例題 14　　　　**グラム・シュミットの直交化法**

グラム・シュミットの直交化法により，つぎのベクトルから $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底を作れ．

$$\boldsymbol{x}_1 = (-2,1,0), \quad \boldsymbol{x}_2 = (-1,0,1), \quad \boldsymbol{x}_3 = (1,1,1)$$

解答　まず $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1$ とおくと

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

つぎに

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 = (-1,0,1) - \frac{2}{5}(-2,1,0) = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right)$$

を正規化して

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{\boldsymbol{y}_2}{|\boldsymbol{y}_2|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1,-2,5) = \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

また

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 \\ &= (1,1,1) + \frac{1}{5}(-2,1,0) - \frac{1}{15}(-1,-2,5) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

を正規化して

$$\boldsymbol{a}_3 = \frac{\boldsymbol{y}_3}{|\boldsymbol{y}_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

P.60
a_1, a_2で
正規直交を確認しながら計算
$\sqrt{a_1 \cdot a_1}$　$a_2 \cdot a_1 = 0$　$a_3 \cdot a_1 = 0$　$a_2 \cdot a_3 = 0$

問　題

14.1　グラム・シュミットの直交化法により，つぎのベクトルから各空間の正規直交基底を作れ．

(a)　$\boldsymbol{R}^2$ において，$\boldsymbol{x}_1 = (-1,3)$, $\boldsymbol{x}_2 = (2,-1)$

(b)　$\boldsymbol{R}^3$ において，$\boldsymbol{x}_1 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{x}_3 = (0,1,1)$

(c)　$\boldsymbol{R}^3$ において，$\boldsymbol{x}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{x}_3 = (-1,0,1)$

(d)　$\boldsymbol{R}^4$ において，$\boldsymbol{x}_1 = (1,1,0,0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (0,1,1,0)$, $\boldsymbol{x}_3 = (0,0,1,1)$, $\boldsymbol{x}_4 = (1,1,0,1)$

例題 15　　　　**直交補空間**

(a)　V を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とする．

$$V^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; \text{すべての } \boldsymbol{y} \in V \text{ に対して } \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0\}$$

は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間になることを示せ（これを V の**直交補空間**という）．

(b)　$V = \{(x_1,x_2,x_3) \in \boldsymbol{R}^3;\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 0\}$ の直交補空間 $V^{\perp}$ を求めよ．

解答　(a)　零ベクトル $\boldsymbol{0}$ はどんなベクトルとも直交するから $\boldsymbol{0} \in V$．よって $V^{\perp}$ は空でない．V のかってなベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V^{\perp} &\implies (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{y} = 0 \\ \boldsymbol{x} \in V^{\perp}, \lambda \in \boldsymbol{R} &\implies (\lambda\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = 0\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \lambda\boldsymbol{x} \in V$ だから V は部分空間をなす．

(b)　同次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
3	1	−1
1	−5	1
1	−5	1
0	16	−4
1	0	−1/4
0	1	−1/4

を解くと，表から $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$．

よって，$(1,1,4)$ は V の基底であり，その直交補空間は

$$V^{\perp} = \{(x_1,x_2,x_3);\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0\}$$

である．$V^{\perp}$ の基底を求めるために方程式 $x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$ を解くと

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって，$V^{\perp}$ の基底 $(-1,1,0), (-4,0,1)$ で生成される部分空間である．

注意　$(3,1,-1), (1,-5,1)$ も $V^{\perp}$ の基底である．

問　題

15.1　$\boldsymbol{R}^n = V \oplus V^{\perp}$ であることを示せ．

15.2　つぎのベクトルで生成される各部分空間 V の直交補空間 $V^{\perp}$ を求めよ．

(a)　$(1,0,-7)$

(b)　$(3,1,-1), (1,-5,1)$

(c)　$(1,0,-1,2), (-1,1,1,0)$