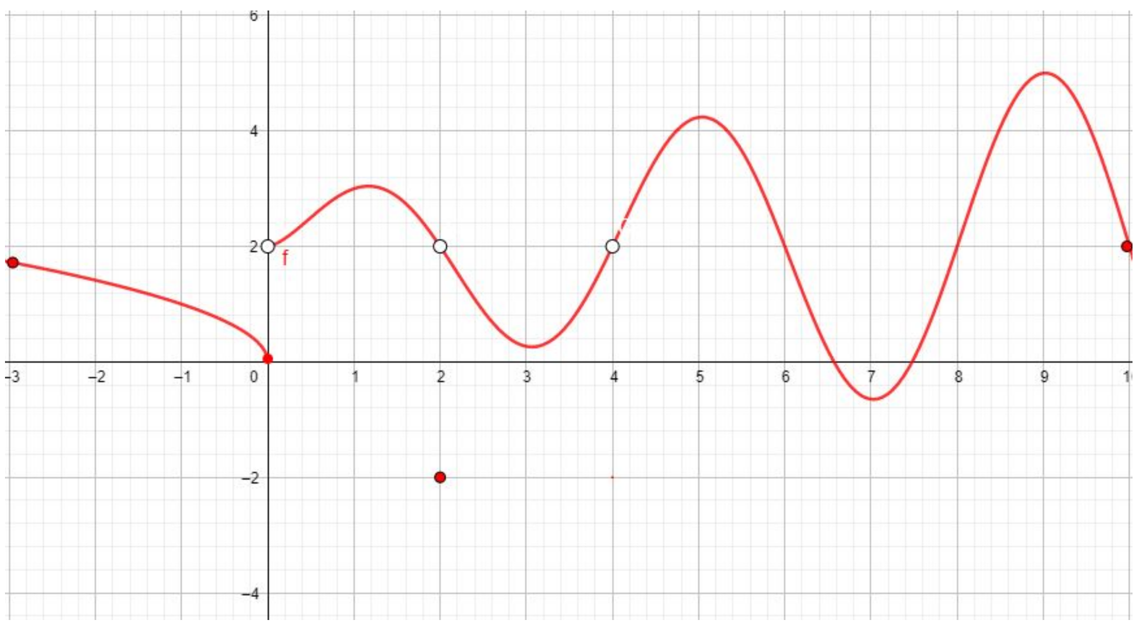
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1610-1 – Cálculo I
Primer Semestre del 2024
Profesor Thomas Führer – tofuhrer@mat.uc.cl
Ayudante Cristóbal Rojas – cristobalrojas@uc.cl

Ayudantía 1

Límites

Problema 1

Para la función, $f(x)$, cuya gráfica está dada, determine, si existe, cada límite indicado. En caso que no exista, justifique su respuesta.



Solución

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ no existe ya que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

Problema 2

Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que cumpla con todas las condiciones dadas.

a) $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = -\infty$

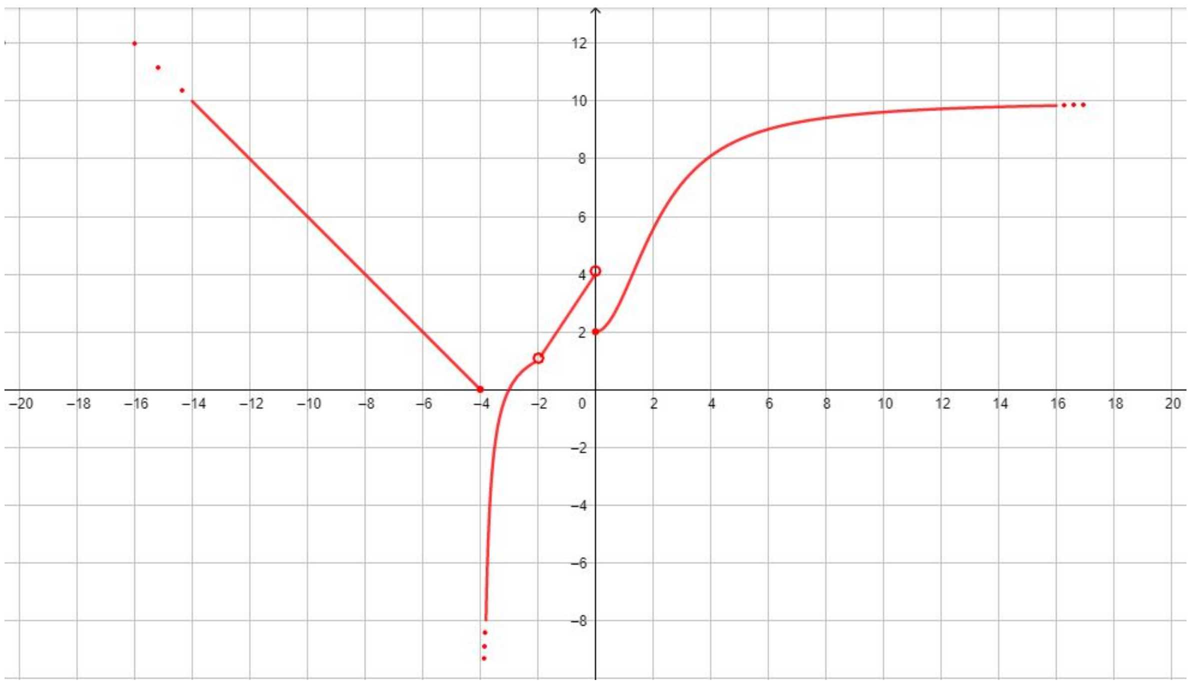
b) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) =$ existe y $-2 \notin \mathrm{Dom}(f)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ no existe

Solución

La gráfica de un ejemplo de función que cumple las condiciones dadas se muestra en la figura.



Problema 3

Para la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{|x-2|}$, responda las siguientes preguntas:

a) Determine el valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b) ¿Existe el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$? Justifique su respuesta. En caso afirmativo, ¿cuál es su valor?

Solución

Note que, el dominio de la función f son los valores reales no negativos diferentes de 2 y que

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ 2-x & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

entonces, la función f puede escribirse como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2-x} & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

o, equivalentemente, como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-(\sqrt{x}+\sqrt{2})} & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

ya que

$$2-x=(\sqrt{2}-\sqrt{x})(\sqrt{2}+\sqrt{x})=-(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})$$

y luego

$$x-2=(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})$$

Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-(\sqrt{x}+\sqrt{2})} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0} 1}{-\left(\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}+\lim_{x\to 0}\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{1}{-(0+\sqrt{2})} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Para la parte b) se estudian los límites laterales

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{-(\sqrt{x}+\sqrt{2})} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0} 1}{-\left(\lim_{x\to 2^-}\sqrt{x}+\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{1}{-(\sqrt{2}+\sqrt{2})} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x}+\lim_{x\to 2^+}\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Entonces, como $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$, el $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

Problema 4

Demuestre, usando la definición, que

$$\lim_{x\to -1} \frac{-5+3x}{2} = -4$$

Solución

Sea ε un número positivo dado. Se debe determinar un número positivo δ tal que:

$$\text{si } |x-(-1)|<\delta \text{ entonces } \left|\frac{-5+3x}{2}-(-4)\right|<\varepsilon$$

o, equivalentemente,

$$\text{si } |x+1|<\delta \text{ entonces } \left|\frac{-5+3x}{2}+4\right|<\varepsilon$$

Note que,

$$\begin{aligned}\left|\frac{-5+3x}{2}+4\right| &= \left|\frac{-5+3x+8}{2}\right| \\ &= \left|\frac{3x+3}{2}\right| \\ &= \left|\frac{3}{2}(x+1)\right| \\ &= \frac{3}{2}|x+1|\end{aligned}$$

y, si $|x+1|<\delta$, entonces $\frac{3}{2}|(x+1)|<\frac{3}{2}\delta$. Es decir, que:

$$\text{si } |x+1|<\delta \text{ entonces, } \left|\frac{-5+3x}{2}+4\right| = \frac{3}{2}|x+1| < \frac{3}{2}\delta$$

Así, para garantizar que $\left|\frac{-5+3x}{2}+4\right|<\epsilon$, basta garantizar que $\frac{3}{2}\delta \leq \varepsilon$. En particular, basta considerar $\delta=\frac{2}{3}\varepsilon$.

Para la verificación, observe que, para $\varepsilon>0$ dado, si se toma $\delta=\frac{2}{3}\varepsilon$

$$\begin{aligned}|x+1|<\delta &\Longrightarrow |x+1|<\frac{2}{3}\varepsilon \\ &\Longrightarrow \frac{3}{2}|x+1| < \frac{3}{2}\frac{2}{3}\varepsilon \\ &\Longrightarrow \underbrace{\frac{3}{2}|x+1|}_{\downarrow} < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \left|\frac{-5+3x}{2}+4\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

lo cual demuestra lo requerido.

Problema 5

Determine, si corresponde, la ecuación de la(s) asíntota(s) vertical(es) de la función dada:

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+2020}}{3x-6}$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2-6x+5}$

c) $f(x)=\dfrac{-2e^x}{e^x-5}$

Solución

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+2020}}{3x-6}$

Note que el denominador de $f(x)$ es cero si $x = 2$, por lo que la recta de ecuación $x = 2$ es una posible asíntota vertical. El numerador es $\sqrt{2036}$, que es mayor que cero, y cuando x tiende a 2 por la derecha (2^+), la expresión $3x - 6$ toma valores positivos que tienden a cero. Entonces,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{4x^2+2020}}{3x-6} = +\infty$$

Así, la recta de ecuación $x = 2$ es una asíntota vertical de f. Además, debido a que cuando x tiende a 2 por la izquierda (2^-), la expresión $3x - 6$ toma valores negativos que tienden a cero, se tiene que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4x^2+2020}}{3x-6} = -\infty$$

lo cual, también indica que la recta de ecuación $x = 2$ es una asíntota vertical de la función f.

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

En este caso el denominador de la función racional dada se anula cuando $x = 1$ y cuando $x = 5$, por lo que las rectas de ecuación $x = 1$ y $x = 5$ son posibles asíntotas verticales.

Sin embargo, para el caso en el que $x = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-5)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{x-1}\frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)} \lim_{x\to 1} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
&= 1 \cdot \left(\frac{2}{-4}\right) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

es decir, el límite es finito, por lo que la recta de ecuación $x = 1$ no corresponde a una asíntota vertical de la función f.

Para el caso de $x = 5$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5^+} f(x) &= \lim_{x\to 5^+} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-5)} \\
&= \lim_{x\to 5^+} \frac{(x-1)}{(x-1)} \lim_{x\to 5^+} \frac{x(x+1)}{x-5} \\
&= 1 \cdot \lim_{x\to 5^+} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
&= \lim_{x\to 5^+} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

ya que cuando x tiende a 5 por la derecha (5^+), la expresión $x(x+1)$ tiende a 30 , que es mayor que cero, y la expresión $x - 5$ toma valores positivos que tienden cero. Entonces, la recta de ecuación $x = 5$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

También, observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5^-} f(x) &= \lim_{x\to 5^-} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-5)}\\
&= \lim_{x\to 5^+} \frac{(x-1)}{(x-1)} \lim_{x\to 5^+} \frac{x(x+1)}{x-5}\\
&= 1 \cdot \lim_{x\to 5^-} \frac{x(x+1)}{(x-5)}\\
&= \lim_{x\to 5^-} \frac{x(x+1)}{(x-5)}\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

ya que cuando x tiende a 5 por la izquierda (5^-), la expresión $x(x+1)$ tiende a 30 , que es mayor que cero, y la expresión $x-5$ toma valores negativos que tienden cero. El hecho de que el $\lim_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$ también indica que la recta de ecuación $x = 5$ es una asíntota vertical de f.

c) $f(x) = \dfrac{-2e^x}{e^x - 5}$

Para esta función el denominador de $f(x)$ es cero si $x = \ln(5)$. El numerador es $-2e^{\ln(5)} = -2 \cdot 5 = -10$, que es menor que cero, entonces,

$$\lim_{x\to((\ln(5))^+} f(x) = \lim_{x\to((\ln(5))^+} \frac{-2e^x}{e^x - 5} = -\infty$$

ya que cuando x tiende a $\ln(5)$ por la derecha $((\ln(5))^+)$, la expresión $e^x - 5$ toma valores positivos que tienden a cero. Así, la recta de ecuacón $x = \ln(5)$ es una asíntota vertical de f. Además,

$$\lim_{x\to((\ln(5))^-} f(x) = \lim_{x\to((\ln(5))^-} \frac{-2e^x}{e^x - 5} = \infty$$

ello debido a que cuando x tiende a $\ln(5)$ por la izquierda $((\ln(5))^-)$, la expresión $e^x - 5$ toma valores negativos que tienden a cero. Esto también indica que $x = \ln(5)$ es una asíntota vertical de f.

Problema 6

Estudie si cada uno de los límites indicados existe o no. Si existe, determine su valor, en caso contrario, explique por qué:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{5 - \sqrt{9 + x^2}}{1 - \sqrt{5 - x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x - 27} + 3}$

Solución

a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{5 - \sqrt{9 + x^2}}{1 - \sqrt{5 - x}}$

Note que no se puede determinar el límite por sustitución porque si $f(x) = \dfrac{5 - \sqrt{9 + x^2}}{1 - \sqrt{5 - x}}$, $f(4)$ no está definida. Para calcularlo se realizan, previamente, varias operaciones algebraicas.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{5-\sqrt{9+x^2}}{1-\sqrt{5-x}} &= \lim_{x\to 4}\frac{\left(5-\sqrt{9+x^2}\right)\left(5+\sqrt{9+x^2}\right)(1+\sqrt{5-x})}{(1-\sqrt{5-x})(1+\sqrt{5-x})\left(5+\sqrt{9+x^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{\left(16-x^2\right)}{(x-4)}\lim_{x\to 4}\frac{(1+\sqrt{5-x})}{\left(5+\sqrt{9+x^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(4+x)}{(x-4)}\lim_{x\to 4}\frac{(1+\sqrt{5-x})}{\left(5+\sqrt{9+x^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{(4-x)}{(x-4)}\lim_{x\to 4}(4+x)\lim_{x\to 4}\frac{(1+\sqrt{5-x})}{\left(5+\sqrt{9+x^2}\right)}\\
&= (-1)8\frac{2}{10}\\
&= -\frac{8}{5}
\end{aligned}
$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{x-27}+3}$

Al considerar $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-27}+3}$, $f(0)$ no está definida, por lo tanto, no se puede determinar el límite por sustitución. Para calcularlo se realizan, previamente, varias operaciones algebraicas.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{x-27}+3} &= \lim_{x\to 0}\frac{x\left((\sqrt[3]{x-27})^2-3\sqrt[3]{x-27}+3^2\right)}{(\sqrt[3]{x-27}+3)\left((\sqrt[3]{x-27})^2-3\sqrt[3]{x-27}+3^2\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\left((\sqrt[3]{x-27})^2-3\sqrt[3]{x-27}+9\right)}{(\sqrt[3]{x-27})^3+3^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\left((\sqrt[3]{x-27})^2-3\sqrt[3]{x-27}+9\right)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\lim_{x\to 0}\left((\sqrt[3]{x-27})^2-3\sqrt[3]{x-27}+9\right)\\
&= 1\cdot\left((-3)^2-3(-3)+9\right)\\
&= 27
\end{aligned}
$$

Evaluación de la ayudantía

Les invito a responder una breve encuesta para evaluar el desempeño en la ayudantía de hoy, con la finalidad de mejorar en las siguientes. Puedes escanear el código QR o hacer click acá.