例題 14 ——— **グラム・シュミットの直交化法**

グラム・シュミットの直交化法により，つぎのベクトルから $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底を作れ．

$$\boldsymbol{x}_1=(-2,1,0),\quad \boldsymbol{x}_2=(-1,0,1),\quad \boldsymbol{x}_3=(1,1,1)$$

解答　まず $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1$ とおくと

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)$$

つぎに

$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1=(-1,0,1)-\frac{2}{5}(-2,1,0)=\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5},1\right)$$

を正規化して

$$\boldsymbol{a}_2=\frac{\boldsymbol{y}_2}{|\boldsymbol{y}_2|}=\frac{1}{\sqrt{30}}(-1,-2,5)=\left(-\frac{1}{\sqrt{30}},-\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

また

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_3&=\boldsymbol{x}_3-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2\\&=(1,1,1)+\frac{1}{5}(-2,1,0)-\frac{1}{15}(-1,-2,5)=\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

を正規化して

$$\boldsymbol{a}_3=\frac{\boldsymbol{y}_3}{|\boldsymbol{y}_3|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

P.60

a_1, a_2 で

正規直交を確認しながら計算.

$\sqrt{a_1\cdot a_1}$　　$a_2\cdot a_1=0$　　$a_3\cdot a_1=0$　　$a_2\cdot a_3=0$

問　題

14.1　グラム・シュミットの直交化法により，つぎのベクトルから各空間の正規直交基底を作れ．

(a)　$\boldsymbol{R}^2$ において，$\boldsymbol{x}_1=(-1,3)$, $\boldsymbol{x}_2=(2,-1)$

(b)　$\boldsymbol{R}^3$ において，$\boldsymbol{x}_1=(1,1,0)$, $\boldsymbol{x}_2=(1,0,1)$, $\boldsymbol{x}_3=(0,1,1)$

(c)　$\boldsymbol{R}^3$ において，$\boldsymbol{x}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{x}_2=(1,0,1)$, $\boldsymbol{x}_3=(-1,0,1)$

(d)　$\boldsymbol{R}^4$ において，$\boldsymbol{x}_1=(1,1,0,0)$, $\boldsymbol{x}_2=(0,1,1,0)$, $\boldsymbol{x}_3=(0,0,1,1)$, $\boldsymbol{x}_4=(1,1,0,1)$

例題 15 ——— **直交補空間**

(a)　V を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とする．

$$V^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n;\text{すべての }\boldsymbol{y}\in V\text{ に対して }\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0\}$$

は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間になることを示せ（これを V の**直交補空間**という）．

(b)　$V=\{(x_1,x_2,x_3)\in\boldsymbol{R}^3;\ 3x_1+x_2-x_3=0,\ x_1-5x_2+x_3=0\}$ の直交補空間 $V^{\perp}$ を求めよ．

解答　(a)　零ベクトル $\mathbf{0}$ はどんなベクトルとも直交するから $\mathbf{0}\in V$．よって $V^{\perp}$ は空でない．V のかってなベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in V^{\perp}\quad&\Longrightarrow\quad(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{y}=0\\\boldsymbol{x}\in V^{\perp},\lambda\in\boldsymbol{R}\quad&\Longrightarrow\quad(\lambda\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}=\lambda(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})=0\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\lambda\boldsymbol{x}\in V$ だから V は部分空間をなす．

(b)　同次連立1次方程式

$$\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=0\\x_1-5x_2+x_3=0\end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
3	1	−1
1	−5	1
1	−5	1
0	16	−4
1	0	−1/4
0	1	−1/4

を解くと，表から $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$．

よって，$(1,1,4)$ は V の基底であり，その直交補空間は

$$V^{\perp}=\{(x_1,x_2,x_3);\ x_1+x_2+4x_3=0\}$$

である．$V^{\perp}$ の基底を求めるために方程式 $x_1+x_2+4x_3=0$ を解くと

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}-4\\0\\1\end{bmatrix}$$

よって，$V^{\perp}$ の基底 $(-1,1,0),(-4,0,1)$ で生成される部分空間である．

注意　$(3,1,-1),(1,-5,1)$ も $V^{\perp}$ の基底である．

問　題

15.1　$\boldsymbol{R}^n=V\oplus V^{\perp}$ であることを示せ．

15.2　つぎのベクトルで生成される各部分空間 V の直交補空間 $V^{\perp}$ を求めよ．

(a)　$(1,0,-7)$

(b)　$(3,1,-1),(1,-5,1)$

(c)　$(1,0,-1,2),(-1,1,1,0)$