駿台 2018大学入試センター試験
過去問題集 数学 I·A, II·B

$y-3k=0$
いると

0 から $k=\frac{25}{6}$

……③
$=25$ が A を通る

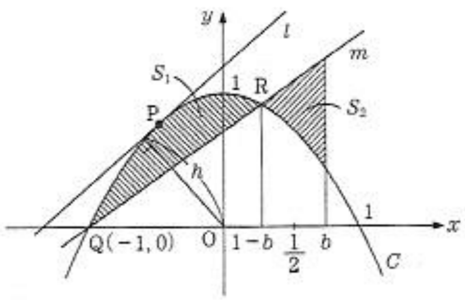
……④

座標は

, b) から C に引
ると，直線 PQ の

第２問　（数学II　微分・積分の考え，いろいろな式，図形と方程式）

＜解説＞



(1)　$C : y=1-x^2,\ y'=-2x$

C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ 1-a^2)$ における接線 l の方程式は

$$y=-2a(x-a)+1-a^2$$
$$\iff y=-2ax+a^2+1$$
$$\iff 2ax+y-a^2-1=0$$

直線 l と原点 O の距離 h は

$$h=\frac{|2a\cdot 0+0-a^2-1|}{\sqrt{(2a)^2+1^2}}=\frac{a^2+1}{\sqrt{4a^2+1}}$$

ここで，$t=\sqrt{4a^2+1}$ とおくと $t>0$ であり

$a^2=\frac{t^2-1}{4}$ であるから

$$h=\frac{\frac{t^2-1}{4}+1}{t}=\frac{t^2+3}{4t}=\frac{1}{4}\left(t+\frac{3}{t}\right)$$

相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$\frac{t+\frac{3}{t}}{2}\geqq\sqrt{t\cdot\frac{3}{t}}$$
$$\iff t+\frac{3}{t}\geqq 2\sqrt{3}$$

等号は $t=\frac{3}{t} \iff t^2=3$ のとき成り立ち，このとき，$a^2=\frac{1}{2} \iff a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって，h の最小値は

$$\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\left(a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(2)　C 上の２点 $\mathrm{Q}(-1,\ 0)$，$\mathrm{R}(1-b,\ 2b-b^2)$ を通る直線を m とすると，m の傾きは

$$\frac{(2b-b^2)-0}{(1-b)-(-1)}=\frac{b(2-b)}{2-b}=b$$

であるから，m の方程式は

$$y=b(x+1)$$
$$\iff y=bx+b$$

C と m で囲まれた図形の面積 S_1 は

$$S_1=\int_{-1}^{1-b}\{1-x^2-(bx+b)\}\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{1-b}(x^2+bx+b-1)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{1-b}(x+1)(x+b-1)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}\{(1-b)-(-1)\}^3$$
$$=\frac{1}{6}(2-b)^3$$
$$=-\frac{1}{6}b^3+b^2-2b+\frac{4}{3}$$

C と m の $1-b\leqq x\leqq b$ の部分，および直線 $x=b$ で囲まれた図形の面積 S_2 は

$\left(\frac{1}{2}<b\leqq 1\ \text{より}\ 1-b<b\leqq 1\ \text{に注意して}\right)$

$$S_2=\int_{1-b}^{b}\{bx+b-(1-x^2)\}\,dx$$
$$=\int_{1-b}^{b}(x^2+bx+b-1)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{b}{2}x^2+(b-1)x\right]_{1-b}^{b}$$
$$=\frac{b^3-(1-b)^3}{3}+\frac{b}{2}\{b^2-(1-b)^2\}$$
$$+(b-1)\{b-(1-b)\}$$
$$=\frac{2b^3-3b^2+3b-1}{3}$$
$$+\frac{b}{2}(2b-1)+(b-1)(2b-1)$$
$$=\frac{2}{3}b^3+2b^2-\frac{5}{2}b+\frac{2}{3}$$

よって

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}b^3+3b^2-\frac{9}{2}b+2$$
$$\frac{dS}{db}=\frac{3}{2}b^2+6b-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}(b^2+4b-3)$$

$\frac{dS}{db}=0$ より $b=-2\pm\sqrt{7}$ であるから，$\frac{1}{2}<b\leqq 1$ における S の増減は次のようになる．

b	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$-2+\sqrt{7}$	$\cdots$	1
$\frac{dS}{db}$		$-$	0	$+$	
S		↘		↗	

よって，S は $b=\sqrt{7}-2$ のとき最小になる．

(注) $S=\frac{1}{2}(b^2+4b-3)(b+2)-7b+5$

であり，$b=\sqrt{7}-2$ のとき $b^2+4b-3=0$ であるから，最小値は

$$-7(\sqrt{7}-2)+5=19-7\sqrt{7}$$

(注) S_1 を求めるとき

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を利用している．

第3問 （数学B 数列）

＜解説＞

$$a_1=-40$$

$$a_{n+1}=|4n-a_n|+2a_n \quad \cdots\cdots ①$$

(1) ①より

$$a_2=|4-a_1|+2a_1=44-80=-36$$

$$a_3=|8-a_2|+2a_2=44-72=-28$$

であるから，$n=1,\ 2,\ 3$ のとき

$$a_n\leqq 4n \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m$ のとき②が成り立つとすると

$$|4n-a_n|=4n-a_n$$

であるから，①より

$$a_{n+1}=(4n-a_n)+2a_n$$

$$\iff a_{n+1}-a_n=4n$$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $4n$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4k$$

$$=-40+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)\cdot n$$

$$=2n^2-2n-40$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

ゆえに，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m+1$ のとき

$$a_n=2n^2-2n-40 \quad \cdots\cdots ③$$

ここで

$$2n^2-2n-40>4n$$

$$\iff n^2-3n-20>0$$

$$\iff n<\frac{3-\sqrt{89}}{2},\ \frac{3+\sqrt{89}}{2}<n$$

であり $9<\sqrt{89}<10$ より $6<\frac{3+\sqrt{89}}{2}<\frac{13}{2}$ であるから，この不等式を満たす最小の自然数 n は

$$n=7$$

よって，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$ のとき

$$a_n=2n^2-2n-40$$

であり

$$a_7=2\cdot 7^2-2\cdot 7-40=44$$

(注) $1\leqq n\leqq 6$ のとき②が成り立つので $1\leqq n\leqq 7$ のとき

$$a_n=2n^2-2n-40$$

となる．

(2) $n\geqq 7$ のとき
$a_n>4n$
が成り立つこと
［Ⅰ］ $n=7$ の
$a_7=44$
［Ⅱ］ $n=k$ (≧
すると
$a_k>4k$
このとき，①
$a_{k+1}=|$
$=$
$=3$
であり，仮定
$3a_k-4$
$k\geqq 7$ より
$8k-4($
であるから
$a_{k+1}>8$
よって，$n=k$
［Ⅰ］［Ⅱ］より
したがって，n
$a_{n+1}=3$
⑤より
$a_{n+2}-a$
$b_n=a_{n+1}-a_n$
$b_{n+1}=3$
この式を変形す
$b_{n+1}-2$
となり，数列 {
ら，$n\geqq 7$ のとき
$b_n-2=$
$\iff b_n=(b$
ここで，⑤，⑥
$b_n=a_n$
$=(3a$
$=2a$
であるから
$b_7=2a_7$
よって
$b_n=58$
⑦より
$a_n=\frac{1}{2}b$