Lema de bombeo

Clase 07

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

¿qué lenguajes no son regulares?

Supongamos que deseamos aceptar el siguiente lenguaje:

$$\begin{aligned} L &= \{\, a^i b^i \mid i \geq 0 \,\} \\ &= \{\, \epsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \ldots \,\} \end{aligned}$$

con un **autómata finito determinista**. ¿es posible?

¿cómo demostramos que L no es regular?

Outline

Outline

Lema de bombeo

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si L es **regular** entonces:

(LB) existe un $N > 0$ tal que

para toda palabra $x \cdot y \cdot z \in L$ con $|y| \geq N$

existen palabras $u \cdot v \cdot w = y$ con $v \neq \epsilon$ tal que

para todo $i \geq 0$, $x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot z \in L$.

Demostración

(PIZARRA)

Contrapositivo del lema de bombeo

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si L es regular entonces:

(LB) **existe** un $N > 0$ tal que
para toda palabra $x \cdot y \cdot z \in L$ con $|y| \geq N$
existen palabras $u \cdot v \cdot w = y$ con $v \neq \epsilon$ tal que
para todo $i \geq 0$, $x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot z \in L$.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si:

($\neg$LB) **para todo** $N > 0$
existe una palabra $x \cdot y \cdot z \in L$ con $|y| \geq N$ tal que
para todo $u \cdot v \cdot w = y$ con $v \neq \epsilon$
existe un $i \geq 0$, $x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot z \notin L$

entonces L **NO** es regular.

Jugando contra un demonio

"L **NO es** regular"	"L **es** regular"
	El escoge un $N > 0$
Uno escoge $x \cdot y \cdot z \in L$ con $\lvert y \rvert \geq N$	
	El escoge $u \cdot v \cdot w = y$ con $v \neq \epsilon$
Uno escoge $i \geq 0$	
Uno gana si $xuv^i wz \notin L$	**El gana** si $xuv^i wz \in L$

Jugando contra un demonio (ejemplo)

“$a^n b^n$ **NO es** regular” | “$a^n b^n$ **es** regular”

Escojo $N > 0$

Yo escojo $\underbrace{a^N}_{x} \cdot \underbrace{b^N}_{y} \cdot \underbrace{\epsilon}_{z} \in L$

Entonces escojo $\underbrace{b^n}_{u} \cdot \underbrace{b^m}_{v} \cdot \underbrace{b^l}_{w} = \underbrace{b^N}_{y}$ con $m > 0$

Yo escojo $i = 2$

¿quién ganó el juego?

Jugando contra un demonio

(¬LB) **para todo** $N > 0$

existe una palabra $x \cdot y \cdot z \in L$ con $|y| \geq N$ tal que

para todo $u \cdot v \cdot w = y$ con $v \neq \epsilon$

existe un $i \geq 0$, $x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot z \notin L$

entonces L **NO** es regular.

Lema de bombeo (version juego)

"Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, si UNO *tiene una estrategia ganadora en el juego (¬ LB) para toda estrategia posible del* demonio, *entonces* L NO es *regular."*

Con **estrategia** nos referimos a
todas las movidas posibles que podría ejecutar el **demonio**

Outline

Ejemplos: $L = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$

"$a^n b^m$ **NO es** regular"

"$a^n b^m$ **es** regular"

Escojo $N > 0$

Yo escojo $\underbrace{a^N}_{x} \cdot \underbrace{b^N}_{y} \cdot \underbrace{\epsilon}_{z} \in L$

Entonces escojo $\underbrace{b^j}_{u} \cdot \underbrace{b^k}_{v} \cdot \underbrace{b^l}_{w} = \underbrace{b^N}_{y}$ con $k > 0$

Yo escojo $i = 2$

¿quién ganó el juego?

Mas ejemplos: $L = \{w \cdot w \mid w \in \{a, b\}^* \}$

"L **NO es** regular" | "L **es** regular"

Escojo $N > 0$

Yo escojo $\underbrace{a^N b}_{x} \cdot \underbrace{a^N}_{y} \cdot \underbrace{b}_{z} \in L$

Entonces escojo $\underbrace{a^j}_{u} \cdot \underbrace{a^k}_{v} \cdot \underbrace{a^l}_{w} = \underbrace{a^N}_{y}$ con $k > 0$

Yo escojo $i = 0$

¿quién ganó el juego?

Otro ejemplo: $L = \{a^{2^n} \mid N > 0\}$

"a^{2^n} **NO es** regular" | "a^{2^n} **es** regular"

Escojo $N > 0$

Yo escojo $\underbrace{a^{2^n - N}}_{x} \cdot \underbrace{a^{N}}_{y} \cdot \underbrace{\epsilon}_{z} \in L$ con $N < 2^n$

Entonces escojo $\underbrace{a^{j}}_{u} \cdot \underbrace{a^{k}}_{v} \cdot \underbrace{a^{l}}_{w} = \underbrace{a^{N}}_{y}$ con $k > 0$

Yo escojo $i = 2$

¿quién ganó el juego?

Outline

¿qué pasa si el demonio tiene una estrategia ganadora?

Lema de bombeo (version juego)

"Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, si UNO *tiene una estrategia ganadora en el juego ($\neg$ LB) para toda estrategia posible del* demonio, *entonces L* NO es *regular."*

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si L es regular entonces:

(LB) existe un $N > 0$ tal que

para toda palabra $x \cdot y \cdot z \in L$ con $|y| \geq N$

existen palabras $u \cdot v \cdot w = y$ con $v \neq \epsilon$ tal que

para todo $i \geq 0$, $x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot y \in L$.

(LB) es necesaria, pero NO suficiente

Otras versiones del lema de bombeo

Lema de bombeo 2 (versión de libros, internet, etc...)

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si L es regular entonces:

(LB') existe un $N > 0$ tal que

para toda palabra $w \in L$ con $|w| \geq N$

existen palabras $x \cdot y \cdot z = w$ con $y \neq \epsilon$ tal que

para todo $i \geq 0$, $x \cdot y^i \cdot z \in L$.

¿cuál es la ventaja de la versión (LB)?

The Pumping Lemma (poema)

Any regular language L has a magic number p
And any long-enough word in L has the following property:
Amongst its first p symbols is a segment you can find
Whose repetition or omission leaves x amongst its kind.

So if you find a language L which fails this acid test,
And some long word you pump becomes distinct from all the rest,
By contradiction you have shown that language L is not
A regular guy, resiliant to the damage you have wrought.

But if, upon the other hand, x stays within its L,
Then either L is regular, or else you chose not well.
For w is xyz, and y cannot be null,
And y must come before p symbols have been read in full.

As mathematical postscript, an addendum to the wise:
The basic proof we outlined here does certainly generalize.
So there is a pumping lemma for all languages context-free,
Although we do not have the same for those that are r.e.