Transductores

Clase 12

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio:
¿cómo evaluamos un autómata no-determinista?

`PROBLEMA:`	Evaluación de NFA
`INPUT:`	un autómata no-determinista $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ y
	un documento w
`OUTPUT:`	`TRUE` si, y solo si, $w \in \mathcal{L}(R)$

Tamaño del input

- $|w| :=$ largo de documento
- $|\mathcal{A}| := |Q| + |\Delta|$

Algoritmo **lineal en data-complexity** y
ojalá **polinomial en combined-complexity**.

Recordatorio:
Algoritmos de evaluación de autómatas no-deterministas

Veremos varias soluciones ...

1. Backtracking ✓
2. DFA ✓
3. NFA determinización ✓
4. NFA on-the-fly
5. ϵ-NFA on-the-fly

Solución 4: NFA *on-the-fly*

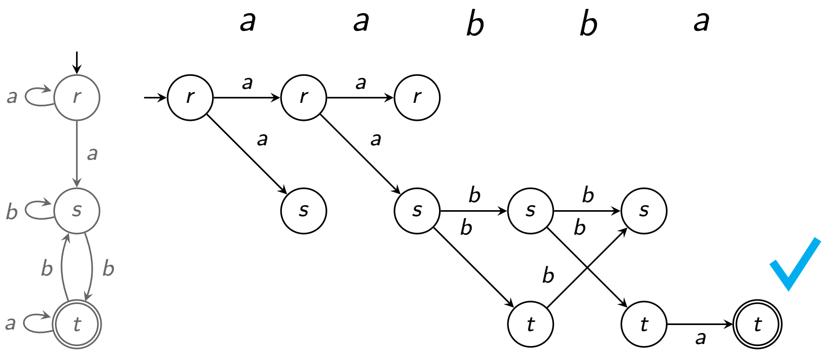
$\delta^{\text{det}} : 2^Q \times \Sigma \to 2^Q$ tal que:

$$\delta^{\text{det}}(S, a) = \{q \in Q \mid \exists p \in S.\ (p, a, q) \in \Delta\}$$

Estrategia on-the-fly

1. Mantenemos un conjunto S de estados actuales.
2. Por cada nueva letra a, calculamos el conjunto $\delta^{\text{det}}(S, a)$.

Solución 4: NFA *on-the-fly* (ejemplo)



Solución 4: NFA *on-the-fly*

Para un NFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ y una palabra $w = a_1 \dots a_n$.

```
Function eval-NFAonthefly (A, w)
    S := I
    for i = 1 to n do
        S_old := S
        S := ∅
        foreach p ∈ S_old do
            S := S ∪ {q | (p, a_i, q) ∈ Δ}
    return check (S ∩ F ≠ ∅)
```

Análisis de tiempo

- ¿cuál es el tiempo de `eval-NFAonthefly` en el **peor caso**?

¿es posible hacer este algoritmo mejor?

Solución 5: ϵ-NFA *on-the-fly*

Para un ϵ-NFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ y una palabra $w = a_1 \dots a_n$.

Function `eval-eNFAonthefly` *($\mathcal{A}$, w)*

- $S := \epsilon$-`closure`$(\Delta,\ I)$
- **for** $i = 1$ **to** n **do**
  - $S_{\text{old}} := S$
  - $S := \varnothing$
  - **foreach** $p \in S_{old}$ **do**
    - $S \ := \ S \cup \{q \mid (p, a_i, q) \in \Delta\}$
  - $S := \epsilon$-`closure`$(\Delta,\ S)$
- **return check** $(S \cap F \neq \varnothing)$

Análisis de tiempo

- ¿cómo calculamos ϵ-`closure`$(\Delta,\ S)$ **eficientemente**?
- ¿cuál es el tiempo de `eval-eNFAonthefly` en el **peor caso**?

Resumen de técnicas de evaluación simple

Para un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ y una palabra $w = a_1 \ldots a_n$:

	Tiempo
Backtracking	$\mathcal{O}(\lvert\mathcal{A}\rvert^{\lvert w\rvert})$
DFA	$\mathcal{O}(\lvert\mathcal{A}\rvert + \lvert w\rvert)$
NFA	$\mathcal{O}(2^{\lvert Q\rvert} + \lvert w\rvert)$
ϵ-NFA on-the-fly	$\mathcal{O}(\lvert\mathcal{A}\rvert \cdot \lvert w\rvert)$

¿cuál funciona mejor **en la práctica**?

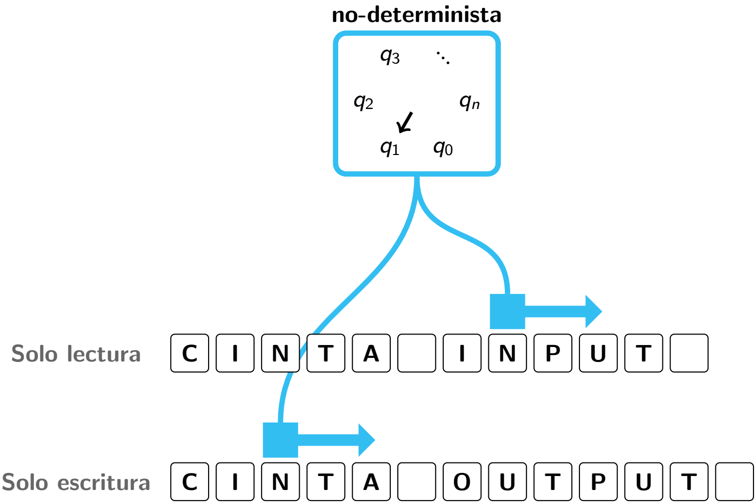
Volviendo a la clase de hoy . . .
¿cuánto se parece un autómata a un algoritmo?

¿cuáles son las diferencias?

1. Memoria. ×
2. "Movimiento" de la máquina. ✓
3. Output. ?

En esta clase, veremos como extender autómatas con 3.

Transductores



Definición de transductor

Definición

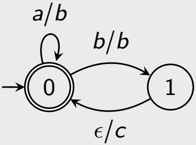
Un transductor (*en inglés*, transducer) es una tupla:

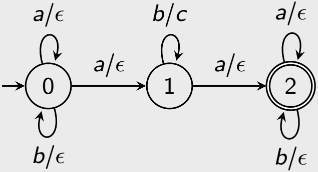
$$\mathcal{T} \quad = \quad (Q, \Sigma, \Omega, \Delta, I, F)$$

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de input.
- Ω es el alfabeto de **output**.
- $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times (\Omega \cup \{\epsilon\}) \times Q$ es la **relación de transición**.
- $I \subseteq Q$ es un conjunto de estados iniciales.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Definición de transductor

Algunos ejemplos

1. 

2. 

Configuración de un transductor

Sea $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \Omega, \Delta, I, F)$ un transductor.

Definiciones

- Un par $(q, u, v) \in Q \times \Sigma^* \times \Omega^*$ es una **configuración** de $\mathcal{T}$.
- Una configuración (q, u, ϵ) es **inicial** si $q \in I$.
- Una configuración (q, ϵ, v) es **final** si $q \in F$.

"Intuitivamente, una configuración (q, au, vb) representa que $\mathcal{T}$ se encuentra en el estado q procesando la palabra au y leyendo a, y hasta ahora grabó la palabra vb y el último símbolo impreso es b."

Ejecución de un transductor

Sea $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \Omega, \Delta, I, F)$ un transductor.

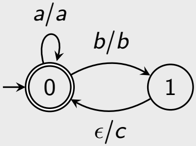
Definición

Se define la relación $\vdash_{\mathcal{T}}$ de **siguiente-paso** entre configuraciones de $\mathcal{T}$:

$$(p, u_1, v_1) \ \vdash_{\mathcal{T}} \ (q, u_2, v_2)$$

si, y solo si, existe $(p, a, b, q) \in \Delta$ tal que $u_1 = a \cdot u_2$ y $v_2 = v_1 \cdot b$.

Ejemplo



$(0, aba, \epsilon) \vdash_{\mathcal{T}} (0, ba, a)$

$(0, ba, a) \vdash_{\mathcal{T}} (1, a, ab) \vdash_{\mathcal{T}} (0, a, abc) \vdash_{\mathcal{T}} (0, \epsilon, abca)$

Ejecución de un transductor

Sea $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \Omega, \Delta, I, F)$ un transductor.

Definición

Se define la relación $\vdash_{\mathcal{T}}$ de **siguiente-paso** entre configuraciones de $\mathcal{T}$:

$$(p, u_1, v_1) \ \vdash_{\mathcal{T}} \ (q, u_2, v_2)$$

si, y solo si, existe $(p, a, b, q) \in \Delta$ tal que $u_1 = a \cdot u_2$ y $v_2 = v_1 \cdot b$.

$$\vdash_{\mathcal{T}} \ \subseteq \ (Q \times \Sigma^* \times \Omega^*) \times (Q \times \Sigma^* \times \Omega^*).$$

Se define $\vdash_{\mathcal{T}}^*$ como la clausura **refleja** y **transitiva** de $\vdash_{\mathcal{T}}$:

para toda configuración (q, u, v) : $\quad (q, u, v) \ \vdash_{\mathcal{T}}^* \ (q, u, v)$

si $(q_1, u_1, v_1) \vdash_{\mathcal{T}}^* (q_2, u_2, v_2)$ y
$(q_2, u_2, v_2) \vdash_{\mathcal{T}} (q_3, u_3, v_3)$: $\quad (q_1, u_1, v_1) \ \vdash_{\mathcal{T}}^* \ (q_3, u_3, v_3)$

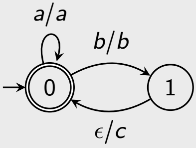
Ejecución de un transductor

Se define $\vdash_{\mathcal{T}}^{*}$ como la clausura **refleja** y **transitiva** de $\vdash_{\mathcal{T}}$:

$$\text{para toda configuración } (q,u,v): \qquad (q,u,v) \vdash_{\mathcal{T}}^{*} (q,u,v)$$

$$\begin{array}{l} \text{si } (q_1,u_1,v_1) \vdash_{\mathcal{T}}^{*} (q_2,u_2,v_2) \text{ y} \\ \qquad\qquad (q_2,u_2,v_2) \vdash_{\mathcal{T}} (q_3,u_3,v_3): \end{array} \qquad (q_1,u_1,v_1) \vdash_{\mathcal{T}}^{*} (q_3,u_3,v_3)$$

Ejemplo



$$\frac{\begin{array}{l}(0,aba,\epsilon) \vdash_{\mathcal{T}} (0,ba,a) \\ (0,ba,a) \vdash_{\mathcal{T}} (1,a,ab) \vdash_{\mathcal{T}} (0,a,abc) \vdash_{\mathcal{T}} (0,\epsilon,abca)\end{array}}{(0,aba,\epsilon) \vdash_{\mathcal{T}}^{*} (0,ba,a) \ \text{ y } \ (0,aba,\epsilon) \vdash_{\mathcal{T}}^{*} (0,\epsilon,abca)}$$

Función definida por un transductor

Sea $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \Omega, \Delta, I, F)$ un transductor y $u, v \in \Sigma^*$.

Definiciones

- $\mathcal{T}$ **entrega** v con **input** u si existe una configuración **inicial** (q_0, u, ϵ) y una configuración **final** (q_f, ϵ, v) tal que:

$$(q_0, u, \epsilon) \vdash_{\mathcal{T}}^{*} (q_f, \epsilon, v)$$

- Se define la función $[\![\mathcal{T}]\!] : \Sigma^* \to 2^{\Omega^*}$:

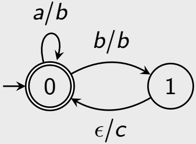
$$[\![\mathcal{T}]\!](u) = \{v \in \Omega^* \mid \mathcal{T} \text{ entrega } v \text{ con input } u\}$$

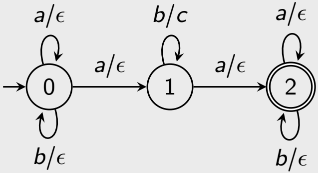
- Se dice que $f : \Sigma^* \to 2^{\Omega^*}$ es una **función racional** si existe un transductor $\mathcal{T}$ tal que $f = [\![\mathcal{T}]\!]$.

Un transductor define una función de palabras a conjunto de palabras.

Función definida por un transductor

¿qué función define cada transductor?

1. 

2. 

Funciones versus relaciones

Dos interpretaciones para un transductor

1. $\mathcal{T}$ define la **función** $[\![\mathcal{T}]\!] : \Sigma^* \to 2^{\Omega^*}$:

$$[\![\mathcal{T}]\!](u) \;=\; \{v \in \Omega^* \mid \mathcal{T} \text{ entrega } v \text{ con input } u\}$$

2. $\mathcal{T}$ define la **relación** $[\![\mathcal{T}]\!] \subseteq \Sigma^* \times \Omega^*$:

$$(u, v) \in [\![\mathcal{T}]\!] \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathcal{T} \text{ entrega } v \text{ con input } u$$

Desde ahora, hablaremos de función o relación **indistintamente** y hablaremos de las **relaciones racionales** (definidas por un transductor).

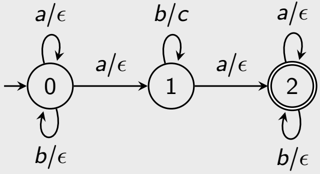
Lenguaje de input y lenguaje de output

Definiciones

Para una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Omega^*$ se define:

- $\pi_1(R) = \{ u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Omega^*. \ (u, v) \in R \}$.
- $\pi_2(R) = \{ v \in \Omega^* \mid \exists u \in \Sigma^*. \ (u, v) \in R \}$.

¿cuál es el lenguaje definido por $\pi_1(\llbracket \mathcal{T} \rrbracket)$ y $\pi_2(\llbracket \mathcal{T} \rrbracket)$?



Lenguaje de input y lenguaje de output

Definiciones

Para una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Omega^*$ se define:

- $\pi_1(R) \;=\; \{\; u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Omega^*.\ (u, v) \in R \;\}.$
- $\pi_2(R) \;=\; \{\; v \in \Omega^* \mid \exists u \in \Sigma^*.\ (u, v) \in R \;\}.$

Teorema

Si $\mathcal{T}$ es un transductor,
entonces $\pi_1(\llbracket \mathcal{T} \rrbracket)$ y $\pi_2(\llbracket \mathcal{T} \rrbracket)$ son lenguajes regulares sobre Σ y Ω, resp.

Demostración: $\pi_1(\llbracket \mathcal{T} \rrbracket)$

Para $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \Omega, \Delta, I, F)$, defina $\mathcal{A}_1 = (Q, \Sigma, \Delta_1, I, F)$ tal que:

$$(p, a, q) \in \Delta_1 \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists b \in \Omega \cup \{\epsilon\}.\ (p, a, b, q) \in \Delta$$

y demuestre que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \pi_1(\llbracket \mathcal{T} \rrbracket)$. ■

Operaciones de relaciones

Teorema

Sea $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos transductores con Σ y Ω alfabetos de input y output.

Las siguientes son **relaciones racionales**.

1. $[\![\mathcal{T}_1]\!] \cup [\![\mathcal{T}_2]\!] = \{(u, v) \in \Sigma^* \times \Omega^* \mid (u, v) \in [\![\mathcal{T}_1]\!] \vee (u, v) \in [\![\mathcal{T}_2]\!]\}$.
2. $[\![\mathcal{T}_1]\!] \cdot [\![\mathcal{T}_2]\!] = \{(u_1 u_2, v_1 v_2) \in \Sigma^* \times \Omega^* \mid (u_1, v_1) \in [\![\mathcal{T}_1]\!] \wedge (u_2, v_2) \in [\![\mathcal{T}_2]\!]\}$.
3. $[\![\mathcal{T}_1]\!]^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} [\![\mathcal{T}_1]\!]^k$.

Demostración.

Operaciones de relaciones

Teorema

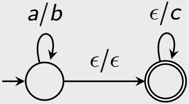
Existen transductores $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ sobre Σ y Ω tal que:

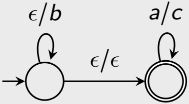
$$[\![\mathcal{T}_1]\!] \cap [\![\mathcal{T}_2]\!] \;=\; \{(u,v) \in \Sigma^* \times \Omega^* \mid (u,v) \in [\![\mathcal{T}_1]\!] \wedge (u,v) \in [\![\mathcal{T}_2]\!]\}$$

NO es una relación racional.

Demostración

Considere los siguientes transductores:





$[\![\mathcal{T}_1]\!] = \{(a^n, b^n c^m) \mid n \geq 0, m \geq 0\}$ $\quad$ $[\![\mathcal{T}_2]\!] = \{(a^n, b^m c^n) \mid n \geq 0, m \geq 0\}$

pero $[\![\mathcal{T}_1]\!] \cap [\![\mathcal{T}_2]\!] = \{(a^n, b^n c^n) \mid n \geq 0\}$,
y por lo tanto $[\![\mathcal{T}_1]\!] \cap [\![\mathcal{T}_2]\!]$ no es racional (¿por qué?) ■

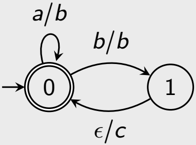
Transductores para funciones de palabras a palabras

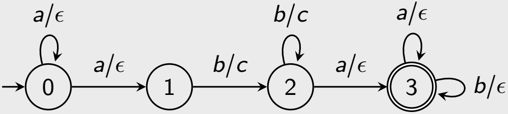
Definición

Decimos que un transductor $\mathcal{T}$ define una función (parcial) si:

$$\text{para todo } u \in \Sigma^* \text{ se tiene que } |\llbracket \mathcal{T} \rrbracket(u)| \leq 1.$$

Ejemplos

- 

- 

Transductores para funciones de palabras a palabras

Definición

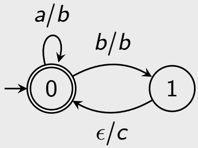
Decimos que $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \Omega, \Delta, I, F)$ es **determinista** si cumple que:

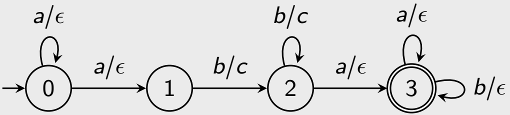
1. $\mathcal{T}$ define una función $[\![\mathcal{T}]\!] : \Sigma^* \to \Omega^*$.
2. para todo $(p, a_1, b_1, q_1) \in \Delta$ y $(p, a_2, b_2, q_2) \in \Delta$,

   si $a_1 = a_2$, entonces $b_1 = b_2$ y $q_1 = q_2$.
3. si $(p, \epsilon, b, q) \in \Delta$, entonces

   para todo $(p, a', b', q') \in \Delta$, se tiene que $(a', b', q') = (\epsilon, b, q)$.

Ejemplos





Transductores para funciones de palabras a palabras

Definición

Decimos que $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \Omega, \Delta, I, F)$ es **determinista** si cumple que:

1. $\mathcal{T}$ define una función $[\![\mathcal{T}]\!] : \Sigma^* \to \Omega^*$.
2. para todo $(p, a_1, b_1, q_1) \in \Delta$ y $(p, a_2, b_2, q_2) \in \Delta$,
   si $a_1 = a_2$, entonces $b_1 = b_2$ y $q_1 = q_2$.
3. si $(p, \epsilon, b, q) \in \Delta$, entonces
   para todo $(p, a', b', q') \in \Delta$, se tiene que $(a', b', q') = (\epsilon, b, q)$.

¿es verdad que si $\mathcal{T}$ define una función parcial, entonces $\mathcal{T}$ es deterministas?

Transductores para funciones de palabras a palabras

Definición

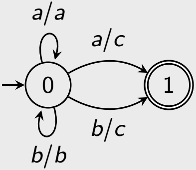
Decimos que $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \Omega, \Delta, I, F)$ es **determinista** si cumple que:

1. $\mathcal{T}$ define una función $[\![\mathcal{T}]\!] : \Sigma^* \to \Omega^*$.
2. para todo $(p, a_1, b_1, q_1) \in \Delta$ y $(p, a_2, b_2, q_2) \in \Delta$,

   si $a_1 = a_2$, entonces $b_1 = b_2$ y $q_1 = q_2$.
3. si $(p, \epsilon, b, q) \in \Delta$, entonces

   para todo $(p, a', b', q') \in \Delta$, se tiene que $(a', b', q') = (\epsilon, b, q)$.

Contraejemplo



¿cuál es la ventaja de los transductores deterministas?