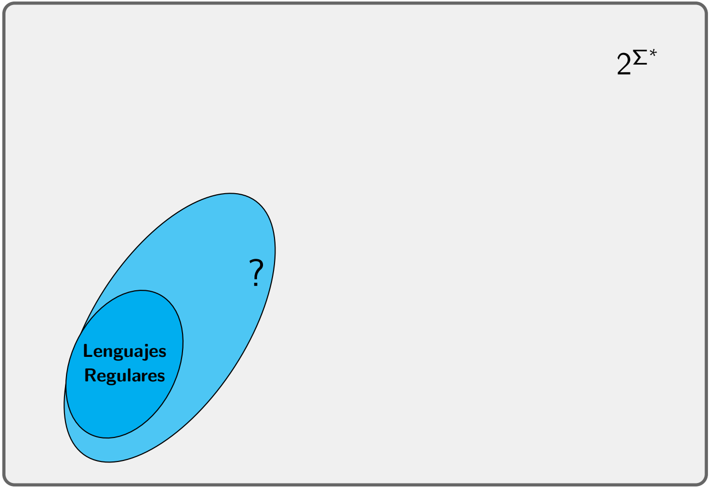
Gramáticas libres de contexto

Clase 15

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

¿dónde estamos?



¿qué le falta a los lenguajes regulares?

Outline

Definición de grámaticas

Árboles y derivaciones

Lenguajes regulares vs libres de contexto

Outline

Gramáticas libres de contexto

Definición

Una **gramática libre de contexto** (CFG) es una tupla:

$$\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$$

- V es un conjunto finito de **variables** o **no-terminales**.
- Σ es un alfabeto finito (o **terminales**) tal que $\Sigma \cap V = \varnothing$.
- $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ es un subconjunto finito de **reglas** o **producciones**.
- $S \in V$ es la **variable inicial**.

Gramáticas libres de contexto

Ejemplo

Consideré la grámatica $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ tal que:

- $V = \{ X, Y \}$
- $\Sigma = \{ a, b \}$
- $P = \{ (X, aXb),\ (X, Y),\ (Y, \epsilon) \}$
- $S = X$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G}: & X & \rightarrow & aXb \\ & X & \rightarrow & Y \\ & Y & \rightarrow & \epsilon \end{array}$$

Notación para gramáticas libres de contexto

Notación

- Para las **variables** en una gramática usaremos letras mayúsculas:

$$X, Y, Z, A, B, C, \ldots$$

- Para los **terminales** en una gramática usaremos letras minúsculas:

$$a, b, c, \ldots$$

- Para palabras en $(V \cup \Sigma)^*$ usaremos símbolos:

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

- Para una producción $(A, \alpha) \in P$ la escribimos como:

$$A \to \alpha$$

Notación para gramáticas libres de contexto

Ejemplo anterior

Consideré la grámatica $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ tal que:

- $V = \{\ X, Y\ \}$ → variables en **mayus.**
- $\Sigma = \{\ a, b\ \}$ → letras en **minus.**
- $P = \{\ X \to aXb,\ X \to Y,\ Y \to \epsilon\ \}$ → **producciones**
- $S = X$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G}: & X & \to & aXb \\ & X & \to & Y \\ & Y & \to & \epsilon \end{array}$$

Simplificación para gramáticas libres de contexto

Simplificación

Si tenemos un conjunto de reglas de la forma:

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \alpha_1 \\ X & \to & \alpha_2 \\ & \cdots & \\ X & \to & \alpha_n \end{array}$$

entonces escribimos estas reglas **sucintamente** como:

$$X \quad \to \quad \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \mid \alpha_n$$

(recordar que: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (\Sigma \cup V)^*$)

Simplificación para gramáticas libres de contexto

Ejemplo anterior

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{G}: & X & \rightarrow & aXb \\ & X & \rightarrow & Y \\ & Y & \rightarrow & \epsilon \end{array}$$

Esta grámatica la escribiremos en notación **sucinta** como:

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{G}: & X & \rightarrow & aXb \mid Y \\ & Y & \rightarrow & \epsilon \end{array}$$

Producciones

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

Definimos la relación $\Rightarrow \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$ de **producción** tal que:

$$\alpha \cdot X \cdot \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \cdot \beta \qquad \text{si, y solo si,} \qquad (X \to \gamma) \in P$$

para todo $X \in V$ y $\alpha, \beta, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*$.

Si $\alpha X \beta \Rightarrow \alpha \gamma \beta$ entonces decimos que

- $\alpha X \beta$ **produce** $\alpha \gamma \beta$ o
- $\alpha \gamma \beta$ **es producible** desde $\alpha X \beta$.

$\alpha X \beta \Rightarrow \alpha \gamma \beta$ es **reemplazar** γ en X en la palabra $\alpha X \beta$.

Producciones

¿cuál de las siguientes producciones son correctas?

$$\mathcal{G}: \quad \begin{array}{rcl} X & \to & aXb \mid Y \\ Y & \to & \epsilon \end{array}$$

- $X \Rightarrow Y$?
- $aaXbb \Rightarrow aaaXbbb$?
- $aaaYbbb \Rightarrow aaaXbbb$?
- $aXaXbYX \Rightarrow aXaXbYaXb$?

Derivaciones

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

Dada dos palabras $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ decimos que α **deriva** β:

$$\alpha \overset{\star}{\Rightarrow} \beta$$

Si existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (V \cup \Sigma)^*$ tal que:

$$\alpha \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \beta$$

Derivaciones

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

Dada dos palabras $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ decimos que α **deriva** β:

$$\alpha \overset{\star}{\Rightarrow} \beta$$

con $\overset{\star}{\Rightarrow}$ es la **clausura refleja y transitiva** de $\Rightarrow$, esto es:

1. $\alpha \overset{\star}{\Rightarrow} \alpha$
2. $\alpha \overset{\star}{\Rightarrow} \beta$ si, y solo si, existe γ tal que $\alpha \overset{\star}{\Rightarrow} \gamma$ y $\gamma \Rightarrow \beta$

para todo $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$.

Notar que $\Rightarrow$ y $\overset{\star}{\Rightarrow}$ son relaciones entre palabras en $(V \cup \Sigma)^*$

Derivaciones

¿cuál de las siguientes derivaciones son correctas?

$$\mathcal{G}: \begin{array}{rcl} X & \rightarrow & aXb \mid Y \\ Y & \rightarrow & \epsilon \end{array}$$

- $X \stackrel{\star}{\Rightarrow} aaaXbbb$?
- $aaXbb \stackrel{\star}{\Rightarrow} aaaYbb$?
- $aaXbb \stackrel{\star}{\Rightarrow} aaabbb$?

Lenguaje definido por una gramática

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

El **lenguaje** de una grámatica $\mathcal{G}$ se define como:

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) \;=\; \left\{\; w \in \Sigma^* \;\middle|\; S \overset{\star}{\Rightarrow} w \;\right\}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{G})$ son todas las palabras en Σ^* que se pueden derivar desde S.

Lenguaje definido por una gramática

¿qué palabras están en $\mathcal{L}(\mathcal{G})$?

$$\mathcal{G}: \quad \begin{array}{rcl} X & \rightarrow & aXb \mid Y \\ Y & \rightarrow & \epsilon \end{array}$$

- Como $X \stackrel{\star}{\Rightarrow} aaabbb$, entonces $aaabbb \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$.
- En general, uno puede demostrar **por inducción** que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \left\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \right\}$$

Lenguaje definido por una gramática

¿qué lenguaje define cada grámatica libre de contexto?

1. $$\mathcal{G}: \quad \begin{array}{rcl} S & \to & XS \mid \epsilon \\ X & \to & aa \mid ab \mid ba \mid bb \end{array}$$

2. $$\mathcal{G}: \quad \begin{array}{rcl} S & \to & S + S \mid S \times S \mid (S) \mid X \\ X & \to & 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

3. $$\mathcal{G}: \quad S \to aSb \mid SS \mid \epsilon$$

Lenguaje definido por una gramática

¿cuál es una gramática para cada lenguaje?

1. $L_1 = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \} \cup \{ b^n a^n \mid n \geq 0 \}$
2. $L_2 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid w = w^{\text{rev}} \}$

Lenguajes libres de contexto

Definición

Diremos que $L \subseteq \Sigma^*$ es un **lenguaje libre de contexto** ssi existe una gramática libre de contexto $\mathcal{G}$ tal que:

$$L = \mathcal{L}(\mathcal{G})$$

Ejemplos

Los siguientes son lenguajes libres de contexto:

- $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- $\text{Par} = \{\, w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ tiene largo par } \}$
- $\text{Pal} = \{\, w \in \{a,b\}^* \mid w = w^{\text{rev}} \}$

Outline

Árboles ordenados y etiquetados

Definiciones

El conjunto de **árboles ordenados y etiquetados** (o solo **árboles**) sobre etiquetas Σ y V, se define recursivamente como:

- $t := a$ es un árbol para todo $a \in \Sigma$.
- si $t_1, \ldots, t_k$ son árboles,
  entonces $t := X(t_1, \ldots, t_k)$ es un árbol para todo $X \in V$.

Para un árbol $t = X(t_1, \ldots, t_k)$ cualquiera se define:

- $\text{raiz}(t) = X$
- $\text{hijos}(t) = t_1, \ldots, t_k$

Si $t = a$, entonces decimos que t es una **hoja**, $\text{raiz}(t) = a$ y $\text{hijos}(t) = \epsilon$.

Árboles de derivación de una gramática

Fije una gramática libre de contexto $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$.

Definiciones

Se define el conjunto de **árboles de derivación** recursivamente como:

- Si $a \in \Sigma$, entonces $t = a$ es un árbol de derivación.
- Si $X \to X_1 \dots X_k \in P$ y
  $t_1, \dots, t_k$ son árboles de derivación con $\text{raiz}(t_i) = X_i$ para todo $i \leq k$
  entonces $t = X(t_1, \dots, t_k)$ es un árbol de derivación.

Decimos que t es un **árbol de derivación de $\mathcal{G}$** si:

1. t es un árbol de derivación y
2. $\text{raiz}(t) = S$.

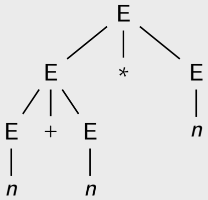
Los árboles de derivación son todos los árboles que parten desde S.

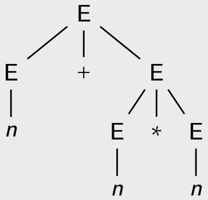
Árboles de derivación de una gramática

Ejemplo de árbol de derivación

$$\mathcal{G}: \quad E \;\rightarrow\; E + E \mid E * E \mid n$$

Algunos **árboles de derivación** para $\mathcal{G}$:





Árbol de derivación para una palabra

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG y $w \in \Sigma^*$.

Definiciones

Se define la función **yield** sobre árboles, recursivamente como:

- Si $t = a \in \Sigma$, entonces $\text{yield}(t) = a$.
- Si t no es una hoja y $\text{hijos}(t) = t_1 t_2 \dots t_k$, entonces:

$$\text{yield}(t) \;=\; \text{yield}(t_1) \cdot \text{yield}(t_2) \cdot \ldots \cdot \text{yield}(t_k)$$

Decimos que t es un **árbol de derivación de $\mathcal{G}$ para w** si:

1. t es un árbol de derivación de $\mathcal{G}$ y
2. $\text{yield}(t) = w$.

Las hojas de t forman la palabra w.

Equivalencia entre árboles de derivación y derivaciones

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG y $w \in \Sigma^*$.

Proposición

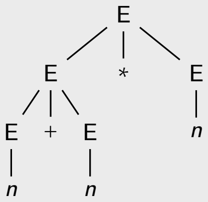
$w \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ si, y solo si, existe un árbol de derivación de $\mathcal{G}$ para w.

Un arbol de derivación es la **representación gráfica** de una derivación.

Equivalencia entre árboles de derivación y derivaciones

Ejemplo

$$E \;\rightarrow\; E + E \mid E * E \mid n$$



1) $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow n + E * E \Rightarrow n + n * E \Rightarrow n + n * n$
2) $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow E + n * E \Rightarrow E + n * n \Rightarrow n + n * n$
3) $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow E + E * n \Rightarrow E + n * n \Rightarrow n + n * n$
4) $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E * n \Rightarrow E + E * n \Rightarrow n + E * n \Rightarrow n + n * n$
5) $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E * n \Rightarrow E + E * n \Rightarrow E + n * n \Rightarrow n + n * n$
6) ...

Dado un árbol de derivación, ¿con cuál derivación nos quedamos?

Derivaciones por la izquierda y por la derecha

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

- Definimos la **derivación por la izquierda** $\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$:

$$\mathrm{w} \cdot X \cdot \beta \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} \mathrm{w} \cdot \gamma \cdot \beta \qquad \text{si, y solo si,} \qquad X \to \gamma \in P$$

  para todo $X \in V$, $\mathrm{w} \in \Sigma^*$ y $\beta, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*$.

- Definimos la **derivación por la derecha** $\underset{\text{rm}}{\Rightarrow} \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$:

$$\alpha \cdot X \cdot \mathrm{w} \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} \alpha \cdot \gamma \cdot \mathrm{w} \qquad \text{si, y solo si,} \qquad X \to \gamma \in P$$

  para todo $X \in V$, $\mathrm{w} \in \Sigma^*$ y $\alpha, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*$.

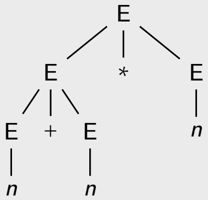
Se define $\overset{\star}{\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}}$ y $\overset{\star}{\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}}$ como la **clausura refleja y transitiva** de $\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}$ y $\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}$, resp.

$\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}$ y $\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}$ solo reemplaza **a la izquierda** (leftmost) y **derecha** (rightmost).

Derivaciones por la izquierda y por la derecha

Ejemplo anterior

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid n$$



Derivación por la izquierda (lm)

$$E \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} E * E \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} E + E * E \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} n + E * E \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} n + n * E \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} n + n * n$$

Derivación por la derecha (rm)

$$E \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} E * E \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} E * n \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} E + E * n \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} E + n * n \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} n + n * n$$

¿cuál es la relación entre el **tipo de derivación** y el **recorrido del árbol**?

Derivaciones por la izquierda y por la derecha

Sabemos que ...

- Por cada derivación, existe un único árbol de derivación.
- Por cada árbol de derivación existen **múltiples** posibles derivaciones.

Proposición

Por cada árbol de derivación, existe
una **única** derivación por la izquierda y una **única** derivación por la derecha.

Por lo tanto, desde ahora podemos hablar de
árbol de derivación y derivación (izquierda o derecha) indistintamente.

Outline

¿cuál es la relación entre lenguajes regulares y lenguajes libres de contexto?

Ya demostramos que:

- Palindromes NO es regular.
- Palindromes es libre de contexto.

. . . por lo tanto, Regulares $\neq$ Libres de contexto.

¿lenguajes regulares $\subsetneq$ lenguajes libres de contexto?

Lenguajes regulares $\subsetneq$ lenguajes libres de contexto

Proposición

Para todo lenguaje regular L, existe una gramática libre de contexto $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$:

$$L = \mathcal{L}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$$

Demostración

Dado un autómata finito determinista $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$,

¿cómo costruimos una grámatica libre de contexto?

Defina la gramática $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = (Q, \Sigma, P_{\mathcal{A}}, q_0)$ tal que:

- si $\delta(p, a) = q$, entonces $p \to aq \in P_{\mathcal{A}}$.
- si $p \in F$, entonces $p \to \epsilon \in P_{\mathcal{A}}$.

Ejercicio: demuestre que $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$.