線形代数　演習-I

17/4/19
by 西谷・関学

- 代数方程式　$ax = b$

$$x = \overset{a^{-1}}{\frac{1}{a}}\, b$$

$a=0$
$0x=b$　$b=0$　xはなんでもOK 不定
$b\neq 0$　OUT 不能
$|A|=0$
正則でない。

⇓

- 連立方程式　$A \cdot x = b$

$$\begin{cases} x+y=5 & \text{—①} \\ 2x+4y=18 & \text{—②} \end{cases} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列

- 掃き出し ←→ 逆行列 ⟶ 検算？

$$\begin{array}{l|cc:c}
① & 1 & 1 & 5 \\
② & 2 & 4 & 18 \\ \hline
① & 1 & 1 & 5 \\
②-①\times 2 & 0 & 2 & 8 \\ \hline
①-②' & 1 & 0 & 1 \\
②'\ ②/2 & 0 & 1 & 4 \\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|cc:cc}
① & 1 & 1 & 1 & 0 \\
② & 2 & 4 & 0 & 1 \\ \hline
② & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ \hline
 & 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\
 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \hline
\end{array}$$

A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- グラフによる解

$x + y = 5$

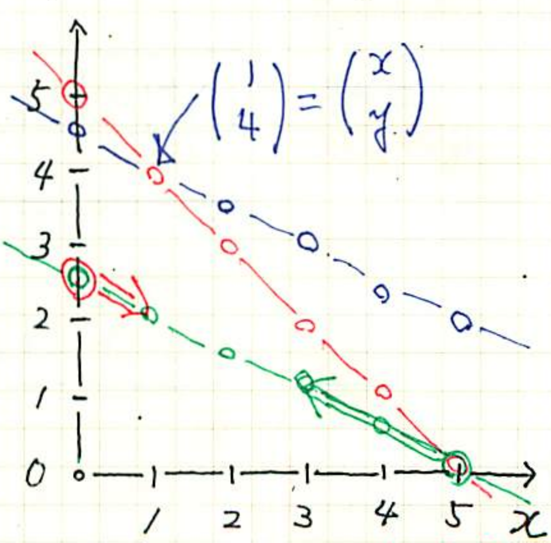
$y = \underline{-x+5}$

$2x + 4y = 18$

$x + 2y = \cancel{18}\ 9$

$2y = -x + \cancel{18}\ 9$

$y = \underline{-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}}$



- Aが正則でない

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=5 \\ 2x+4y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x+2y=5}$$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

この連立方程式の解？

$x = \alpha + 0$
$y = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}$

$x = -2y + 5$

$\boxed{\begin{array}{l} x = -2\alpha + 5 \\ y = \alpha + 0 \end{array}}$

$$\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}}$$

パラメータ表示

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

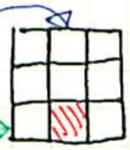
線形代数 演習-II

/ /

by 関学・西谷

row column

- 行列 matrix a_{32}



- 行列の積 $\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+2&6+4\\\boxed{3+2}&2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&10\\5&6\end{pmatrix}$

- 行列とベクトルの積 vector

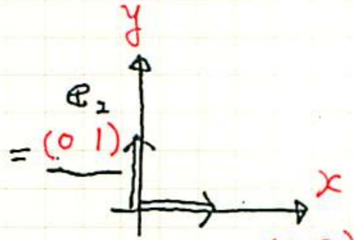
$\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

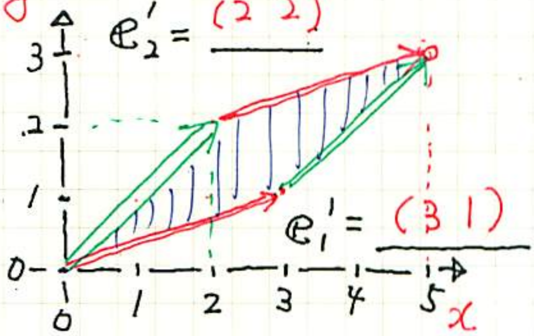
$\cancel{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}}$ 縦

$\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}(1\ 0)=$ ×

$(1\ 0)\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}=(3\ 2)$ 横



$e_2=(0\ 1)$, $e_1=(1\ 0)$



$e_2'=(2\ 2)$, $e_1'=(3\ 1)$

- 行列式 数字 は $|A|$ or $\det A$

determinant

$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$ $\quad\begin{vmatrix}3&2\\1&2\end{vmatrix}=3\cdot2-1\cdot2=4$

- 基本操作

	行列	行列式
	連立方程式	
	掃き出し	
		$\lvert A\rvert=\lvert {}^tA\rvert$
行・列・行と列	行	行と列

transpose ${}^t\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}$

転置 $a_{ij}\Rightarrow a_{ji}$ $=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}$

- 行列式 サラス $\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=2+2+0-0-0-0=4$

3次以下

↓

4次以上

- 余因子展開 $\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=2\cdot(-1)\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}+1\cdot(+1)\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}+0$

$(0-1)$ $\quad(2-0)$

$a_{21}(-1)^{2+1}D_{21}+a_{22}(-1)^{2+2}D_{22}+a_{23}\cdots$

$=2+2=4$

小行列式

- 逆行列
連立方程式の解（クラメール）

余因子

⇐ 掃き出し で換算

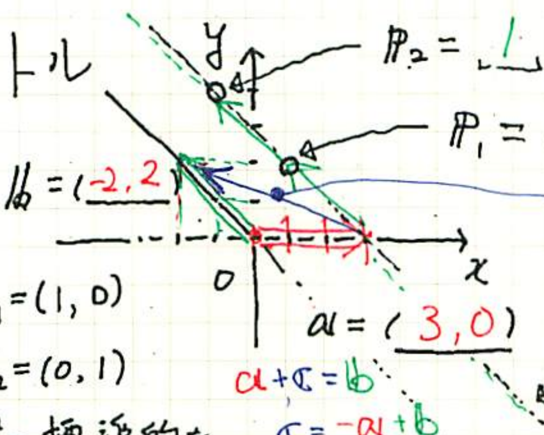
$\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}^{-1}=\mathbb{E}$

$\ell_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

線形代数 演習-Ⅲ

by 西谷・関子

○ベクトル



$P_2 = \underline{1}\,a + \underline{2}\,b$

$P_1 = \underline{1}\,a + \underline{1}\,b$

$c = (-5, 2) = \underline{-1}\,a + \underline{1}\,b$

$\ell_1 = a + \lambda b$ 直線のパラメータ表示

$b = (-2, 2)$

$a = (3, 0)$

$e_1 = (1, 0)$

$e_2 = (0, 1)$

R^2の標準的な基底

$a + c = b$

$c = -a + b$

$\ell_1 : y = \underline{-x+3}$ $\quad \ell_1 = a + \lambda b$

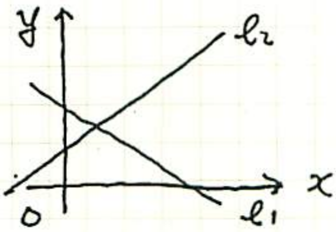
$\ell_2 : y = \underline{-x}$ $\quad \ell_2 = \lambda b$

$\ell_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x + y = 0$ の解全体が作るR^2の部分空間がℓ_2

$\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

○部分空間と次元



	2次元	3次元	4次元
図形	面	空間	4次元超空間
一つ条件式でつくられる図形	線	面	空間
それら2つの交わり	点	線	面

~~4次元超平行~~

$x = 3 - y$

$y = -x + 3$

○同次連立一次方程式の解全体がつくる部分空間

ベクトル $a_1 = (110)$, $a_2 = (201)$
で張られる空間の方程式は?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \overset{a}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \beta \overset{b}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

x	y	z
1	-1	-2
0	0	0
0	0	0.

$x - y - 2z = 0$

$x = \alpha + 2\beta$

$y = \alpha$

$z = \beta$

$x = y + 2z$

$2z = x - y$

$z = \underline{\tfrac{1}{2}}\,x + \underline{-\tfrac{1}{2}}\,y$

$\underline{\quad}\,x + \underline{-}\,y + \underline{-2}\,z = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x - \alpha - 2\beta = 0$

$x = \alpha + 2\beta$

では,

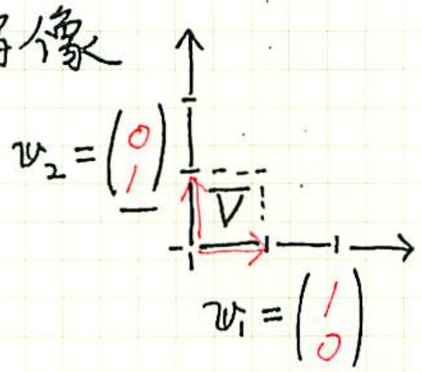
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \overset{a}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \beta \overset{c}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$c = b - a$ 一次従属

$x - y - 2z = 0$

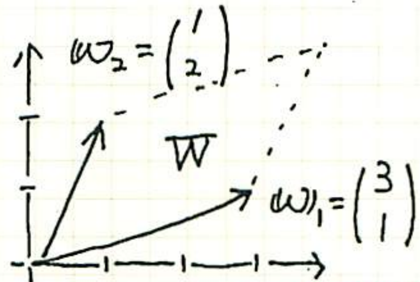
線形代数 演習 - IV

◦ 写像



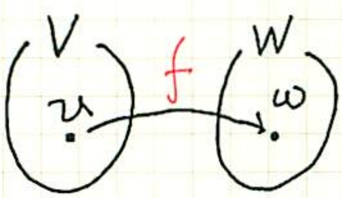
変換の行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

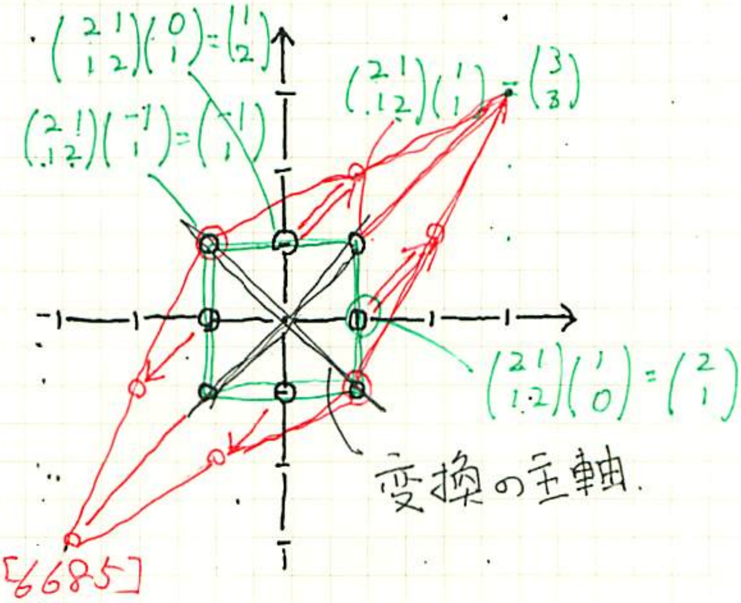
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$



$$f(v) = w.$$

$$A \quad v = w$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}}$$



◦ 固有値 (Eigen Value)

$$A v = \lambda v$$

$(A - \lambda) v = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$0 = |A - \lambda E|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 - 1$$

$$= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

$$\lambda = \underline{3}, \ \underline{1}$$

◦ 固有ベクトル (Eigen Vectors)

$\lambda_1 = \underline{3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-x + y = 0$

$x - y = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

$\lambda_2 = \underline{1}$

$A - E$

$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$x + y = 0$

$x = -y$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

λv_1

検算？ $\underline{A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

6684

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|A - tE| = \begin{vmatrix} 2-t & 5 & -4 \\ 3 & 4-t & -4 \\ 2 & 6 & -5-t \end{vmatrix} =$$

$$(2-t)(4-t)(-5-t) + 3\cdot 6\cdot(-4) + 2\cdot 5\cdot(-4)$$

$$- \left\{ -8(4-t) - \cancel{3}24(2-t) + 15(-5-t) \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-t & 5 & -4 \\ 1+t & -1-t & 0 \\ 2 & 6 & -5-t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-t & 7-t & -4 \\ 1+t & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -5-t \end{vmatrix}$$

$$= -32(1+t)$$

$$- (1+t)(7-t)(-5-t)$$

$$= -(1+t)\left\{ 32 + (7-t)(-5-t) \right\}$$

$$= -(1+t)(32 - 35 + 2t + t^2)$$

$$= -(t+1)(-3+2t+t^2)$$

$$= -(t+1)(t^2+2t-3)$$

$$= -(t+1)(t+3)(t-1)$$

線形代数 演習 − V

$\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

○ 行列式が0の写像

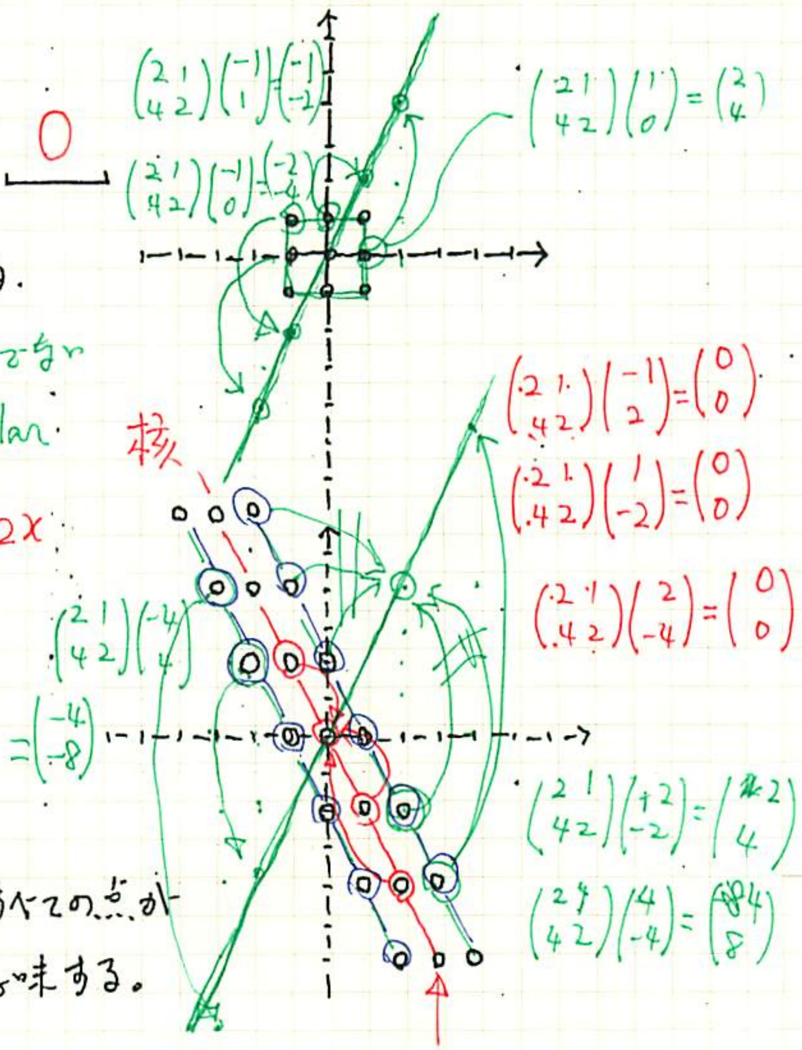
$A=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}$　　$|A| = \underline{\ 0\ }$

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ で表現される写像を考える.

$|A|=ad-bc$

Rank A = 1
Dim A = 2

正則でない
Regular



○ 像と核

Image　Kernel

$$\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

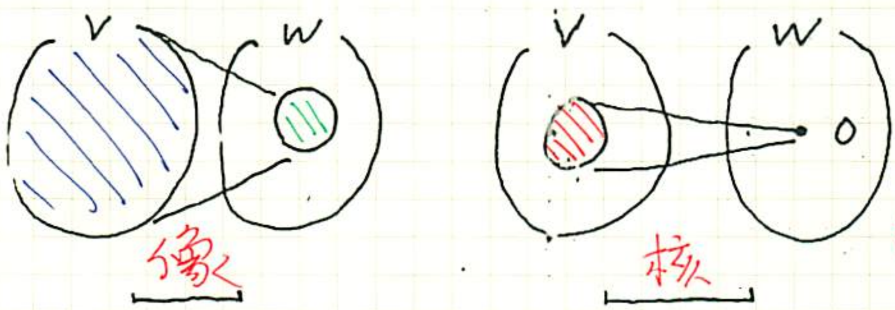
$y=-2x$

とすると(連立)方程式は

$\underline{2x+y=0}$

となる。これはこの直線上のすべての点が原点$(0,0)$に写されることを意味する。

○ V→W 表示



像　　　核

○ 全射と単射

$ax=b$	$a\neq0$	一意	$x=b/a$
不定 or 不能	$a=0$ $b=0$	不定	解は無数
	$a=0$ $b\neq0$	不能	解は存在せず.

解は全域にない　　解は全域にある

$Ax=b$	!全射	全射
!単射 解は無限		
単射 解は一対一対応