N. I. Alekseev, On steady flow of an incompressible viscous fluid admitting a triply orthogonal system of surfaces, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1959, Number 1, 3–8

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1959 МАТЕМАТИКА № 1(8)

Н. И. Алексеев

ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ДОПУСКАЮЩЕМ ТРИОРТОГОНАЛЬНУЮ СИСТЕМУ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Основные уравнения

Исследование геометрических свойств потока жидкости сводится к изучению векторного поля скоростей потока. С этой точки зрения решение указанных задач можно проводить средствами дифференциальной геометрии. В данной работе я ставлю задачу: изучить геометрическую структуру установившегося потока несжимаемой вязкой жидкости, поле скоростей которого допускает ортогональное семейство поверхностей с одним параметром, входящее в триортогональную систему. Известно, что у такого потока вихрь перпендикулярен скоростному вектору.

Обозначая через $\vec{v}$ вектор скорости, через $\vec{\omega}$ — вихрь скорости и через H — полный запас энергии частицы, т. е. полагая

$$2\vec{\omega} = \operatorname{rot}\vec{v},$$

$$H = \frac{1}{2}v^2 + u + \frac{p}{\rho},$$

где u — потенциал внешних сил, p — давление и ρ — плотность, напишем основные уравнения в следующей векторной форме:

$$\operatorname{grad} H = -2\vec{\omega} \times \vec{v} - 2\nu \operatorname{rot}\vec{\omega}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0, \tag{2}$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости. Присоединим к искомому потоку ортогональный триэдр единичных векторов $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$, $\vec{I}_3$. Элементарное перемещение триэдра определяется системой:

$$\begin{aligned} d\vec{M} &= \omega^1\vec{I}_1 + \omega^2\vec{I}_2 + \omega^3\vec{I}_3, \\ d\vec{I}_k &= \omega_k^1\vec{I}_1 + \omega_k^2\vec{I}_2 + \omega_k^3\vec{I}_3, \quad k = 1,\ 2,\ 3, \end{aligned} \tag{3}$$

где ω^i и ω_k^j — линейные дифференциальные формы, зависящие от трех параметров ξ, η, ζ. Так как триэдр ортогональный, то формы связаны условиями

$$\omega_k^j + \omega_j^k = 0.$$

Дифференцируя (3) внешним образом, получим уравнения структуры [1]

$$D\omega_k^j = [\omega_k^1 \omega_1^j] + [\omega_k^2 \omega_2^j] + [\omega_k^3 \omega_3^j]. \tag{4}$$

Из всех форм только три линейно независимы, например, ω^1, ω^2, ω^3. Остальные формы представим линейными комбинациями выбранных независимых форм

$$\begin{aligned} \omega_2^3 &= p = p_1\omega^1 + p_2\omega^2 + p_3\omega^3, \\ \omega_3^1 &= q = q_1\omega^1 + q_2\omega^2 + q_3\omega^3, \\ \omega_1^2 &= r = r_1\omega^1 + r_2\omega^2 + r_3\omega^3, \end{aligned} \tag{5}$$

где p_i, q_i, r_i — функции трех переменных ξ, η, ζ, подлежащие определению. Специализируем триэдр, положив

$$\vec{v} = v\vec{I}_3, \quad \vec{\omega} = \omega\vec{I}_2. \tag{6}$$

Вторичный вихрь разложим по направлениям триэдра

$$\operatorname{rot}\vec{\omega} = X^1\vec{I}_1 + X^2\vec{I}_2 + X^3\vec{I}_3. \tag{7}$$

Умножая (1) скалярно на произвольное смещение $d\vec{M}$ и принимая во внимание (6) и (7), получим уравнение Громеки в следующей форме:

$$dH = \omega\{(w + x_1)\,\omega^1 + x_2\omega^2 + x_3\omega^3\}, \tag{8}$$

где

$$H = -\frac{H}{2\nu}, \quad w = \frac{v}{\nu}, \quad x_i = \frac{x^i}{\omega}.$$

Для любого вектора

$$\vec{v} = v'\vec{I}_1 + v^2\vec{I}_2 + v^3\vec{I}_3,$$

как показал профессор С. С. Бюшгенс, справедливы равенства [2]

$$\begin{aligned} [\omega^1\omega^2\omega^3]\operatorname{div}\vec{v} &= [dv^1 - v^2r + v^3q,\ \omega^2\omega^3] + [dv^2 - v^3p + v^1r,\ \omega^3\omega^1] + \\ &+ [dv^3 - v^1q + v^2p,\ \omega^1\omega^2], \\ -[\omega^1\omega^2\omega^3]\operatorname{rot}\vec{v} &= \{[\omega^1\omega^2,\ dv^2 + v^1r - v^3p] + [\omega^1\omega^3,\ dv^3 + v^2p - v^1q]\}\vec{I}_1 + \\ &+ \{[\omega^2\omega^3,\ dv^3 + v^2p - v^1q] + [\omega^2\omega^1,\ dv^1 + v^3q - v^2r[\}\vec{I}_2 + \\ &+ \{[\omega^3\omega^1,\ dv^1 + v^3q - v^2r] + [\omega^3\omega^2,\ dv^2 + v^1r - v^3p]\}\vec{I}_3. \end{aligned} \tag{9}$$

Применяя эти формулы к вектору $\vec{v} = v\vec{I}_3$, получим при условиях (5) и (6) систему трилинейных соотношений

$$\begin{aligned} [d\ln w\omega^1\omega^2] &= (p_2 - q_1)\,[\omega^1\omega^2\omega^3], \\ [d\ln w\omega^?\omega^3] &= (q_3 - k)\,[\omega^1\omega^2\omega^3], \\ [d\ln w\omega^3\omega^1[&= -\,p_3\ [\omega^1\omega^2\omega^3] \end{aligned} \tag{10}$$

и конечное равенство

$$p_1 + q_2 = 0, \tag{11}$$

где $k = 2\,\frac{\omega}{v}$. Из системы (10) получим второе основное уравнение

$$d\ln w = (q_3 - k)\,\omega^1 - p_3\omega^2 + (p_2 - q_1)\,\omega^3. \tag{12}$$

Наряду с условием (2) выполняется тождество

$$\operatorname{div}\vec{\omega} = 0. \tag{13}$$

Применяя формулы (9) к вихревому вектору и используя (7) и (13), получим

$$\begin{aligned} [d\ln\omega\omega^1\omega^2] &= (p_2 - x_1)\,[\omega^1\omega^2\omega^3], \\ [d\ln\omega\omega^2\omega^3] &= -\,(r_2 - x_3)\,[\omega^1\omega^2\omega^3], \\ [d\ln\omega\omega^3\omega^1] &= (r_1 - p_3)\,[\omega^1\omega^2\omega^3] \end{aligned} \tag{14}$$

и конечное соотношение

$$x_2 = -(p_1 + r_3). \tag{15}$$

Из системы (14) находим

$$d \ln \omega = (x_3 - r_2)\,\omega^1 + (r_1 - p_3)\,\omega^2 + (p_2 - x_1)\,\omega^3. \tag{16}$$

Построенные уравнения (8), (12), (16), (11), (15), (5) определяют поток, поле скоростей которого допускает однопараметрическое семейство ортогональных поверхностей.

§ 2. Поток, допускающий триортогональную систему

Потребуем теперь, чтобы однопараметрическое семейство поверхностей, ортогональных полю скоростей, входило в триортогональную систему и чтобы поле вихрей имело однопараметрическое семейство ортогональных поверхностей, входящих в триортогональную систему. Итак, мы требуем, чтобы векторные поля $\{\vec{I_1}\}$, $\{\vec{I_2}\}$, $\{\vec{I_3}\}$ имели ортогональные семейства поверхностей, образующих триортогональную систему. Умножая первое уравнение системы (3) скалярно на $\vec{I_1}$, $\vec{I_2}$, $\vec{I_3}$, последовательно получим уравнения этих поверхностей

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0.$$

Эта система должна быть вполне интегрируемой, следовательно,

$$[D\omega^1\omega^1] = 0,$$
$$[D\omega^2\omega^2] = 0,$$
$$[D\omega^3\omega^3] = 0.$$

Развертывая эти соотношения с помощью (4) и (5), получим

$$p_1 = q_2 = r_3 = 0. \tag{17}$$

Из (15) при условии (17) находим

$$x_2 = 0.$$

Уравнения искомого потока примут вид:

$$\begin{aligned}
dH &= \omega\,\{(w + x_1)\,\omega^1 + x_3\omega^3\},\\
d \ln w &= (q_3 - k)\,\omega^1 - p_3\omega^2 + (p_2 - q_1)\,\omega^3,\\
d \ln \omega &= (x_3 - r_2)\,\omega^1 + (r_1 - p_3)\,\omega^2 + (p_2 - x_1)\,\omega^3,\\
p &= p_2\omega^2 + p_3\omega^3,\\
q &= q_1\omega^1 + q_3\omega^3,\\
r &= r_1\omega^1 + r_2\omega^2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Для исследования совместимости этой системы дифференцируем ее внешним образом и получим систему квадратичных уравнений:

$$\begin{aligned}
&[dx_1\omega^1] + [dx_3\omega^3] + (p_3x_1 + 2wp_3)\,[\omega^1\omega^2] + r_1x_3\,[\omega^2\omega^3] +\\
&\quad + \{2wp_2 + (q_1 + p_2 - w)\,x_1 + (r_2 + q_3)\,x_3 - x_1^2 - x_3^2\}\,[\omega^3\omega^1] = 0,\\
&[dx_3\omega^1] - [dx_1\omega^3] + [dr_1\omega^2] - [dr_2\omega^1] + [dp_2\omega^3] - [dp_3\omega^2] +\\
&\quad + (r_1x_3 - r_2p_3)\,[\omega^1\omega^2] + (r_1p_2 - p_3x_1)\,[\omega^2\omega^3] +\\
&\quad + \{q_1(x_3 - r_2) + q_3(p_2 - x_1)\}\,[\omega^3\omega^1] = 0,\\
&[dp_2\omega^3] - [dp_3\omega^2] - [dq_1\omega^3] + [dq_3\omega^1] + (r_1q_3 - r_2p_3)\,[\omega^1\omega^2] - q_1p_3\,[\omega^2\omega^3] +\\
&\quad + (kx_1 + p_2q_3 - 2kq_1)\,[\omega^3\omega^1] = 0,\\
&[dp_2\omega^2] + [dp_3\omega^3] + r_2(q_1 + p_2)\,[\omega^1\omega^2] + (p_2^2 + p_3^2 - r_2q_3)\,[\omega^2\omega^3] +\\
&\quad + q_3(r_1 + p_3)\,[\omega^3\omega^1] = 0,\\
&[dq_1\omega^1] + [dq_3\omega^3] + r_1(q_1 + p_2)\,[\omega^1\omega^2] + p_3(r_2 + q_3)\,[\omega^2\omega^3] +\\
&\quad + (q_1^2 + q_3^2 - r_1p_3)\,[\omega^3\omega^1] = 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$[dr_1\omega^1]+[dr_2\omega^2]+(r_1^2+r_2^2-q_1p_2)[\omega^1\omega^2]+p_2(r_2+q_3)[\omega^2\omega^3]+$$
$$+q_1(r_1+p_3)[\omega^3\omega^1]=0.$$

Формы ω^i_k, dH, $d\ln w$, $d\ln\omega$ определяются системой (18), а формы dp_i, dq_i, dr_i, dx_i — системой (19) с помощью леммы Картана. Но мы разложим их по независимым формам

$$\begin{aligned}
&dp_2=p_{21}\omega^1+p_{22}\omega^2+p_{23}\omega^3, && dp_3=p_{31}\omega^1+p_{32}\omega^2+p_{33}\omega^3,\\
&dq_1=q_{11}\omega^1+q_{12}\omega^2+q_{13}\omega^3, && dq_3=q_{31}\omega^1+q_{32}\omega^2+q_{33}\omega^3,\\
&dr_1=r_{11}\omega^1+r_{12}\omega^2+r_{13}\omega^3, && dr_2=r_{21}\omega^1+r_{22}\omega^2+r_{23}\omega^3,\\
&dx_1=x_{11}\omega^1+x_{12}\omega^2+x_{13}\omega^3, && dx_3=x_{31}\omega^1+x_{32}\omega^2+x_{33}\omega^3.
\end{aligned}\tag{20}$$

Подставляя эти разложения в систему (19), мы найдем ряд коэффициентов и одно конечное соотношение

$$p_3(x_1+w-q_1)-r_1(q_1+p_2)=0.\tag{21}$$

Рассмотрим случай, когда $p_3=0$. В этом случае будем иметь две возможности:

$$1)\ q_1+p_2=0,\quad 2)\ r_1=0.$$

Рассмотрим первую возможность, когда

$$q_1+p_2=0.$$

Умножая внешним образом на ω^2 четвертое уравнение системы (19), получим

$$r_1q_3=0.$$

Случай

$$r_1=0$$

приводит ко второй возможности, которая будет разобрана ниже. В случае

$$q_3=0$$

система (19) перепишется так:

$$\begin{gathered}
[dx_1\omega^1]+[dx_3\omega^3]+r_1x_3[\omega^2\omega^3]+\{2wp_2-wx_1+\\
+(r_2+q_3)x_3-x_1^2-x_3^2\}[\omega^3\omega^1]=0,\\
[dx_3\omega^1]-[dx_1\omega^3]+[dr_1\omega^2]-[dr_2\omega^1]+[dp_2\omega^3]+r_1x_3[\omega^1\omega^2]+\\
+r_1p_2[\omega^2\omega^3]+p_2(r_2-x_3)[\omega^3\omega^1]=0,\\
[dr_1\omega^1]+[dr_2\omega^2]+(r_1^2+r_2^2+p_2^2)[\omega^1\omega^2]+p_2r_2[\omega^2\omega^3]-r_1p_2[\omega^3\omega^1]=0,\\
2[dp_2\omega^3]+k(x_1+2p_2)[\omega^3\omega^1]=0,\\
[dp_2\omega^1]-p_2^2[\omega^3\omega^1]=0,\\
[dp_2\omega^2]+p_2^2[\omega^2\omega^3]=0.
\end{gathered}$$

Из последних трех уравнений находим

$$x_1=-2p_2,$$
$$dp_2=p_2^2\omega^3.$$

С помощью этих соотношений получим из первых трех уравнений

$$\begin{aligned}
&dx_3=(4wp_2-6p_2^2-x_3^2+r_2x_3)\omega^1-r_1x_3\omega^2+p_2x_3\omega^3,\\
&dr_1=r_{11}\omega^1+(r_{21}+r_1^2+r_2^2+p_2^2)\omega^2+r_1p_2\omega^3,\\
&dr_2=r_{21}\omega^1-(r_{11}+2r_1x_3)\omega^2+r_2p_2\omega^3.
\end{aligned}$$

Дифференцируя внешним образом эту линейную систему, получим из первого уравнения

$$p_2=0.$$

Полученное равенство вместе с предыдущими условиями дает

$$p=0,\ q=0.$$

Второе уравнение системы (3) при $k=3$ дает

$$d\vec{I}_3=0.$$

Следовательно, $\vec{I}_3=\text{const}=\vec{k}$, а значит

$$\vec{v}=v\vec{I}_3=v\vec{k}.$$

Итак, первая возможность приводит к прямолинейным параллельным потокам. Эти потоки, переносящие жидкость плоскими параллельными слоями или цилиндрическими слоями, разобраны мною в работе, которая напечатана в трудах МАИ [3].

Вторая возможность приводит систему (20) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
&dp_2=-r_2(q_1+p_2)\omega^1+(p_2^2-r_2q_3)\omega^3,\\
&dr_2=(q_1p_2-r_2^2)\omega^1+p_2(r_2+q_3)\omega^3,\\
&dp_1=q_{11}\omega^1+q_{13}\omega^3,\\
&dq_3=(q_{13}+q_1^2+q_3^2)\omega^1-\{q_{11}+r_2(q_1+p_2)+k(x_1-2q_1)+qp_{33})\omega^3,\\
&dx_1=x_{11}\omega^1+x_{13}\omega^3,\\
&dx_3=\{x_{13}+(q_1+p_2-w-x_1)x_1+(r_2+q_3-x_3)x_3+2wp_2\}\omega^1+\\
&\qquad+(q_3x_1-q_1x_3-x_{11})\omega^3.
\end{aligned}\tag{22}$$

Интегральный элемент ε_1 определяется системой (18) и (22) с произволом $t_1=4$ параметров q_{11}, q_{13}, x_{11}, x_{13} при $\omega^1=\omega^2=0$. Двухмерный интегральный элемент ε_2 определяется системой (18) и (22) при $\omega^1=0$ и, следовательно, $t_2=0$. Трехмерный интегральный элемент также определяется системой (18) и (22) и значит $t_3=0$. Характеры системы

$$s=8;\ s_1=t_1-t_2=4;\ s_2=t_2-t_3=0,\ s_3=t_3=0.$$

Следовательно, система (18) и первые два уравнения системы (22) находятся в инволюции. Интегральное многообразие трех измерений существует с произволом четырех функций одного аргумента.

§ 3. Геометрический анализ

Система (3) в рассматриваемом потоке примет вид:

$$\begin{aligned}
&d\vec{M}=\omega^1\vec{I}_1+\omega^2\vec{I}_2+\omega^3\vec{I}_3,\\
&d\vec{I}_1=r_2\omega^2\vec{I}_2-(q_1\omega^1+q_3\omega^3)\vec{I}_3,\\
&d\vec{I}_2=-\omega^2(r_2\vec{I}_1-p_2\vec{I}_2),\\
&d\vec{I}_3=(q_1\omega^1+q_3\omega^3)\vec{I}_1-p_2\omega^2\vec{I}_2.
\end{aligned}\tag{3}$$

Из третьего следует, что на каждой поверхности $\omega^2=0$ имеет место равенство

$$d\vec{I}_2=0,$$

а это значит, что на этой поверхности вихревой вектор $\vec{\omega}$ сохраняет направление. Следовательно, семейство поверхностей, ортогональных вихревому полю, есть однопараметрическое семейство плоскостей. Это семейство обязано содержать конгруенцию траекторий потока. Значит конгруенция траекторий есть конгруенция плоских линий.

Конгруенция линий, огибаемых полем $(\vec{I}_1)$, есть также конгруенция плоских кривых. Конгруенция траекторий определяется системой

$$\omega^1=\omega^2=0.$$

Вектор кривизны линий этой конгруенции получается из последнего уравнения системы (3)

$$\frac{\overrightarrow{dI_3}}{\omega^3} = q_3 \overrightarrow{I_1},$$

а значит кривизна этих линий $\frac{1}{R_3}$ определяется формулой

$$\frac{1}{R_3} = q_3.$$

Кривизна ортогональных траекторий

$$\omega^2 = \omega^3 = 0$$

получается из второго уравнения системы (3)

$$\frac{1}{R_1} = -q_1.$$

Следовательно, q_3 и q_1 — инварианты потока. Конгруенция вихревых линий определяется системой

$$\omega^1 = \omega^3 = 0.$$

Вектор кривизны линий этого семейства получаем из третьего уравнения системы (3)

$$\frac{\overrightarrow{dI_2}}{\omega^2} = -r_2 \overrightarrow{I_1} + p_2 \overrightarrow{I_3},$$

а кривизна выражается формулой

$$\frac{1}{R_2} = \sqrt{r_2^2 + p_2^2}.$$

Из первых двух уравнений системы (22) следует, что вдоль каждой вихревой линии имеем

$$dp_2 = 0, \; dr_2 = 0.$$

Значит вихревые линии суть линии постоянной кривизны. Единичный вектор бинормали вихревой линии определяется равенством

$$\vec{\beta} = \frac{p_2 \overrightarrow{I_1} + r_2 \overrightarrow{I_3}}{\sqrt{r_2^2 + p_2^2}}.$$

Полный дифференциал этого вектора будет

$$d\vec{\beta} = 0.$$

Следовательно, единичный вектор бинормали вихревой линии постоянный. Значит семейство плоскостей, перпендикулярных полю вихрей, есть пучок плоскостей, ось которого параллельна вектору $\vec{\beta}$, а конгруенция вихревых линий есть конгруенция окружностей с центрами на оси пучка. Очевидно семейство вихретоковых поверхностей $\omega^1 = 0$ и третье семейство триортогональной системы $\omega^3 = 0$ суть семейства поверхностей вращения около оси пучка плоскостей.

Из сказанного следует, что конгруенция траекторий потока есть конгруенция меридиан, а конгруенция вихревых линий есть конгруенция параллелей вихретоковых поверхностей вращения.

Московский авиационный институт
им. Серго Орджоникидзе

Поступило
3 III 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ОГИЗ, 1948.

2. С. С. Бюшгенс. Геометрия стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, 1948.

3. Н. И. Алексеев. Об установившемся потоке несжимаемой вязкой жидкости, допускающем семейство ортогональных плоскостей. Тр. МАИ, вып. 61, Гиз. оборон. пром., 1956.