Construcciones de autómatas

Clase 02

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: Autómata finito determinista

Definición

Un autómata finito determinista (DFA) es una tupla:

$$\mathcal{A} \;=\; (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- Q es un conjunto finito de **estados**.
- Σ es el alfabeto de **input**.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ es la función de **transición**.
- $q_0 \in Q$ es el **estado inicial**.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de **estados finales** (o aceptación).

Rec: ¿cómo se ejecuta un autómata sobre una palabra?

Sea:

- Un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- Un input $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$.

Una **ejecución** (o run) ρ de $\mathcal{A}$ sobre w es una secuencia:

$$\rho : \quad p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_n} p_n$$

- $p_0 = q_0$ y
- para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\delta(p_i, a_{i+1}) = p_{i+1}$.

Una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w es de **aceptación** si:

$$p_n \in F.$$

Desde ahora hablaremos de **LA** ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w

Rec: Lenguaje aceptado por un autómata

Sea un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ y $w \in \Sigma^*$.

Definiciones

- $\mathcal{A}$ **acepta** w si la ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w es de aceptación.
- $\mathcal{A}$ **rechaza** w si la ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w NO es de aceptación.
- El **lenguaje aceptado** por $\mathcal{A}$ se define como:

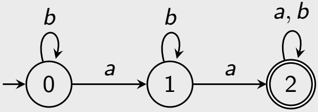
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ acepta } w\}$$

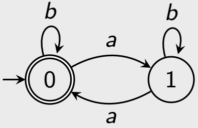
- Un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ se dice **regular** si, y solo si,
  existe un autómata finito determinista $\mathcal{A}$ tal que:

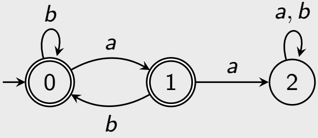
$$L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$$

Rec: Lenguaje aceptado por un autómata

¿qué lenguaje acepta/define cada autómata?

1. 

2. 

3. 

Outline

Outline

Autómatas con función parcial de transición

Definición

Un autómata finito determinista con **función parcial de transición** (DFAp):

$$\mathcal{A} \;=\; (Q, \Sigma, \gamma, q_0, F)$$

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de input.
- $\gamma : Q \times \Sigma \rightharpoonup Q$ es una **función parcial** de transición.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales (o aceptación).

Autómatas con función parcial de transición

Sea:

- Un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \gamma, q_0, F)$ con $\gamma : Q \times \Sigma \rightharpoonup Q$.
- El input $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$.

Una **ejecución** (o run) ρ de $\mathcal{A}$ sobre w es una secuencia:

$$\rho : p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \ldots \xrightarrow{a_n} p_n$$

- $p_0 = q_0$ y
- para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ **esta definido** $\gamma(p_i, a_{i+1}) = p_{i+1}$.

Una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w es de **aceptación** si:

$$p_n \in F.$$

Notar que ahora una palabra puede **NO** tener ejecución!

Autómatas con función parcial de transición

Sea un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \gamma, q_0, F)$ con $\gamma : Q \times \Sigma \rightharpoonup Q$ y $w \in \Sigma^*$.

Definiciones

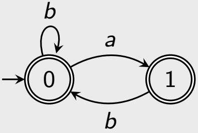
- $\mathcal{A}$ acepta w si
  existe una ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w que es de aceptación.

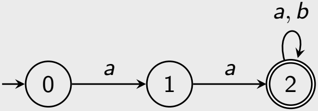
- El **lenguaje aceptado** por $\mathcal{A}$ se define como:

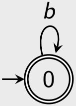
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \;=\; \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ acepta } w\}$$

Autómatas con función parcial de transición

Ejemplos

1. 

2. 

3. 

¿DFA $\not\equiv$ DFAp?

Proposición

Para todo autómata $\mathcal{A}$ con función parcial de transición, existe un autómata $\mathcal{A}'$ (con función total de transición) tal que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \;=\; \mathcal{L}(\mathcal{A}')$$

En otras palabras, DFA $\equiv$ DFAp.

¿cómo demostramos esta afirmación?

¿DFA $\not\equiv$ DFAp?

Demostración

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \gamma, q_0, F)$ un autómata con función parcial de transición.

Sea q_s un **nuevo estado** tal que $q_s \notin Q$.

Construimos el DFA $\mathcal{A}' = (Q \cup \{q_s\}, \Sigma, \delta', q_0, F)$ tal que:

$$\delta'(p, a) = \begin{cases} \gamma(p, a) & \text{si } p \neq q_s \text{ y } (p, a) \in \text{dom}(\gamma) \\ q_s & \text{si no} \end{cases}$$

para todo $p \in Q \cup \{q_s\}$ y $a \in \Sigma$.

¿cómo demostramos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ definen el **mismo lenguaje**?

¿DFA $\not\equiv$ DFAp?

Demostración: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}')$

Sea $w = a_1 \dots a_n \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Entonces existe una **ejecución de aceptación** ρ de $\mathcal{A}$ sobre w:

$$\rho : p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \dots \xrightarrow{a_n} p_n$$

- $p_0 = q_0$,
- para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, esta definido $\gamma(p_i, a_{i+1}) = p_{i+1}$ y
- $p_n \in F$.

Como $\delta'(p_i, a_{i+1}) = \gamma(p_i, a_{i+1})$ para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$ (¿por qué?) entonces ρ es también una ejecución de aceptación de $\mathcal{A}'$ sobre w.

Por lo tanto, $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}')$.

¿DFA $\not\equiv$ DFAp?

Demostración: $\mathcal{L}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$

Sea $w = a_1 \ldots a_n \in \mathcal{L}(\mathcal{A}')$.

Existe una **ejecución de aceptación** ρ de $\mathcal{A}'$ sobre w:

$$\rho : p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \ldots \xrightarrow{a_n} p_n$$

- $p_0 = q_0$,
- para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\delta'(p_i, a_{i+1}) = p_{i+1}$ y
- $p_n \in F$.

¿cómo demostramos que ρ **también** es una ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w?

¿DFA $\not\equiv$ DFAp?

Demostración: $\mathcal{L}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$

Demostraremos que $p_i \neq q_s$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Por **contradición**, suponga que existe i tal que $p_i = q_s$.

Entonces, tenemos que $p_{i+1} = q_s$. (¿por qué?)

Por **inducción**, podemos demostrar que $p_j = q_s$ para todo $j \geq i$. (¿cómo?)

Por lo tanto, $p_n = q_s$. (**contradicción**!) (¿por qué?)

Como $p_i \neq q_s$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ tenemos que:

$$\delta'(p_i, a_{i+1}) = \gamma(p_i, a_{i+1}) \quad \forall\ i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

y ρ es una **ejecución de aceptación** de $\mathcal{A}$ sobre w.

Por lo tanto, concluimos que $w \in \mathcal{L}(A)$. ■

¿DFA $\not\equiv$ DFAp?

Proposición

Para todo autómata $\mathcal{A}$ con función parcial de transición, existe un autómata $\mathcal{A}'$ (con función total de transición) tal que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$$

En otras palabras, DFA $\equiv$ DFAp.

Advertencia:

Desde ahora, utilizaremos autómatas con **funciones totales de transición**, pero **sin perdida de generalidad** en algunos ejemplos utilizaremos **funciones parciales de transición** por simplicidad.

Outline

Complemento, intersección y unión de lenguajes

Definiciones

Dado dos lenguajes $L, L' \subseteq \Sigma^*$ se define:

$$
\begin{aligned}
L^C &= \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\} \\
L \cap L' &= \{w \in \Sigma^* \mid w \in L \ \wedge \ w \in L'\} \\
L \cup L' &= \{w \in \Sigma^* \mid w \in L \ \vee \ w \in L'\}
\end{aligned}
$$

Dado dos autómatas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$:

1. ¿Existe un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A})^C$?
2. ¿Existe un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}')$?
3. ¿Existe un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}')$?

¿existe un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A})^C$?

Construcción de $\mathcal{L}(\mathcal{A})^C$

Dado una autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, definimos el autómata:

$$\mathcal{A}^C = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$

Teorema

Para todo autómata $\mathcal{A}$, se tiene que $\mathcal{L}(\mathcal{A})^C = \mathcal{L}(\mathcal{A}^C)$.

Demostración: Ejercicio.

Figura y fondo

Mosaic II, M. C. Escher.

Complemento, intersección y unión de autómatas

Dado dos autómatas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$:

1. ¿Existe un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A})^C$? ✓
2. ¿Existe un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}')$?
3. ¿Existe un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}')$?

¿existe un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}')$?

Suponga que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \\ \mathcal{A}' &= (Q', \Sigma, \delta', q_0', F') \end{aligned}$$

y considere una palabra $w \in \Sigma^*$.

¿cómo ejecutamos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ sobre w al **mismo tiempo**?

Idea

Ejecutar $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ **en paralelo**.

Producto de autómatas

Suponga que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \\ \mathcal{A}' &= (Q', \Sigma, \delta', q_0', F') \end{aligned}$$

Se define el autómata $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' = (Q^{\times}, \Sigma, \delta^{\times}, q_0^{\times}, F^{\times})$ tal que:

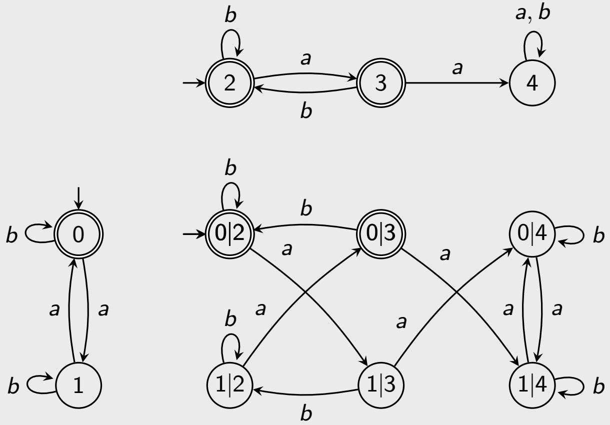
- $Q^{\times} = Q \times Q' = \{(q, q') \mid q \in Q \text{ y } q' \in Q'\}$
- $\delta^{\times}((q, q'), a) = (\delta(q, a), \delta'(q', a))$
- $q_0^{\times} = (q_0, q_0')$
- $F^{\times} = F \times F'$

$\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ lo llamaremos el **producto** entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$

Producto de autómatas

Ejemplo

Todas las palabras sobre $\{a, b\}$
con una cantidad par de a-letras tal que no hay dos a-letras seguidas.



Producto de autómatas

Suponga que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \\ \mathcal{A}' &= (Q', \Sigma, \delta', q_0', F') \end{aligned}$$

Se define el autómata $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' = (Q^\times, \Sigma, \delta^\times, q_0^\times, F^\times)$ tal que:

- $Q^\times = Q \times Q' = \{(q, q') \mid q \in Q \text{ y } q' \in Q'\}$
- $\delta^\times((q, q'), a) = (\delta(q, a), \delta'(q', a))$
- $q_0^\times = (q_0, q_0')$
- $F^\times = F \times F'$

Teorema

Para todo par de autómatas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ se tiene que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}') = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}')$$

Demostración: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')$

Sea $w = a_1 \dots a_n \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}')$. Entonces $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ y $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}')$.

Existen ejecuciones de aceptación ρ y ρ' de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ sobre w, resp.:

$$\rho: \ p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} p_n \qquad \rho': \ p_0' \xrightarrow{a_1} p_1' \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} p_n'$$

- $p_0 = q_0$ y $p_0' = q_0'$.
- $\delta(p_{i-1}, a_i) = p_i$ y $\delta'(p_{i-1}', a_i) = p_i'$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.
- $p_n \in F$ y $p_n' \in F'$.

Por definición, tenemos que: $\rho^\times : \ (p_0, p_0') \xrightarrow{a_1} (p_1, p_1') \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} (p_n, p_n')$

- $(p_0, p_0') = (q_0, q_0')$.
- $(p_i, p_i') = \big(\delta(p_{i-1}, a_i), \delta'(p_{i-1}', a_i)\big) = \delta^\times\big((p_{i-1}, p_{i-1}'), a_i\big)$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.
- $(p_n, p_n') \in F \times F'$.

Por lo tanto, $\rho^\times$ es una ejecución de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ sobre w y $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')$. ■

Demuestre que $\mathcal{L}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}')$

Complemento, intersección y unión de autómatas

Dado dos autómatas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$:

1. ¿Existe un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A})^C$? ✓
2. ¿Existe un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}')$? ✓
3. ¿Existe un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}')$?

¿existe un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}')$?

Sabemos que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}') \quad = \quad \left(\mathcal{L}(\mathcal{A})^C \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}')^C \right)^C$$

Para calcular el autómata que acepta el lenguaje $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}')$:

1. Complementamos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$.
2. Intersectamos $\mathcal{A}^C$ y $(\mathcal{A}')^C$.
3. Complementamos $\mathcal{A}^C \times (\mathcal{A}')^C$.

¿existe una forma **directa** de calcular el autómata $\mathcal{B}$?

Outline

Algunos problemas fundamentales sobre autómatas

1. Dado un autómata $\mathcal{A}$, ¿cómo determinar si $\mathcal{A}$ es **trivial**?

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \varnothing$$

2. Dado autómatas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, ¿cómo saber si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ calculan **lo mismo**?

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$$

3. Dado autómatas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, ¿cómo saber si $\mathcal{A}$ es más **restrictivo** que $\mathcal{A}'$?

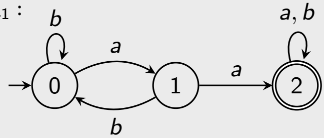
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}')$$

$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \varnothing$

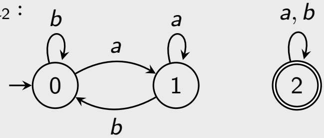
`Problema:`	EMPTYNESS-DFA
`Input:`	Un DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
`Output:`	`TRUE` si, y solo si, $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \varnothing$.

¿cuál de los autómatas cumple que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \varnothing$?

$\mathcal{A}_1$:



$\mathcal{A}_2$:



¿cómo podemos determinar si existe una palabra $w \in \Sigma^*$ tal que $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$?

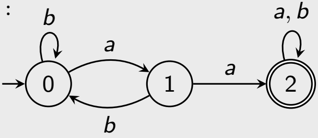
(ejercicio)

$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}')$

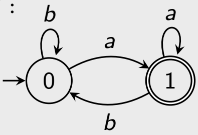
`Problema:`	CONTAINMENT-DFA
`Input:`	Dos DFAs $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ y $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$
`Output:`	`TRUE` si, y solo si, $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}')$.

¿es verdad que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}')$?

$\mathcal{A}:$



$\mathcal{A}':$



¿cómo determinar si $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}')$?

¿cómo determinar si $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}')$?

Dado dos autómatas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, tenemos que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}') \quad \text{ssi} \quad \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}')^C = \varnothing$$

Por lo tanto, los pasos a seguir son los siguientes:

1. Construir un autómata $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')^C$.
2. Construir un autómata $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{B})$.
3. Usar nuestro algoritmo de `emptiness` para verificar si $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \varnothing$.

¿cuál es el tiempo de este algoritmo?