Teorema de Kleene

Clase 06

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: NFA con ϵ-transiciones

Definición

Un autómata finito no-determinista con **ϵ-transiciones** (ϵ-NFA) es:

$$\mathcal{A} \quad = \quad (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$$

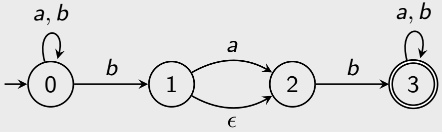
- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de input.
- $I \subseteq Q$ es un conjunto de estados iniciales.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales (o aceptación).

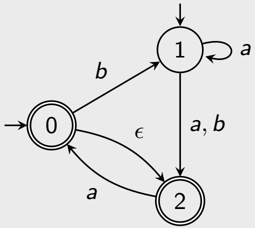
$$+$$

- $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times Q$ es la relación de transición.

Recordatorio: NFA con ϵ-transiciones

Ejemplos

1. 

2. 

Mapa actual de nuestros modelos de computación

Lenguajes Regulares

DFA $\equiv$ NFA $\equiv$ ϵ-NFA

$\equiv$

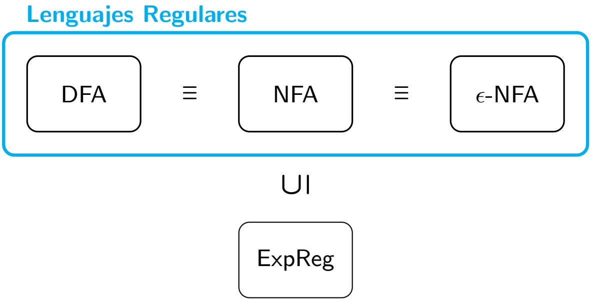
ExpReg

Todos definen el mismo conjunto de lenguajes

Outline

Outline

Toda ExpReg se puede transformar en un autómata



Para cada $R \in$ ExpReg construiremos un ϵ-NFA $\mathcal{A}_R$ **inductivamente**

Toda ExpReg se puede transformar en un autómata

Construcción inductiva

Para cada $R \in$ ExpReg, construimos un ϵ-NFA $\mathcal{A}_R$:

$$\mathcal{A}_R \;=\; (Q, \Sigma, \Delta, \{q_0\}, \{q_f\})$$

tal que $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_R)$.

Expresiones regulares (recordatorio)

R es una **expresión regular** sobre Σ si R es igual a:

1. a para alguna letra $a \in \Sigma$.
2. ϵ
3. $\varnothing$
4. $(R_1 + R_2)$ donde R_1 y R_2 son expresiones regulares.
5. $(R_1 \cdot R_2)$ donde R_1 y R_2 son expresiones regulares.
6. (R_1^*) donde R_1 es una expresión regular.

Toda ExpReg se puede transformar en un autómata

Construcción inductiva

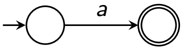
Para cada $R \in$ ExpReg, construimos un ϵ-NFA $\mathcal{A}_R$:

$$\mathcal{A}_R \;=\; (Q, \Sigma, \Delta, \{q_0\}, \{q_f\})$$

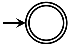
tal que $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_R)$.

Casos bases

1. si $R = a$, para alguna letra $a \in \Sigma$:

$\mathcal{A}_R :$ 

2. si $R = \epsilon$:

$\mathcal{A}_R :$ 

3. si $R = \varnothing$:

$\mathcal{A}_R :$ 

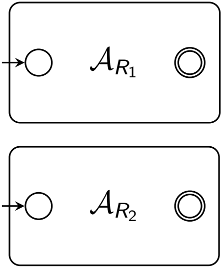
Toda ExpReg se puede transformar en un autómata

Construcción inductiva

Para cada $R \in$ ExpReg, construimos un ϵ-NFA $\mathcal{A}_R$ tal que $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_R)$:

4. si $R = (R_1 + R_2)$ donde R_1 y R_2 son expresiones regulares.

¿cómo construimos un autómata $\mathcal{A}_{R_1+R_2}$ para la expresión $R_1 + R_2$?



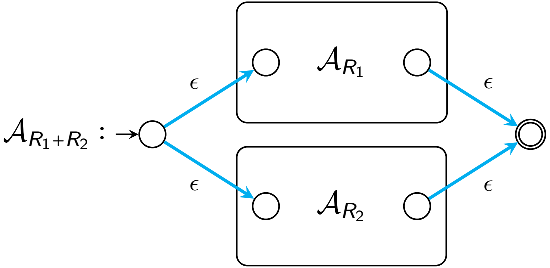
Toda ExpReg se puede transformar en un autómata

Construcción inductiva

Para cada $R \in$ ExpReg, construimos un ϵ-NFA $\mathcal{A}_R$ tal que $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_R)$:

4. si $R = (R_1 + R_2)$ donde R_1 y R_2 son expresiones regulares.

¿cómo construimos un autómata $\mathcal{A}_{R_1+R_2}$ para la expresión $R_1 + R_2$?



Toda ExpReg se puede transformar en un autómata

Construcción inductiva: $R = (R_1 + R_2)$

Por **inducción**, sea $\mathcal{A}_{R_1}$ y $\mathcal{A}_{R_2}$ los ϵ-NFA para R_1 y R_2 resp., tal que:

- $\mathcal{A}_{R_1} = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, \{q_0^1\}, \{q_f^1\})$
- $\mathcal{A}_{R_2} = (Q_2, \Sigma, \Delta_2, \{q_0^2\}, \{q_f^2\})$

Definimos el ϵ-NFA $\mathcal{A}_{R_1+R_2} = (Q, \Sigma, \Delta, \{q_0\}, \{q_f\})$ tal que:

- $Q = Q_1 \uplus Q_2 \uplus \{q_0, q_f\}$
- $\Delta = \Delta_1 \uplus \Delta_2 \uplus \{(q_0, \epsilon, q_0^1), (q_0, \epsilon, q_0^2), (q_f^1, \epsilon, q_f), (q_f^2, \epsilon, q_f)\}$

Proposición

Si $R = (R_1 + R_2)$, entonces $\mathcal{L}(R_1 + R_2) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_{R_1+R_2})$.

Demostración: ejercicio.

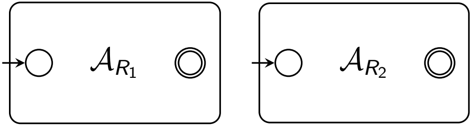
Toda ExpReg se puede transformar en un autómata

Construcción inductiva

Para cada $R \in$ ExpReg, construimos un ϵ-NFA $\mathcal{A}_R$ tal que $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_R)$:

5. Si $R = (R_1 \cdot R_2)$ donde R_1 y R_2 son expresiones regulares.

¿cómo construimos un autómata $\mathcal{A}_{R_1 \cdot R_2}$ para la expresión $R_1 \cdot R_2$?



Toda ExpReg se puede transformar en un autómata

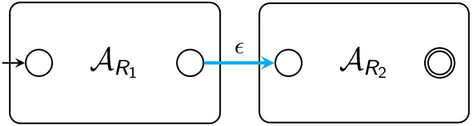
Construcción inductiva

Para cada $R \in$ ExpReg, construimos un ϵ-NFA $\mathcal{A}_R$ tal que $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_R)$:

5. Si $R = (R_1 \cdot R_2)$ donde R_1 y R_2 son expresiones regulares.

¿cómo construimos un autómata $\mathcal{A}_{R_1 \cdot R_2}$ para la expresión $R_1 \cdot R_2$?

$\mathcal{A}_{R_1 \cdot R_2}$:



Toda ExpReg se puede transformar en un autómata

Construcción inductiva: $R = (R_1 \cdot R_2)$

Por inducción, sea $\mathcal{A}_{R_1}$ y $\mathcal{A}_{R_2}$ los ϵ-NFA para R_1 y R_2 resp., tal que:

- $\mathcal{A}_{R_1} = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, \{q_0^1\}, \{q_f^1\})$
- $\mathcal{A}_{R_2} = (Q_2, \Sigma, \Delta_2, \{q_0^2\}, \{q_f^2\})$

Definimos el ϵ-NFA $\mathcal{A}_{R_1 \cdot R_2} = (Q, \Sigma, \Delta, \{q_0^1\}, \{q_f^2\})$ tal que:

- $Q = Q_1 \uplus Q_2$
- $\Delta = \Delta_1 \uplus \Delta_2 \uplus \{(q_f^1, \epsilon, q_0^2)\}$

Proposición

Si $R = (R_1 \cdot R_2)$, entonces $\mathcal{L}(R_1 \cdot R_2) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_{R_1 \cdot R_2})$.

Demostración: ejercicio.

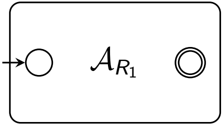
Toda ExpReg se puede transformar en un autómata

Construcción inductiva

Para cada $R \in$ ExpReg, construimos un ϵ-NFA $\mathcal{A}_R$ tal que $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_R)$:

6. si $R = (R_1^*)$ donde R_1 es una expresión regular.

¿cómo construimos un autómata $\mathcal{A}_{(R_1)^*}$ para la expresión $(R_1)^*$?



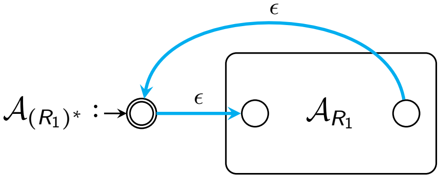
Toda ExpReg se puede transformar en un autómata

Construcción inductiva

Para cada $R \in$ ExpReg, construimos un ϵ-NFA $\mathcal{A}_R$ tal que $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_R)$:

6. si $R = (R_1^*)$ donde R_1 es una expresión regular.

¿cómo construimos un autómata $\mathcal{A}_{(R_1)^*}$ para la expresión $(R_1)^*$?



Toda ExpReg se puede transformar en un autómata

Construcción inductiva: $R = (R_1)^*$

Por inducción, sea $\mathcal{A}_{R_1}$ el ϵ-NFA para R_1, tal que:

- $\mathcal{A}_{R_1} = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, \{q_0^1\}, \{q_f^1\})$.

Definimos el ϵ-NFA $\mathcal{A}_{(R_1)^*} = (Q, \Sigma, \Delta, \{q_0\}, \{q_0\})$ tal que:

- $Q = Q_1 \uplus \{q_0\}$
- $\Delta = \Delta_1 \uplus \{(q_0, \epsilon, q_0^1), (q_f^1, \epsilon, q_0)\}$

Proposición

Si $R = (R_1)^*$, entonces $\mathcal{L}((R_1)^*) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_{(R_1)^*})$.

Demostración: ejercicio.

ExpReg $\subseteq$ ϵ-NFA

Teorema

Para todo $R \in$ ExpReg, existe un ϵ-NFA $\mathcal{A}_R$ tal que:

$$\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_R)$$

En otras palabras, ExpReg $\subseteq$ ϵ-NFA.

¿de qué tamaño es $\mathcal{A}_R$ con respecto a R?

ExpReg $\subseteq$ ϵ-NFA

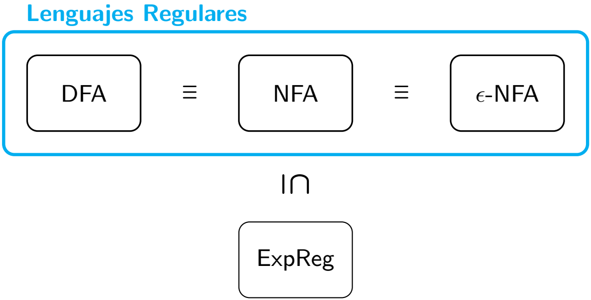
Ejemplo de la construcción

Construya un autómata desde la siguiente expresión regular:

$$(a^* b + a)^*$$

Outline

Todo autómata se puede transformar en un ExpReg



¿cómo obtener una expresión regular desde un autómata?

Dado un autómata finito no-determinista (spdg. con un estado inicial):

$$\mathcal{A} \;=\; (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$$

Para $X \subseteq Q$ y $p, q \in Q$, considerar el conjunto:

$$\alpha^{X}_{p,q} \;\subseteq\; \Sigma^*$$

$w = a_1 \dots a_n \;\in\; \alpha^{X}_{p,q}$ si, y solo si, existe una **ejecución**:

$$\rho : p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} p_n$$

1. $(p_i, a_{i+1}, p_{i+1}) \in \Delta$ para todo $i \in [0, n-1]$,
2. $p_0 = p$,
3. $p_n = q$, y
4. $p_i \in X$ para todo $i \in [1, n-1]$.

¿cómo obtener una expresión regular desde un autómata?

Dado un autómata finito no-determinista (spdg. con un estado inicial):

$$\mathcal{A} \;=\; (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$$

Para $X \subseteq Q$ y $p, q \in Q$, considerar el conjunto:

$$\alpha_{p,q}^{X} \;\subseteq\; \Sigma^*$$

"el conjunto de todas las palabras w tal que existe un camino *(i.e. ejecución) desde p a q etiquetado por w y* todos los estados *en este camino están en X, con la posible* excepción *de p y q."*

¿cómo obtener una expresión regular desde un autómata?

Dado un autómata finito no-determinista (spdg. con un estado inicial):

$$\mathcal{A} \;=\; (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$$

Para $X \subseteq Q$ y $p, q \in Q$, considerar el conjunto:

$$\alpha_{p,q}^{X} \;\subseteq\; \Sigma^*$$

¿cómo podemos definir $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ en términos de $\alpha_{p,q}^{X}$?

Lema

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \;=\; \bigcup_{q \in F} \alpha_{q_0,q}^{Q}$$

¿cómo obtener una expresión regular desde un autómata?

Dado un autómata finito no-determinista (spdg. con un estado inicial):

$$\mathcal{A} \;=\; (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$$

Estrategia (algoritmo de McNaughton-Yamada)

1. Para cada $\alpha^X_{p,q}$, definir **inductivamente** una expresión regular $R^X_{p,q}$:

$$\mathcal{L}(R^X_{p,q}) \;=\; \alpha^X_{p,q}$$

2. Para $F = \{p_1, \ldots, p_k\}$ definir la **expresión regular**:

$$R_{\mathcal{A}} \;=\; R^Q_{q_0,p_1} + R^Q_{q_0,p_2} + \ldots + R^Q_{q_0,p_k}$$

3. Demostrar que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \;=\; \mathcal{L}(R_{\mathcal{A}})$$

Definición inductiva de $R_{p,q}^X$

Caso base: $X = \varnothing$

Sea $a_1, \ldots, a_k \in \Sigma$ todos las letras tal que:

$$(p, a_i, q) \in \Delta$$

- Si $p \neq q$, entonces:

$$R_{p,q}^{\varnothing} \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} a_1 + \cdots + a_k & \text{si } k \geq 1 \\ \varnothing & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

- Si $p = q$, entonces:

$$R_{p,q}^{\varnothing} \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} a_1 + \cdots + a_k + \epsilon & \text{si } k \geq 1 \\ \epsilon & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Definición inductiva de $R^X_{p,q}$

Caso general: $X \neq \varnothing$

Por **inducción**, suponemos que para todo $r, s \in Q$ y para todo $Y \subset X$, $R^Y_{r,s}$ es una expresión regular tal que:

$$\mathcal{L}(R^Y_{r,s}) \;=\; \alpha^Y_{r,s}$$

Demostramos la construcción para $R^X_{p,q}$ con $p, q \in Q$. Sea $r \in X$ cualquiera:

$$R^X_{p,q} \;\stackrel{\text{def}}{\equiv}\; R^{X-\{r\}}_{p,q} \;+\; R^{X-\{r\}}_{p,r} \cdot \left(R^{X-\{r\}}_{r,r}\right)^* \cdot R^{X-\{r\}}_{r,q}$$

Proposición

Para todo $X \subseteq Q$ y $p, q \in Q$:

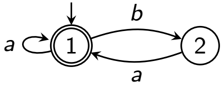
$$\mathcal{L}(R^X_{p,q}) \;=\; \alpha^X_{p,q}$$

Corolario

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \;=\; \mathcal{L}(R_{\mathcal{A}})$$

Ejemplo de Algoritmo MNY

Considere el autómata:



$R^{\varnothing}$	1	2
1	$a^?$	b
2	a	ϵ

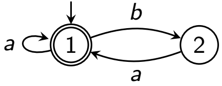
$R^{\{1\}}$	1	2
1	$a^? + a^? \cdot (a^?)^* \cdot a^?$	$b + a^? \cdot (a^?)^* \cdot b$
2	$a + a \cdot (a^?)^* \cdot a^?$	$\epsilon + a \cdot (a^?)^* \cdot b$

$$\equiv$$

$R^{\{1\}}$	1	2
1	a^*	$a^* b$
2	a^+	$\epsilon + a^+ b$

Ejemplo de Algoritmo MNY

Considere el autómata:



$R^{\{1\}}$	1	2
1	a^*	$a^* b$
2	a^+	$\epsilon + a^+ b$

$R^{\{1,2\}}$	1	2
1	$a^* + a^* b\,(\epsilon + a^+ b)^* a^+$	$a^* b + a^* b\,(\epsilon + a^+ b)^*(\epsilon + a^+ b)$
2	$a^+ + (\epsilon + a^+ b)(\epsilon + a^+ b)^* a^+$	$(\epsilon + a^+ b) + (\epsilon + a^+ b)(\epsilon + a^+ b)^*(\epsilon + a^+ b)$

$$\equiv$$

$R^{\{1,2\}}$	1	2
1	$a^*(ba^+)^*$	$(a^* b)(a^+ b)^*$
2	$(a^+ b)^* a^+$	$(a^+ b)^*$