Simplificación de gramáticas

Clase 16

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: Gramáticas libres de contexto

Definición

Una **gramática libre de contexto** (CFG) es una tupla:

$$\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$$

- V es un conjunto finito de **variables** o **no-terminales**.
- Σ es un alfabeto finito (o **terminales**) tal que $\Sigma \cap V = \varnothing$.
- $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ es un subconjunto finito de **reglas** o **producciones**.
- $S \in V$ es la **variable inicial**.

Recordatorio: Gramáticas libres de contexto

Ejemplo

Consideré la grámatica $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ tal que:

- $V = \{ X, Y \}$
- $\Sigma = \{ a, b \}$
- $P = \{ (X, aXb),\ (X, Y),\ (Y, \epsilon) \}$
- $S = X$

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{G}: & X & \rightarrow & aXb \\
 & X & \rightarrow & Y \\
 & Y & \rightarrow & \epsilon
\end{array}
$$

Recordatorio: Producciones

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

Definimos la relación $\Rightarrow \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$ de **producción** tal que:

$$\alpha \cdot X \cdot \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \cdot \beta \qquad \text{si, y solo si,} \qquad (X \to \gamma) \in P$$

para todo $X \in V$ y $\alpha, \beta, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*$.

Si $\alpha X \beta \Rightarrow \alpha\gamma\beta$ entonces decimos que

- $\alpha X \beta$ **produce** $\alpha\gamma\beta$ o
- $\alpha\gamma\beta$ **es producible** desde $\alpha X \beta$.

$\alpha X \beta \Rightarrow \alpha\gamma\beta$ es **reemplazar** γ en X en la palabra $\alpha X \beta$.

Recordatorio: Derivaciones

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

Dada dos palabras $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ decimos que α **deriva** β:

$$\alpha \overset{\star}{\Rightarrow} \beta$$

Si existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (V \cup \Sigma)^*$ tal que:

$$\alpha \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \beta$$

Recordatorio: Derivaciones

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

Dada dos palabras $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ decimos que α **deriva** β:

$$\alpha \stackrel{\star}{\Rightarrow} \beta$$

con $\stackrel{\star}{\Rightarrow}$ es la **clausura refleja y transitiva** de $\Rightarrow$, esto es:

1. $\alpha \stackrel{\star}{\Rightarrow} \alpha$
2. $\alpha \stackrel{\star}{\Rightarrow} \beta$ si, y solo si, existe γ tal que $\alpha \stackrel{\star}{\Rightarrow} \gamma$ y $\gamma \Rightarrow \beta$

para todo $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$.

Notar que $\Rightarrow$ y $\stackrel{\star}{\Rightarrow}$ son relaciones entre palabras en $(V \cup \Sigma)^*$

Recordatorio: Lenguaje definido por una gramática

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

El **lenguaje** de una grámatica $\mathcal{G}$ se define como:

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) \;=\; \left\{\, w \in \Sigma^* \;\middle|\; S \overset{\star}{\Rightarrow} w \,\right\}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{G})$ son todas las palabras en Σ^* que se pueden derivar desde S.

Recordatorio: Lenguajes libres de contexto

Definición

Diremos que $L \subseteq \Sigma^*$ es un **lenguaje libre de contexto** ssi existe una gramática libre de contexto $\mathcal{G}$ tal que:

$$L = \mathcal{L}(\mathcal{G})$$

Ejemplos

Los siguientes son lenguajes libres de contexto:

- $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- $\text{Par} = \{ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ tiene largo par} \}$
- $\text{Pal} = \{ w \in \{a, b\}^* \mid w = w^{\text{rev}} \}$

Derivaciones por la izquierda y por la derecha

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

- Definimos la **derivación por la izquierda** $\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$:

$$\text{w} \cdot X \cdot \beta \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} \text{w} \cdot \gamma \cdot \beta \qquad \text{si, y solo si,} \qquad X \to \gamma \in P$$

  para todo $X \in V$, $\text{w} \in \Sigma^*$ y $\beta, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*$.

- Definimos la **derivación por la derecha** $\underset{\text{rm}}{\Rightarrow} \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$:

$$\alpha \cdot X \cdot \text{w} \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} \alpha \cdot \gamma \cdot \text{w} \qquad \text{si, y solo si,} \qquad X \to \gamma \in P$$

  para todo $X \in V$, $\text{w} \in \Sigma^*$ y $\alpha, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*$.

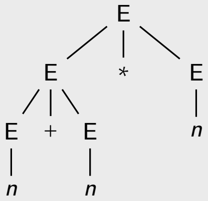
Se define $\overset{\star}{\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}}$ y $\overset{\star}{\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}}$ como la **clausura refleja y transitiva** de $\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}$ y $\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}$, resp.

$\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}$ y $\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}$ solo reemplaza **a la izquierda** (leftmost) y **derecha** (rightmost).

Derivaciones por la izquierda y por la derecha

Ejemplo anterior

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid n$$



Derivación por la izquierda (lm)

$$E \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} E * E \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} E + E * E \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} n + E * E \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} n + n * E \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} n + n * n$$

Derivación por la derecha (rm)

$$E \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} E * E \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} E * n \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} E + E * n \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} E + n * n \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} n + n * n$$

¿cuál es la relación entre el **tipo de derivación** y el **recorrido del árbol**?

Derivaciones por la izquierda y por la derecha

Sabemos que ...

- Por cada derivación, existe un único árbol de derivación.
- Por cada árbol de derivación existen **múltiples** posibles derivaciones.

Proposición

Por cada árbol de derivación, existe
una **única** derivación por la izquierda y una **única** derivación por la derecha.

Por lo tanto, desde ahora podemos hablar de
árbol de derivación y derivación (izquierda o derecha) indistintamente.

¿cómo podemos simplificar está gramática?

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{S} & \rightarrow & \mathsf{aAa} \mid \mathsf{aBD} \mid \mathsf{aBH} \\
\mathsf{A} & \rightarrow & \mathsf{B} \mid \mathsf{D} \\
\mathsf{B} & \rightarrow & \mathsf{aBa} \mid \mathsf{b} \\
\mathsf{C} & \rightarrow & \mathsf{aCC} \mid \mathsf{bC} \\
\mathsf{D} & \rightarrow & \mathsf{aDCa} \mid \mathsf{CFa} \\
\mathsf{F} & \rightarrow & \mathsf{aFDa} \mid \mathsf{aab} \\
\mathsf{H} & \rightarrow & \epsilon
\end{array}
$$

1. Dada una variable X, ¿es X **útil** para producir palabras?
2. Dada una producción $p : X \rightarrow \gamma$, ¿es p **útil** para producir palabras?

Outline

Eliminación de variables inútiles

Eliminación de producciones inútiles

Outline

Eliminación de variables inútiles

Eliminación de producciones inútiles

Variables inútiles

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

Diremos que una variable $X \in V$ es **útil** si existe una derivación:

$$S \overset{\star}{\Rightarrow} \alpha X \beta \overset{\star}{\Rightarrow} w$$

Al contrario, diremos que una variable X es **inútil** si NO es útil.

¿qué variables son inútiles?

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{S} & \rightarrow & \mathrm{aAa} \mid \mathrm{aBC} \\ \mathrm{A} & \rightarrow & \mathrm{aS} \mid \mathrm{bD} \\ \mathrm{B} & \rightarrow & \mathrm{aBa} \mid \mathrm{b} \\ \mathrm{C} & \rightarrow & \mathrm{abb} \mid \mathrm{DD} \\ \mathrm{D} & \rightarrow & \mathrm{aDa} \end{array}$$

Variables inútiles

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

Diremos que una variable $X \in V$ es **útil** si existe una derivación:

$$S \overset{\star}{\Rightarrow} \alpha X \beta \overset{\star}{\Rightarrow} w$$

Al contrario, diremos que una variable X es **inútil** si NO es útil.

¿cómo podemos determinar si un símbolo es **inútil**?

Desde el lado positivo: símbolos útiles

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

Para una variable $X \in V$:

1. Decimos que X es **alcanzable** si existe una derivación:

$$S \overset{\star}{\Rightarrow} \alpha X \beta$$

2. Decimos que X es **generadora** si existe una derivación:

$$X \overset{\star}{\Rightarrow} w$$

¿cómo determinamos si una variable es **alcanzable** o **generadora**?

¿cómo determinamos si una variable es **alcanzable**?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Propiedad

Para toda variable $X \in V - \{S\}$,

existe una producción $Y \to \alpha X \beta$ en P tal que $Y \in V$ es alcanzable si, y solo si, X es **alcanzable**.

Demostración: ejercicio.

¿cómo determinamos si una variable es **alcanzable**?

input : Gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$

output: Conjunto C de variables alcanzables

Function `alcanzables` *($\mathcal{G}$)*

> **let** $C_0 := \{S\}$
> **let** $C := \varnothing$
>
> **while** $C_0 \neq \varnothing$ **do**
>
> > **take** $Y \in C_0$
> >
> > $C_0 := C_0 - \{Y\}$
> > $C := C \cup \{Y\}$
> >
> > **foreach** $X \in V - C$ *tal que existe una regla* $\left(Y \to \alpha X \beta\right) \in P$ **do**
> > > $C_0 := C_0 \cup \{X\}$
>
> **return** C

¿cómo determinamos si una variable es **alcanzable**?

¿cuáles son las variables alcanzables?

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & aAa \\
A & \rightarrow & aB \\
B & \rightarrow & aBa \mid b \\
C & \rightarrow & abb
\end{array}
$$

¿cómo determinamos si una variable es **generadora**?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Propiedad

Para toda variable $X \in V$:

existe una regla $X \to \alpha$ tal que todas las variables en α son generadoras si, y solo si, X es **generadora**.

Demostración: ejercicio.

¿cómo determinamos si una variable es **generadora**?

input : Gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$

output: Conjunto G de variables generadoras

Function `Generadores` *($\mathcal{G}$)*

- **let** $G_0 := \{X \in V \mid (X \to w) \in P\}$
- **let** $G := \varnothing$
- **while** $G_0 \neq G$ **do**
  - $G := G_0$
  - **foreach** $(X \to \alpha) \in P$ **do**
    - **if** *todas las variables en α estan en G* **then**
      - $G_0 := G_0 \cup \{X\}$
- **return** G

¿cómo determinamos si una variable es **generadora**?

¿cuáles son las variables generadoras?

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aAa \mid aBD \\
A & \rightarrow & aB \mid bD \\
B & \rightarrow & aBa \mid b \\
C & \rightarrow & abb \mid DD \\
D & \rightarrow & aDCa
\end{array}
$$

Eliminación de variables inútiles

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Teorema

Sea $\mathcal{G}''$ una gramática creada a partir de $\mathcal{G}$ después de:

- eliminar todos la variables y reglas **NO** **generadoras**.
- eliminar todas las variables y reglas **NO** **alcanzables**.

Entonces, $\mathcal{L}(\mathcal{G}'') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{G}''$ no contiene variables ínutiles.

¿qué falla al eliminar primero las no alcanzables y después las no generadoras?

Ejemplo

$$\mathcal{G}: \quad \begin{array}{rcl} S & \to & AB \mid b \\ A & \to & a \\ B & \to & B \end{array}$$

Al eliminar variables **no alcanzables** en $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}': \quad \begin{array}{rcl} S & \to & AB \mid b \\ A & \to & a \\ B & \to & B \end{array}$$

Al eliminar variables **no generadoras** en $\mathcal{G}'$:

$$\mathcal{G}'': \quad \begin{array}{rcl} S & \to & b \\ A & \to & a \end{array}$$

✗

Eliminación de variables inútiles

Demostración

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Sea $\mathcal{G}' = (V', \Sigma, P', S)$ al eliminar las variables **no generadoras** de $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} V' &= \{ X \in V \mid \exists w.\ X \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w \} \\ P' &= \{ X \to \alpha \in P \mid X \in V' \wedge \alpha \in (V' \cup \Sigma)^* \} \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{G}'' = (V'', \Sigma, P'', S)$ al eliminar las variables **no alcanzables** de $\mathcal{G}'$:

$$\begin{aligned} V'' &= \{ X \in V' \mid \exists \alpha, \beta.\ S \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}'}{\Rightarrow}} \alpha X \beta \} \\ P'' &= \{ X \to \alpha \in P' \mid X \in V'' \wedge \alpha \in (V'' \cup \Sigma)^* \} \end{aligned}$$

Eliminación de variables inútiles

Demostración

Sea $\mathcal{G}' = (V', \Sigma, P', S)$ tal que $V' = \{ X \in V \mid \exists w.\ X \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w \}$.

Sea $\mathcal{G}'' = (V'', \Sigma, P'', S)$ tal que $V'' = \{ X \in V' \mid \exists \alpha, \beta.\ S \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}'}{\Rightarrow}} \alpha X \beta \}$.

Considere las siguientes propiedades de $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ y $\mathcal{G}''$.

1. Para todo $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$, si $\alpha \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w$ entonces $\alpha \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}'}{\Rightarrow}} w$.
2. Para todo $\alpha \in (V' \cup \Sigma)^*$, si $S \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}'}{\Rightarrow}} \alpha$ entonces $S \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}''}{\Rightarrow}} \alpha$.
3. Para todo $\alpha \in (V'' \cup \Sigma)^*$, si $\alpha \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}'}{\Rightarrow}} w$ entonces $\alpha \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}''}{\Rightarrow}} w$.

Ejercicio: demuestre las propiedades.

Eliminación de variables inútiles

Demostración

PD: $\mathcal{L}(\mathcal{G}'') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Como $V'' \subseteq V$ y $P'' \subseteq P$, entonces $\mathcal{L}(\mathcal{G}'') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

PD: $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G}'')$.

Sea $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ tal que $S \underset{\mathcal{G}}{\overset{\star}{\Rightarrow}} w$.

- Por la propiedad $1.$ tenemos que $S \underset{\mathcal{G}'}{\overset{\star}{\Rightarrow}} w$.
- Por la propiedad $2.$ tenemos que $S \underset{\mathcal{G}''}{\overset{\star}{\Rightarrow}} w$.

Por lo tanto $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G}'')$ y concluimos que $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G}'')$.

Eliminación de variables inútiles

Demostración

PD: Para todo $X \in V''$, X es **útil en** $\mathcal{G}''$.

Como $X \in V''$, entonces $S \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}'}{\Rightarrow}} \alpha X \beta$ para algún $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$.

Por la propiedad 2. se tiene que: $S \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}''}{\Rightarrow}} \alpha X \beta$ y $\alpha, \beta \in (V'' \cup \Sigma)^*$.

Como $X \in V'$ y $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, entonces existen u, v, w tal que:

$$\alpha \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} u \ , \quad X \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} v \ , \quad \beta \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w$$

Por la propiedad 1. se tiene que: $\alpha \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}'}{\Rightarrow}} u$, $X \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}'}{\Rightarrow}} v$, $\beta \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}'}{\Rightarrow}} w$.

Por la propiedad 3. se tiene que: $\alpha \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}''}{\Rightarrow}} u$, $X \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}''}{\Rightarrow}} v$, $\beta \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}''}{\Rightarrow}} w$.

Juntando todo $S \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}''}{\Rightarrow}} \alpha X \beta \overset{\star}{\underset{\mathcal{G}''}{\Rightarrow}} uvw$ y X es útil en $\mathcal{G}''$. ∎

Outline

Eliminación de variables inútiles

Eliminación de producciones inútiles

Producciones en vacío y unitarias

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

- Decimos que una producción de la forma: $X \to \epsilon$ es **en vacío**.
- Decimos que una producción de la forma: $X \to Y$ es **unitaria**.

Deseamos eliminar este tipo de producciones!

¿por qué?

Producciones en vacío y unitarias

Ejemplo

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & aAa \mid aBC \\
A & \rightarrow & aD \mid S \\
B & \rightarrow & aBa \mid \epsilon \\
C & \rightarrow & abb \mid D \\
D & \rightarrow & aDa \mid a
\end{array}
$$

- ¿cuáles producciones son **en vacío**?
- ¿cuáles producciones son **unitarias**?

¿cómo eliminamos las producciones **en vacío** y **unitarias**?

¿és posible eliminar las producciones en vacío, siempre?

¿és posile eliminar las producciones **en vacío**?

$$S \rightarrow a\,S\,b \mid \epsilon$$

Conclusión

Si $\epsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$, entonces
NO se pueden borrar las producciones en vacío sin alterar el lenguaje $\mathcal{G}$.

Desde ahora supondremos que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$

¿es razonable?

¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Observación

Suponga las reglas $X \to Y$ y $Y \to \gamma$ en P.

- Si $\mathcal{G}' = (V, \Sigma, P \cup \{X \to \gamma\}, S)$ ¿$\mathcal{L}(\mathcal{G}') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$? ✓
- Si $\mathcal{G}'' = (V, \Sigma, P \cup \{X \to \gamma\} - \{X \to Y\}, S)$ ¿$\mathcal{L}(\mathcal{G}'') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$? ✗

Suponga las reglas $X \to \epsilon$ y $Z \to \alpha X \beta$ en P.

- Si $\mathcal{G}' = (V, \Sigma, P \cup \{Z \to \alpha\beta\}, S)$ ¿$\mathcal{L}(\mathcal{G}') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$? ✓
- Si $\mathcal{G}'' = (V, \Sigma, P \cup \{Z \to \alpha\beta\} - \{X \to \epsilon\}, S)$ ¿$\mathcal{L}(\mathcal{G}'') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$? ✗

¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Clausura de producciones unitarias y en vacío

Sea P^* el **menor conjunto de producciones** que contiene a P y **cerrado bajo** las siguientes reglas:

1. Si $X \to Y \in P^*$ y $Y \to \gamma \in P^*$, entonces $X \to \gamma \in P^*$.
2. Si $X \to \epsilon \in P^*$ y $Z \to \alpha X \beta \in P^*$, entonces $Z \to \alpha\beta \in P^*$.

Defina $\mathcal{G}^* = (V, \Sigma, P^*, S)$. Entonces:

- P^* es finito. (¿por qué?)
- $\mathcal{L}(\mathcal{G}^*) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$. (¿por qué?)

¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

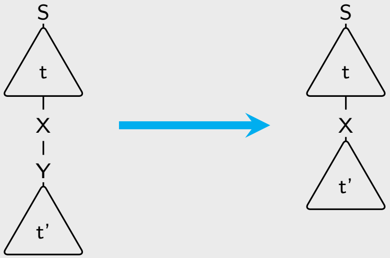
Para cualquier palabra $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^*)$,
sea $\mathcal{T}$ un árbol de derivación de w en $\mathcal{G}^*$ de **tamaño mínimo**.

Propiedad 1

El árbol de derivación $\mathcal{T}$ NO usa una **producción unitaria**.

Demostración (por contradicción)

Suponemos que $\mathcal{T}$ usa una producción unitaria:



¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

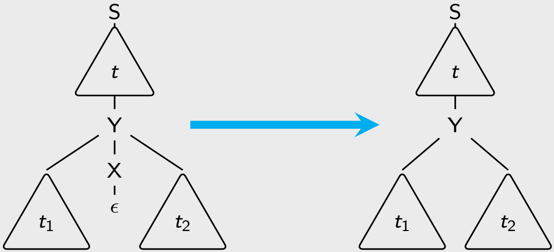
Para cualquier palabra $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^*)$,
sea $\mathcal{T}$ un árbol de derivación de w en $\mathcal{G}^*$ de **tamaño mínimo**.

Propiedad 2

El árbol de derivación $\mathcal{T}$ NO usa una producción **en vacío**.

Demostración (por contradicción)

Suponemos que $\mathcal{T}$ usa una producción en vacío:



¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Por la **Propiedad 1** y **Propiedad 2** tenemos que:

> *Para todo $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^*)$, existe una derivación de w en $\mathcal{G}$ que NO usa producciones* en vacío *ni producciones* unitarias.

Podemos eliminar las producciones en vacío y unitarias de $\mathcal{G}^*$!

Teorema

Para toda CFG $\mathcal{G}$ tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$, sea:

- $\mathcal{G}^*$ la clausura de producciones unitarias y en vacío.
- $\hat{\mathcal{G}}$ el resultado de remover toda producción unitaria o en vacío de $\mathcal{G}^*$.

Entonces $\mathcal{L}(\hat{\mathcal{G}}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ y $\hat{\mathcal{G}}$ no tiene producciones unitarias o en vacío.

¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Para eliminar las producciones en vacío o unitarias de $\mathcal{G}$:

- construimos $\mathcal{G}^*$ haciendo la **clausura** de prod. unitarias y en vacío,
- construimos $\hat{\mathcal{G}}$ **removiendo** todas las prod. unitarias o en vacío de $\mathcal{G}^*$.

Por el resultado anterior sabemos que $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\hat{\mathcal{G}})$.

Importante: es posible que $\hat{\mathcal{G}}$ contiene símbolos inútiles.