Forma normal de Chomsky

Clase 17

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

Outline

Outline

Producciones en vacío y unitarias

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

- Decimos que una producción de la forma: $X \rightarrow \epsilon$ es **en vacío**.
- Decimos que una producción de la forma: $X \rightarrow Y$ es **unitaria**.

Deseamos eliminar este tipo de producciones!

¿por qué?

Producciones en vacío y unitarias

Ejemplo

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aAa \mid aBC \\
A & \rightarrow & aD \mid S \\
B & \rightarrow & aBa \mid \epsilon \\
C & \rightarrow & abb \mid D \\
D & \rightarrow & aDa \mid a
\end{array}
$$

- ¿cuáles producciones son **en vacío**?
- ¿cuáles producciones son **unitarias**?

¿cómo eliminamos las producciones **en vacío** y **unitarias**?

¿és posible eliminar las producciones en vacío, siempre?

¿és posile eliminar las producciones **en vacío**?

$$S \quad \rightarrow \quad a\ S\ b \mid \epsilon$$

Conclusión

Si $\epsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$, entonces
NO se pueden borrar las producciones en vacío sin alterar el lenguaje $\mathcal{G}$.

Desde ahora supondremos que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$

¿es razonable?

¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Observación

Suponga las reglas $X \to Y$ y $Y \to \gamma$ en P.

- Si $\mathcal{G}' = (V, \Sigma, P \cup \{X \to \gamma\}, S)$ ¿$\mathcal{L}(\mathcal{G}') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$? ✓
- Si $\mathcal{G}'' = (V, \Sigma, P \cup \{X \to \gamma\} - \{X \to Y\}, S)$ ¿$\mathcal{L}(\mathcal{G}'') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$? ✗

Suponga las reglas $X \to \epsilon$ y $Z \to \alpha X \beta$ en P.

- Si $\mathcal{G}' = (V, \Sigma, P \cup \{Z \to \alpha\beta\}, S)$ ¿$\mathcal{L}(\mathcal{G}') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$? ✓
- Si $\mathcal{G}'' = (V, \Sigma, P \cup \{Z \to \alpha\beta\} - \{X \to \epsilon\}, S)$ ¿$\mathcal{L}(\mathcal{G}'') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$? ✗

¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Clausura de producciones unitarias y en vacío

Sea P^* el **menor conjunto de producciones** que contiene a P y **cerrado bajo** las siguientes reglas:

1. Si $X \to Y \in P^*$ y $Y \to \gamma \in P^*$, entonces $X \to \gamma \in P^*$.
2. Si $X \to \epsilon \in P^*$ y $Z \to \alpha X \beta \in P^*$, entonces $Z \to \alpha\beta \in P^*$.

Defina $\mathcal{G}^* = (V, \Sigma, P^*, S)$. Entonces:

- P^* es finito. (¿por qué?)
- $\mathcal{L}(\mathcal{G}^*) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$. (¿por qué?)

¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

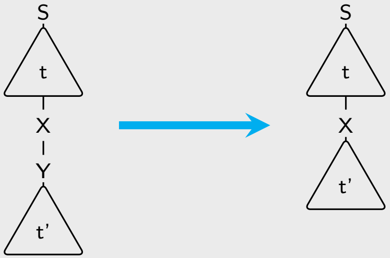
Para cualquier palabra $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^*)$,
sea $\mathcal{T}$ un árbol de derivación de w en $\mathcal{G}^*$ de **tamaño mínimo**.

Propiedad 1

El árbol de derivación $\mathcal{T}$ NO usa una **producción unitaria**.

Demostración (por contradicción)

Suponemos que $\mathcal{T}$ usa una producción unitaria:



¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

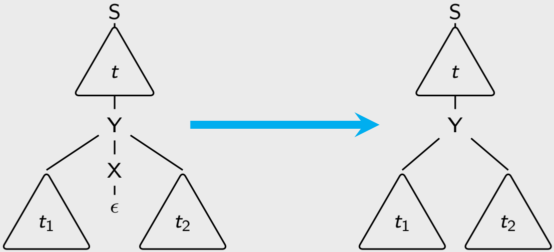
Para cualquier palabra $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^*)$,
sea $\mathcal{T}$ un árbol de derivación de w en $\mathcal{G}^*$ de **tamaño mínimo**.

Propiedad 2

El árbol de derivación $\mathcal{T}$ NO usa una producción **en vacío**.

Demostración (por contradicción)

Suponemos que $\mathcal{T}$ usa una producción en vacío:



¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Por la **Propiedad 1** y **Propiedad 2** tenemos que:

> *Para todo $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^*)$, existe una derivación de w en $\mathcal{G}$ que NO usa producciones* en vacío *ni producciones* unitarias.

Podemos eliminar las producciones en vacío y unitarias de $\mathcal{G}^*$!

Teorema

Para toda CFG $\mathcal{G}$ tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$, sea:

- $\mathcal{G}^*$ la clausura de producciones unitarias y en vacío.
- $\hat{\mathcal{G}}$ el resultado de remover toda producción unitaria o en vacío de $\mathcal{G}^*$.

Entonces $\mathcal{L}(\hat{\mathcal{G}}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ y $\hat{\mathcal{G}}$ no tiene producciones unitarias o en vacío.

¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Para eliminar las producciones en vacío o unitarias de $\mathcal{G}$:

- construimos $\mathcal{G}^*$ haciendo la **clausura** de prod. unitarias y en vacío,
- construimos $\hat{\mathcal{G}}$ **removiendo** todas las prod. unitarias o en vacío de $\mathcal{G}^*$.

Por el resultado anterior sabemos que $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\hat{\mathcal{G}})$.

Importante: es posible que $\hat{\mathcal{G}}$ contiene símbolos inútiles.

Outline

Elim. de producciones inútiles (bis)

Forma normal de Chomsky

¿qué es una forma normal?

Ejemplo: polinomios

Un polinomio cualquiera:

$$p(x) \ := \ (x^3 \cdot ((x-2) + 3x^2) - (3x^5 - 2x^2)) \cdot 2x + 7$$

Un polinomio cualquiera
cuando **planeamos hacer un algoritmo** sobre polinomios:

$$p(x) \ := \ 2x^5 + 4x^3 - 4x + 7$$

Formas normales son útiles en computación
para **estudiar** un objeto y **diseñar** algoritmos.

Forma normal de Chomsky

Definición

Una gramática $\mathcal{G}$ esta en **forma normal de Chomsky** (CNF) si todas sus reglas son de la forma:

- $X \to YZ$
- $X \to a$

Forma normal de Chomsky

¿cuáles gramáticas están en CNF?

- $S \rightarrow a\ S\ b \mid \epsilon$ ✗

- $A \rightarrow A\ B \mid a \mid \epsilon$ ✗
  $B \rightarrow B\ A \mid b \mid \epsilon$

- $S \rightarrow AB \mid AC \mid SS$ ✓
  $C \rightarrow SB$
  $A \rightarrow a$
  $B \rightarrow b$

Forma normal de Chomsky

Definición

Una gramática $\mathcal{G}$ esta en **forma normal de Chomsky** (CNF) si todas sus reglas son de la forma:

- $X \rightarrow YZ$
- $X \rightarrow a$

Si $\mathcal{G}$ esta en CNF:

- ¿puede aceptar la palabra ϵ?
- ¿puede tener reglas **unitarias**?
- ¿puede tener reglas **en vacío**?

Toda gramática se puede convertir en CNF

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

- Primero, suponga que $\mathcal{G}$ no contiene reglas en vacío o unitarias.
- Por lo tanto, todas las reglas en $\mathcal{G}$ son de la forma:
  - $X \rightarrow \gamma \quad$ para $|\gamma| \geq 2$
  - $X \rightarrow a$

¿cómo transformamos $\mathcal{G}$ en **forma normal de Chomsky**?

Hacia la forma normal de Chomsky

Sea una gramática $\mathcal{G}$ donde las reglas son de la forma:

- $X \rightarrow \gamma \quad$ para $|\gamma| \geq 2$
- $X \rightarrow a$

Paso 1: Convertir todas las reglas a la forma:

- $X \rightarrow Y_1 Y_2 \ldots Y_k \quad$ para $k \geq 2$
- $X \rightarrow a$

Paso 2: Convertir todas las reglas a la forma:

- $X \rightarrow YZ$
- $X \rightarrow a$

¿cómo hacemos el Paso 1? ¿y el Paso 2?

Hacia la forma normal de Chomsky (Paso 1)

Paso 1

Convertir todas las reglas a la forma:

- $X \to Y_1 Y_2 \ldots Y_k \quad$ para $k \geq 2$
- $X \to a$

Solución:

- Para cada $a \in \Sigma$,
  agregar un nueva variable X_a y una regla $X_a \to a$.
- Reemplazar todas las ocurrencias antiguas de a por X_a.

Hacia la forma normal de Chomsky (Paso 1)

Ejemplo del Paso 1

$$S \rightarrow a\ S\ b \mid ab$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A\ S\ B \mid AB \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

Hacia la forma normal de Chomsky (Paso 1)

Paso 1

Convertir todas las reglas a la forma $X \to Y_1 Y_2 \ldots Y_k$ para $k \geq 2$ o $X \to a$.

Solución:

- Para cada $a \in \Sigma$,
  agregar un nueva variable X_a y una regla $X_a \to a$.
- Reemplazar todas las ocurrencias antiguas de a por X_a.

Correctitud

Si $\mathcal{G}'$ es la gramática resultante, entonces se cumple que $\mathcal{L}(\mathcal{G}') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Hacia la forma normal de Chomsky (Paso 2)

Paso 2

Convertir todas las reglas a la forma:

- $X \to YZ$
- $X \to a$

Solución:

Para cada regla $p : X \to Y_1 Y_2 \ldots Y_k$ con $k \geq 3$:

- Agregamos una **nueva** variable Z.
- Reemplazamos la regla p por **dos reglas**:

$$X \to Y_1 Z \quad \text{y} \quad Z \to Y_2 \ldots Y_k$$

Repetimos este paso hasta llegar a la forma normal de Chomsky.

Hacia la forma normal de Chomsky (Paso 2)

Ejemplo del Paso 2 (continuación)

El resultado del Paso 1 es:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & A\ S\ B \mid AB \\ A & \rightarrow & a \\ B & \rightarrow & b \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & A\ Z \mid AB \\ Z & \rightarrow & S\ B \\ A & \rightarrow & a \\ B & \rightarrow & b \end{array}$$

Hacia la forma normal de Chomsky (Paso 2)

Paso 2

Convertir todas las reglas a la forma: $X \to YZ \quad \text{o} \quad X \to a$.

Solución:

Para cada regla $p : X \to Y_1 Y_2 \ldots Y_k$ con $k \geq 3$:

- Agregamos una **nueva** variable Z.
- Reemplazamos la regla p por **dos reglas**:

$$X \to Y_1 Z \quad \text{y} \quad Z \to Y_2 \ldots Y_k$$

Repetimos este paso hasta llegar a la forma normal de Chomsky.

Correctitud

Si $\mathcal{G}''$ es la gramática resultante, entonces se cumple que $\mathcal{L}(\mathcal{G}'') = \mathcal{L}(\mathcal{G}')$.

Toda gramática se puede convertir en CNF

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Teorema

Existe una grámatica $\mathcal{G}'$ en forma normal de Chomsky tal que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$$

Si $\mathcal{G}'$ no tiene reglas unitarias ni en vacío,
entonces $\mathcal{G}'$ es de **tamaño polinomial** con respecto a $\mathcal{G}$.