ mm

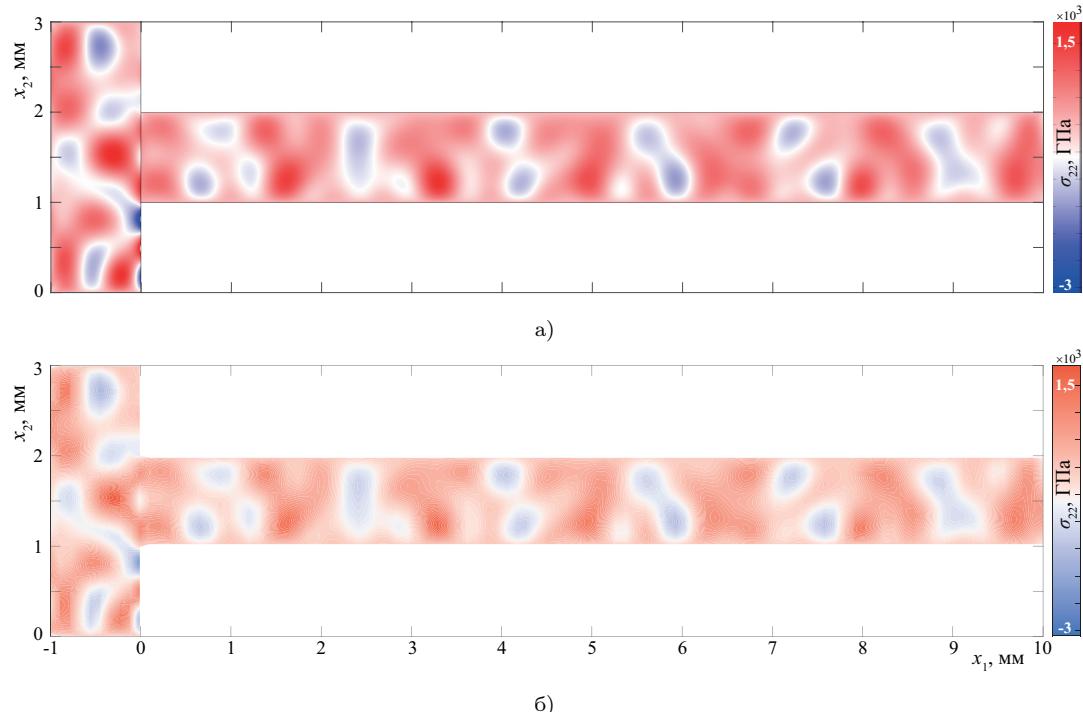


Рис. 7. Напряжения $\sigma_{22}(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

Fig. 7. Stresses $\sigma_{22}(x_1, x_2)$ calculated using FEM (a) and hybrid circuit (б) at $f = 5$ MHz and $h_3 = 1$ mm

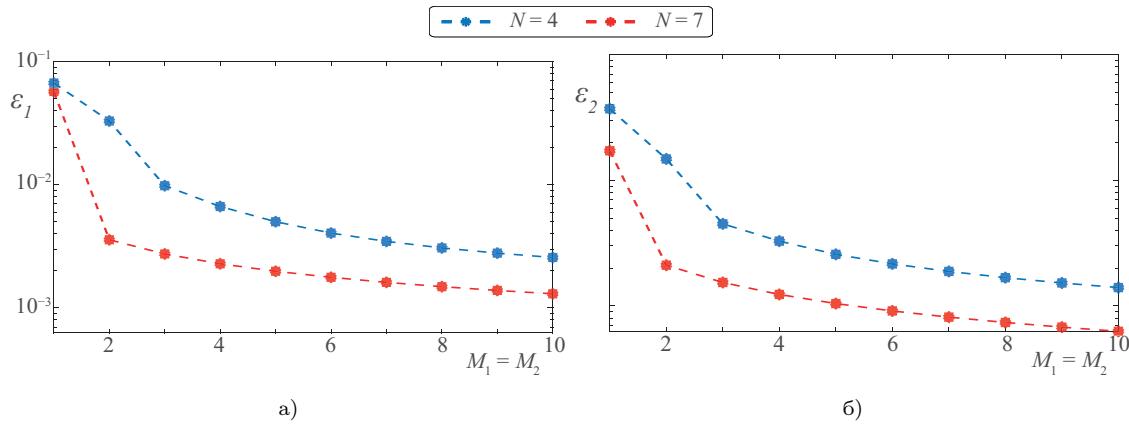


Рис. 8. Относительные погрешности гибридной схемы ε_p , рассчитанные в области Ω_1 (а) и области Ω_2 (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

Fig. 8. Relative errors of the hybrid ε_p circuit calculated in the Ω_1 region (a) and the Ω_2 region (b) at $f = 5$ MHz and $h_3 = 1$ mm

Для исследования сходимости гибридного метода вводятся и вычисляются относительные погрешности модулей векторов перемещений $|\mathbf{u}|$ и $|\mathbf{u}_{comsol}|$ в норме пространства L_1 , полученных, соответственно, с использованием гибридной схемы и МКЭ на «мелкой» сетке для каждой области Ω_p

$$\varepsilon_p = \frac{\| |\mathbf{u}| - |\mathbf{u}_{comsol}| \|_{L_1(\Omega_p)}}{\| |\mathbf{u}_{comsol}| \|_{L_1(\Omega_p)}}.$$

На рис. 8 видно уменьшение относительной погрешности расчета на основе гибридной схемы с увеличением количества спектральных элементов при $N = 4$ и при $N = 7$.

Заключение

В работе представлен гибридный полуаналитический метод решения динамических задач теории упругости для составной упругой структуры, составленной из слоистого протяженного волновода и области конечных размеров. Для описания плоских колебаний в частотной области используются метод спектральных элементов и полуаналитический метод конечных элементов (ПАМКЭ).

Продемонстрирована сходимость гибридного метода и показано хорошее совпадение с результатами, полученными методом конечных элементов в пакете COMSOL Multiphysics®. Следует отметить, что для протяженных волноводов точность построения решения с помощью ПАМКЭ контролировалась путем сравнения с методом граничных интегральных уравнений (МГИУ). Можно заключить, что ПАМКЭ обеспечивает близкую к МГИУ точность, если на данной частоте количество узлов превосходит количество распространяющихся мод.

Предложенный гибридный метод может быть полезен для изучения волновых процессов в акустических метаматериалах (например, для метаматериалов в виде пластины с периодическим массивом тонких полосовых полостей) [23] и проведения параметрического анализа с целью определения наиболее оптимальной конфигурации.

Литература [References]

- Бураго, Н. Г., Никитин, И. С., Якушев, В. Л., Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2016, т. 56, № 6, с. 1082–1092. [Burago, N. G., Nikitin, I. S., Yakushev, V. L., Hybrid numerical method for solving nonstationary problems of continuum mechanics using adaptive superimposed grids. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki*

- i matematicheskoy fiziki = Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 6, pp. 1082–1092. (in Russian)] DOI: [10.7868/s004466916060107](https://doi.org/10.7868/s004466916060107)
- 2. Lisitsa, V., Tcheverda, V., Botter, C., Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation. *Journal of Computational Physics*, 2016, vol. 311, pp. 142–157. DOI: [10.1016/j.jcp.2016.02.005](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.02.005)
 - 3. Lu, J.-F., Liu, Y., Feng, Q.-S., Wavenumber domain finite element model for the dynamic analysis of the layered soil with embedded structures. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2022, vol. 96, pp. 104696. DOI: [10.1016/j.euromechsol.2022.104696](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104696)
 - 4. Komatitsch, D., Vilotte, J.-P., Vai, R., Castillo-Covarrubias, J. M., Sánchez-Sesma, F. J., The spectral element method for elastic wave equations – application to 2-D and 3-D seismic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 45, no. 9, pp. 1139–1164. DOI: [10.1002/\(sici\)1097-0207\(19990730\)45:9<1139::aid-nme617>3.0.co;2-t](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0207(19990730)45:9<1139::aid-nme617>3.0.co;2-t)
 - 5. Ostachowicz, W., Kudela, P., Krawzuk, M., Zak, A. J., *Guided Waves in Structures for SHM The Time-Domain Spectral Element Method*. John Wiley & Sons, 2012. DOI: [10.1002/9781119965855](https://doi.org/10.1002/9781119965855)
 - 6. Баженов, В. Г., Игумнов, Л. А., *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями*. Москва, Физматлит, 2008. [Bazhenov, V. G., Igumnov, L. A., *Metody granichnykh integral'nykh uravnenii i granichnykh elementov v reshenii zadach trekhmernoy dinamicheskoy teorii uprugosti s sopryazhennymi polyami* = The boundary integral equation method and the boundary element method for three-dimensional elastodynamic problems with conjugate fields. Moscow, Fizmatlit, 2008. (in Russian)]
 - 7. Song, C., Wolf, J. P., The scaled boundary finite-element method—alias consistent infinitesimal finite-element cell method—for elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, vol. 147, no. 3-4, pp. 329–355. DOI: [10.1016/s0045-7825\(97\)00021-2](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(97)00021-2)
 - 8. Бабешко, В. А., Глушков, Е. В., Зинченко, Ж. Ф., *Динамика неоднородных линейно–упругих сред*. Москва, Наука, 1989. [Babeshko, V. A., Glushkov, E. V., Zinchenko, Zh. F., *Dinamika neodnorodnykh lineyno–uprugikh sred* = Dynamics of inhomogeneous linearly elastic media. Moscow, Nauka, 1989. (in Russian)]
 - 9. Ватулян, А. О., Шамшин, В. М., Новый вариант граничных интегральных уравнений и их применение к динамическим пространственным задачам теории упругости. *Прикладная математика и механика*, 1998, т. 62, № 3, с. 462–469. [Vatulyan, A. O., Shamshin, V. M., A new version of boundary integral equations and their application to dynamic spatial problems of elasticity theory. *Prikladnaja matematika i mechanika* = Applied Mathematics and Mechanics, 1998, vol. 62, no. 3, pp. 462–469. (in Russian)]
 - 10. Manolis, G. D., Dineva, P. S., Rangelov, T. V., Wuttke, F., State-of-the-Art for the BIEM. *Solid Mechanics and Its Applications*, 2017, vol. 240, pp. 9–52. DOI: [10.1007/978-3-319-45206-7_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-45206-7_2)
 - 11. Bartoli, I., Marzani, A., Lanza di Scalea, F., Viola, E., Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol. 295, no. 3-4, pp. 685–707. DOI: [10.1016/j.jsv.2006.01.021](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.021)
 - 12. Vivar-Perez, J. M., Duczek, S., Gabbert, U., Analytical and higher order finite element hybrid approach for an efficient simulation of ultrasonic guided waves I: 2D-analysis. *Smart Structures and Systems*, 2014, vol. 13, no. 4, pp. 587–614. DOI: [10.12989/ss.2014.13.4.587](https://doi.org/10.12989/ss.2014.13.4.587)
 - 13. Zou, F., Aliabadi, M. H., A boundary element method for detection of damages and self-diagnosis of transducers using electro-mechanical impedance. *Smart Materials and Structures*, 2015, vol. 24, no. 9, pp. 095015. DOI: [10.1088/0964-1726/24/9/095015](https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/9/095015)
 - 14. Глушков, Е. В., Глушкова, Н. В., Евдокимов, А. А., Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах. *Акустический журнал*, 2018, № 1, с. 3–12. [Glushkov, E. V., Glushkova, N. V., Evdokimov, A. A., Hybrid numerical-analytical scheme for calculating elastic wave diffraction in locally inhomogeneous waveguides. *Akusticheskiy zhurnal* = *Acoustical Physics*, 2018, no. 1, pp. 33–12. (in Russian)] DOI: [10.7868/S0320791918010082](https://doi.org/10.7868/S0320791918010082)
 - 15. Golub, M. V., Shpak, A. N., Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, vol. 65, pp. 234–255. DOI: [10.1016/j.apm.2018.08.019](https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.08.019)
 - 16. Malik, M. K., Chronopoulos, D., Tanner, G., Transient ultrasonic guided wave simulation in layered composite structures using a hybrid wave and finite element scheme. *Composite Structures*, 2020, vol. 246, pp. 112376. DOI: [10.1016/j.compstruct.2020.112376](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112376)

17. Новиков, О. И., Евдокимов, А. А., Реализация гибридного численно-аналитического подхода для решения задач дифракции SH-волны на препятствиях произвольной формы. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2020, т. 17, № 2, с. 49–56. [Novikov, O. I., Evdokimov, A. A., Implementation of a hybrid numerical-analytical approach for solving the problems of SH-wave diffraction by arbitrary-shaped obstacles. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomiceskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2020, vol. 17 no. 2, pp. 49–56. (in Russian)] DOI: [10.31429/vestnik-17-2-49-56](https://doi.org/10.31429/vestnik-17-2-49-56)
18. Варелджан, М. В., Двухэтапная вычислительная схема для моделирования возбуждения упругих колебаний в изотропном слое поверхностным пьезопреобразователем. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 1, с. 57–69. [Vareldzhan, M. V., Two-step computational scheme for modeling the excitation of elastic waves by an ultrasonic piezoelectric transducer. *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 57–69. (in Russian)] DOI: [10.31429/vestnik-21-1-57-69](https://doi.org/10.31429/vestnik-21-1-57-69)
19. Shi, L., Zhou, Y., Wang, J.-M., Zhuang, M., Liu, N., Liu, Q. H., Spectral element method for elastic and acoustic waves in frequency domain. *Journal of Computational Physics*, 2016, vol. 327, pp. 19–38. DOI: [10.1016/j.jcp.2016.09.036](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.09.036)
20. Бубенчиков, А. М., Попонин, В. С., Мельникова, В. Н., Математическая постановка и решение пространственных краевых задач методом спектральных элементов. *Вест. Том. гос. ун-та. Математика и механика*, 2008, № 3, с. 70–76. [Bubenchikov, A. M., Poponin, V. S., Mel'nikova, V. N., The mathematical statement and solution of spatial boundary value problems by means of spectral element method. *Matematika i mehanika = Mathematics and Mechanics*, 2008, no. 3, pp. 70–76. (in Russian)]
21. Голуб, М. В., Шпак, А. Н., Бюте, И., Фритцен, К.-П., Моделирование гармонических колебаний и определение резонансных частот полосового пьезоэлектрического актуатора методом конечных элементов высокого порядка точности. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2015, т. 8, № 4, с. 397–407. [Golub, M. V., Shpak, A. N., Buethe, I., Fritzen, C.-P., Harmonic motion simulation and resonance frequencies determination of a piezoelectric strip-like actuator using high precision finite element method. *Vychislitel'naya mehanika sploshnykh sred = Computational continuum mechanics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 397–407. (in Russian)] DOI: [10.7242/1999-6691/2015.8.4.34](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.34)
22. Ханазарян, А. Д., Голуб, М. В., Гибридный метод для моделирования антиплоских колебаний слоистых волноводов с присоединенными элементами. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2023, т. 16, № 1, с. 101–114. [Khanazaryan, A. D., Golub, M. V., Hybrid method for modelling anti-plane vibrations of layered waveguides with bonded composite joints. *Vychislitel'naya mehanika sploshnykh sred = Computational continuum mechanics*, 2023, vol. 16, no. 1, pp. 101–114. (in Russian)] DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.1.8](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.1.8)
23. Golub, M. V., Moroz, I. A., Wang, Y., Khanazaryan, A. D., Kanishchev, K. K., Okoneshnikova, E. A., Shpak, A. N., Mareev, S. A., Zhang, C., Design and Manufacturing of the Multi-Layered Metamaterial Plate with Interfacial Crack-like Voids and Experimental-Theoretical Study of the Guided Wave Propagation. *Acoustics*, 2023, vol. 5, pp. 122–135. DOI: [10.3390/acoustics5010008](https://doi.org/10.3390/acoustics5010008)

УДК 519.634

EDN: RANMTJ DOI: 10.31429/vestnik-21-2-62-69

Схлопывание осесимметричной каверны при медленных движениях цилиндра в жидкости после отрывного удара

М. В. Норкин  

Южный федеральный университет, ул. Большая Садовая 105/42, Ростов-на-Дону, 344000, Россия

✉ Норкин Михаил Викторович; ORCID 0000-0002-9508-5996; SPIN 1638-4892; e-mail: norkinmi@mail.ru

Аннотация. Рассматривается осесимметричная задача о вертикальном и отрывном ударе цилиндра конечных размеров под свободной поверхностью идеальной несжимаемой тяжелой жидкости. Предполагается, что после удара цилиндр движется вглубь жидкости с постоянной скоростью. Позади тела образуется присоединенная каверна и появляется новая внутренняя свободная граница жидкости. Требуется изучить процесс схлопывания каверны при малых скоростях движения цилиндра, которые соответствуют небольшим числам Фруда. В главном асимптотическом приближении формулируется задача с односторонними ограничениями, на основе которой определяется динамика круговой линии отрыва и время схлопывания тонкой каверны. Проводится асимптотический анализ формы каверны с учетом решений типа пограничного слоя вблизи линии отрыва. Показывается, что при малых числах Фруда внутренняя свободная граница подходит к линии отрыва под прямым углом.

Ключевые слова: отрывной удар цилиндра, динамика зоны отрыва, схлопывание каверны, малые числа Фруда, решения типа пограничного слоя.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Норкин М. В. Схлопывание осесимметричной каверны при медленных движениях цилиндра в жидкости после отрывного удара // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 62–69. EDN: RANMTJ. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-62-69

Поступила 27 мая 2024 г. После доработки 10 июня 2024 г. Принято 12 июня 2034 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Collapse of an Axisymmetric Cavity During Slow Movements of a Cylinder in a Liquid After a Separation Impact

M. V. Norkin  

Southern Federal University, Bolshaya Sadovaya str., 105/42, Rostov-on-Don, 344000, Russia

✉ Mikhail V. Norkin; ORCID 0000-0002-9508-5996; e-mail: norkinmi@mail.ru

Abstract. The axisymmetric problem of the vertical and separation impact of a cylinder of finite dimensions under the free surface of an ideal, incompressible, heavy fluid is considered. It is assumed that after the impact the cylinder moves deep into the liquid at a constant speed. An attached cavity is formed behind the body and a new internal free fluid boundary appears. It is required to study the process of cavity collapse at low cylinder speeds, which correspond to small Froude numbers. In the main asymptotic approximation, a problem with one-sided constraints is formulated, on the basis of which the dynamics of the circular separation line and the collapse time of a thin cavity are determined. An asymptotic analysis of the cavity shape is carried out taking into account solutions such as a boundary layer near the separation line. It is shown that at low Froude numbers the internal free boundary approaches the separation line at a right angle.

Keywords: separation impact of a cylinder, dynamics of the separation zone, cavity collapse, small Froude numbers, boundary layer type solutions.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Norkin, M. V., Collapse of an axisymmetric cavity during slow movements of a cylinder in a liquid after a separation impact. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 62–69. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-62-69

Received 27 May 2024. Revised 10 June 2024. Accepted 12 June 2034. Published 28 June 2024.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Введение

Задача об ударе плавающего тела с учетом отрыва частиц жидкости от его поверхности относится к числу классических задач современной гидродинамики [1]. Представляя большой самостоятельный интерес для аналитических исследований, она дает начальные условия для решения более сложной динамической кавитационной задачи. Сразу после удара начинает формироваться присоединенная каверна и образуется внутренняя свободная граница жидкости. Давление в каверне предполагается постоянным и равным давлению насыщенных паров жидкости или газа (или давлению газа при искусственной кавитации). Требуется изучить динамику каверны и влияние на нее характерных параметров задачи. Одним из направлений исследования таких задач является асимптотический анализ на малых временах. Такой подход позволяет определить форму каверны на некотором начальном этапе движения тела в жидкости (подробная библиография приводится в [2]). Изучение дальнейшей динамики, в общем случае, остается сложной и малоизученной задачей. В связи с этим представляют интерес такие подходы, в которых нет серьезных ограничений на продолжительность времени рассматриваемого процесса. В работах [3, 4] данные задачи изучались при дополнительном предположении о малости скорости движения тела после удара (что соответствует небольшим числам Фруда). При таком допущении возмущения свободных границ жидкости являются незначительными и процесс схлопывания каверны, в основном, сводится к изучению динамики точек отрыва. Следует отметить, что несмотря на малость поперечных размеров каверны, определение ее формы также представляет определенный интерес. Ранее такие задачи исследовались только в плоской постановке (круг и прямоугольник [3, 4]). В настоящей статье дается обобщение этих результатов на пространственную осесимметричную задачу. Показывается, что специальные погранслойные решения, построенные для возмущения внутренней свободной границы жидкости, также хорошо аппроксимируют внешнее разложение, как и аналогичные решения в плоском случае.

Среди близких направлений исследования отметим задачи проникания твердых тел в жидкость с учетом отрыва частиц жидкости от их поверхностей [5]; задачи подводного старта ракет кавитационным способом [6]; экспериментальное изучение ударного воздействия жидкости на твердые стенки в условиях кавитации [7, 8].

Общие принципы кавитационных течений при взаимодействии твердых тел с жидкостью изложены в [9, 10].

1. Постановка задачи

Рассматривается осесимметричная задача об отрывном ударе цилиндра конечных размеров под свободной поверхностью идеальной несжимаемой тяжелой жидкости [1]. Предполагается, что после удара цилиндр движется вглубь жидкости с постоянной скоростью. За телом образуется присоединенная каверна, форма которой зависит от физических и геометрических параметров задачи. Требуется изучить процесс схлопывания каверны при малых скоростях движения цилиндра, которые соответствуют небольшим числам Фруда. Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с цилиндром, имеет вид (рис. 1)

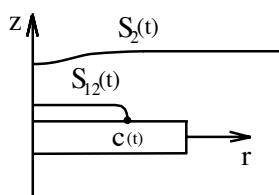


Рис. 1. Схема течения жидкости в меридиональной плоскости r, z

Fig. 1. Scheme of fluid flow in the meridional plane

$$\Delta\varphi = 0, \quad R \in \Omega(t), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -n_z, \quad R \in S_{11}(t), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial\varphi}{\partial z} + 0,5\varepsilon^2 (\nabla\varphi)^2 + b + \zeta - \varepsilon^2\tau - H - 0,5\chi = 0, \quad R \in S_{12}(t), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + 1 = \frac{\partial\zeta}{\partial r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial\zeta}{\partial\tau}, \quad R \in S_{12}(t), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial\varphi}{\partial z} + 0,5\varepsilon^2 (\nabla\varphi)^2 + \psi = 0, \quad R \in S_2(t), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \quad R \in S_2(t), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -H_b + \varepsilon^2\tau; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \quad r = R_b, \quad (1.7)$$

$$\varphi(r, z, 0) = \varphi_0(r, z), \quad \psi(r, 0) = 0, \quad \zeta(r, 0) = 0. \quad (1.8)$$

Потенциал скоростей $\varphi_0 = \varphi_0(r, z)$, приобретенных частицами жидкости в момент, непосредственно следующий после удара (в начальный момент времени), а также первоначальная зона отрыва находятся на основе решения классической модели удара с отрывом [1]:

$$\Delta\varphi_0 = 0, \quad R \in \Omega(0); \quad \varphi_0 = 0, \quad z = H, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = -n_z, \quad \varphi_0 \leq 0, \quad R \in S_{11}(0), \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \geq -n_z, \quad \varphi_0 = 0, \quad R \in S_{12}(0), \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} = 0, \quad z = -H_b; \quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial r} = 0, \quad r = R_b. \quad (1.12)$$

В поставленной задаче используется растянутое время τ , связанное с безразмерным временем t равенством $t = \varepsilon\tau$. Целесообразность его введения объясняется быстротой процесса схлопывания каверны после удара (обычно он составляет сотые или десятые доли секунды), а также необходимостью согласования порядков рассматриваемых величин в главном асимптотическом приближении.

Основными безразмерными параметрами задачи являются числа Фруда и кавитации

$$\varepsilon = Fr = \frac{V_0}{\sqrt{ga}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho ga},$$

где p_a — атмосферное давление; $p_c = \text{const}$ — давление в каверне; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность жидкости.

Скорость цилиндра V_0 предполагается малой величиной по сравнению с характерной скоростью $V = \sqrt{ga}$. Малый параметр ε , по которому строится асимптотическое разложение, фактически совпадает с числом Фруда.

Безразмерные переменные вводятся с помощью равенств

$$t' = \frac{a}{V} t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad z' = az, \quad \varphi' = aV\varphi, \quad p' = \rho V^2 p,$$

где штрихами помечаются размерные величины.

Неподвижные координаты X, Y, Z связаны с подвижными x, y, z соотношениями $X = x$, $Y = y$, $Z = z + h(t)$, где $h(t)$ — закон движения цилиндра. Предполагается, что ось z направлена против вектора силы тяжести, начало координат находится в центре цилиндра.

Функции φ, ζ, ψ выражаются через потенциал скоростей Φ , а также возмущения внутренней и внешней свободных границ жидкости η и ξ по формулам

$$\varphi(r, z, \tau) = \varepsilon^{-1} \Phi(r, z, \varepsilon\tau), \quad \zeta(r, \tau) = \eta(r, \varepsilon\tau), \quad \psi(r, \tau) = \xi(r, \varepsilon\tau).$$

В статье также используются следующие обозначения: $\Omega(t)$ — область течения жидкости; $S_{11}(t) = \{z = b, c(t) \leq r \leq 1\} \cup \{z = -b, 0 \leq r \leq 1\} \cup \{r = 1, -b \leq z \leq b\}$ — часть поверхности цилиндра, на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t) = \{z = b + \eta(r, t), 0 < r < c(t)\}$ — внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $z = H + \xi(r, t) + \varepsilon t$ — уравнение внешней свободной границы; $\mathbf{V} = (0, 0, -V_0)$ — скорость, приобретенная цилиндром в результате удара ($V_0 > 0$); $h(t) = -\varepsilon t$ — безразмерный закон движения цилиндра; $a, 2b$ — радиус и высота цилиндра (после обрезки радиуса для b сохраняется прежнее обозначение); R_b — радиус цилиндрического бассейна, в котором находится плавающий цилиндр; $z = -H_b$ — его дно; R — радиус-вектор с цилиндрическими координатами (r, z) .

На линии пересечения внутренней свободной границы жидкости с поверхностью цилиндра (на круговой линии отрыва) ставится условие Кутты–Жуковского, означающее, что скорость жидкости на ней должна быть конечной.

2. Асимптотика медленных движений

Решение задачи (1.1)–(1.12) будем искать в виде следующих асимптотических разложений:

$$\varphi(r, z, \tau) = \varphi_1(r, z, \tau) + \dots, \quad c(t) = c(\varepsilon\tau) = c_0(\tau) + \dots, \quad (2.1)$$

$$\zeta(r, \tau) = \varepsilon^2 \zeta_1(r, \tau) + \dots, \quad \psi(r, \tau) = \varepsilon^2 \psi_1(r, \tau) + \dots, \quad (2.2)$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по ε .

Подставляя разложения (2.1)–(2.2) в уравнение и граничные условия задачи (1.1)–(1.8), с помощью формулы Тейлора осуществляя перенос краевых условий с возмущенных участков границы области $\Omega(t)$ на первоначально невозмущенный уровень, а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , придем в главном приближении к смешанной краевой задаче теории потенциала в области $\Omega(0)$. В предположении, что круговая линия отрыва монотонно стягивается в точку, проинтегрируем полученное динамическое условие в зоне отрыва по времени от 0 до τ при фиксированном $r \in (0, c_0(\tau))$. Интегрируя еще динамическое условие на внешней свободной границе, придем к следующей задаче:

$$\Delta \varphi_1 = 0, \quad R \in \Omega(0); \quad \varphi_1 = 0, \quad z = H, \quad (2.3)$$

$$\varphi_1 = (0,5\chi + H - b)\tau, \quad z = b, \quad 0 < r < c_0(\tau), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -1, \quad z = b, \quad c_0(\tau) < r < 1, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -1, \quad z = -b, \quad 0 < r < 1; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = 0, \quad r = 1, \quad -b < z < b, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0, \quad z = -H_b; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = 0, \quad r = R_b. \quad (2.7)$$

В силу неизвестности $c_0(\tau)$ задача (2.3)–(2.7) является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами. Радиус круговой линии отрыва $c_0(\tau)$ в каждый момент времени определяется из условия Кутты–Жуковского, которое равносильно системе неравенств

$$(0,5\chi + H - b)\tau - \varphi_1 + \varphi_0 \geq 0, \quad z = b, \quad c_0(\tau) < r < 1, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \geq -1, \quad z = b, \quad 0 < r < c_0(\tau). \quad (2.9)$$

Неравенство (2.8) является следствием динамического условия $p \geq p_c$, означающего что давление в зоне контакта не может опускаться ниже давления в каверне. Кинематическое

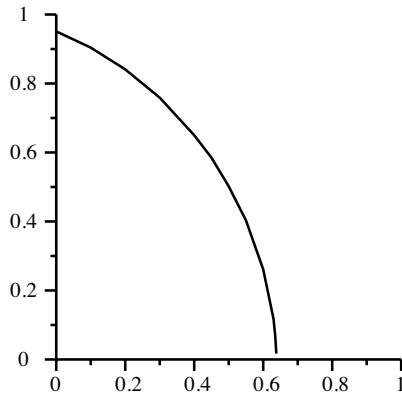


Рис. 2. График функции $C_0(\tau)$

Fig. 2. Function graph $C_0(\tau)$

условие (2.9) говорит о том, что жидкие частицы не входят внутрь твердого тела. Начальное условие $\varphi_1(r, z, 0) = \varphi_0(r, z)$ выполняется, поскольку при $\tau = 0$ получается задача, совпадающая с классической моделью удара с отрывом (1.9)–(1.12).

Задача с односторонними ограничениями (2.3)–(2.9) решается численно с помощью специального итерационного метода, применявшегося ранее при исследовании плоских задач [2–4]. Приведем численные значения величины $c_0(\tau)$ для некоторых τ ($\chi = 0$, $b = 0,1$, $H = 1$, $R_b = 4$, $H_b = 3$): $c_0(0) = 0,951$; $c_0(0,2) = 0,841$; $c_0(0,4) = 0,65$; $c_0(0,5) = 0,502$; $c_0(0,6) = 0,261$; $c_0(0,63) = 0,117$; $c_0(0,635) = 0,067$. При $\tau = 0,64$ зона отрыва не видна (происходит схлопывание тонкой каверны). График функции $C_0(\tau)$ изображен на рис. 2.

На основании решения задачи (2.3)–(2.9) находятся главные приближения для возмущений внутренней и внешней свободных границ жидкости. Для функций $\zeta_1(r, \tau)$, $\psi_1(r, \tau)$ справедливы следующие представления:

$$\zeta_1(r, \tau) = \int_0^\tau \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + 1 \right) d\tau, \quad z = b; \quad \psi_1(r, \tau) = \int_0^\tau \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} d\tau, \quad z = H. \quad (2.10)$$

Далее вкратце остановимся на построении двух специальных погранслойных решений для функции $\zeta(r, \tau)$. Первое из них дает хорошую аппроксимацию внешнего разложения (2.2) практически во всей зоне отрыва, а второе поправляет это разложение в маленькой окрестности линии отрыва (условие $\zeta_1(c_0(\tau), \tau) = 0$ не выполняется).

Учитывая регулярность решения задачи с односторонними ограничениями (1.9)–(1.12) и тот факт, что производная функции φ_1 по r обращается в ноль при $z = b$, $0 < r < c_0(\tau)$, заменим производные функции φ_1 по z и r в кинематическом уравнении (1.4) асимптотическими формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + 1 &\sim \beta(\tau) \sqrt{c_0(\tau) - r}, \quad r \rightarrow c_0(\tau) - 0, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z}(r, b, \tau) \zeta + \dots \sim \frac{-\beta(\tau)}{2\sqrt{c_0(\tau) - r}} \zeta, \quad r \rightarrow c_0(\tau) - 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где коэффициент $\beta(\tau)$ находится численно.

В результате придем к уравнению, содержащему только одну неизвестную функцию $\zeta(r, \tau)$. Вначале, следуя классическому подходу, представим искомую функцию в виде

$$\zeta(r, \tau) = \varepsilon^{7/2} \frac{\beta(\tau)}{c'_0(\tau)} F(\tilde{r}) + \dots, \quad F(\tilde{r}) = \frac{2}{3} \tilde{r}^{3/2}, \quad \tilde{r} = \frac{c_0(\tau) - r}{\varepsilon}. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в дифференциальное уравнение внутренней свободной границы, осуществляя переход к погранслойной переменной \tilde{r} и, используя приведенные выше асимптотические формулы, видим, что функция $\zeta(r, \tau)$ удовлетворяет этому уравнению в главном асимптотическом приближении (левая часть дифференциального уравнения и производная по времени имеют порядок $\sqrt{\varepsilon}$, а нелинейный член имеет более высокий порядок малости). Также можно убедиться в том, что выполняется условие срашивания для производной $\zeta_\tau(r, \tau)$. В самом деле, из (2.12) следует асимптотическая формула

$$\zeta_\tau(r, \tau) = \varepsilon^{5/2} \beta(\tau) \sqrt{\tilde{r}} + \dots,$$

которая при больших \tilde{r} должна переходить в соответствующее внешнее разложение. Последнее вытекает из того, что главный член асимптотики производной внешнего разложения (2.2) при $r \rightarrow c_0(\tau) - 0$ после перехода к внутренней переменной \tilde{r} будет иметь такой же вид (получается на основании формул (2.10), (2.11)). Не останавливаясь на подробном анализе остальных условий заметим, что функция, определяемая формулами (2.12), не может быть использована в качестве погранслойной. Это объясняется тем, что в силу отрицательности коэффициента ($\beta(\tau) > 0, c'_0(\tau) < 0$) соответствующая осесимметрическая поверхность лежит внутри цилиндра. Отметим также, что функция (2.12) не удовлетворяет однородному начальному условию и условию срашивания с внешним разложением (хотя однородное условие на линии отрыва выполняется). Таким образом, эту функцию необходимо подправить. Поскольку условие срашивания справедливо для производной $\zeta_\tau(r, \tau)$, то можно попытаться восстановить функцию $\zeta(r, \tau)$ с помощью интегрирования по времени. В силу того, что сама зона срашивания зависит от времени, неправильно будет выполнить интегрирование по времени с произвольной постоянной при фиксированном r (то есть, добавить к (2.12) произвольную постоянную). Если все-таки так сделать и определить эту постоянную из начального условия, то полученное решение будет плохо согласовываться с внешним разложением. Однако можно провести локальное интегрирование за весьма маленький временной промежуток в окрестности фиксированного τ (при этом r считаем фиксированным и принадлежащим зоне срашивания). При интегрировании возникает произвольная постоянная, которая для каждого бесконечно малого временного промежутка будет своя. В результате получим функцию от времени, которую представим в виде произведения временного множителя в (2.12) на некоторую величину γ . Определяя γ из начального условия, придем к следующему решению типа пограничного слоя

$$\zeta(r, \tau) = \varepsilon^{7/2} \frac{\beta(\tau)}{c'_0(\tau)} [F(\tilde{r}) - F(\tilde{r}_0)], \quad \tilde{r} = \frac{c_0(\tau) - r}{\varepsilon}, \quad \tilde{r}_0 = \frac{c_0(0) - r}{\varepsilon}. \quad (2.13)$$

Теперь проведем другие рассуждения, подтверждающие справедливость формулы (2.13). Поскольку решение типа пограничного слоя строится при фиксированном τ , то можно с самого начала искать решение в форме (2.13) с замороженным коэффициентом $\beta(\tau)[c'_0(\tau)]^{-1}$ (при этом зависимость от времени будет осуществляться только через погранслойную переменную). В этом случае функция (2.13) будет удовлетворять в главном приближении кинематическому дифференциальному уравнению (1.4) для данного фиксированного момента τ и, кроме этого, будет выполнено условие срашивания для производной $\zeta_\tau(r, \tau)$ (также для данного τ). Последние рассуждения теряют силу в случае, если $F(\tilde{r}_0)$ заменить на величину, зависящую от времени.

Справедливость условия срашивания для самой функции ζ проверяется численно на различных примерах. Отметим, что начальное условие при $\tau = 0$ будет выполнено точно, а условие на линии отрыва по-прежнему не выполняется (хотя соответствующая кривая подходит к твердой границе ближе, чем внешнее разложение).

На рис. 3 показано согласование формулы (2.13) с внешним разложением при $\varepsilon = 0,4$, $\tau = 0,4$, $\chi = 0$, $b = 0,1$, $H = 1$, $R_b = 4$, $H_b = 3$. Рис. 4 соответствует случаю $\varepsilon = 0,3$ (остальные параметры не меняются). Из приведенных рисунков видно, что при уменьшении параметра ε происходит сближение соответствующих кривых вблизи точки отрыва. Последнее полностью соответствует условию срашивания в главном приближении. Заметим, что хорошее



Рис. 3. Согласование погранслойного решения (сплошная линия) и внешнего разложения (пунктирная линия) при $\varepsilon = 0,4$; $\tau = 0,4$ в меридиональной плоскости r, z

Fig. 3. Agreement between the boundary layer solution (solid line) and the external expansion (dashed line) at $\varepsilon = 0,4$; $\tau = 0,4$ in the meridional plane r, z



Рис. 4. Согласование погранслойного решения (сплошная линия) и внешнего разложения (пунктирная линия) при $\varepsilon = 0,3$; $\tau = 0,4$ в меридиональной плоскости r, z

Fig. 4. Agreement between the boundary layer solution (solid line) and the external expansion (dashed line) at $\varepsilon = 0,3$; $\tau = 0,4$ in the meridional plane r, z

согласование получается не только вблизи точки отрыва, но также и во всей зоне отрыва. Таким образом, для определения формы внутренней свободной границы жидкости при малых ε можно использовать формулу (2.13).

Теперь построим второе решение типа пограничного слоя, которое будет удовлетворять необходимому условию при $r = c_0(\tau)$ и согласовываться с первым решением. Искомую функцию будем искать в виде

$$\zeta(r, \tau) = \varepsilon^\alpha F(\tilde{r}) + \dots, \quad \tilde{r} = \frac{c_0(\tau) - r}{\varepsilon^\lambda}, \quad \alpha > 0, \quad \lambda > 0.$$

Подставляя этот проект решения в кинематическое уравнение (1.4) и учитывая асимптотические формулы (2.11), приDEM к равенству, в которое входят слагаемые, имеющие следующие порядки малости по ε : $\varepsilon^{0,5\lambda}$, $\varepsilon^{2\alpha-1,5\lambda}$, $\varepsilon^{\alpha-2-\lambda}$. Если все показатели равны, то величина $\lambda = -4$. Поэтому рассмотрим случай, когда равными оказываются только два показателя степени а третье слагаемое имеет более высокий порядок малости по ε . Возможны три случая: $0,5\lambda = 2\alpha - 1,5\lambda$, $0,5\lambda = \alpha - 2 - \lambda$, $2\alpha - 1,5\lambda = \alpha - 2 - \lambda$. В первом случае $\lambda < -4$. Во втором — получается решение с отрицательным коэффициентом, уходящее внутрь твердого тела. Поэтому остается третий случай, который приводит к следующему выражению для функции $F(\tilde{r})$ ($\lambda = 2\alpha + 4$):

$$F(\tilde{r}) = -\frac{2c'_0(\tau)}{\beta(\tau)}\sqrt{\tilde{r}}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим для возмущения свободной границы вблизи линии отрыва асимптотическую формулу

$$\zeta(r, \tau) \sim -\varepsilon^{-2}\frac{2c'_0(\tau)}{\beta(\tau)}\sqrt{c_0(\tau) - r}.$$

Отметим, что при малых ε область применимости этого решения будет очень маленькой. Соответствующая кривая выходит из точки отрыва под прямым углом и практически не отличается от вертикального отрезка прямой. Сравнение двух решений типа пограничного слоя в промежуточном пределе может быть выполнено при надлежащем выборе соответствующих параметров.

Заключение

В работе представлен численно-аналитический метод определения формы присоединенной каверны при медленных движениях цилиндра в жидкости после отрывного удара. В главном

асимптотическом приближении сформулирована задача с односторонними ограничениями, на основе которой находится динамика круговой линии отрыва и время схлопывания тонкой каверны. Для определения формы внутренней свободной границы жидкости построены специальные погранслойные решения и показано их хорошее согласование с внешним разложением.

Литература [References]

1. Седов, Л.И., *Плоские задачи гидродинамики и аэrodинамики*. Москва, Наука, 1980. [Sedov, L.I., *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodynamiki = Plane problems of hydrodynamics and aerodynamics*. Moscow, Nauka, 1980. (in Russian)]
2. Норкин, М.В., Образование каверны при наклонном отрывном ударе кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости. *Сибирский журнал индустриальной математики*, 2016, т. 19, № 4, с. 81–92. [Norkin, M.V., Cavity formation at the inclined separated impact on a circular cylinder under a free surface of a heavy liquid. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki = Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2016, vol. 10, no. 4, pp. 538–548. (in Russian)] DOI: [10.1134/S1990478916040104](https://doi.org/10.1134/S1990478916040104)
3. Норкин, М.В., Динамика точек отрыва при ударе плавающего кругового цилиндра. *Прикладная механика и техническая физика*, 2019, т. 60, № 5, с.19–27. [Norkin, M.V., Dynamics of separation points upon impact of a floating circular cylinder. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, no. 5, pp. 798–804. (in Russian)] DOI: [10.15372/PMTF20190503](https://doi.org/10.15372/PMTF20190503)
4. Норкин, М.В., Асимптотика медленных движений прямоугольного цилиндра в жидкости после отрывного удара. *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*, 2020, т. 162, кн. 4, с. 426–440. [Norkin, M.V., Asymptotics of slow motions of a rectangular cylinder in a liquid after a separation impact. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki = Scientific Notes of Kazan University. Series Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 162, no. 4, pp. 426–440. (in Russian)] DOI: [10.26907/2541-7746.2020.4.426-440](https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.4.426-440)
5. Reinhard, M, Korobkin, A.A., Cooker, M.J., Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration. *Journal of Engineering Mathematics*, 2016, vol. 96(1), pp. 155–174. DOI: [10.1007/s10665-015-9788-8](https://doi.org/10.1007/s10665-015-9788-8)
6. Пегов, В.И., Мошкин, И.Ю., Расчет гидродинамики кавитационного способа старта ракет. *Челябинский физико-математический журнал*, 2018, т. 3, № 4, с. 476–485. [Pegov, V.I., Moshkin, I.Yu, Analysis of Fluid Dynamics of Cavitation Launch Technique. *Chelyabinskii fiziko-matematicheskiy zhurnal = Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2018, vol. 3, no. 4, pp. 476–485. (in Russian)] DOI: [10.24411/2500-0101-2018-13408](https://doi.org/10.24411/2500-0101-2018-13408)
7. Bergant, A., Simpson, A.R., Tijsseling, A.S., Water hammer with column separation: A historical review. *Journal of Fluids and Structures*, 2006, vol. 22, no. 2, pp. 135–171. DOI: [10.1016/j.jfluidstructs.2005.08.008](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2005.08.008)
8. Аганин, А.А., Ильгамов, М.А., Мустафин, И.Н., Ударная кавитация жидкости в цилиндрической емкости. *Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки*, 2020, т. 162, кн. 1. с. 27–37. [Aganin, A.A., Ilgamov, M.A., Mustafin, I.N., Impact-induced cavitation in a cylindrical container with liquid. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki = Scientific Notes of Kazan University. Series Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 162, no. 1, pp. 27–37. (in Russian)] DOI: [10.26907/2541-7746.2020.1.27-37](https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.27-37)
9. Гуревич, М.И., *Теория струй идеальной жидкости*. Москва, Наука, 1979. [Gurevich, M.I., *Teoriya struy ideal'noy zhidkosti = Theory of jets of an ideal fluid*. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
10. Иванов, А.Н., *Гидродинамика развитых кавитационных течений*. Ленинград, Судостроение, 1980. [Ivanov, A.N., *Gidrodinamika razvitykh kavitationsionnykh techeniy = Hydrodynamics of developed cavitations flows*. Leningrad, Shipbuilding, 1980. (in Russian)]

УДК 539.3

EDN: SCIMZG DOI: 10.31429/vestnik-21-2-70-79

К исследованию напряженно-деформируемого состояния упругого основания при наличии в нем вертикальных и горизонтальных инъекторов

И. С. Телятников¹✉, М. С. Капустин², А. В. Павлова², С. Е. Рубцов²

¹ Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия

² Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Телятников Илья Сергеевич; ORCID 0000-0001-8500-2133; SPIN 5501-1491; e-mail: ilux_t@list.ru

Аннотация. При создании систем сейсмо- и виброгашения, а также при укреплении грунта с помощью геотехнических барьеров используются различного вида инъекторы. К недостаткам использования систем инъекторов в тех или иных целях можно отнести отсутствие полной теории расчета их параметров, которая позволила бы обосновывать оптимальный выбор геометрии и обеспечить оценку влияния инъекторов в грунте на волновую картину в целом. В работе рассмотрен метод расчета параметров напряженно-деформированного состояния упругого основания при наличии в нем вертикальных и горизонтальных армирующих элементов. Рассчитаны распределения контактных напряжений под штампом, дана оценка влияния на них внутренних нагрузок в основании.

Ключевые слова: упругое основание, установившиеся колебания, поверхностная нагрузка, вертикальные армирующие элементы, горизонтальное включение, метод фиктивного поглощения.

Финансирование. Фрагменты работы выполнены в рамках ГЗ ЮНЦ РАН (00-24-13 № 122020100341-01).

Цитирование: Телятников И. С., Капустин М. С., Павлова А. В., Рубцов С. Е. К исследованию напряженно-деформируемого состояния упругого основания при наличии в нем вертикальных и горизонтальных инъекторов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 70–79. EDN: SCIMZG. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-70-79

Поступила 21 мая 2024 г. После доработки 20 6-2024 г. Принято 24 июня 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

To the Study of the Stress-strain State of an Elastic Foundation in the Presence of Vertical and Horizontal Injectors

I. S. Telyatnikov¹✉, M. S. Kapustin², A. V. Pavlova², S. E. Rubtsov²

¹ Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia

² Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Ilya S. Telyatnikov; ORCID 0000-0001-8500-2133; e-mail: ilux_t@list.ru

Abstract. Various types of injectors are used in the creation of seismic and vibration damping systems, as well as when strengthening the soil with the help of geotechnical barriers. The disadvantages of using injector systems for one purpose or another include the lack of a complete theory for calculating their parameters, which would make it possible to justify the optimal geometry choice and provide an assessment for the influence of injectors in the ground on the wave pattern as a whole. The study is aimed at modeling the response of an elastic foundation to vibration loading of a surface object in the presence of various types of buried emitters. In this work, we considered a method for calculating the parameters of the stress-strain state of an elastic foundation in the presence of vertical and horizontal reinforcing elements in it. For a series of calculated dispersion parameters of the elastic foundation, we constructed the amplitude-frequency characteristics for the vertical component of the Rayleigh wave in the mid-frequency range. The fictitious absorption method was used to solve the integral equations of the considered mixed contact problems. Which allowed us to calculate the distribution of contact stresses under the stamp and asses the influence of internal loads in the foundation. The models presented in the work can be used to calculate wave fields in soil foundations in the presence of vertical and horizontal injectors. The characteristics of which are

crucial for the development of seismic and vibration damping systems as well as structural solutions for strengthening soil, etc.

Keywords: elastic foundation, steady oscillations, surface load, vertical reinforcing elements, horizontal inclusion, fictitious absorption method.

Funding. Parts of the work were carried out within the framework of the State Assignment of the Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (00-24-13 No. 122020100341-01).

Cite as: Telyatnikov, I. S., Kapustin, M. S., Pavlova, A. V., Rubtsov, S. E., To the study of the stress-strain state of an elastic foundation in the presence of vertical and horizontal injectors. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 70–79. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-70-79

Received 21 May 2024. Revised 20 6-2024. Accepted 24 June 2024. Published 28 June 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

Одна из прикладных проблем инженерно-сейсмологических исследований состоит в выяснении последствий воздействия колебаний на грунты и сооружения. Несмотря на многочисленные исследования роли вибраций в инженерной геологии, даже локальные их проявления еще не до конца ясны.

В настоящее время существуют различные подходы к смягчению воздействия колебаний грунта на защищаемый объект, а также вибрации объектов на грунтовую среду. Специальные системы позволяют защитить здания и сооружения от воздействия колебаний без конструктивного вмешательства и нарушения их целостности путем армирования грунтового массива и тем самым изменения его геотехнических характеристик. Сейсмоизолирующими системами могут служить вертикальные и горизонтальные экраны (барьеры), заглушенные в грунт [1–3]. Концепция вертикального барьера обычно предполагает устройство по периметру сооружения рядов скважин в грунте, отпрессованных уплотняющим раствором [2]. Горизонтальные барьеры, заполненные акустически более жестким, чем окружающий грунт [3], материалом, также применяются в целях вибрационной защиты объектов.

С другой стороны, техногенные вибрации, создаваемые различными объектами, могут приводить к возникновению возбужденной сейсмичности, изменяя тем самым сейсмический режим региона. В таких случаях встает проблема создания систем виброгашения, в качестве последних нередко используют различные типы инъекторов. При строительстве в сложных грунтовых условиях также применяются обеспечивающие устройство фундаментов дополнительные конструкции (геотехнические барьеры), в том числе различного вида армирование грунта, используется вертикальный, горизонтальный и наклонный способы установки инъекторов, при этом количество скважин, их направление и длина определяются в зависимости от свойств грунтов [4–6 и др.].

К недостаткам использования систем инъекторов в тех или иных целях можно отнести отсутствие на сегодняшний день общей теории расчета их параметров, которая позволила бы обосновывать оптимальный выбор геометрии и обеспечить оценку влияния инъекторов в грунте на волновую картину в целом. Для этого требуется детальное изучение процесса распространения волн в деформируемом основании, содержащем армирующие элементы (вертикальные и/или горизонтальные).

Исследование направлено на моделирование реакции упругого основания на вибрационное нагружение поверхностного объекта в присутствии различных типов заглубленных излучателей.

1. Модели систем вертикальных и горизонтальных инъекторов

Волны, генерируемые заглубленными объектами, в результате интерференции могут как усиливать, так и гасить колебания, возбуждаемые поверхностью излучателем. Настоящая работа посвящена исследованию результатов вибрационных воздействий на грунтовую среду

поверхностного источника при наличии различных типов инъекторов. Рассматривается случай, когда штамп, расположенный на поверхности упругой среды, окружен по периметру жесткими вертикальными колоннами, и случай наличия горизонтального включения под штампом.

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) решаются граничные задачи об установившихся относительно положения равновесия гармонических (с круговой частотой ω) колебаниях жесткого круглого штампа ($r \leq a, z = 0$), без трения контактирующего с упругим слоем ($-h \leq z \leq 0, 0 \leq r$), под действием приложенной к нему силы, изменяющейся по гармоническому закону $\text{Re}[p(r) \exp(-i\omega t)]$. Нижняя грань слоя жестко защемлена. Система вертикальных колонн, моделируемых нагруженными жесткими включениями длины l_0 , располагается по периметру, образуя окружность радиуса $r_0 \geq a, -l_0 \leq z \leq 0$. Компоненты объемной силы на вертикальных включениях заданы соотношениями: $X_{1b} = \text{Re}[\chi_{1b}(z, r) \exp(-i\omega t)]$, $\chi_{1b}(z, r) = f_{1b}(z) \delta(r - r_0)$, $b = r, z$. Составляющие локализованной объемной силы на горизонтальном включении радиуса r_1 , расположенным на глубине $z = -h_0$, описываются выражениями $X_{2b} = \text{Re}[\chi_{2b}(z, r) \exp(-i\omega t)]$, $\chi_{2b}(z, r) = f_{2b}(r) \delta(z + h_0)$, $0 \leq r \leq r_1$. Рассматриваемый установившийся характер колебаний позволяет перейти к решению задачи относительно комплексных амплитуд соответствующих функций:

$$(\lambda + 2\mu) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{jr}}{\partial r} \right) - \frac{u_{jr}}{r^2} \right] + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial u_{jz}}{\partial z} \right] + \mu \frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial z^2} + \omega^2 \rho u_{jr} = \chi_{jr}(r, z), \quad (1.1)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_{jz}}{\partial z^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{jz}}{\partial r} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_{jr}) \right] + \omega^2 \rho u_{jz} = \chi_{jz}(r, z), \quad j = 1, 2; \quad (1.2)$$

$$\mu \left[\frac{\partial u_{jz}(r, 0)}{\partial r} + \frac{\partial u_{jr}(r, 0)}{\partial z} \right] = 0; \quad (1.3)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_{jz}(r, 0)}{\partial z} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_{jr}(r, 0)) = \begin{cases} p(r), & r \leq a, \\ 0, & r > a; \end{cases}$$

$$u_{jr}(r, -h) = u_{jz}(r, -h) = 0. \quad (1.4)$$

Здесь λ, μ — характеристики Ламе упругого основания, ρ — его плотность. В качестве условий излучения использован принцип предельного поглощения [7]. Индекс $j = 1$ указывает на наличие вертикальных колонн вокруг штампа, $j = 2$ — на наличие жесткого включения под штампом. Далее используется подход работы [8].

Применение интегральных преобразований Ханкеля

$$V_{B_n} u(r, z) \equiv U(\alpha, z) = \int_0^\infty u(r, z) J_n(\alpha r) r dr, \quad n = 0, 1,$$

к исходным уравнениям (1.1), (1.2) (1-го порядка к уравнению для радиальной составляющей смещения $u_{jr}(r, z)$ и 0-го порядка — для вертикальной составляющей $u_{jz}(r, z)$) и граничным условиям (1.3), (1.4) позволяет избавиться от производной по радиальной координате. Полученная в результате краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно интегральных характеристик компонент вектора смещений $U_{jr}(\alpha, z)$, $U_{jz}(\alpha, z)$ решается известными методами, использованными, например, в [8]. Для получения характеристик волновых полей осуществляется обращение преобразований Ханкеля построенных трансформант с применением теории вычетов [9]

$$u_{jr}(r, z) = \int_\sigma U_{jr}(\alpha, z) \alpha J_1(\alpha r) d\alpha, \quad u_{jz}(r, z) = \int_\sigma U_{jz}(\alpha, z) \alpha J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Здесь контур σ располагается вдоль вещественной полусоси комплексной полу平面ости α , обходя положительные вещественные полюса подынтегральной функции в соответствии принципом предельного поглощения [7].

При исследовании поведения лицевой поверхности основания важную роль играет определение характеристик волны Релея. Произведя процедуру разворота и замыкания контура в соответствии с леммой Жордана [9], интегралы заменяются суммой вычетов. При $r \rightarrow \infty$ ($z = 0$) для амплитуд волн Релея (случай вертикальных инъекторов) получены следующие выражения:

$$u_{1r}(r,0) = i \sum_{k=1}^m \sqrt{\frac{2\pi\zeta_k}{r}} \frac{Q_{1r}(\zeta_k) - Q_{2r}(\zeta_k)}{2\rho C_2^2 \bar{\Delta}(\zeta_k)} \exp[i(\zeta_k r - 3\pi/4)] + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty,$$

$$u_{1z}(r,0) = i \sum_{k=1}^m \sqrt{\frac{2\pi\zeta_k}{r}} \frac{Q_{1z}(\zeta_k) - Q_{2z}(\zeta_k)}{2\rho C_2^2 \bar{\Delta}(\zeta_k)} \exp[i(\zeta_k r - \pi/4)] + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Здесь ζ_k определяются из решения уравнения $\Delta(\alpha) = 0$, где

$$\Delta(\alpha) = \sigma_1 \sigma_2 (s^2 + \alpha^4) \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h) - \alpha^2 (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) - 2s\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2. \quad (1.5)$$

Также использованы обозначения: $\sigma_l = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_l^2}$, $s = \alpha^2 - 0,5\kappa_2^2$, $\kappa_l^2 = (\omega/c_l)^2$ ($l = 1, 2$), κ_l — волновое число продольной ($l = 1$) и поперечной ($l = 2$) волны, $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$.

Выражения $Q_{jb}(\alpha)$, $b = r, z$, $j = 1, 2$, приведены в работе [8],

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\alpha) = & \alpha \left((\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) (s^2 + \alpha^4) + 4\sigma_1 \sigma_2 (s + \alpha^2)) \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h) + \right. \\ & + h(\sigma_1 (s^2 + \alpha^4) - \alpha^2 \sigma_1^{-1} (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2)) \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) + \\ & + h(\sigma_2 (s^2 + \alpha^4) - \alpha^2 \sigma_2^{-1} (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2)) \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h) - \\ & - 2(s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 2s\alpha^2 + \alpha^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)) \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) - \\ & \left. - 4\sigma_1 \sigma_2 (s + \alpha^2) - 2s\alpha^2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right). \end{aligned}$$

Для серии рассчитанных дисперсионных параметров упругого основания построены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) вертикальной компоненты волны Релея в средне-частотном диапазоне $\nu = 1 \div 20$ Гц для нескольких первых мод. В качестве примера взяты механические характеристики, соответствующих почве: $\rho = 1,4 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_1 = 0,2 \cdot 10^3$ м/с, $c_2 = 0,12 \cdot 10^3$ м/с. Толщина слоя — $h = 20$ м, функция нагрузки на вертикальных колоннах считается заданной и имеет вид $f_{z1}(z) = \varepsilon_2(l_0 + z) + \exp(z - l_0) + (-z)^{1/2} + (z + l_0)^{1/2}$ или $f_{z1}(z) = 2l_0^{-1}(1 + \varepsilon_1)^{-1}[(1 - \varepsilon_1)zl_0^{-1} + 1]$, $\varepsilon_j = \text{const}$ ($j = 1, 2$), $z \in [-l_0, 0]$. Функция нагрузки на горизонтальном включении — $f_{z2}(r) = 2r_1^{-1}(1 + \varepsilon_1)^{-1}[(1 - \varepsilon_1)rr_1^{-1} + 1]$, $r \in [0, r_1]$. В формулах $\omega = 2\pi\nu H_0 c_0^{-1}$, где ν — размерная частота в Гц, $H_0 = 1$ м, $c_0 = 10^3$ м/с.

На рис. 1 приведены примеры АЧХ для первой моды, иллюстрирующие влияние геометрических параметров модели (a , l_0 , r_0) и частоты на волновой процесс.

Как следует из вычислительных экспериментов, интерференционная картина волнового поля усложняется, когда увеличивается радиус расположения вертикальных армирующих элементов r_0 . Вертикальная составляющая амплитуды волны Релея для 1-й моды растет с увеличением площади приложения поверхностной нагрузки. Интерференционная картина усложняется с увеличением длины вертикальных армирующих элементов l_0 и возрастанием частоты колебаний. Изменение функции распределения нагрузки вдоль вертикальных элементов также усложняет интерференционную картину.

2. Решение интегральных уравнений граничных задач при армировании основания вертикальными и горизонтальными включениями

Описанные модели позволяют определить контактные напряжения под штампом. Заданные смешанные граничные условия на верхней грани среды приводят к интегральному уравнению

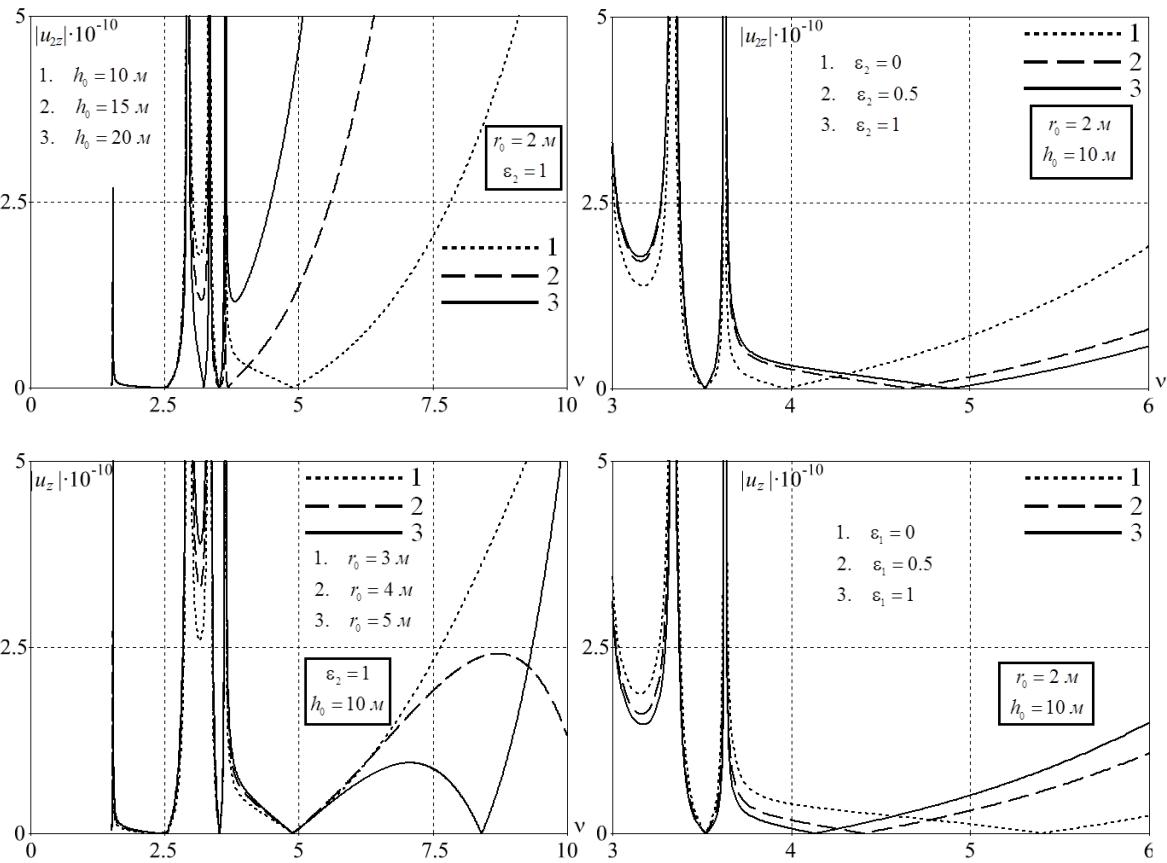


Рис. 1. Модуль вертикальной составляющей волны Релея для различной геометрии системы и видов нагрузок

Fig. 1. Rayleigh wave vertical component module for different system geometry and load types

(ИУ) первого рода относительно напряжения в области контакта штампа с упругой средой. Для обеих моделей ИУ можно представить в виде

$$\int_0^a k(r, \tau) q_j(\tau) d\tau = u_z(r, 0) - A_j(r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (2.1)$$

$$k(r, \tau) = \int_{\sigma} K(\alpha) J_0(\alpha r) J_0(\alpha \tau) \alpha d\alpha, \quad A_j(r) = \int_{\sigma} U_{2j}(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \quad j = 1, 2,$$

здесь $q_j(r)$ — неизвестное контактное напряжение под штампом (при отсутствии в основании армирующих элементов обозначено $q(r)$), $u_z(r, 0)$ — вертикальная составляющая смещений в области штампа, $U_{2j}(\alpha)$ — преобразование Ханкеля перемещений поверхности, вызванных вибрацией инъекторов ($j = 1$ — для вертикальных, $j = 2$ — для горизонтального включения).

Символ ядра ИУ (2.1) $K(\alpha)$, четная мероморфная функция, представлен в [10–12].

Уравнение (2.1) может быть решено различными методами, авторы воспользовались полуаналитическим методом фиктивного поглощения (МФП), классический алгоритм которого описан в монографиях [11, 12], где представлено приближенное решение (2.1) с правой частью в виде функции Бесселя $J_0(\eta r)$, полученное с помощью методов решения статических задач для $K_0(\alpha) = (\alpha^2 + B^2)^{-1/2}$ [7]. Этот же вид K_0 был использован в модификации МФП, описанной применительно к различным задачам в работах [10, 13]. Решение (2.1) для правой

части $J_0(\eta r)$, которое служит вспомогательным для построения искомого решения, имеет вид [10]

$$\begin{aligned} q_\eta(r) = & J_0(\eta r) K_0^{-1}(\eta) + \frac{i\pi a}{2} K_0^{-1} \sum_{l=1}^N \beta_l J_0(z_l r) G_1(\eta, z_l) - \frac{a\pi^2}{4} \sum_{k=1}^N g_k \sum_{l=1}^N \beta_l J_0(z_l r) G_2(z_l, p_k) + \\ & + b(\eta) \left(\frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2-r^2}} + i\pi \sqrt{\frac{a\varepsilon}{2}} \sum_{l=1}^N \beta_l H_0^{(1)}(z_l a) J_0(z_l r) \right) + \\ & + \left[i\sqrt{\frac{a\pi}{2}} \frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{a\pi\sqrt{\pi\varepsilon}}{2} \sum_{l=1}^N \beta_l J_0(z_l r) H_0^{(1)}(z_l a) \right] \sum_{k=1}^N \frac{g_k}{\sqrt{B-ip_k}} H_0^{(1)}(p_k a) \end{aligned}$$

с точностью до описывающего поведение функции $K(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ постоянного множителя. Здесь использованы обозначения, введенные в [9, 10]:

$$\begin{aligned} G_1(\eta, z) &= \left[\eta J_1(\eta a) H_0^{(1)}(za) - z J_0(\eta a) H_1^{(1)}(za) \right] (\eta^2 - z^2)^{-1}, \\ G_2(z, p) &= \left[p H_1^{(1)}(pa) H_0^{(1)}(za) - z H_0^{(1)}(pa) H_1^{(1)}(za) \right] (z^2 - p^2)^{-1}, \\ b(\eta) &= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \left[H_0^{(1)}(\eta a) \sqrt{B+i\eta} + H_0^{(2)}(\eta a) \sqrt{B-i\eta} \right], \quad \varepsilon = \frac{1}{B}, \end{aligned}$$

где $\beta_l = \prod_{k=1}^N (z_l^2 - p_k^2)$, $H_0^{(j)}$ — функции Ханкеля ($j = 1, 2$), z_l, p_l — соответственно вещественные нули и полюса функции, аппроксимирующей $K(\alpha)$ функции [7, 12].

Функции g_k включают неизвестные константы, вводимые в соответствии с алгоритмом МФП [13], алгебраическая система для их определения имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N g_k \left[\left(p_k H_1^{(1)}(ap_k) J_0(a\alpha) - \alpha H_0^{(1)}(ap_k) J_1(a\alpha) \right) (\alpha^2 - p_k^2)^{-1} - \right. \\ \left. - 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi(B-ip_k)}} H_0^{(1)}(ap_k) J_0(a\alpha) \right] = \\ = \frac{2}{i\pi} \frac{\sqrt{B^2+\eta^2}}{\alpha^2-\eta^2} [\eta J_1(a\eta) J_0(a\alpha) - \alpha J_1(a\alpha) J_0(a\eta)] - \frac{2}{i\pi} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}} J_0(a\alpha) b(\eta), \\ \alpha = z_l, \quad l = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

В силу линейности (2.1) представим его решение в виде

$$q_j(r) = q_1(r) + q_{2j}(r),$$

где первое слагаемое соответствует контактным напряжениям, создаваемым вибрирующим штампом, второе — нагруженными инъекторами.

Для построения аналитических выражений $q_{2j}(r)$ воспользуемся решением вспомогательного ИУ $q_\eta(r)$. Тогда для второго слагаемого

$$\int_0^a k(r, \tau) q_{2j}(\tau) \tau d\tau = - \int_\sigma U_{2j}(\eta) J_0(\eta r) \eta d\eta, \quad (2.2)$$

где $q_{2j}(\tau)$ — напряжения под штампом, создаваемые инъекторами $0 \leq \tau \leq a$, $U_{2j}(\alpha)$ — интегральная характеристика перемещений, обусловленных наличием включений,

$$q_{2j}(r) = - \int_\sigma q_\eta(r) U_{2j}(\eta) \eta d\eta. \quad (2.3)$$

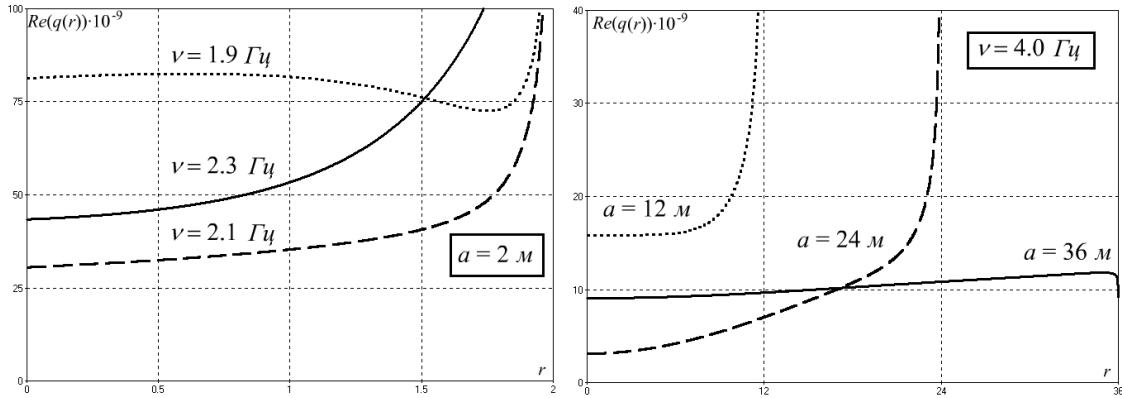


Рис. 2. Распределение напряжений под штампом в отсутствии армирующих элементов

Fig. 2. Stress distribution under the stamp in the absence of reinforcing elements

Для вертикальных включений

$$U_{21}(\alpha) = \frac{r_0 J_0(\alpha r_0)}{4\rho c_2^2 \Delta(\alpha)} \left[\sigma_1 (\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{-\sigma_1 h} \Phi_2^+) \varphi_{z1}^-(-l_0) + \alpha^2 \sigma_1 (s - e^{-\sigma_2 h} \Phi_1^+) \varphi_{z2}^-(-l_0) - \sigma_1 (\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{\sigma_1 h} \Phi_2^-) \varphi_{z1}^+(-l_0) - \alpha^2 \sigma_1 (s + e^{\sigma_2 h} \Phi_1^-) \varphi_{z2}^+(-l_0) \right],$$

$$\varphi_{zk}^\mp(\beta) = \int_0^\beta f_z(\zeta) e^{\mp \sigma_k \zeta} d\zeta, \quad (k = 1, 2).$$

Для горизонтального включения

$$U_{22}(\alpha) = \frac{-h_0}{4\rho c_2^2} \left[\sigma_1 (\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{-\sigma_1 h} \Phi_2^+) e^{\sigma_1 h_0} + \alpha^2 \sigma_1 (s - e^{-\sigma_2 h} \Phi_1^+) e^{\sigma_2 h_0} - \sigma_1 (\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{\sigma_1 h} \Phi_2^-) e^{-\sigma_1 h_0} - \alpha^2 \sigma_1 (s + e^{\sigma_2 h} \Phi_1^-) e^{-\sigma_2 h_0} \right] \varphi_z(r_1),$$

$$\varphi_z(\beta) = \int_0^\beta f_z(\zeta) \zeta J_0(\alpha \zeta) d\zeta.$$

Здесь также использованы обозначения

$$\Phi_2^\pm = \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch}(\sigma_2 h) \pm \alpha^2 \operatorname{sh}(\sigma_2 h), \quad \Phi_1^\pm = \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \pm \alpha^2 \operatorname{ch}(\sigma_1 h).$$

Применяя процедуру разворота контура интегрирования [14], интегралы вычисляются по вычетам [9].

Полученные результаты для контактных напряжений, вызванных колебаниями штампа, согласуются с известными результатами [14]. Рис. 2 иллюстрирует распределение напряжений под штампом при единичной амплитуде колебаний в отсутствии в упругом основании армирующих элементов, пространственная координата, принимает значения из интервала $[0, a]$, занимаемого штампом.

На рис. 3 приведены распределения вертикальной компоненты контактных напряжений под штампом, вызванных вибрацией вертикальных включений, при разных значениях частоты ν для описанных выше характеристиках слоя, а также разных значениях длины армирующих элементов l_0 и радиуса их расположения r_0 . Следует отметить, что выбор функции распределения нагрузки незначительно сказывается на величине и характере распределения контактных напряжений.

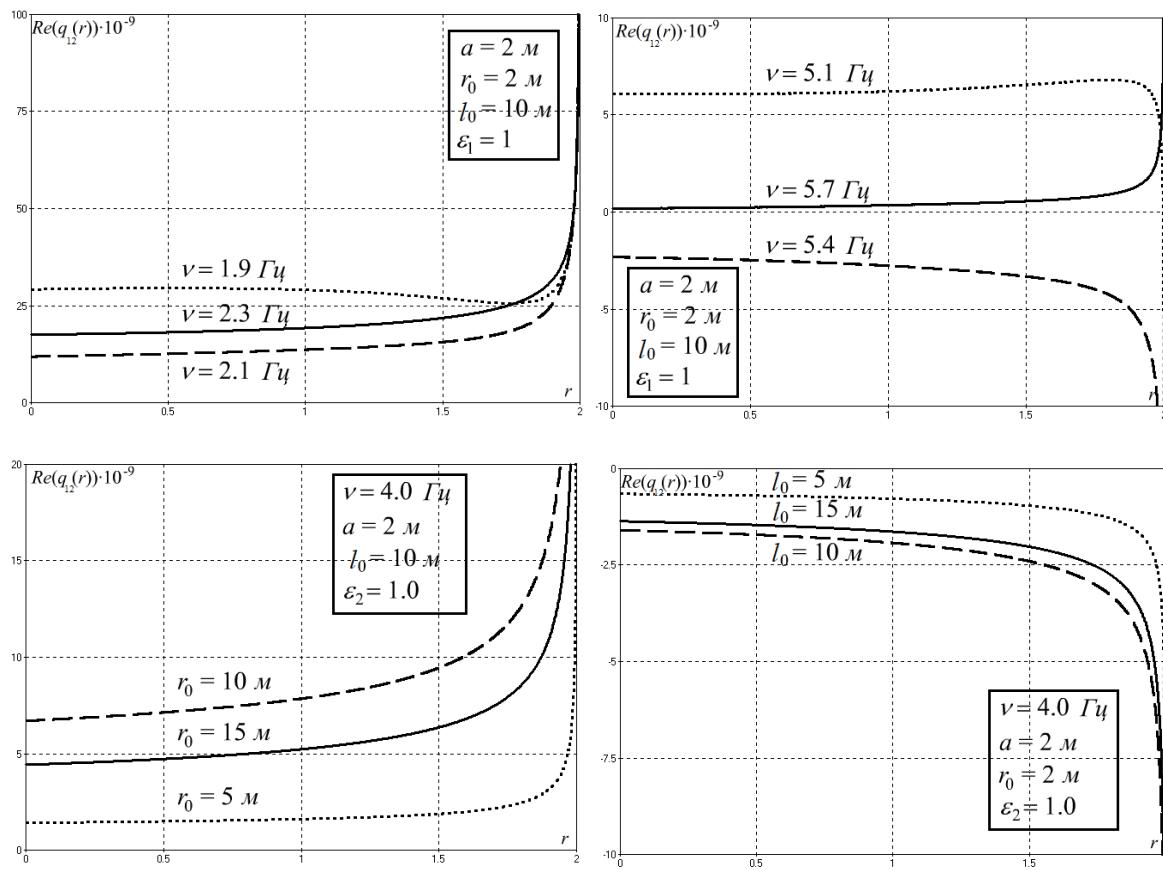


Рис. 3. Распределение напряжений под штампом, создаваемых вертикальными инъектировыми

Fig. 3. Distribution of stresses under the stamp created by vertical injectors

Рис. 4 иллюстрирует зависимости вертикальной составляющей напряжений под штампом, вызванных вибрацией горизонтального включения, от частоты ν и таких параметров, как глубина залегания h_0 и радиус включения r_1 .

Наличие армирующих элементов в зависимости от параметров, либо усиливают, либо ослабляют контактные напряжения под штампом. Характер распределения напряжений под штампом определяется совокупностью параметров системы: размерами источников, параметром распределения нагрузки на включениях и частотой колебаний. В низкочастотном диапазоне наличие как вертикальных, так и горизонтального включения незначительно влияют на характер напряжений, выбор функции распределения нагрузки на армирующих элементах также не оказывает существенного влияния на величину и характер контактных напряжений.

Заключение

В работе рассмотрен метод расчета параметров напряженно-деформированного состояния упругого основания при наличии в нем вертикальных и горизонтальных армирующих элементов. Рассчитаны распределения контактных напряжений под штампом, дана оценка влияния на них внутренних нагрузок в основании.

Представленные в работе модели могут быть использованы для расчетов волновых полей в грунтовых основаниях, разработки систем сейсмо- и виброгашения, конструкционных решений по укреплению грунта и т.д., так как при использовании вертикальных или гори-

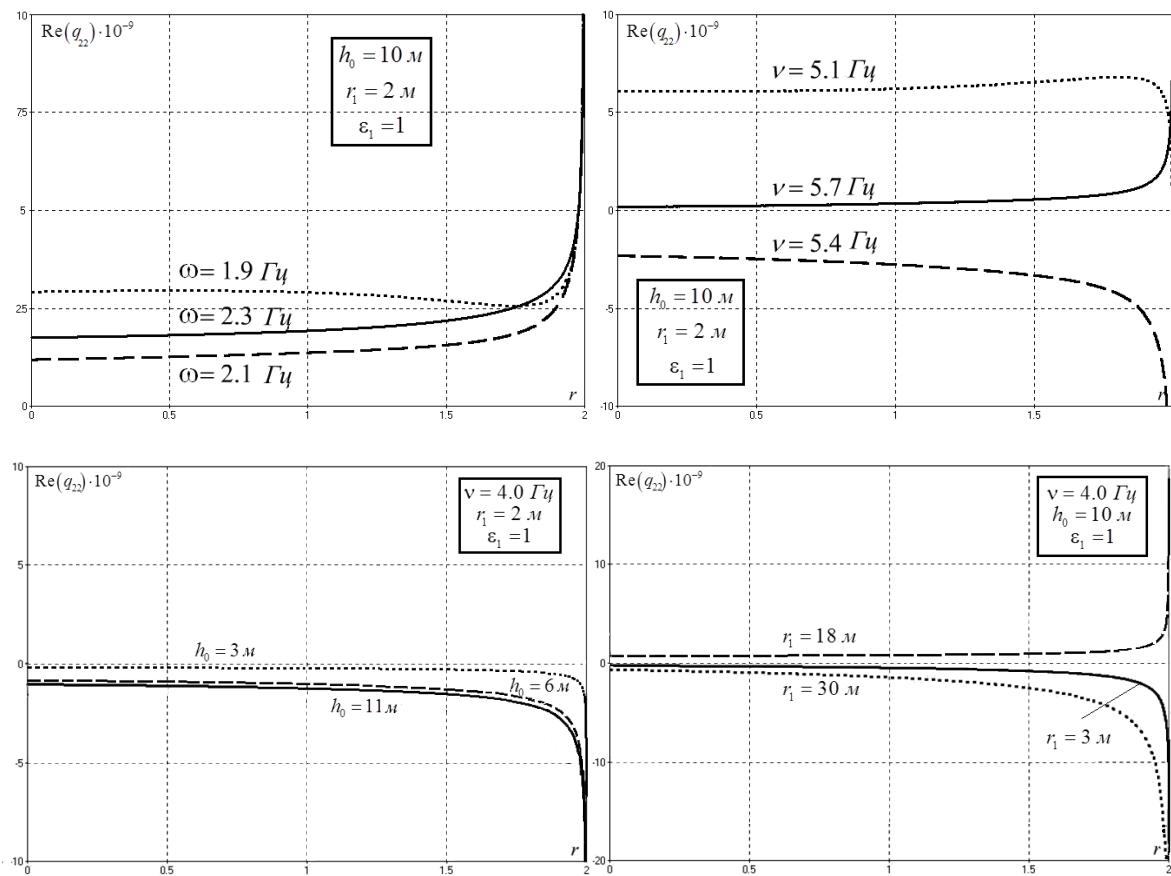


Рис. 4. Распределение напряжений под штампом, создаваемых горизонтальным включением

Fig. 4. Distribution of stresses under the stamp created by horizontal inclusion

зонтальных инъекторов важно знать характеристики волнового поля, генерируемого этими элементами.

Описанный в работе подход может быть обобщен для случая слоистого основания, а также оснований сложной структуры.

Литература [References]

- Карнаухова, М.Ю., Кашеварова, В.А., Кузнецова, Ю.А., Лезина, К.С., Маковецкий, О.А., Хусаинов, И.И., Оценка сейсмического воздействия и конструктивные методы защиты зданий. *Транспорт. Транспортные сооружения. Экология*, 2018, № 2, с. 27–37. [Karnaikhova, M.Yu., Kashevarova, V.A., Kuznetsova, Yu.A., Lezina, K.S., Makovetsky, O.A., Khusainov, I.I., Assessment of seismic impact and structural methods of building protection. *Transport. Transportnye sooruzheniya. Ekologiya* = *Transport. Transport structures. Ecology*, 2018, no. 2, pp. 27–37. (in Russian)]
- Малышев, Л.К., Натариус, Я.И., Цыбин, А.Н., Храпков, А.А., Устройство для защиты объекта от сейсмического воздействия. Авторское свидетельство SU № 1612060, 07.12.1990. [Malyshev, L.K., Natarius, Ya.I., Tsybin, A.N., Khrapkov, A.A., *Ustroystvo dlya zashchity ob'ekta ot seismicheskogo vozdeystviya* = Device for protecting an object from seismic impact. Author's certificate SU No. 1612060, 07.12.1990. (in Russian)]
- Лубягин, А.В., Бобряков, А.П., Способ укрепления основания фундаментов в сейсмически опасных зонах. Авторское свидетельство RU № 248776 C1, 07.11.2011. [Lubyagin, A.V., Bobryakov, A.P., *Sposob ukrepleniya osnovaniya fundamentov v seismicheski opasnykh zonakh* = Method of strengthening

- the foundation base in seismically dangerous zones. Author's certificate RU No. 248776 C1, 07.11.2011. (in Russian)]
4. Шулятьев, О.А., Мозгачева, О.А., Снижение осадки фундамента за счет изменения напряженно-деформированного состояния основания путем инъекции твердеющего раствора. *Вестник НИЦ «Строительство»*, 2020, № 3(26), с. 121–148. [Shulyatyev, O.A., Mozgacheva, O.A., Reducing foundation settlement by changing the stress-strain state of the base by injecting a hardening solution. *Vestnik NITs "Stroitelstvo" = Bulletin of the Research Center "Construction"*, 2020, no. 3(26), pp. 121–148. (in Russian)]
 5. Шулятьев, О.А., Дзагов, А.М., Минаков, Д.К., Изменение напряженно-деформированного массива грунта в результате устройства буронабивных свай и баретт. *Вестник НИЦ «Строительство»*, 2022, № 3(34), с. 26–44. [Shulyatyev, O.A., Dzagov, A.M., Minakov, D.K., Change in the stress-strain soil massif as a result of the installation of bored piles and barrettes. *Vestnik NITs "Stroitelstvo" = Bulletin of the Research Center "Construction"*, 2022, no. 3(34), pp. 26–44. (in Russian)]
 6. Маковецкий, О.А., Зуев, С.С., Тимофеев, М.А., Селетков, С.Ф., Травуш, В.И., Устройство системы вертикальных и горизонтальных геотехнических барьеров при строительстве высотных зданий на слабых грунтах. *Жилищное строительство*, 2016, № 9, с. 40–44. [Makovetskiy, O.A., Zuev, S.S., Timofeev, M.A., Seletkov, S.F., Travush, V.I., The device of the system of vertical and horizontal geotechnical barriers in the construction of high-rise buildings on soft soils. *Zhilishchnoe stroitelstvo = Housing construction*, 2016, no. 9, pp. 40–44. (in Russian)]
 7. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* = *Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical regions*. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
 8. Kapustin, M., Pavlova, A., Rubtsov, S., Telyatnikov, I., Model of foundation-base system under vibration load. *Communications in Computer and Information Science*, 2014, vol. 487, pp. 168–173.
 9. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В., *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Наука. 1987. [Lavrentiev, M.A., Shabat, B.V., *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* = *Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka. 1987. (in Russian)]
 10. Павлова, А.В., Капустин, М.С., Телятников, И.С., Метод фиктивного поглощения в решении смешанных задач для произвольных односвязных областей. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2018, т. 15, № 3, с. 52–61. [Pavlova, A.V., Kapustin, M.S., Telyatnikov, I.S., The method of fictitious absorption in solving mixed problems for arbitrary simply connected domains. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* = *Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, v. 15, no. 3, pp. 52–61. (in Russian)]
 11. Бабешко, В.А., *Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости*. Москва, Наука, 1984. [Babeshko, V.A., *Obobshchennyj metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti* = *Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory*. Moscow, Nauka, 1984. (in Russian)]
 12. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., Пряхина, О.Д., *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах*. Москва, Научный мир, 1999. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., Pryakhina, O.D., *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemnykh sredakh* = *Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media*. Moscow, Nauchny Mir, 1999. (in Russian)]
 13. Павлова, А.В., Рубцов, С.Е., Телятников, И.С., Об одной модификации метода фиктивного поглощения. *Прикладная математика и механика*, 2021, т. 85, вып. 3, с. 332–346. [Pavlova, A.V., Rubtsov, S.E., Telyatnikov, I.S., On one modification of the fictitious absorption method. *Prikladnaya matematika i mehanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, vol. 85, iss. 3, pp. 332–346. (in Russian)]
 14. Бабешко, В.А., *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*. Москва, Наука, 1989. [Babeshko, V.A., *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred* = *Dynamics of inhomogeneous linear-elastic media*. Moscow, Nauka, 1989. (in Russian)]

УДК 532.5.013:532.516:538.5:544.6

EDN: BIRUDM DOI: 10.31429/vestnik-21-2-80-92

Электрофорез микрочастицы с гидрофобной поверхностью в сильном электрическом поле

Е. А. Франц¹✉, А. А. Крылов², Е. А. Демёхин^{1,3}¹ Финансовый университет при Правительстве РФ, Краснодар, 350051, Россия² Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия³ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, НИИ Механики, Мичуринский пр. 1, Москва, 119192, Россия

✉ Франц Елизавета Александровна; ORCID 0000-0002-9813-4933; SPIN 2566-9895; e-mail: eafrants@fa.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается задача электрофореза диэлектрической частицы с гидрофобной поверхностью. Приводится полная размерная постановка задачи, а затем осуществляется переход к безразмерной форме. Основным методом исследования является аналитическое решение задачи, которое выполняется отдельно для электрической и гидродинамической частей. Основной целью было получение соотношения для скорости электрофореза микрочастицы с гидрофобной поверхностью в зависимости от следующих параметров: напряженности внешнего электрического поля E_∞ , длины скольжения β , плотности поверхностного заряда σ , числа Дебая ν и отношения диэлектрических проницаемостей частицы и среды δ . Кроме того, в работе проведено сравнение аналитически полученной скорости электрофореза гидрофобной частицы с результатами численного моделирования и выполнена оценка вклада параметра длины скольжения в прирост скорости электрофореза. Также отдельно продемонстрировано влияние параметров σ и δ на скорость электрофореза.

Ключевые слова: электрофорез, гидрофобная поверхность, скорость скольжения, сильное электрическое поле.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-79-00082).

Цитирование: Франц Е. А., Крылов А. А., Демёхин Е. А. Электрофорез микрочастицы с гидрофобной поверхностью в сильном электрическом поле // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 80–92. EDN: BIRUDM. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-80-92

Поступила 12 мая 2024 г. После доработки 24 июня 2024 г. Принято 18 июня 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Electrophoresis of Microparticle with Hydrophobic Surface in Strong Electric Field

Е. А. Frants¹✉, А. А. Krylov², Е. А. Demekhin^{1,3}¹ Financial University under the Government of the Russian Federation, Krasnodar, 350051, Russia² Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia³ Lomonosov Moscow State University, Research Institute of Mechanics, Michurinsky pr. 1, Moscow, 119192, Russia

✉ Elizaveta A. Frants; ORCID 0000-0002-9813-4933; e-mail: eafrants@fa.ru

Abstract. The study addresses the problem of electrophoresis of a dielectric particle with a hydrophobic surface. A complete dimensional formulation of the problem is presented, followed by a transition to a dimensionless formulation. The main method of investigation is the analytical solution of the problem, conducted separately for the electrical and the hydrodynamic components. The primary task was to derive a relationship for the electrophoresis velocity of the micro-particle with a hydrophobic surface based on key parameters of the problem: the intensity of the external electric field E_∞ , the slip length β , the surface charge density σ , the Debye number ν , and the ratio of the dielectric permittivities of the particle and the medium δ . Additionally, the study includes a comparison of the analytically obtained electrophoresis velocity of the hydrophobic particle with the results of numerical modeling of electrophoresis of a dielectric particle and an assessment of the contribution of the slip length parameter to the increase in electrophoresis velocity. The influence of the parameters σ and δ on the electrophoresis velocity is also demonstrated separately.

Keywords: electrophoresis, hydrophobic surface, sliding speed, high electric field.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-79-00082).

Cite as: Frants, E. A., Krylov, A. A., Demekhin, E. A., Electrophoresis of microparticle with hydrophobic surface in strong electric field. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 80–92. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-80-92

Received 12 May 2024. Revised 24 June 2024. Accepted 18 June 2024. Published 28 June 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

В последние несколько десятилетий возрос интерес к исследованиям, посвященным переносу жидкости в микромасштабе. Это связано с развитием микрофлюидных технологий. Как известно, отношение площади поверхности к объему обратно пропорционально характерному масштабу. Что означает возрастание важности граничных условий при уменьшении масштабов. В последние годы также активизировался интерес к использованию гидрофобных поверхностей для более эффективного переноса жидкости. Увеличение длины проскальзывания, в свою очередь, приводит к значительному падению поверхностного трения и, как следствие, уменьшению энергозатрат [1, 2].

Обычно условие скольжения жидкости на границе раздела жидкости и твердого тела моделируется с использованием граничного условия Навье, которое для плоской геометрии означает, что скорость скольжения пропорциональна локальному градиенту скорости с некоторым коэффициентом пропорциональности. Этот параметр известен как «длина скольжения» [3]. Для обычного сдвигового течения длина скольжения соответствует некоторому расстоянию на твердой поверхности, где скорость жидкости равна нулю. В последние несколько десятилетий было экспериментально показано, что это действительно так и для некоторых типов поверхности удалось оценить длину скольжения [3–5]. Также существует экспериментальное подтверждение увеличения скорости электроосмоса благодаря скольжению жидкости на поверхности [6]. Bouzigues и др. [7] провели эксперименты, в которых они измерили длину проскальзывания по гидрофобной и гидрофильной поверхностям с помощью прямого измерения профиля скорости электроосмотического потока и потока, вызванного градиентом давления. Авторы сообщают о первых подробно измеренных профилях скорости, полученных на расстояниях от 20 до 300 нм от поверхности. Это исследование позволило впервые отделить электростатические эффекты от динамических эффектов, связанных с дзета-потенциалом. Результаты подтверждают сильное усиление дзета-потенциала за счет эффектов проскальзывания жидкости, тем самым предлагая новый способ управления потоками с помощью свойств поверхности.

Усиление электрофоретического движения заряженных коллоидов с гидрофобной поверхностью исследовалось не только экспериментально, но и теоретически несколькими авторами [1, 8]. Было показано, что даже «умеренные» отклонения от гидродинамических граничных условий прилипания приводят к значительному (до 2-х порядков величины) увеличению большинства явлений переноса, вызванных свойствами межфазной поверхности. Khair и Squires [9] провели систематическое исследование электрофореза коллоидной частицы с гидрофобной поверхностью. Их исследование основано на анализе возмущений первого порядка основных электрокинетических уравнений в предположении слабого приложенного поля, принятом в классических работах O'Brien и White [10]. Анализ, проведенный в работе [9], показывает, что для значений поверхностного потенциала от низких до умеренных обнаруживается значительное увеличение подвижности для тонкого дебаевского слоя. Однако такое увеличение подвижности при высоком дзета-потенциале (т.е. намного большем, чем термический потенциал 25 мВ) является незначительным из-за неоднородной поверхностной проводимости и концентрационной поляризации поверхности диэлектрика. Park [11] определил подвижность коллоидной частицы с гидрофобной поверхностью на основе модели Пуассона–Больцмана. Он получил аналитическую формулу для определения электрофоретической подвижности частицы с гидрофобной поверхностью с точки зрения длины проскальзывания и дзета-потенциала.

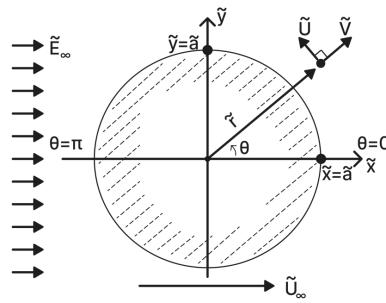


Рис. 1. Диэлектрическая частица под действием электрического поля E_∞ . В сферической осесимметричной системе $x = r \cos \theta$ и $y = r \sin \theta$. U — тангенциальная компонента скорости, а V — нормальная составляющая скорости жидкости. Точка начала отсчета совпадает с центром частицы, угол θ отсчитывается в направлении против часовой стрелки. U_∞ — электрофоретическая скорость частицы. Условие на компоненты скорости на бесконечности: $U \rightarrow -U_\infty \sin \theta$ и $V \rightarrow U_\infty \cos \theta$

1. Математическая постановка задачи

Математическая модель рассматривает сферическую микрочастицу радиуса \tilde{a} , поверхность которой является гидрофобной (задается условие проскальзывания жидкости на поверхности частицы) и непроницаемой для ионов электролита (поток катионов и анионов через поверхность равен нулю). Чтобы отбросить возможное влияние стенок на движение частицы, предполагается что она находится в некотором бесконечно протяженном резервуаре. Микрочастица находится в вязкой ньютоновской несжимаемой жидкости, которая является бинарным электролитом. В данном случае под электролитом понимается диэлектрическая жидкость, в которой растворены ионы некоторой соли (например, $NaCl$ или KCl). При этом вводятся некоторые ограничения и упрощения. Так, рассмотрен только бинарный (2 типа ионов) и симметричный электролит ($z^+ = z^- = 1$, где z^+ и z^- — валентность ионов). Предполагается также равенство коэффициентов диффузии катионов и анионов, т.е. $D^+ = D^- = D$.

Через частицу полностью отсутствует поток ионов. К гидродинамической части задачи также применяются некоторые упрощения. В силу микромасштабов используется приближение Стокса для ползущего течения. Математическое описание базируется на модели сплошной среды. Задача описывается системой сцепленных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, в которую входят: 1) уравнение Пуассона относительно электрического потенциала Φ ; 2) уравнение Стокса, описывающее течение жидкости с членом, отвечающим за объемную электрическую силу; 3) уравнения Нернста–Планка для переноса ионов, включающие все три механизма переноса (диффузию, конвекцию, электромиграцию).

В силу того, что изучается движение сферической частицы, удобно использовать сферическую систему координат с началом отсчета в центре частицы (рис. 1). Задача будет сформулирована для осесимметричного случая. В данной системе действует постоянное электрическое поле напряженности E_∞ , которое имеет нормальную и касательную составляющие относительно поверхности частицы. Нормальная составляющая вызывает рост пространственного заряда на поверхности, а касательная — движение жидкости вдоль поверхности частицы. В приложенном электрическом поле частица начинает двигаться и приобретает электрофоретическую скорость U_∞ . Данная скорость может быть получена из условия баланса сил, действующих на частицу, а именно, баланса вязкой и электрической силы.

На поверхности частицы будут заданы следующие граничные условия: 1) поток анионов и катионов через поверхность равен нулю; 2) скачок электростатического потенциала Φ , связанный с плотностью поверхностного заряда; 3) условие Навье для скольжения жидкости на поверхности. Система уравнений имеет несколько параметров, наиболее важным из которых для численного решения является число Дебая. Поставленную задачу планируется решать при помощи аналитических и численных методов. В малых масштабах число Рейнольдса предполагается равным нулю, что приводит к значительному упрощению системы, которая,

тем не менее, остается нелинейной за счет уравнений переноса ионов. Далее мы рассмотрим отдельно электрическую и гидродинамическую части задачи.

2. Электростатическая часть

Рассмотрим сначала размерный вид уравнений. Здесь и далее величины с тильдой обозначают размерные величины, а соответствующие обозначения без тильды — безразмерные величины. Внутри электролита электростатический потенциал Φ описывается уравнением Пуассона, которое в сферической системе для осесимметричного случая имеет вид

$$\frac{1}{\tilde{r}} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} \right) \right] = \frac{\tilde{F}}{\tilde{\varepsilon}} (\tilde{c}^- - \tilde{c}^+). \quad (2.1)$$

Внутри частицы распределение потенциала φ описывается уравнением Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.2)$$

Границные условия на поверхности частицы при $\tilde{r} = \tilde{a}$ следующие:

$$\tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}} = -\tilde{\sigma} + \tilde{\varepsilon}_d \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{r}}; \quad \tilde{\Phi} = \tilde{\varphi}. \quad (2.3)$$

При $\tilde{r} \rightarrow \infty$: $\tilde{\Phi} \rightarrow -\tilde{E}_\infty \tilde{r} \cos \theta + const$. В точке $\tilde{r} = 0$ должно выполняться условие отсутствия сингулярности. В безразмерной форме данная система уравнений выглядит следующим образом:

$$\nu^2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right] = -r^2 (c^- - c^+) = -r^2 \rho, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (2.5)$$

$$r = 1 : \nu \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\sigma + \delta \nu \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \Phi = \varphi, \quad (2.6)$$

$$r \rightarrow \infty : \Phi = -E_\infty r \cos \theta + const. \quad (2.7)$$

Для перехода к безразмерной постановке были использованы следующие характерные величины: радиус микрочастицы \tilde{a} , термический потенциал $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{R}\tilde{T}/\tilde{F}$, равновесная концентрация электролита \tilde{c}_∞ , динамическая вязкость жидкости $\tilde{\mu}$ и коэффициент диффузии ионов \tilde{D} . Здесь \tilde{R} — универсальная газовая постоянная, \tilde{T} — абсолютная температура, \tilde{F} — постоянная Фарадея. Система описывается следующими безразмерными параметрами:

$$E_\infty = \frac{\tilde{a}\tilde{E}_\infty}{\tilde{\Phi}_0}, \quad \nu = \frac{\tilde{\lambda}_D}{\tilde{a}}, \quad \delta = \frac{\tilde{\varepsilon}_d}{\tilde{\varepsilon}} \quad \sigma = \frac{\tilde{\lambda}_D \tilde{\sigma}}{\tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0}, \quad \varkappa = \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0}{\tilde{\mu} \tilde{D}}, \quad \beta = \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}, \quad (2.8)$$

где $\tilde{\lambda}_D^2 = \tilde{\varepsilon} \tilde{R} \tilde{T} / 2 \tilde{F}^2 \tilde{c}_\infty$ — толщина двойного электрического слоя; $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\varepsilon}_d$ — диэлектрические проницаемости среды и частицы соответственно. Параметр β описывает относительную важность скольжения на границе по сравнению с общими характеристиками потока. Параметр \varkappa описывает характеристики электролита. Например для водных электролитов типичное значение от 0,2 до 0,3, меньшие значения параметра ($\varkappa < 0,1$) соответствуют неполярным электролитам.

Распределение потенциала φ может быть найдено аналитически через разложение по многочленам Лежандра относительно $\eta = \cos \theta$

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(r) P_k(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k r^k + \frac{b_k}{r^{k+1}} \right) P_k(\eta),$$

где P_k — многочлены Лежандра. Так как действует условие отсутствия сингулярности при $r = 0$, это означает, что все $b_k = 0$, и тогда

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(r) P_k(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k P_k(\eta).$$

Введем обозначение $a_k r^k = \varphi_k$. В дальнейшем аналитическом решении ограничимся только двумя членами разложения

$$\varphi = \varphi_0 P_0 + \varphi_1 P_1 = a_0 + a_1 r \eta, \quad (2.9)$$

где a_0 и a_1 — некоторые константы, которые будут найдены из условия сращивания решений на границе частицы и электролита.

Теперь рассмотрим потенциал Φ в растворе электролита, который также можно представить в виде разложения по многочленам Лежандра

$$\Phi = \Phi_0(r) P_0(\eta) + \Phi_1(r) P_1(\eta). \quad (2.10)$$

Уравнение (2.4) имеет ненулевую правую часть с $\rho \neq 0$ внутри двойного электрического слоя (ДЭС), толщину которого можно оценить как $O(\nu)$. Заряд внутри ДЭС индуцирован поверхностным зарядом σ , распределение которого не зависит от угла θ . Поэтому только Φ_0 связано с плотностью поверхностного заряда σ . В противоположность этому Φ_1 создается за счет внешнего электрического поля напряженности E_∞ . Это можно увидеть, если в уравнение (2.6) подставить выражения (2.9) и (2.10). Из уравнения (2.9) следует, что на поверхности частицы

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= a_0 = \text{const} \Rightarrow \frac{d\varphi_0}{dr} = 0, \\ \varphi_1 &= a_1 r; \quad \left. \frac{d\varphi_1}{dr} \right|_{r=1} = \varphi_1|_{r=1} = \Phi_1, \\ \nu \frac{d\Phi_0}{dr} &= -\sigma, \quad \frac{d\Phi_1}{dr} = \delta \Phi_1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

а при $r \rightarrow \infty$: $\Phi_0 \rightarrow \text{const}$; $\Phi_1 \rightarrow -E_\infty r$. Далее рассмотрим отдельно решения для Φ_0 и Φ_1 .

2.1. Решение для Φ_1 во внешней области электролита

Уравнение для Φ_1 можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi_1}{dr} - \frac{2}{r^2} \Phi_1 = 0 \quad (2.12)$$

с граничными условиями:

$$r = 1 : \quad \frac{d\Phi_1}{dr} = \delta \Phi_1, \quad (2.13)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \Phi_1 \rightarrow -E_\infty r. \quad (2.14)$$

При этом случай $\delta = 0$ соответствует изолятору или так называемой неполяризуемой поверхности, а $\delta = \infty$ — проводнику.

Отметим, что уравнение (2.12) не включает плотность заряда, так как $\rho_1 = 0$. Плотность заряда ρ должна учитываться только для полинома P_0 . Если внешнее поле достаточно сильное, оно может генерировать за счет нелинейных эффектов также члены ρ_0, ρ_2, \dots , которые не являются нулевыми. Эти эффекты исключены из рассмотрения в данной работе. Уравнение (2.12) с граничными условиями (2.13)–(2.14) имеет решение

$$\Phi = -E_\infty \left(r + \frac{1-\delta}{2+\delta} \frac{1}{r^2} \right). \quad (2.15)$$

2.2. Решение для Φ_0 в тонком слое около поверхности частицы

Уравнение для Φ_0 более сложное и имеет вид

$$\frac{\nu^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_0}{dr} \right) = c^- - c^+ = -\rho. \quad (2.16)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \Phi_0 \rightarrow \text{const} = \zeta - \text{неизвестная}, \quad (2.17)$$

$$r = 1 : \quad \nu \frac{d\Phi_0}{dr} = -\sigma, \quad \Phi_0 = 0. \quad (2.18)$$

Решение связано с неопределенностью константы на бесконечности, а также с константой a_0 в диэлектрике. При $r = 1$, $\Phi_0 = a_0$. Не использовалась возможность выбрать произвольную константу для Φ . Для удобства возьмем $a_0 = 0$.

$$r = 1 : \quad \nu \frac{d\Phi_0}{dr} = -\sigma, \quad \Phi_0 = \zeta - \text{потенциал}.$$

Тогда при $r \rightarrow \infty$, $\Phi_0 \rightarrow 0$. Концентрации c^+ и c^- являются неизвестными функциями. Чтобы их определить, вернемся к определению в размерной форме. Для тонкого ДЭС ($\tilde{\lambda}_D \ll \tilde{a}$) справедлива система уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{F}}{\tilde{R}\tilde{T}} \tilde{c}^+ \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{c}^+}{\partial \tilde{r}} \right) = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{F}}{\tilde{R}\tilde{T}} \tilde{c}^- \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{c}^-}{\partial \tilde{r}} \right) = 0, \quad (2.20)$$

$$\tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{r}^2} = -\tilde{F}(\tilde{c}^+ - \tilde{c}^-) \quad (2.21)$$

с граничными условиями на поверхности частицы при $\tilde{r} = \tilde{a}$

$$\frac{\tilde{F}\tilde{c}^+}{\tilde{R}\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{c}^+}{\partial \tilde{r}} = 0; \quad \frac{\tilde{F}\tilde{c}^-}{\tilde{R}\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{c}^-}{\partial \tilde{r}} = 0; \quad \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{r}} = -\tilde{\sigma}, \quad \tilde{\Phi} = 0, \quad (2.22)$$

на бесконечности: $\tilde{r} \rightarrow \infty : \tilde{c}^+ \rightarrow \tilde{c}_\infty, \quad \tilde{c}^- \rightarrow \tilde{c}_\infty, \quad \tilde{\Phi}_0 \rightarrow \tilde{\zeta}$.

Проинтегрируем уравнения (2.19) и (2.20) один раз и, используя граничные условия (2.22), установим, что константы интегрирования равны нулю. Вернемся к безразмерной форме. Введем замену переменной $y = r - 1 = O(\nu)$, таким образом на поверхности частицы $y = 0$. Тогда

$$c^+ \frac{d\Phi_0}{dy} + \frac{dc^+}{dy} = 0; \quad c^- \frac{d\Phi_0}{dy} - \frac{dc^-}{dy} = 0; \quad \nu^2 \frac{d^2\Phi_0}{dy^2} = c^- - c^+; \quad (2.23)$$

$$y \rightarrow \infty : \quad c^+ \rightarrow 1, \quad c^- \rightarrow 1, \quad \Phi_0 \rightarrow \zeta; \quad (2.24)$$

$$y = 0 : \quad \nu \frac{d\Phi_0}{dy} = -\sigma, \quad \Phi_0 = 0.$$

С этого момента и далее опустим индекс «0». Из граничных условий выше $\Phi|_{y=0} = \zeta$; $\Phi|_{y=\infty} = 0$. Из уравнений (2.23) получим $c^+ = Ae^{-\Phi}$ и $c^- = Be^{-\Phi}$. При $y \rightarrow \infty$: $c^+ \rightarrow 1, c^- \rightarrow 1, \Phi \rightarrow 0$, следовательно $A = B = 1$. Тогда

$$\nu^2 \frac{d^2\Phi}{dy^2} = e^\Phi - e^{-\Phi}.$$

Проинтегрируем уравнение Больцмана один раз, получим

$$\frac{\nu}{\sqrt{2}} \frac{d\Phi}{dy} = -(e^{\Phi/2} - e^{-\Phi/2}).$$

Применим граничное условие при $y = 0$ или $r = 1$, из которого можно получить связь между дзета-потенциалом и плотностью поверхностного заряда

$$\sigma = 2\sqrt{2} \sinh \frac{\zeta}{2}; \quad \zeta = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}. \quad (2.25)$$

Для $\zeta \rightarrow 0$ соотношение примет вид $\sigma = \sqrt{2}\zeta$. Это же соотношение в размерной форме запишем в форме

$$\tilde{\sigma} = \frac{2\sqrt{2}\tilde{\varepsilon}\tilde{\Phi}_0}{\tilde{\lambda}_D} \sinh \frac{\tilde{\zeta}}{2\tilde{\Phi}_0}, \quad (2.26)$$

известной как уравнение Грэхема. Вернемся к решению уравнения для потенциала. Используя уравнение Грэхема в итоге получим следующее решение:

$$\Phi = \ln \left[\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2, \quad (2.27)$$

константу y_0 можно получить из граничного условия

$$y_0 = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sigma} \right); \quad y_0 = -\nu\sqrt{2} \operatorname{arctanh} e^{\zeta/2}. \quad (2.28)$$

Первое соотношение верно для произвольного σ , однако второе соотношение будет верно только для отрицательных значений дзета-потенциала.

Составим полное решение для электрического потенциала, получим

$$\Phi = -E_\infty \left(r + \frac{1 - \delta}{2 + \delta} \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta + \ln \left[\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2. \quad (2.29)$$

Для $r - 1 = y = O(\nu)$ это выражение превращается в следующее:

$$\Phi = -\frac{3}{2 + \delta} E_\infty \cos \theta + \ln \left[\tanh \frac{y - y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2. \quad (2.30)$$

3. Гидродинамическая часть

Гидродинамическая часть описывается уравнением Стокса с учетом электрической силы. Подставив данный член, найденный в предыдущем параграфе, в уравнение Стокса и, учитывая, что $\frac{\partial}{\partial r} \gg \frac{\partial}{\partial \theta}$, после некоторых преобразований получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} - \kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = -\kappa E \frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{\kappa}{2} \frac{\partial E^2}{\partial r}, \quad E \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (3.2)$$

Из уравнения (3.2) следует, что $\Pi = \frac{\kappa}{2} E^2$, тогда уравнение (3.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \kappa \left[E \frac{\partial E}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right]. \quad (3.3)$$

Член $E \frac{\partial E}{\partial \theta}$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{\nu}\right)$ и им можно пренебречь. Тогда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (3.4)$$

Дважды проинтегрируем и получим

$$U = -\varkappa[\Phi - \zeta] \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (3.5)$$

Интегрирование было выполнено с предположением, что $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \text{const}(r)$. На самом деле это решение является решением неоднородного уравнения с $\rho = c^+ - c^- \neq 0$. Подставив в уравнение (3.5) выражение для потенциала (2.27) и его производную по углу, получим

$$U = -\frac{3\varkappa E_\infty}{2+\delta} \left\{ \ln \left[\tanh \frac{y-y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2 \right\} \sin \theta, \quad (3.6)$$

$$\Psi_1^* = -\frac{6\varkappa E_\infty}{2+\delta} \left\{ \int_0^y \ln \left(\tanh \frac{y-y_0}{\nu\sqrt{2}} \right)^2 dy - \zeta \cdot y \right\}, \quad (3.7)$$

$$\frac{d\Psi_1^*}{dr} = -\frac{6\varkappa E_\infty}{2+\delta} \left\{ \ln \left(\tanh \frac{y-y_0}{\nu\sqrt{2}} \right)^2 - \zeta \right\}, \quad (3.8)$$

$$\int_0^\infty \ln \left(\tanh \frac{y-y_0}{\nu\sqrt{2}} \right)^2 dy = O(\nu) \equiv \nu J \sqrt{2}.$$

Здесь J имеет смысл интеграла от внутреннего решения для потенциала внутри ДЭС. Далее будет введена связанный характеристика $\chi = 2J/\zeta$, которая отражает отношение общего влияния электрического поля в дебаевском слое к локальному потенциалу на границе раздела фаз.

При

$$\begin{aligned} \frac{r-1}{\nu} &= \frac{y}{\nu} \rightarrow \infty : \psi_1^* \rightarrow \frac{6\varkappa E_\infty}{2+\delta} (\zeta y - \nu\sqrt{2}J); \quad \frac{d\psi_1^*}{dr} \rightarrow \frac{6\varkappa E_\infty \zeta}{2+\delta}, \\ \int_0^\infty \ln \left(\tanh \frac{y-y_0}{\nu\sqrt{2}} \right)^2 dy &= \nu\sqrt{2} \int_0^\infty \ln [\tanh(\eta-\eta_0)]^2 d\eta = \nu\sqrt{2} \cdot J(\zeta), \\ \eta_0 &= \frac{y_0}{\nu\sqrt{2}} = -\operatorname{arctanh} e^{\frac{\zeta}{2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Внешнее решение имеет вид $\psi_1^0 = C_1 r + D_1/r$. Не будем приводить всю процедуру поиска коэффициентов C_1 и D_1 . Они могут быть найдены из условия сращивания решений. Итоговое выражение для внешнего решения имеет вид

$$\psi_1^0 = \frac{3\varkappa E_\infty \zeta}{2+\delta} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) r - \frac{3\varkappa E_\infty \zeta}{2+\delta} \left(1 + \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) \frac{1}{r}; \quad \chi \equiv \frac{2J}{\zeta}. \quad (3.10)$$

Отметим, что $\chi \rightarrow 1$ при $\zeta \rightarrow 0$ и запишем составное решение

$$\begin{aligned} \psi_1 = -\frac{6\varkappa E_\infty}{2+\delta} &\left\{ \int_0^y \ln \left[\tanh \frac{y-y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2 dy - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \zeta \chi \right\} + \\ &+ \frac{3\varkappa E_\infty \zeta}{2+\delta} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) r - \frac{3\varkappa E_\infty \zeta}{2+\delta} \left(1 + \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решение однородного бигармонического уравнения с граничными условиями

$$r = 1 : \bar{\psi}_1 = 0, \quad \frac{d\bar{\psi}_1}{dr} = 0; \quad r \rightarrow \infty : \psi_1 \rightarrow -U_\infty r^2$$

имеет вид

$$\bar{\psi}_1 = -U_\infty r^2 + \frac{3}{2}U_\infty r - \frac{1}{2}U_\infty \frac{1}{r} \quad (3.12)$$

Полное решение является суперпозицией однородного и неоднородного решений, $\psi = \psi_1 + \bar{\psi}_1$. Согласно известной теореме Гэри Лила коэффициент перед r должен быть равен нулю для соблюдения баланса нулевой силы. Эта теорема применима, если поверхность $r = 1$ отодвигается на расстояние $O(\nu)$, так что $c^+ - c^- = 0$. Для больших $\tilde{\lambda}_D/\tilde{a}$ теорема не верна. Исходя из этого условия баланса сил получим

$$\frac{3\nu E_\infty \zeta}{2+\delta} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}}\chi\right) + \frac{3}{2}U_\infty = 0.$$

Скорость электрофореза выражается как

$$U_\infty = -\frac{2\nu E_\infty \zeta}{2+\delta} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}}\chi\right) \approx \frac{2\nu E_\infty \zeta}{2+\delta}. \quad (3.13)$$

3.1. Гидрофобная поверхность

Такие поверхности могут радикально изменить свойства переноса потока. По сравнению с рассмотренным выше случаем изменяются только граничные условия

$$r = 1 : U = \beta \frac{\partial U}{\partial r}, \quad V = 0, \quad \beta = \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$$

Здесь \tilde{b} — это длина скольжения, которая изменяется в диапазоне от 100 нм до нескольких микрометров. Для микрочастиц она очень близка к нулю, но для наночастиц может достигать 10, т.е. $\beta \in [0, 10]$. Найдем выражение для скорости электрофорез частицы с гидрофобной поверхностью по аналогии с предыдущим параграфом.

$$\begin{aligned} r = 1 : \frac{\partial \psi_1}{\partial r} &= \beta \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right); \\ r \rightarrow \infty : \psi_1 &\rightarrow -U_\infty^2 r^2; \\ \bar{\psi}_1 &= -U_\infty r^2 + \frac{3}{2}U_\infty \frac{1+\beta}{1+2\beta} r - \frac{1}{2}U_\infty \frac{1-\beta}{1+2\beta} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

При $\beta = 0$ это соотношения совпадают с уравнением (3.12). Это решение однородной задачи, $c^+ - c^- = 0$. Теперь найдем решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее условию скольжения. Внутреннее решение

$$U = -\frac{3\nu E_\infty}{2+\delta} \left\{ \ln \left[\tanh \frac{y-y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2 - \zeta - \beta \frac{\sigma}{\nu} \right\} \sin \theta$$

Внутреннее решение для функции тока

$$\psi_1^* = -\frac{6\nu E_\infty}{2+\delta} \left\{ \int_0^y \ln \left[\tanh \frac{y-y_0}{\nu\sqrt{2}} \right]^2 dy - \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) y \right\}.$$

Или в другом виде

$$\psi_1^* \rightarrow \frac{6\nu E_\infty}{2+\delta} \left\{ \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) y - \nu\sqrt{2} J \right\}.$$

Внешнее решение имеет вид $\psi_1^0 = C_1 r + D_1/r$. При $r \rightarrow 1$ $\psi_1^0 = C_1 + D_1 + (C_1 - D_1)y$. Условия сращивания внутреннего и внешнего решений имеют вид

$$\psi_1|_{y \rightarrow 0} = \psi_1^*|_{y/\nu \rightarrow \infty}, \quad \frac{d\psi_1^0}{dy} \Big|_{y \rightarrow 0} = \frac{d\psi_1^*}{dy} \Big|_{\frac{y}{\nu} \rightarrow \infty},$$

Тогда итоговое внешнее решение имеет вид

$$\psi_1^0 = \frac{3\kappa E_\infty}{2 + \delta} \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) r - \frac{3\kappa E_\infty (\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu})}{2 + \delta} \left(1 + \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) \frac{1}{r}.$$

Составное решение запишется как

$$\begin{aligned} \psi_1 = & -\frac{6\kappa E_\infty}{2 + \delta} \left\{ \int_0^y \ln \left[\tanh \frac{y - y_0}{\nu \sqrt{2}} \right]^2 dy - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) \chi \right\} + \\ & + \frac{3\kappa E_\infty}{2 + \delta} \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) r - \frac{3\kappa E_\infty (\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu})}{2 + \delta} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right) \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

В конечном итоге получаем формулу скорости частицы

$$U_\infty = \frac{2\kappa E_\infty}{2 + \delta} \left(\zeta + \beta \frac{\sigma}{\nu} \right) \frac{1 + 2\beta}{1 + \beta} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \chi \right).$$

Из последней формулы можно заключить, что гидрофобная поверхность может ускорить частицу от 10 до 100 раз.

4. Результаты.

Рассматривается влияние основных параметров на скорость частицы. Зафиксируем значение числа Дебая $\nu = 0,002$ (если не указано иное), что для типичной концентрации электролита ($c_\infty = 1$ моль/м³) дает характерную напряженность $E_\infty = 3676$ В/м. Из экспериментальных работ известно, что нелинейные эффекты при электрофорезе диэлектрической частицы начинают проявляться при напряженности электрического поля около 1 кВ/см. [12]. Также известно, что частицы с гидрофобной поверхностью могут развивать намного большую скорость, в 10–100 раз выше, чем скорость обычной диэлектрической частицы при определенных условиях. В предыдущем параграфе для случая гидрофобной поверхности было выведено аналитическое выражение для скорости частицы из условия баланса сил, действующих на частицу.

В статье [12] авторы исследовали поведение скорости диэлектрической частицы от напряженности электрического поля, доходящей до 3 кВ/см. Сравнение с данной экспериментальной работой было приведено в работе [13]. В данной статье исследовано влияние гидрофобной поверхности на скорость для трех случаев: при изменении концентрации электролита, при изменении дзета-потенциала и размера частицы. Сначала представим результаты для фиксированного значения параметра длины скольжения $\beta = 0,01$.

Рис. 2а показывает эффект дзета-потенциала для скорости электрофореза. В соответствии с уравнением Грэхема увеличение дзета-потенциала приводит к росту плотности поверхностного заряда и, как следствие, более сильному воздействию электрического поля на частицу. В современной литературе существует оценка, что при дзета-потенциале менее термического (около 25 мВ) сохраняется симметрия поверхностного заряда и выполняется формула Смолуховского. При значениях дзета-потенциала выше этого значения при достаточной напряженности электрического поля может происходить искажение распределения поверхностного заряда и нарушение линейной теории. Из рис. 2а видно, что скорость электрофореза гидрофобной частицы, как и ожидалось, выше диэлектрической и увеличивается при росте дзета-потенциала.

Рис. 2б показывает влияние размера частиц. Здесь также видно, что размер частицы влияет на расхождение скоростей. Для более крупных частиц прирост в скорости гидрофобной частицы больше, чем для более мелких. Отметим, что характерный размер частицы входит сразу в два параметра задачи: число Дебая ν и длину скольжения β .

Рис. 3а показывает эффект концентрации электролита. Как видно, чем выше концентрация электролита, тем более значительным становится расхождение скоростей. Причем при очень

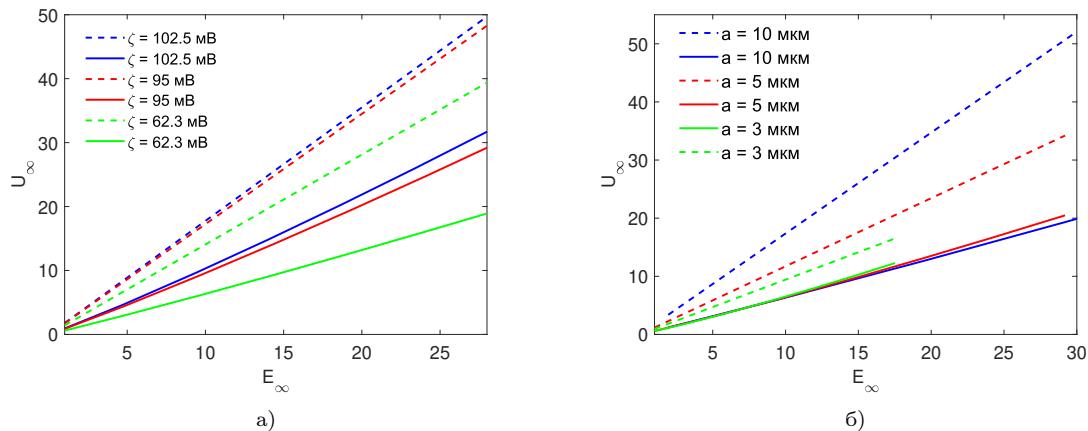


Рис. 2. Электрофоретическая скорость как функция напряженности электрического поля для разных значений (а) дзета-потенциала; (б) радиуса микрочастицы. Параметры расчетов: $\varkappa = 0,26$, $\delta = 0,03$, $\beta = 0,01$. Для (а) $\nu = 0,002$, для (б) $\sigma = -4,33$. Пунктирные линии соответствуют гидрофобной частице, сплошные — диэлектрической

Fig. 2. Electrophoretic velocity as a function of electric field strength for different values of (a) zeta potential; (b) microparticle radius. Calculation parameters: $\varkappa = 0,26$, $\delta = 0,03$, $\beta = 0,01$. For (a) $\nu = 0,002$, for (b) $\sigma = -4,33$. Dashed lines correspond to a hydrophobic particle, solid lines — to a dielectric particle

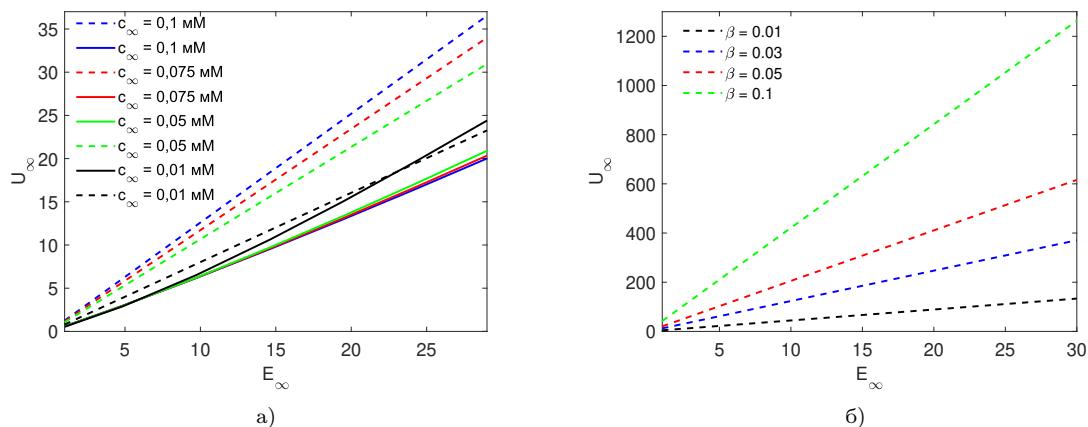


Рис. 3. Электрофоретическая скорость как функция напряженности электрического поля для разных значений (а) концентрации буферного электролита; (б) длины скольжения. Параметры для (а) $\varkappa = 0,26$, $\delta = 0,03$, $\beta = 0,01$, $\sigma = -4,33$. Пунктирные линии соответствуют гидрофобной частице, сплошные — диэлектрической; (б) $\varkappa = 0,26$, $\delta = 0,05$, $\sigma = -3$, $\nu = 0,002$

Fig. 3. Electrophoretic velocity as a function of electric field strength for different values of (a) buffer electrolyte concentration; (b) slip length. Parameters for (a) $\varkappa = 0,26$, $\delta = 0,03$, $\beta = 0,01$, $\sigma = -4,33$. Dashed lines correspond to a hydrophobic particle, solid lines to a dielectric particle; (b) $\varkappa = 0,26$, $\delta = 0,05$, $\sigma = -3$, $\nu = 0,002$

малой концентрации (0,01 миллимоляр) расхождение в скорости между двумя типами частиц минимально и достигает порядка 50 % при увеличении концентрации до 0,1 миллимоляр. Это можно объяснить тем, что в растворах низкой концентрации электрическая проводимость раствора также низка и приложенное электрическое поле может быть более однородным по всему раствору, так как нет значительного количества ионов для создания локальных различий в проводимости. Это означает, что как диэлектрические, так и гидрофобные частицы испытывают примерно одинаковую силу воздействия электрического поля.

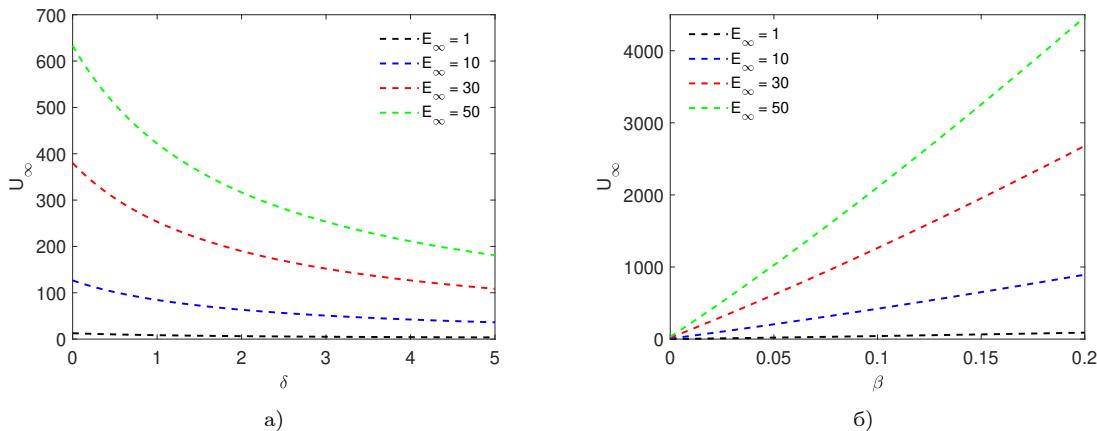


Рис. 4. Электрофоретическая скорость как функция (а) отношения диэлектрических проницаемостей частицы и электролита; (б) длины скольжения при фиксированных значениях напряженности электрического поля. Параметры: (а) $\varkappa = 0,26$, $\beta = 0,03$, $\sigma = -3$, $\nu = 0,002$ (б) $\varkappa = 0,26$, $\delta = 0,05$, $\sigma = -3$, $\nu = 0,002$

Fig. 4. Electrophoretic velocity as a function of (a) the ratio of permittivities of the particle and electrolyte; (b) the slip length at fixed values of the electric field strength. Parameters: (a) $\varkappa = 0.26$, $\beta = 0.03$, $\sigma = -3$, $\nu = 0.002$ (b) $\varkappa = 0.26$, $\delta = 0.05$, $\sigma = -3$, $\nu = 0.002$

Рис. 3а показывает влияние длины скольжения на скорость частицы. Как и ожидалось, данный параметр существенно влияет на скорость частицы. Увеличение β на порядок приводит к росту скорости примерно в 6 раз. В водных растворах диэлектрические частицы взаимодействуют с молекулами воды через гидратные оболочки. Эти оболочки увеличивают эффективный размер частиц и приводят к большему сопротивлению жидкости. Гидрофобные частицы могут двигаться более свободно в водной среде, если они избегают формирования стабильных гидратных оболочек, что уменьшает сопротивление, испытываемое ими во время движения. Таким образом, отсутствие обширных водных взаимодействий может позволять гидрофобным частицам двигаться быстрее.

Рис. 4а показывает влияние параметра δ на скорость частицы, а 4б — зависимость скорости от β для нескольких фиксированных значений E_∞ . Высокое значение параметра δ приводит к замедлению скорости частицы, которое может достигать нескольких раз. Данный параметр определяет способность частицы поляризоваться во внешнем поле и высокая поляризация приводит к созданию неоднородного электрического поля вокруг частицы, что влияет на ее подвижность. Здесь следует отметить, что большинство случаев реальных материалов все же описывается низким значением δ . Например, для частицы из кварца в водном растворе значение δ составляет около 0,05.

Заключение

В данной работе исследуется влияние основных параметров на скорость электрофореза микрочастицы. Было изучено поведение гидрофобных частиц и некоторые эффекты были сопоставлены с диэлектрическими частицами. Особое внимание удалено гидрофобным частицам, скорость которых может превышать скорость диэлектрических частиц в 10–100 раз в зависимости от условий. Результаты показывают, что дзета-потенциал существенно влияет на скорость электрофореза, что приводит к нарушению симметрии распределения заряда. Эффекты размера частицы также значимы, с увеличением размера скорость гидрофобной частицы увеличивается больше, чем у диэлектрической. Изучено также влияние концентрации электролита на скорость и выявлено, что при низкой концентрации разница в скорости между разными типами частиц минимизируется. Помимо уже упомянутых параметров, в работе также рассмотрено влияние длины скольжения β . Обнаружено, что изменение этого па-

метра значительно влияет на скорость частиц, которые, благодаря отсутствию стабильных гидратных оболочек, могут двигаться с меньшим сопротивлением в водной среде. Данные эффекты продемонстрированы с помощью полученного аналитически выражения для скорости электрофореза, которое также было верифицировано с помощью численного решения задачи в полной постановке.

Исследование подтверждает, что управление параметрами, такими как дзета-потенциал, размер частицы, концентрация электролита, длина скольжения, а также отношение диэлектрических проницаемостей, может быть использовано для оптимизации условий электрофореза для различных типов частиц. Такие данные могут служить основой для разработки новых методов и технологий в области микрофлюидики и нанотехнологий.

Литература [References]

1. Stone, H.A., Stroock, A., Ajdari, A., Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2004, vol. 36, pp. 381–411.
2. Squires, T.M., Quake, S., Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale. *Rev. Mod. Phys.*, 2005, vol. 77, p. 977. DOI: [10.1103/RevModPhys.77.977](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.977)
3. Lauga, E., Brenner, M.P., Stone, H.A., Microfluidics: The no-slip boundary condition. In: Tropea, C., Yarin, A., Foss, J.F. (eds), *Handbook of Experimental Fluid Dynamics*. Springer, New York, 2007, pp. 1219–1240. DOI: [10.1007/978-3-540-30299-5_19](https://doi.org/10.1007/978-3-540-30299-5_19)
4. Neto, C., Evans, D.R., Bonaccurso, E., Butt, H.-J., Craig, V.S.J., Boundary slip in Newtonian liquids: A review of experimental studies. *Rep. Prog. Phys.*, 2005, vol. 68, p. 2859. DOI: [10.1088/0034-4885/68/12/R05](https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/12/R05)
5. Vinogradova, O., Slippage of water over hydrophobic surfaces. *Int. J. Min. Process.*, 1999, vol 56, pp. 31–60. DOI: [10.1016/S0301-7516\(98\)00041-6](https://doi.org/10.1016/S0301-7516(98)00041-6)
6. Churaev, N.V., Ralston, J., Sergeeva, I.P., Sobolev, V.D., Electrokinetic properties of methylated quartz capillaries. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2002, vol. 96, p. 265. DOI: [10.1016/s0001-8686\(01\)00084-7](https://doi.org/10.1016/s0001-8686(01)00084-7)
7. Bouzigues, C.I., Tabeling, P., Bocquet, L., Nanofluidics in the Debye Layer at Hydrophilic and Hydrophobic Surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 101, art. 114503. DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.114503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.114503)
8. Ajdari, A., Bocquet, L., Giant Amplification of Interfacially Driven Transport by Hydrodynamic Slip: Diffusio-Osmosis and Beyond. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 96, art. 186102. DOI: [10.1103/PhysRevLett.96.186102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.186102)
9. Khair, A.S., Squires, T.M., The influence of hydrodynamic slip on the electrophoretic mobility of a spherical colloidal particle. *Physics of Fluids*, 2009, vol. 21, art. 042001. DOI: [10.1063/1.3116664](https://doi.org/10.1063/1.3116664)
10. O'Brien, R.W., White, L.R., Electrophoretic mobility of a spherical colloidal particle. *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 2*, 1978, vol. 74, pp. 1607–1626. DOI: [10.1039/F29787401607](https://doi.org/10.1039/F29787401607)
11. Park, H.M., Electrophoresis of particles with Navier velocity slip. *Electrophoresis*, 2013, vol. 34, p. 651–661. DOI: [10.1002/elps.201200484](https://doi.org/10.1002/elps.201200484)
12. Bentor, J., Dort, H., Chitrapu, R.A., Zhang, Y., Xuan, X., Nonlinear electrophoresis of dielectric particles in Newtonian fluids. *Electrophoresis*, 2023, vol. 44, iss. 11–12, pp. 938–946. DOI: [10.1002/elps.202200213](https://doi.org/10.1002/elps.202200213)
13. Frants, E., Amiroudine, S., Demekhin, E., DNS of Nonlinear Electrophoresis. *Microgravity Sci. Technol.*, 2024, vol. 36, iss. 21. DOI: [10.1007/s12217-024-10108-w](https://doi.org/10.1007/s12217-024-10108-w)

УДК 538.958:535.37

EDN: BNQFFZ DOI: 10.31429/vestnik-21-2-93-102

Оптические свойства многокомпонентных боратных стекол, легированных трехвалентным ионами тербия

А. Хаммуд  , В. А. Исаев 

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия
 Хаммуд Алаа; ORCID 0000-0001-9076-4618; SPIN 4054-3239; e-mail: allahammsss@gmail.com

Аннотация. На основе боратных стекол, легированных ионами Tb^{3+} , получены люминофоры в зеленом спектральном диапазоне. Установлены спектральные и люминесцентные свойства многокомпонентных боратных стекол с различной концентрацией Tb^{3+} . Наиболее интенсивная люминесценция соответствует переходу $^5D_4 \rightarrow ^7F_5$ в ионе Tb^{3+} , длина волны которого составляет 542 нм.

Ключевые слова: боратные стекла, запрещенная зона, люминесценция, время жизни.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Хаммуд А., Исаев В. А. Оптические свойства многокомпонентных боратных стекол, легированных трехвалентным ионами тербия // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 93–102. EDN: BNQFFZ. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-93-102

Поступила 5 июня 2024 г. После доработки 20 июня 2024 г. Принято 21 июня 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Optical Properties of Multicomponent Borate Glasses Doped with Trivalent Terbium Ions

А. Hammoud  , В. А. Isaev 

Kuban State University, 149 Stavropolskaya Str., Krasnodar, 350040, Russia
 Alaa Hammoud; ORCID 0000-0001-9076-4618; e-mail: allahammsss@gmail.com
 Vladislav A. Isaev; ORCID 0000-0003-1955-8904; e-mail: vliisaev.v@yandex.ru

Abstract. The paper presents the results of studies of spectral and luminescent properties of new series glass multi compositions based on borate and bismuth glass heavily doped with terbium, and investigate the regularity of the characteristics of the obtained samples at different concentrations of bismuth and activator and the mutual effect on the borate glass matrix. It is shown that the intensity of spontaneous radiation increases with an increase in the concentration of terbium. Three main absorption bands were found due to fluctuations of complexes in borate glass. Characteristic absorption peaks of terbium ions at 367, 377 and 485 nm are observed, corresponding to the transitions $^7F_6 \rightarrow ^5D_4$, $^7F_6 \rightarrow ^5G_6$, $^7F_6 \rightarrow ^5L_{10}$. The physical parameters of a multicomponent glass doped with Tb^{3+} ions are calculated. The resulting phosphors have high photoluminescent properties and can be used in various optical applications.

Keywords: borate glasses, forbidden zone, luminescence, lifetime.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Hammoud, A., Isaev, V. A., Optical properties of multicomponent borate glasses doped with trivalent terbium ions. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 93–102. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-93-102

Received 5 June 2024. Revised 20 June 2024. Accepted 21 June 2024. Published 28 June 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

Бинарные и сложные оксиды металлов в кристаллическом и аморфном состоянии, легированные трехвалентными редкоземельными ионами (RE^{3+}), в настоящее время находят широкое применение во многих областях науки и техники. Аморфные среды, легированные RE^{3+} используются как эффективные спектральные трансформаторы вакуумного ультрафиолетового излучения (ВУФ) в видимое свечение с квантовым выходом больше 1, а также в индивидуальной дозиметрии рентгеновской и гамма радиации, кроме того, активированное RE^{3+} стекло является перспективной активной средой для твердотельных лазеров, а также для эффективных квантово-оптических устройств [1–5]. В частности, при возбуждении на длине волны 369 нм наблюдается эффективная люминесценция на переходе $^5D_4 \rightarrow ^7F_5$ в ионе Tb^{3+} в зеленой области спектра ($\lambda = 545$ нм). Поиск новых составов стекол и стеклокерамик, легированных Tb^{3+} , с его различными физическими и фотолюминесцентными свойствами, является актуальной задачей для исследования, для соответствия требованиям быстро расширяющегося технологического рынка.

В настоящей работе представлены результаты исследований спектральных и люминесцентных свойств новой серии образцов на основе боратного и висмутового стекла, легированного ионами тербия.

1. Синтез образцов и интенсивность спонтанного излучения

Для изготовления образцов использовалось следующее сырье: H_3BO_3 ; $NaCO_3$; PbO ; Bi_2O_3 ; Tb_4O_7 чистотой около 99,99 %. Многокомпонентные боратные стекла молярного состава $70B_2O_3 - 10Na_2O - 15PbO - (5-x)Bi_2O_3 - xTb_2O_3$, где $x = 0; 1; 2; 3; 5$ мол. % были получены с использованием метода закалки расплава и обозначены следующим образом: $Tb0-Bi5$; $Tb1-Bi4$; $Tb2-Bi3$; $Tb3-Bi2$; $Tb5-Bi0$ соответственно, в зависимости от значения активатора x .

Этапы приготовления стекла по этой методике аналогичны тем, которые приведены в работах [6, 7]. Следует отметить, что однородность расплава достигается в температурном диапазоне от 700 до 950 °C в зависимости от концентрации тербия. При разливке расплава в платиновый тигель, его предварительно нагревали до температуры 350 °C (ниже температуры стеклования боратного висмутового стекла (T_g) [6, 8]), чтобы предотвратить любой возможный процесс кристаллизации и уменьшения вероятности возникновения деформаций из-за термомеханиче-

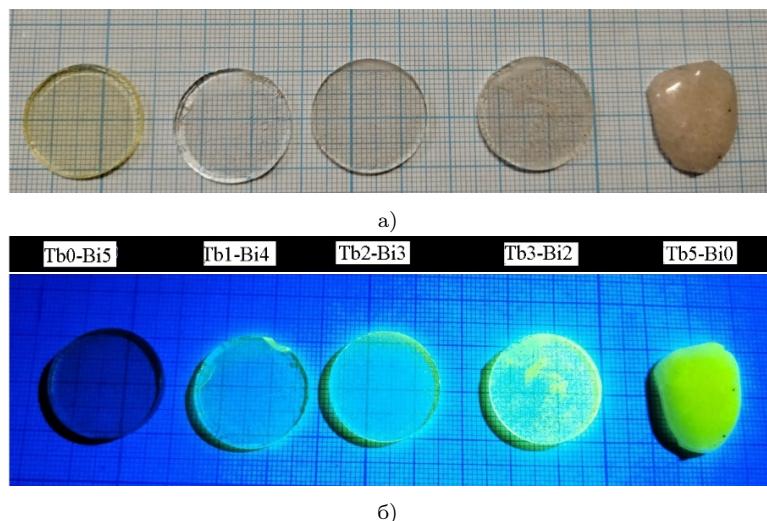


Рис. 1. Образцы многокомпонентных боратных стекол: а) образцы с различной концентрацией Tb^{3+} ; б) свечение образцов под воздействием ультрафиолетового излучения (365 нм)

Fig. 1. Samples of multicomponent borate glasses: (a) Sample series of Tb^{3+} – doped bismuth borate glass with different concentrations; (b) Glasses under 365 nm excitation

ских напряжений, образующихся внутри матрицы полученных образцов. Процесс охлаждения стекол от 350 °C до комнатной температуры происходит со скоростью 1 градус в минуту. На рис. 1а показана серия изготовленных образцов после полировки и шлифования, толщина которых составляла приблизительно 2,8 мм ± 0,1 мм, за исключением BBiT-5, который не обрабатывался.

На рис. 1б показано, что синтезированные стекла под воздействием ультрафиолетового излучения (365 нм) светятся ярко-зеленым цветом, за исключением образца BBiT-0, который не был легирован. Визуально видно, что интенсивность спонтанного излучения возрастает с увеличением концентрации тербия.

2. Спектральный анализ. Ширина запрещенной зоны

Спектры поглощения для полученных образцов измерялись на Фурье-спектрометре VERTEX 70 (рис. 2). В результате обнаружены три основные полосы поглощения, обусловленные колебаниями комплексов в боратном стекле: BO₄ тетраэдрические комплексы на 800 см⁻¹, BO₃ тригональные на 1300 см⁻¹ и небольшой пик поглощения при 680 см⁻¹, обусловленный деформационными колебаниями различных боратных кластеров (пентаборатных групп, состоящих из комплексов BO₄ и BO₃) [9–13]. Эти группы содержат большое количество немостиковых атомов кислорода (NBO) и предполагают взаимодействие тетраэдра BO₄ с немостиковыми кислородсодержащими комплексами BO₃ [9].

Спектры пропускания регистрировались на спектрофотометре Hitachi u-3000 (рис. 3). Стекло, не легированное Tb₂O₃ Tb0-Bi5, обладает высокой прозрачностью около 80 % в видимой области без учета отражения на поверхности образца. В образцах с x = 1; 2; 3 наблюдаются характерные пики поглощения ионов тербия на 367, 377 и 485 нм, соответствующие переходам ⁷F₆ → ⁵D₄, ⁷F₆ → ⁵G₆, ⁷F₆ → ⁵L₁₀.

Различные в спектрах пропускания образцов с увеличением концентрации тербия обусловлено:

- во-первых, снижение прозрачности образца Tb3-Bi2 в области от 400 до 1100 нм непосредственно связано с образованием кристаллитов различных размеров и типов внутри стекла, что вместе с сопутствующими дефектами приводит к рассеянию света;

- во-вторых, незначительное увеличение прозрачности образцов в ультрафиолетовом диапазоне обусловлено уменьшением концентрации висмута с увеличением содержания тербия

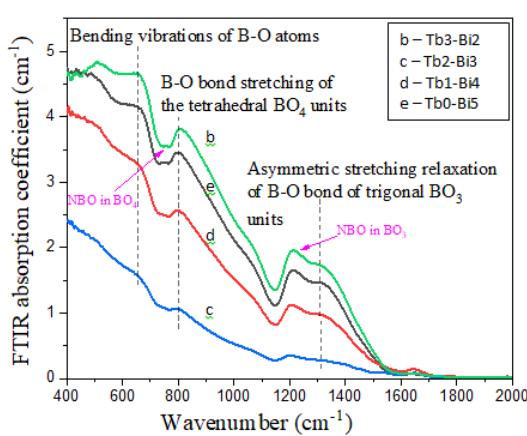


Рис. 2. Инфракрасные Фурье-спектры боратного стекла

Fig. 2. Infrared Fourier spectra of borate glass

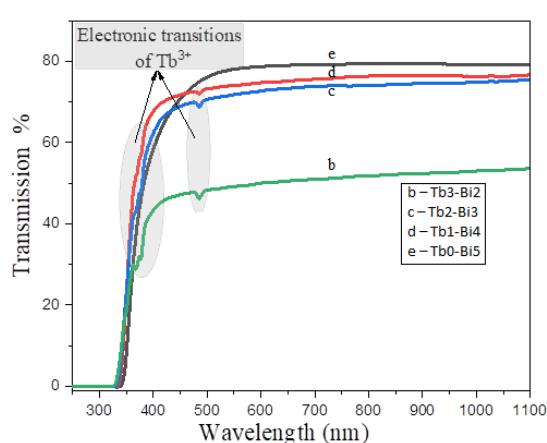


Рис. 3. Спектры пропускания многокомпонентного стекла бората висмута с различной концентрацией Tb₂O₃

Fig. 3. Transmission spectra of multicomponent bismuth borate glass with different concentrations of Tb₂O₃

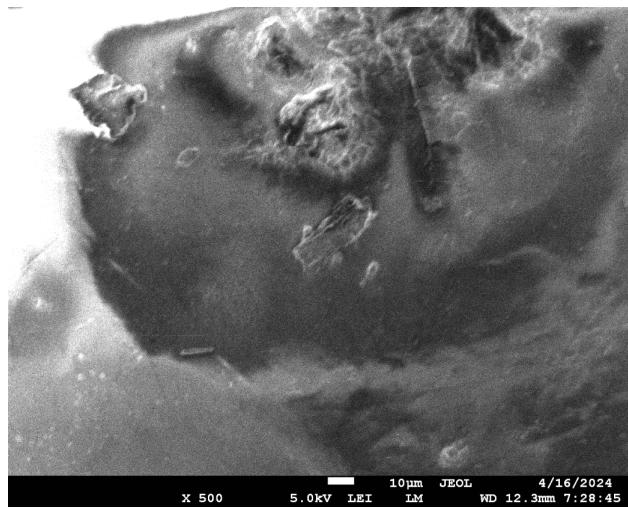


Рис. 4. СЭМ изображение образца Tb3–Bi2 с включением кристаллитов

Fig. 4. SEM image of Tb3–Bi2 sample with inclusion of crystallites

в матрице. Висмут играет существенную роль в увеличении поглощения стекла в ближнем ультрафиолетовом диапазоне [7, 14]. Предел пропускания смешается с 340 нм (для чистого стекла) до 328 нм (для стекла с содержанием тербия 3 мол. %).

В качестве доказательства первого утверждения для образца Tb3–Bi2 на сканирующем электронном микроскопе модели JSM-7500F были сняты СЭМ изображения (рис. 4). Данные СЭМ показывают, что образец содержит кристаллиты размерами до 30 мкм.

Ширина запрещенной зоны была рассчитана по спектру поглощения в соответствии с уравнением [15, 16]

$$(\alpha h\nu)^p = A(h\nu - E_g),$$

где $p = 2$ и $0,5$ для разрешенных прямых и непрямых переходов, соответственно; E_g — ширина запрещенной зоны; A — константа пропорциональности, для стекла равная единице; ν — частота; α — коэффициент поглощения; h — постоянная Планка.

Результаты, приведенные на рис. 5, указывают на тот факт, что с увеличением содержания тербия в матрице ширина прямой запрещенной зоны увеличивалась примерно на 0,1 эВ при значении в диапазоне от 3,60 до 3,72 эВ, а непрямой от 3,49 до 3,66 эВ. Небольшое изменение ширины запрещенной зоны в зависимости от различных концентраций эрбия непосредственно связано с небольшим изменением оптической плотности образцов. В статье [20] авторы сообщали о корреляции между шириной запрещенной зоны и оптической плотностью образцов.

Что касается образца Tb5–Bi0, то попытка получить энергию запрещенной зоны с использованием спектра отражения и функции Кубелки–Мунка не увенчалась успехом. Результаты были неудовлетворительными из-за содержания различных фаз внутри образца, который содержит аморфную основу, кристаллы различного химического состава и, как следствие, обладающих разными физическими свойствами.

3. Расчет физических параметров многокомпонентного стекла, легированного ионами Tb³⁺

Используя величину ширины запрещенной зоны, показатель преломления образцов был рассчитан по уравнению [17]

$$\frac{(n^2 - 1)}{(n^2 + 2)} = 1 - \sqrt{\frac{E_g}{20}}$$

где n — оптический показатель преломления.

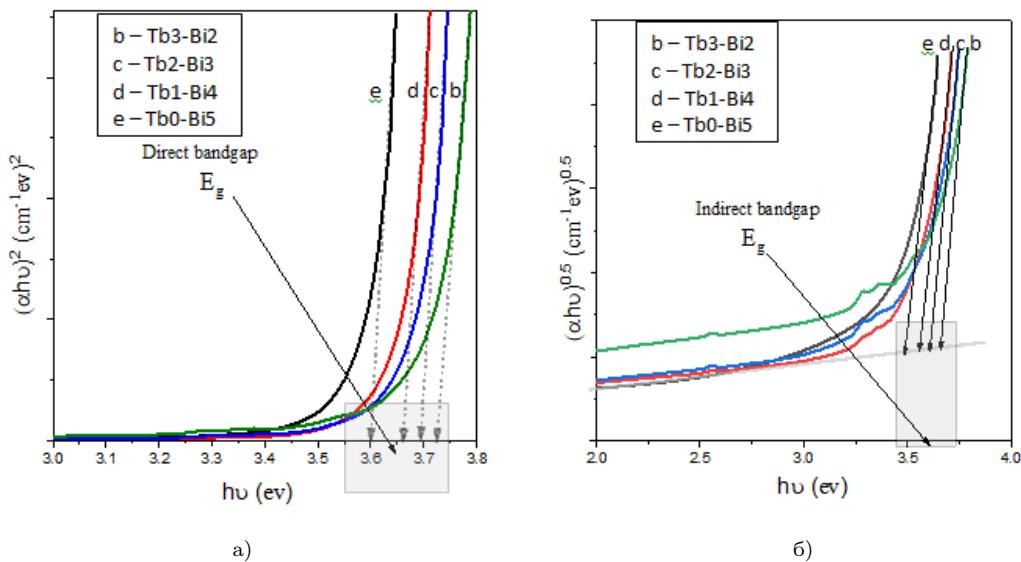


Рис. 5. Графическое определение прямой ширины запрещенной (а) и непрямой (б) зоны многокомпонентного боро-висмутного стекла

Fig. 5. Graphical determination of the direct width of the forbidden (a) and indirect (b) zones of multicomponent boron-bismuth glass

Плотность полученных образцов рассчитывалась методом Архимеда

$$\rho = \frac{W_a}{(W_a - W_b)} \rho_b,$$

где W_a — вес образца в воздухе, W_b — вес образца в плавучем состоянии и ρ_b — плотность плавучего вещества. Для определения плотности использовали дистиллированную воду.

Используя плотность и показатель преломления образцов, можно рассчитать следующие физические параметры по соотношениям, представленным в работах [18, 19]:

— молярный объем

$$V_m = \frac{\sum_{i=1}^N X_i Z_i}{\rho},$$

где V_m — молярный объем; X_i и M_i — мольная доля и молекулярная масса компонент стекла; — эффективную концентрацию ионов тербия

$$N_{Tb^{3+}} = \frac{2\rho N_a x_{Tb^{3+}}}{M_m},$$

где $N_{Tb^{3+}}$ — эффективная концентрация ионов Tb^{3+} ; N_a — число Авогадро; ρ — плотность стекла; M_m — средняя молекулярная масса стекла; M_m ; $x_{Tb^{3+}}$ — мольная доля оксида редкоземельного элемента;

— радиус полярона

$$r_p(A^\circ) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\pi}{6N}\right)^{1/3};$$

— межъядерное расстояние

$$r_i(A^\circ) = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/3};$$

— диэлектрическую постоянную

$$\epsilon = n^2;$$

– потери на отражение

$$R_L = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2;$$

– молярную рефракцию

$$R_M = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) \cdot V_m.$$

Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Таблица 1. Физические параметры многокомпонентного стекла, легированного ионами Tb^{3+}

Table 1. Physical parameters of multicomponent glass doped with Tb^{3+} ions

Код образца	ρ (г/см ³)	V_m (см ³ /мол)	$N_{Tb^{3+}}$ (см ⁻³)	r_p (Å)	r_i (Å)	ε	R_L %	R_M
Tb5-Bi0	3,40	31,383	$1,9 \cdot 10^{21}$	3,25	8,07	—	—	—
Tb3-Bi2	3,61	30,112	$1,19 \cdot 10^{21}$	3,8	9,43	4,97	14,5	17,16
Tb2-Bi3	3,64	30,139	$0,8 \cdot 10^{21}$	4,34	10,77	5,06	14,97	17,34
Tb1-Bi4	3,67	30,165	$0,4 \cdot 10^{21}$	5,46	13,57	5,10	14,93	17,43
Tb0-Bi5	3,70	30,191	—	—	—	5,18	15,08	17,53

4. Люминесцентный анализ

Спектры возбуждения излучения люминофора на длине волны 542 нм демонстрируют широкую полосу возбуждения в УФ-области с центром при 274 нм и характерные пики в ближней УФ- и синей областях. Регистрацию спектров возбуждения образцов осуществляли на спектрофлюориметре FLUORAT-02-Panorama spectrofluorometer (рис. 6). Характерные пики возбуждения иона Tb^{3+} наблюдаются на 352 нм и 372 нм для квантовых переходов $^7F_6 \rightarrow ^5L_{10}$ и $^7F_6 \rightarrow ^5G_6$ соответственно. Широкая полоса возбуждения в стеклянной матрице также наблюдается в области 200–320 нм. Она обусловлена $4f^n \rightarrow 4f^{n-1}5d$ (4f–5d) переходами ионов Tb^{3+} , эти квантовые переходы описывают спин-орбитальное взаимодействие электронов на уровнях 4f–5d в лантаноидах, где (SF) означает запрещенный спин с полосами с высоким спином (4f-5d), а (SA) – разрешенный спин для переходов с низким спином (4f–5d) [21].

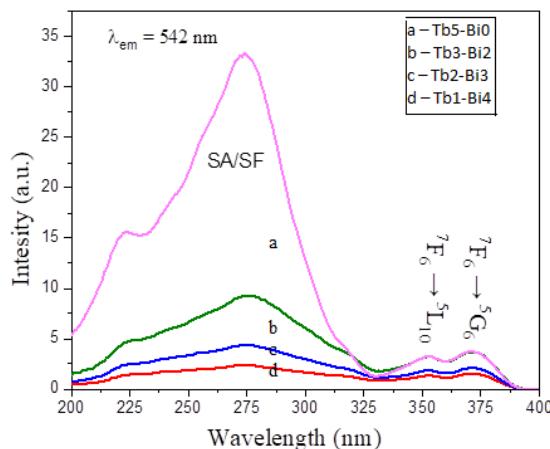


Рис. 6. Спектры возбуждения фотolumинесценции стекол бората висмута, легированных ионами Tb^{3+} (контроль излучения при 542 нм)

Fig. 6. Photoluminescence excitation spectra of Tb^{3+} ions doped bismuth borate glasses (monitoring emission at 542 nm)

На интенсивность и поведение этого уникального квантового перехода влияет природа взаимодействия между ионами активатора и окружающей их средой. Широкие полосы возбуждения ($4f$ - $5d$) указывают на возможность возбуждения с высокой эффективностью ионов тербия через стеклянную матрицу. Максимум этого возбуждения приходится на 274 нм. Для переходов ($4f$ - $5d$) интенсивность возбуждения возрастала с увеличением концентрации ионов тербия. Что касается образца Tb5-Bi0, то увеличение интенсивности спектра возбуждения носит нелинейный характер, что связано с образованием в нем кластеров в кристаллических состояниях.

Следует также отметить, что интенсивность прямого возбуждения иона лантаноида одинакова для образцов с содержанием тербия 3 моль % и 5 моль %, что может быть обусловлено насыщением концентрации тербия и, как следствие, активным влиянием процессов реабсорбции в стеклах.

Спектры фотолюминесценции (рис. 7) образцов, легированных тербием, при возбуждении 274 нм содержат характерные узкие пики люминесценции иона металла, соответствующие излучательным переходам следующим образом: $^5D_4 \rightarrow ^7F_6$ (488,5 нм), $^5D_4 \rightarrow ^7F_5$ (542,0 нм), $^5D_4 \rightarrow ^7F_4$ (583,9 нм), $^5D_4 \rightarrow ^7F_3$ (622,0 нм). Резкое расщепление пиков в спектрах всех образцов одинаково, что указывает на идентичное координационное окружение ионов тербия. По мере увеличения содержания тербия в стекле интегральная интенсивность люминесценции увеличивается нелинейно.

Интенсивность фотолюминесценции зависит от ряда факторов, остановимся на двух из них, непосредственно связанных с образцами, изученными в этом исследовании. Это концентрация активированных ионов и структура образцов. Концентрационное тушение ионов Tb^{3+} в спектре излучения не наблюдалось, поэтому с увеличением концентрации ионов тербия интенсивность радиационных переходов увеличивались, а безызлучательные переходы (тепловые фононы) четко не наблюдались. Это приводит к увеличению радиационной эффективности образцов из-за высокой симметрии координации ионов Tb^{3+} и совпадающих атомных связей внутри образцов.

Что касается второго фактора, который обусловлен природой образцов и проявляется непосредственно в образце Tb5-Bi0, то наличие нанокристаллов с высокой степенью симметрии, образовавшихся внутри стеклянной матрицы, привело к увеличению интенсивности спектра излучения.

Кинетика затухания люминесценции является моноэкспоненциальной для всех образцов, что указывает на эквивалентность всех центров люминесценции. Время жизни люминесценции,

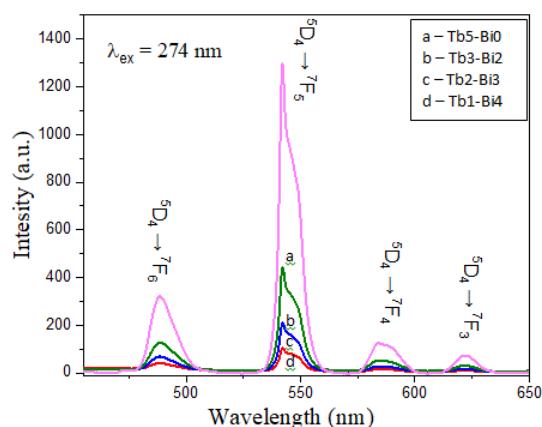


Рис. 7. Спектры фотолюминесценции стекла бората висмута, легированного ионами Tb^{3+} , возбуждение при 274 нм

Fig. 7. Photoluminescence spectra of bismuth borate glass doped Tb^{3+} ions

определенное как время уменьшения интенсивности люминесценции в e раз, близко для образцов с различным содержанием тербия и незначительно уменьшается с увеличением концентрации легированных ионов.

В табл. 2 приведены основные оптические характеристики полученных образцов.

Таблица 2. Оптические параметры многокомпонентного стекла, легированного ионами Tb^{3+}

Код образца	E_g прямой (eВ)	E_g непрямой (eВ)	n	Время жизни, мкс
Tb5-Bi0	—	—	—	2325
Tb3-Bi2	3,73	3,66	2,23	2330
Tb2-Bi3	3,69	3,60	2,25	2325
Tb1-Bi4	3,66	3,55	2,26	2370
Tb0-Bi5	3,60	3,49	2,27	—

Для того чтобы оценить квантовый выход фотолюминесценции полученных образцов в соответствии с доступными нам технологическими возможностями, применен относительный метод сравнения с эталонным образцом, квантовая эффективность которого известна и составляет около 62 % [22]. По технологии работы [22] был приготовлен образец со следующим составом $16,58Li_2O - 82,92B_2O_3 - 0,5Tb_4O_7$ мол. %, обозначенный как (LBT), затем измерялась плотность полученного образца и сравнивалась с плотностью в статье. Было установлено, что плотность одинакова и равна $2,21 \text{ г}/\text{см}^3 \pm 0,03$.

Части от каждого из образцов измельчили их в агатовой ступке, приготовили таблетки массой 1 г, при этом все таблетки имели одинаковую площадь поверхности, затем возбудили все образцы одним и тем же источником (мощность 1 Вт, GaN, 365 нм) и зарегистрировали люминесценцию. Данные, приведенные в табл. 3, показывают, что образцы обладают сопоставимой фотолюминесценцией по сравнению с образцом LBT. Площадь под кривой соответствует энергетическому выходу.

Таблица 3. Сравнение площади области спектра излучения между образцами при 542 нм

Код образца	Tb1-Bi4	Tb2-Bi3	Tb3-Bi2	Tb5-Bi0	LBT
Интегральная площадь, отн. ед.	30	62	133	404	53

Результаты табл. 3 указывают на тот факт, что квантовая эффективность излучения образцов выше по сравнению с таковой у образца LBT. Однако судить о величине эффективности на основе используемого этого метода нельзя, поскольку изменение технологии приготовления стекла с учетом погрешности может привести к иным результатам. Однако образцы при $x = 2, 3$ и 5 можно считать эффективными источником зеленого света.

Заключение

Методом закалки из расплава получены стекла $70B_2O_3 - 10Na_2O - 15PbO - (5-x)Bi_2O_3 - xTb_2O_3$, где $x = 0; 1; 2; 3; 5$ мол. %. Инфракрасная спектроскопия с преобразованием Фурье проливают свет на различные структурные свойства стекол. Выявлено, что полученные образцы имеют три основные инфракрасные полосы около $\sim 1300 \text{ см}^{-1}$ (BO_3 тригональные); 800 см^{-1} (BO_4 тетраэдрические) и при 680 см^{-1} (пентаборатных групп) соответственно, эти комплексы характеризуют боратное стекло. Спектр пропускания доказал, что образцы имеют высокую прозрачность (340–1100 нм), в ультрафиолетовом диапазоне при уменьшении висмута в образцах наблюдалось большее пропускание. С увеличением концентрации тербия вместо висмута плотность образцов уменьшалась от 3,7 до 3,4 $\text{г}/\text{см}^3$ (Tb0-Bi5-Tb5-Bi0), а уменьшение плотности образцов приводит к увеличению ширины запрещенных зон (прямых и непрямых). Поглощение Tb^{3+} ионы в видимом диапазоне слишком слабое (при 460 нм) и увеличивается

с увеличением концентрации. В основном Tb^{3+} возбуждается в ультрафиолетовом диапазоне, на что указывает спектр возбуждения. Эффект тушения не наблюдается с увеличением концентрации Tb_2O_3 , соответственно, люминесценция образцов зарегистрировала максимальное значение при концентрации 5 мол. % Tb^{3+} при 542 нм. Кинетика затухания люминесценции, соответствующая излучательному переходу $^5\text{D}_4 \rightarrow ^7\text{F}_5$ (542,0 нм) при возбуждении на 270 нм, позволила определить время жизни примерно в 2,3 мс. Для оценки эффективности полученных люминофоров провели сравнение с изученным стеклом, которое имеет высокую эффективность спонтанного излучения на 542 нм. Доказано, что образец ($\text{Tb}_5\text{--Bi}_0$), имеющий двойную структурную фазу, светится значительно интенсивнее, что указывает на то, что полученные люминофоры имеют высокие фотолюминесцентные свойства и могут использоваться в различных оптических приложениях.

Литература [References]

1. Alzahrani, J.S., Alrowaili, Z.A., Eke, C., Al-Qaisi, S., Alsufyani, S.J., Olarinoye, I.O., Boukhris, I., Al-Buraihi, M.S., Tb^{3+} -doped $\text{GeO}_2\text{-B}_2\text{O}_3\text{-P}_2\text{O}_5\text{-ZnO}$ magneto-optical glasses: Potential application as gamma-radiation absorbers. *Radiation Physics and Chemistry*, 2023, vol. 208(11), art. 110874. DOI: [10.1016/j.radphyschem.2023.110874](https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2023.110874)
2. Kesavulu, C.R., Kim, H.J., Lee, S.W., Kaewkhao, J., Kaewnuam, E., Wantana, N., Luminescence properties and energy transfer from Gd^{3+} to Tb^{3+} ions in gadolinium calcium silicoborate glasses for green laser application. *J. Alloys Compd.*, 2017, vol. 704, pp. 557–564. DOI: [10.1016/j.jallcom.2017.02.056](https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.02.056)
3. Swapna, K., Mahamuda, Sk., Srinivasa Rao, A., Jayasimhadri, M., Shakya, Suman, Prakash, G. Vijaya, Tb^{3+} doped Zinc Alumino Bismuth Borate glasses for green emitting luminescent devices. *Journal of Luminescence*, 2014, vol. 156, pp. 180–187. DOI: [10.1016/j.jlumin.2014.08.019](https://doi.org/10.1016/j.jlumin.2014.08.019)
4. Abbas, B.K., Baki, S.O., Leng, F.W., Abbas, H.K., Al-Sarraj, L., Mahdi, M.A., Investigation of Structural, Thermal Properties and Shielding Parameters of Borosilicate Glasses Doped with $\text{Dy}^{3+}/\text{Tb}^{3+}$ Ions for Gamma and Neutron Radiation Shielding Applications. *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*, 2021, vol. 80(1), pp. 50–61. DOI: [10.37934/arfmts.80.1.5061](https://doi.org/10.37934/arfmts.80.1.5061)
5. Linganna, K., Sreedhar, V.B., Jayasankar, C.K., Luminescence properties of Tb^{3+} ions in zinc fluorophosphates glasses for green laser applications. *Mater. Res. Bull.*, 2015, vol. 67, pp. 196–200. DOI: [10.1016/j.materresbull.2015.02.062](https://doi.org/10.1016/j.materresbull.2015.02.062)
6. Alrowaili, Z.A., Basha, B., Alwadai, N., Olarinoye, I.O., Hammoud, A., Al-Buraihi, M.S., V. Stroganova, E.V., Sriwunkum, C., Experimental design and characterization of Eu-doped tellurite matrix glassy composite for medical and ionizing-radiation sensing applications. *Ceramics International*, 2023, vol. 49, iss. 12, pp. 20772–20783. DOI: [10.1016/j.ceramint.2023.03.209](https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2023.03.209).
7. Altowyan, A.S., Hammoud, A., Al-Qaisi, S., Alwadai, N., Lebedev, A.V., Klimenko, V.A., Vasileva, L.V., Al-Buraihi, M.S., Synthesis, XRD, UV-Vis spectra and photoluminescent properties of TeO_2 -based glasses doped with Yb^{3+} and Bi^{3+} . *Optik*, 2022, vol. 268, art. 169808. DOI: [10.1016/j.ijleo.2022.169808](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.169808)
8. Farouk, M., Samir, A., Metawe, F., Elokr, M., Optical absorption and structural studies of bismuth borate glasses containing Er^{3+} ions. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 2013, vol. 371–372, pp. 14–21. DOI: [10.1016/j.jnoncrysol.2013.04.001](https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2013.04.001)
9. Kumar, A., Kaur, R., Sayyed, M.I., Rashad, M., Singh, M., Ali, A.M., Physical, structural, optical and gamma ray shielding behavior of $(20+x)\text{PbO-10BaO-10Na}_2\text{O-10MgO-(50-x)}\text{B}_2\text{O}_3$ glasses. *Phys. B Condens. Matter*, 2019, vol. 552, pp. 110–118. DOI: [10.1016/j.physb.2018.10.001](https://doi.org/10.1016/j.physb.2018.10.001)
10. Vishal, K., Pandey, O.P., Singh, K., Structural and optical properties of barium borosilicate glasses. *Phys. B Condens. Matter*, 2010, vol. 405, pp. 204–207. DOI: [10.1016/j.physb.2009.08.055](https://doi.org/10.1016/j.physb.2009.08.055)
11. Laariedh, F., Sayyed, M.I., Kumar, A., Tekin, H.O., Kaur, R., Badech, T.-B., Studies on the structural, optical and radiation shielding properties of $(5,0 - x)\text{PbO - 10WO}_3\text{-10Na}_2\text{O - 10MgO - (20 + x)}\text{B}_2\text{O}_3$ glasses. *J. Non-Cryst. Solids*, 2019, vol. 513, pp. 159–166. DOI: [10.1016/j.jnoncrysol.2019.03.007](https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2019.03.007)
12. Kaur, R., Singh, S., Singh, K., Pandey, O.P., Effect of swift heavy ions on structural and optical properties of bismuth based alumina borosilicate glasses. *Radiat. Phys. Chem.*, 2013, vol. 86, pp. 23–30. DOI: [10.1016/j.radphyschem.2013.01.031](https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2013.01.031)
13. Priyanka Goyal, P., Sharma, Y.K., Pal, S., Bind, U.C., Huang, S.C., Chung, S.L. The effect of SiO_2 content on structural, physical and spectroscopic properties of Er^{3+} doped B_2O_3 . *J. Non-Cryst. Solids*, 2017, vol. 463, pp. 118–127. DOI: [10.1016/j.jnoncrysol.2017.03.009](https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2017.03.009)

14. Alzahrani, J.S., Hammoud, A., Altowyan, A.S., Olarinoyec, I.O. Lebedev, A.V., Al-Buriah, M.S., Influence of Sm/Bi substitution on synthesis, structural, and photon interaction properties of TeO single bond MoO₃ single bond BaO single bond Sm₂O₃ single bond Bi₂O₃ glass system. *Optik*, 2023, vol. 274, art. 170507. DOI: [10.1016/j.ijleo.2023.170507](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.170507)
15. Tauc, J., Menth, A., Wood, D.L., Optical and Magnetic Investigations of the Localized States in Semiconducting Glasses. *Phys. Rev. Letters*, 1970, vol. 25, pp. 749–752. DOI: [10.1103/PhysRevLett.25.749](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.25.749)
16. Li, X., Zhu, H., Wei, J., Wang, K., Xu, E., Li, Z., Wu, D., Determination of band gaps of self-assembled carbon nanotube films using Tauc/Davis–Mott model. *Appl. Phys. A*, 2009, vol. 97, pp. 341–344. DOI: [10.1007/s00339-009-5330-z](https://doi.org/10.1007/s00339-009-5330-z)
17. Dimitrov, V., Sake, S., Electronic oxide polarizability and optical basicity of simple oxides. I. *Journal of Applied Physics*, 1996, vol. 79, pp. 1736–1740. DOI: [10.1063/1.360962](https://doi.org/10.1063/1.360962)
18. Mohan, S., Thind, K., Optical and spectroscopic properties of neodymium doped cadmium-sodium borate glasses. *Optics and Laser Technology*, 2017, vol. 95, pp. 36–41. DOI: [10.1016/j.optlastec.2017.04.016](https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2017.04.016)
19. Sayyeda, M.I., Aşkin, A., Ali, A.M., Kumard, A., Rashada, M. Alshehric, A.M., Extensive study of newly developed highly dense transparent PbO-WO₃-BaO-Na₂O-B₂O₃ glasses for radiation shielding applications. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 2019, vol. 521, art. 119521. DOI: [10.1016/j.jnoncrysol.2019.119521](https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2019.119521)
20. Tamam, N., Alrowaili, Z.A., Hammoud, A., Lebedev, A.V., Boukhris, I., Olarinoye, I.O., Al-Buriah, M.S., Mechanical, optical, and gamma-attenuation properties of a newly developed tellurite glass system. *Optik*, 2022, vol. 266, art. 169355. DOI: [10.1016/j.ijleo.2022.169355](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.169355)
21. van Pietersen, L., Reid, M.F., Burdick, G.W., Meijerink, A., $4f^n \rightarrow 4f^{n-1}5d$ transitions of the heavy lanthanides: Experiment and theory. *Physical review B*, 2002, vol. 65, art. 045114. DOI: [10.1103/PhysRevB.65.045114](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.045114)
22. Rimbacha, A.C., Steudel, F., Ahrens, B., Schweizer, S., Tb³⁺, Eu³⁺, and Dy³⁺ doped lithium borate and lithium aluminoborate glass: Glass properties and photoluminescence quantum efficiency. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 2018, vol. 499, pp. 380–386. DOI: [10.1016/j.jnoncrysol.2018.07.029](https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2018.07.029)

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики Дагестанского государственного университета; ORCID 0000-0001-7095-932X; SPIN 9245-5007; e-mail: gusen_e@mail.ru.

Артюхин Юрий Павлович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета; ORCID 0000-0002-6243-9145; e-mail: ArtukhinYP@mail.ru.

Великанов Петр Геннадьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры реактивных двигателей и энергетических установок Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru.

Демёхин Евгений Афанасьевич, д-р физ.-мат. наук, заведующий лабораторией электродинамики микро- и наномасштабов, Финансовый университет при Правительстве РФ; ORCID 0009-0001-6280-7171; SPIN 5939-8180; e-mail: eademehin@fa.ru.

Иванычев Дмитрий Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета; ORCID 0000-0002-7736-9311; SPIN 5839-4063; e-mail: Lsivdmal@mail.ru.

Исаев Владислав Андреевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической физики и компьютерных технологий; ORCID 0000-0003-1955-8904; SPIN 2697-3560; e-mail: vlsiae.v@yandex.ru.

Капустин Михаил Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, сотрудник Кубанского государственного университета; ORCID 0009-0007-0327-4938; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник отдела теории волн Федерального исследовательского центра «Морской гидрофизический институт РАН»; ORCID 0000-0002-6767-1218; SPIN 9479-0245; e-mail: vskocher@gmail.com.

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник отдела вычислительных технологий и математического моделирования Федерального исследовательского центра «Морской гидрофизический институт РАН»; ORCID 0000-0002-3583-8351; SPIN 3618-6425; e-mail: ko4ep@mail.ru.

Крылов Артем Александрович, студент факультета компьютерных технологий и прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: artem.krilof2002@mail.ru.

Норкин Михаил Викторович, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики Южного федерального университета; ORCID 0000-0002-9508-5996; SPIN 1638-4892; e-mail: norkinmi@mail.ru.

Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0002-7729-2860; SPIN 3700-3682; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0001-7944-0006; SPIN 7023-5990; e-mail: rub_serg@mail.ru.

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории математики и механики Южного научного центра РАН; ORCID 0000-0001-8500-2133; SPIN 5501-1491; e-mail: ilux_t@list.ru.

Хаммуд Алаа, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры радиофизики и нанотехнологий; ORCID 0000-0001-9076-4618; SPIN 4054-3239; e-mail: allahammsss@gmail.com.

Ханазарян Артур Дереникович, аспирант кафедры теории функций Кубанского государственного университета; ORCID 0000-0003-4609-2900; SPIN 9109-0799; e-mail: artur97.10@mail.ru.

Информация об авторах

Франц Елизавета Александровна, канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник лаборатории электро- и гидродинамики микро- и наномасштабов, Финансовый университет при Правительстве РФ; ORCID 0000-0002-9813-4933; SPIN 2566-9895; e-mail: eafrants@fa.ru.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ ЖУРНАЛА **«Экологический вестник научных центров** **Черноморского экономического сотрудничества»**

Редакция принимает к публикации оригинальные работы на русском и английском языках, содержащие строгие результаты в области математики, физики и механики. Статья не должна быть подана или опубликована в других изданиях, должна обладать научной новизной, написана обезличено и лаконично хорошим русским (английским) языком, быть структурированной, иметь введение и заключение. Статья на английском языке должна сопровождаться переводом на русский.

1) Для рассмотрения статьи в редакцию необходимо представить:

- 2 экземпляра статьи. Статья должна быть распечатана с одной стороны листа формата А4 в одну колонку с 1,5 интервалом шрифтом Times New Roman 14 пт. Все поля документа по 2,5 см. Объем статьи не должен превышать 20 страниц, включая таблицы, рисунки (не более 7) и список литературы (не более 15–20 источников). Все страницы должны быть пронумерованы.

В начале статьи после индекса УДК, сначала на русском, затем на английском языке располагается основная информация о статье: заголовок статьи, список авторов с информацией о них, аннотация, ключевые слова (3–7 ключевых слов), информация о финансировании исследований, а также об отсутствии или наличии конфликта интересов, вкладе авторов в процесс написания статьи (идея работы, проведение экспериментов, вычислений, расчетов, анализ данных и написание текста статьи). Подразумевается, что в утверждении текста статьи принимали участие все авторы. Для каждого автора указывается фамилия, имя, отчество, ученая степень, звание, должность, место работы, ORCID номер и e-mail адрес. Необходимо указать автора, с кем вести переписку, его служебный и домашний адрес с почтовым индексом, а также телефоны для связи. Эта информация не будет опубликована в журнале и нужна редакции только для связи с автором. Указывается дата отсылки статьи. Основной текст статьи начинается с новой страницы. В конце статьи располагается нумерованный список использованных источников в порядке упоминания в статье. Ссылки на источники указываются в тексте статьи в квадратных скобках.

- идентичный электронный вариант статьи в виде ZIP-архива. В архиве должны быть следующие файлы: файл с текстом статьи (название файла должно совпадать с фамилией первого автора в транслитерации, например, ivanov), файлы с рисунками и PDF-версия статьи. Все файлы с рисунками должны называться так же как файл со статьей с добавлением номера. ZIP-архив необходимо загрузить через форму на официальном сайте vestnik.kubsu.ru/submit или переслать на e-mail журнала vestnik@kubsu.ru.
- оригинал представления (направления) от учреждения, в котором выполнена работа (выписка из заседания кафедры с рекомендацией к публикации, обращение в свободной форме уполномоченного лица вуза с просьбой о публикации к главному редактору и т.д.).
- оригинал акта экспертизы о возможности публикации в открытой печати для российских авторов.
- 2 экземпляра заполненного и подписанныго Лицензионного договора. Шаблон Лицензионного договора можно найти на сайте журнала по адресу vestnik.kubsu.ru.

2) Процедура принятия и публикации статьи состоит из следующих этапов:

- после получения редакцией электронного варианта статьи (в случае соответствия оформления статьи настоящим правилам) автор по электронной почте уведомляется о принятии статьи к рассмотрению редколлегией журнала и редакция ожидает поступления оригинала статьи и сопровождающих документов. В процессе рассмотрения редколлегия может отклонить несоответствующую тематике или научному уровню журнала статью.
- для проведения научной экспертизы работ в качестве рецензентов и экспертов редакцией привлекаются высококвалифицированные ученые и специалисты, обладающие глубокими профессиональными знаниями и опытом работы по конкретному научному направлению.

Рецензентом не может быть автор или соавтор рецензируемой работы. В результате автору по электронной почте высыпается рецензия и мотивированное решение о возможности публикации работы (статья рекомендуется к печати, статья рекомендуется к печати после доработки, статья не рекомендуется к печати). Данные рецензентов редакция не раскрывает.

- в случае успешного прохождения рецензирования после научной и редакторской правки автору по электронной почте высыпается корректурный оттиск со статьей в формате PDF для утверждения и/или внесения правок.
- после выхода журнала автору по электронной почте высыпается уведомление о публикации с гранками или ссылкой на статью в формате PDF. Авторский экземпляр журнала редакцией не предоставляется.

3) Редакция принимает статьи в двух электронных форматах — $\text{\LaTeX} 2\varepsilon$ или MS Word:

- $\text{\LaTeX} 2\varepsilon$. Статью следует писать с использованием стилевого класса *vestnik3* в кодировке Unicode (UTF8) или Windows (CP1251). Страйтесь не использовать свои стилевые файлы и не переопределять существующие команды.
- MS Word. Не следует использовать знаки принудительного переноса и дополнительные пробелы. Набор формул предпочтительно производить в редакторе формул Equation или MathType (даже для внутритекстовых формул и переменных). Если статья использует разделы, нумерация формул начинается в каждом разделе заново. Если статья содержит рисунки, они должны быть сохранены без подписей как отдельные файлы в их исходном формате: предпочтительные форматы для графиков или диаграмм — pdf, eps, wmf; для фотографий — png, pdf или eps. На все рисунки должны быть ссылки.

Класс *vestnik3* и шаблон для написания статьи в MS Word можно найти на сайте журнала по адресу vestnik.kubsu.ru. Там же приведены советы по написанию статей в $\text{\LaTeX} 2\varepsilon$ и MS Word.

4) Векторные величины и матрицы выделяются прямым полужирным шрифтом. Статья должна содержать лишь самые необходимые формулы, от промежуточных выкладок желательно отказаться. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки. В русскоязычной типографской традиции целая и дробная части чисел отделяются запятой, а выключные формулы являются равноправными элементами предложения и должны завершаться соответствующими знаками препинания. Следует использовать единицы измерения в соответствии с Международной системой (СИ) и только общепринятые сокращения. Использование сносок нежелательно.

Рисунки, графики и схемы (обязательно черно-белые или в градациях серого) предоставляются в виде отдельных файлов и должны быть выполнены четко, в формате, обеспечивающем ясность передачи всех деталей. Графики должны быть подписаны по осям. Разрешение полутоновых файлов должно быть не менее 150 dpi, а черно-белых — не менее 300 dpi при соответствующих размерах изображения (не менее 7×7 см). Таблицы должны иметь заголовки, а рисунки — подписи.

Если русскоязычная аннотация может быть краткой, то англоязычная должна дать зарубежным коллегам более полное представление о статье. Желательный размер англоязычной аннотации — примерно 150–250 слов. Она должна быть информативной, содержательной, следовать логике описания результатов в статье и написана качественным английским языком. Одним из проверенных вариантов является краткое повторение в аннотации структуры статьи, включающей введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение. Ссылки на формулы, теоремы или источники из статьи в аннотациях недопустимы. Для контроля редакцией необходим перевод расширенной аннотации на русский язык.

В журнале используется объединенный раздел «Литература [References]», в котором зарубежные источники приводятся на языке оригинала, а национальные — должны сопровождаться переводом всей ссылки на английский язык в квадратных скобках в конце ссылки. Названия книг и журналов выделяются курсивом и транслитерируются, затем через знак «равно» (=) следует перевод названия на английский язык. Для национальных журналов следует указывать их официальное написание на английском языке и только в случае его отсутствия приводить собственный перевод названия. В конце перевода указывает-

ся язык публикации, например, (in Russian). Следует избегать ссылок на диссертации и авторефераты диссертаций.

Для обоих типов ссылок в журнале принят немного измененный IEEE-стиль оформления. Сначала следует фамилия автора, затем, через запятую, его инициалы, которые также оканчиваются запятой. Приводится полный список авторов, сокращения «и др.» и «et al.» недопустимы. Названия журналов и книг отмечаются курсивом. После списка авторов и названия все элементы ссылки отделяются друг от друга запятыми. Для национальных источников в качестве сокращений тома, номера и страниц используется «т.», «№» и «с.», а для зарубежных — «vol.», «iss.» (или «no.») и «pp.» (или «р.»), соответственно. Для книг не требуется общее количество страниц. При наличии DOI-номера он должен быть указан. Редакторы сборника всегда указываются в начале ссылки с добавлением «(ред.)» и «(ed.)» или «(eds.)».

Перед отсылкой статьи следует проверить корректность ссылок. Для повышения научного доверия к статье следует использовать не только национальные источники, а также чаще ссылаться на свежие публикации (не старше 3–5 лет). Недопустимо чрезмерное самоцитирование (1–3 ссылки на согласующиеся с темой статьи предыдущие работы автора).

ПРИМЕРЫ ОФОРМЛЕНИЯ ЛИТЕРАТУРЫ

- статьи в журналах, сборниках, трудах конференций:

1. Иванов, Н. Н., Волны в жидкости. *Гидромеханика*, 2003, т. 1, № 10, с. 13–17. [Ivanov, N. N., Waves in liquids. *Gidromekhanika* = *Hydromechanics*, 2003, vol. 1, no. 10, pp. 13–17. (in Russian)]
2. Prescott, S. W., Mulvaney, P., Gold nanorod extinction spectra. *J. Appl. Phys.*, 2006, vol. 99, iss. 12, p. 123504. DOI 10.1063/1.2203212
3. Шилова, В. П., Источники ЗВ. В: *Тез. докл. XV Междунар. конф. «Проблемы экологии»*. Москва, 2000, с. 5–8. [Shilova V. P., Sources of pollutants. In: *Proc. of reports 15th international conf. “Environmental Problems”*, Moscow, 2000, pp. 5–8. (in Russian)]

- книги:

1. Литвинов, А. Н., *Динамика массивных тел*. Москва, Наука, 1982. [Litvinov A. N., *Dinamika massivnykh tel* = *Dynamics of massive bodies*. Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
2. Кутепов, В. М., Шеко, А. И., (ред.) *Природные опасности России. Экзогенные геологические процессы*. Москва, КРУК, 2002. [Kutepov, V. M., Sheko, A. I. (eds.), *Prirodnye opasnosti Rossii. Ekzogennye geologicheskie protsessy* = *Russian natural hazards. Exogenous processes*. Moscow, KRUK, 2002. (in Russian)]
3. Петров, Е. П., *Мониторинг окружающей среды*. Дис. канд. хим. наук. Москва, 1984. [Petrov, E. P., *Monitoring okruzhayushchey sredy* = *Environmental monitoring*. Cand. diss. PhD of Chem. Sci. Moscow, 1984. (in Russian)]

- электронные ресурсы:

1. Международная библиотека математических подпрограмм IMSL (дата обращения 20.02.2018) [IMSL numerical library (accessed 20.02.2018)]. URL: <https://www.roguewave.com/products-services/imsl-numerical-libraries>

Дополнительные примеры оформления источников, шаблоны и рекомендации по написанию статей в *L^AT_EX 2_<* и MS Word можно найти на сайте журнала по адресу vesnik.kubsu.ru.

Редколлегия рукописи, а также электронные носители не возвращают.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Точка зрения редакции может не совпадать с мнением авторов публикуемых материалов.

Редакция оставляет за собой право менять заголовки, сокращать тексты статей

и вносить в них необходимую стилистическую правку без согласования с авторами.

Несоблюдение правил оформления рукописи и компьютерного набора задерживает ее публикацию.

РУКОПИСИ НАПРАВЛЯТЬ ПО АДРЕСУ:

350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, Кубанский государственный университет
Редакция журнала «Экологический вестник научных центров ЧЭС»

Тел.: +7 (918) 0886651. E-mail: vestnik@kubsu.ru

Сайт: vestnik.kubsu.ru

INFORMATION FOR THE AUTHORS OF THE JOURNAL

“Ecological Bulletin of Research Centers of The Black Sea Economic Cooperation”

The editorial board accept for publication original work in English and Russian containing rigorous results in mathematics, mechanics and physics. The manuscript should not be submitted or published in other journals, should have scientific novelty, be written in an impersonal and concisely good English (Russian) language, be structured, have an introduction and conclusion.

1) It is necessary to submit to the editorial office:

- two copies of the manuscript. The manuscript should be printed on one side of an A4 sheet in one column at 1.5 line spacing and 14 pt Times New Roman font. All margins of the document are 2.5 cm. The number of pages in the article should not exceed 20 pages, including tables, figures (no more than 7) and a list of references (no more than 15–20 sources). All pages must be numbered.

At the beginning is the main information about the article: the title of the article, the list of authors with information about them, abstract, keywords (3–7 keywords), information about research funding, as well as the absence or presence of a conflict of interest, the contribution of authors to the article writing process (the idea of work, conducting experiments, calculations, data analysis and writing the text of the article). It is assumed that all authors took part in the approval of the text of the article. Last name, first name, patronymic, academic degree, title, position, place of work, ORCID number and e-mail address must be given. It is necessary to indicate the author, with whom to correspond, his work and home address with postal code, as well as phone numbers for communication. This information will not be published in the journal and is only needed by the editors to contact the author. There must be a date when the article was sent. The text of the article starts on a new page. At the end of the article is a numbered list of references in the order of references in the article. References to sources are indicated in the text of the article in square brackets.

- identical electronic version of the article in a ZIP archive. The archive should contain the following files: the file with the text of the manuscript (the file name should match the name of the first author in transliteration, for example, **smith**), files with additional figures and a PDF version of the manuscript. All files with figures should be named the same as the file with the article with the addition of a number. ZIP-archive must be uploaded through the form on the official website vestnik.kubsu.ru/submit or sent to e-mail vestnik@kubsu.ru.
- two copies of the completed and signed License Agreement. The License Agreement template can be found on the journal’s website at vestnik.kubsu.ru.

2) The process for accepting and publishing an article consists of the following steps:

- after the editorial board receive the electronic version of the manuscript (in case if the manuscript is formatted according to these rules), the author is notified by e-mail about the acceptance of the article for consideration by the editorial board of the journal and the editorial office awaits receipt of the original article and accompanying documents. In the process of consideration, the editorial board may reject a manuscript that does not correspond to the subject or scientific level of the journal.
- to conduct a scientific examination of papers as reviewers and experts, the editors involve highly qualified scientists and specialists with deep professional knowledge and experience in they scientific area. The reviewer cannot be the author or co-author of the reviewed work. As a result, the review and a reasoned decision on the possibility of publishing the work are sent to the author by e-mail (the manuscript is recommended for publication, the manuscript is recommended for publication after revision, the manuscript is not recommended for publication). The editors do not disclose the data of reviewers.
- in case of successful peer review, after scientific and editorial corrections, a proofreading print with the article in PDF format is sent to the author by e-mail for approval and / or corrections.

- the author receives an e-mail notification of publication after the publication of the journal with proofs or a link to the article in PDF format. The author's copy of the journal is not provided by the editorial.
- 3) The editorial board accept articles in $\text{\LaTeX} 2_{\varepsilon}$ or MS Word:
- $\text{\LaTeX} 2_{\varepsilon}$. The article should be written using style class `vestnik3` in the Unicode (UTF-8) or Windows (CP1251) encoding. Try not to use your style files and not to reassign existent commands.
 - MS Word. Don't use forced line breaks and additional spaces. Type of formulas should be carried out only in Equation Editor or MathType (even for inline equations and variables). If in the manuscript sections are used, the numeration of equations begins in every section anew. If the manuscript contains pictures, they must be saved without captions as individual files and not to include in Word. The preferable formats for graphs or diagrams are `eps`, `pdf`, `wmf`; for photos – `eps`, `pdf` or `png`.

Journal templates for writing manuscripts in $\text{\LaTeX} 2_{\varepsilon}$ and MS Word formats can be found on the journal website at vestnik.kubsu.ru.

- 4) Vector quantities and matrices are in direct bold type. The article should contain only the most necessary formulas, it is desirable to refuse intermediate calculations. Only those formulas to which there are references are numbered. Units of measurement should be used in accordance with the International System of Units (SI system) and only generally accepted abbreviations. Footnotes are not recommended.

Figures, graphs and diagrams (necessarily in black and white or in grayscale) are provided as separate files and must be made clearly, in a format that ensures clarity of transmission of all details. Graphs must be labeled along the axes. The resolution of grayscale files must be at least 150 dpi, and for black and white files, at least 300 dpi, with appropriate image sizes (at least 7×7 cm). Tables should have headings and figures should have captions.

- 5) The desired length of the abstract is approximately 150–250 words. It should be informative, meaningful, follow the logic of the description of the results in the article. One of the tested options is a brief repetition in the annotation of the structure of the article, including the introduction, goals and objectives, methods, results, conclusion. References to formulas, theorems or sources from the article in the annotations are not allowed.

The References section uses a slightly modified IEEE style for the list of bibliographic references. First comes the author's last name, then the initials. The full list of authors is given, abbreviations "et al." are not allowed. The titles of journals and books are marked in italics. After the list of authors and the title, all elements of the link are separated from each other by commas. The abbreviations for volume, issue, and pages are "vol.", "iss." (or "no.") and "pp." (or "p."), respectively. Books do not require a total number of pages. If there is a DOI number, it must be specified. The editors of the collection are always indicated at the beginning of the reference with the addition of "(ed.)" or "(eds.)".

You should check the correctness of the links before sending the manuscript. Fresh publications (not older than 3–5 years) should be used to increase the scientific credibility of the article. Excessive self-quoting is unacceptable (1–3 references to previous works of the author consistent with the topic of the article).

THE REFERENCES EXAMPLES

- *articles in journals, collected articles, works of conferences:*
1. Dyson, F.J., Feynman's proof of the Maxwell equations. *Am. J. Phys.*, 1990, vol. 8, iss. 3, pp. 209–211.
 2. Prescott, S.W., Mulvaney, P., Gold nanorod extinction spectra. *J. Appl. Phys.*, 2006, vol. 99, no. 12. DOI 10.1063/1.2203212
 3. Martikainen, J., Mäkinen, R.A.E., Rossi, T., Toivanen, J., A fictitious domain method for linear elasticity problems. *Proc. of the First M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Elsevier, Oxford, 2001, pp. 346–350.

• *books, theses:*

1. Griffiths, D.J., *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
2. Fainstein, S.S., Campbell, S. (eds.) *Readings in urban theory*. Wiley-Blackwell, 2011.
3. Andrews, G.E., The theory of partitions. In: *Encyclopedia of mathematics and its applications. Vol. 2*. Addison-Wesley, 1976.

• *electronic resources:*

1. IMSL numerical library (accessed 20.02.2018). URL: <https://www.roguewave.com/products-services/imsl-numerical-libraries>

The additional examples of literature references, templates and recommendations how to type manuscripts in $\text{\LaTeX} 2\epsilon$ and MS Word you can find on vestnik.kubsu.ru.

Editorial board doesn't give back manuscripts and electronic media.
Fee for postgraduate students to publish manuscripts not charged.

Point of view of editorial stuff can be another than an opinion of authors of published works.

The editorial board reserves the right to change the headers to reduce manuscripts
and make the necessary stylistic editing without the consent of the authors.

Failure to comply with the rules of the manuscript preparation and typesetting delay its publication.

MANUSCRIPTS SHOULD BE SENT TO:

149 Stavropolskaya St, Krasnodar, 350040, Kuban State University

The editorial board of the journal

"Ecological bulletin of scientific centres of the Black Sea Economic Cooperation"

Tel.: +7 918 0886651. E-mail: vestnik@kubsu.ru

Web: vestnik.kubsu.ru

Журнал
«Экологический вестник научных центров
Черноморского экономического сотрудничества»
решением Президиума ВАК РФ включен в перечень ведущих рецензируемых
научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты
диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук.

Научные специальности:
1.1.8 Механика деформируемого твердого тела,
1.3.6 Оптика и 1.3.8 Физика конденсированного состояния

Журнал распространяется по подписке через каталог «АРЗИ» (подписной индекс Э46477)
и через Научную электронную библиотеку (www.elibrary.ru).
Дополнительную информацию, а также содержание предыдущих номеров,
можно найти в сети Интернет по адресу vestnik.kubsu.ru.

The journal
“Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation”
by decision of the Presidium of the Higher Attestation Commission
of the Russian Federation, is included in the list of leading peer-reviewed
scientific journals and publications published in the Russian Federation,
in which the main scientific results of dissertations for the scientific degree
of candidate and doctor of sciences should be published.

Scopes: deformable solid mechanics, optics and condensed matter physics.

Journal is distributed by electronic subscription through the ARZI catalogue
(subscription index Э46477) and Russian Scientific Electronic Library (www.elibrary.ru).
More information, and the contents of previous issues can be found on vestnik.kubsu.ru.

Научно-образовательный и прикладной журнал
«Экологический вестник научных центров
Черноморского экономического сотрудничества»

Адрес издателя:
Кубанский государственный университет,
350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Адрес редакции:
Кубанский государственный университет,
350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Над номером работали:
А. В. Павлова, Д. А. Хрипков

Подписано в печать 28.06.2024. Выход в свет 1.07.2024
Формат 60 × 84 1/8. Усл. печ. л. 13,07. Уч.-изд. л. 12,99. Тираж 1 000 экз.
Гарнитура Computer Modern LH. Макет подготовлен и сверстан
в издательской системе TeX с помощью макропакета LATEX 2ε
в компьютерном центре редакции. Цена свободная.
Возрастное ограничение: для лиц, старше 12 лет

Отпечатано в издательско-полиграфическом центре
Кубанского государственного университета.
г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149
Печать цифровая. Заказ № 5715