V. A. Baidosov, Invariant functions of dynamical systems, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1959, Number 1, 9–15

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1959 МАТЕМАТИКА № 1 (8)

В. А. Байдосов

ИНВАРИАНТНЫЕ ФУНКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ВВЕДЕНИЕ

В работе [5] дается топологическое определение понятия q-мерного интегрального инварианта динамической системы. В этой работе q-мерный интегральный инвариант определялся как инвариантный гомоморфизм группы q-мерных особых цепей в топологическую группу. Если рассмотреть динамическую систему на группе q-мерных цепей, индуцированную данной динамической системой, то q-мерные интегральные инварианты превращаются в нульмерные. В некоторых случаях такой подход может оказаться целесообразным.

В данной статье мы изучаем свойства нульмерных интегральных инвариантов или, лучше сказать, инвариантных функций динамической системы. Легко заметить, что понятие инвариантной функции, то есть функции, принимающей постоянные значения вдоль траектории, является обобщением понятия первого интеграла динамической системы.

§ 1. Определение инвариантной функции

Динамической системой называется непрерывная коммутативная группа преобразований W топологического пространства R. Динамическая система обозначается символом (R, W). Пространство R мы полагаем метрическим и связным. Траекторию динамической системы, содержащую точку p, мы обозначаем через $I(p)$.

Непрерывное отображение f пространства R в коммутативную топологическую группу G назовем инвариантной функцией динамической системы (R, W) над группой G, если для всех $p \in R$ и $w \in W$ выполняется условие

$$f(wp) = f(p).$$

Это понятие совпадает с понятием инвариантного гомоморфизма, введенным Е. А. Барбашиным [1].

Инвариантную функцию назовем постоянной, если она отображает пространство R в одну точку.

Определим на множестве инвариантных функций над группой G групповую операцию:

$$(f_1 - f_2)(p) = f_1(p) - f_2(p).$$

Нетрудно убедиться, что при этом совокупность инвариантных функций образует группу, которую мы обозначим через $C_i^0(R, G)$. Точки p и q пространства R назовем отделимыми над группой G, если в $C_i^0(R, G)$ существует такая функция f, что

$$f(p) \neq f(q).$$

В противном случае будем говорить, что p и q неотделимы над G. Отношение неотделимости является отношением эквивалентности и разбивает пространство R на замкнутые инвариантные подмножества, которые мы будем называть i-классами динамической системы (R, W) над G. Полученное разбиение пространства обозначим Σ_G^i.

Будем в дальнейшем обозначать через I аддитивную группу действительных чисел.

Если точки p и q отделимы над некоторой группой G, то они отделимы и над группой I. Действительно, пусть

$$f \in C_i^0(R, G), \quad f(p) = g_1, \quad f(q) = g_2 \text{ и } g_1 \neq g_2.$$

На группе G существует действительная непрерывная функция φ^* такая, что $\varphi^*(g_1) \neq \varphi^*(g_2)$. Определим на R функцию φ:

$$\varphi(p) = \varphi^* f(p).$$

Очевидно, что $\varphi \in C_i^0(R, I)$ и $\varphi(p) \neq \varphi(q)$. Отсюда вытекает, что если две точки динамической системы неотделимы над группой I, то они неотделимы и над любой другой группой, и классы разбиения Σ_I^i содержатся в классах разбиения Σ_G^i, какова бы ни была группа G.

§ 2. Свободная абелева топологическая группа над пространством динамической системы

Будучи метрическим, пространство R вполне регулярно. Существует абелева топологическая группа, которую мы обозначим $C_0(R)$, обладающая следующими свойствами [2]:

1. R есть подпространство $C_0(R)$.
2. R топологически порождает $C_0(R)$,
3. Каково бы ни было непрерывное отображение φ пространства R в любую абелеву топологическую группу G, существует непрерывный гомоморфизм f группы $C_0(R)$ в G такой, что если $p \in R$, то $f(p) = \varphi(p)$.

Группа $C_0(R)$ называется свободной абелевой топологической группой пространства R. Пространство R замкнуто в $C_0(R)$. Элементы $C_0(R)$ записываются единственным образом в виде линейных форм от элементов (точек) из R.

Определим действие группы W на $C_0(R)$. Если $c \in C_0(R)$ и $c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$, то полагаем $wc = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w(p_i)$. Элементы группы $C_0(R)$ вида $wc - c$, где $w \in W$, $c \in C_0(R)$, алгебраически порождают резидуальную подгруппу $C_0^r(p)$ алгебраической группы $C_0(R)$ [3]. Замыкание $\overline{C_0^r(R)}$ будет подгруппой топологической группы $C_0(R)$.

Если φ — инвариантная функция на R со значениями в группе G, то ей соответствует непрерывный гомоморфизм f группы $C_0(R)$ в G, ядро которого содержит резидуальную подгруппу и, следовательно, ее замыкание.

Действительно, если $c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$, то

$$wc - c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (wp_i - p_i),$$

$$f(wc - c) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f(wp_i) - f(p_i)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\varphi(wp_i) - \varphi(p_i)) = 0.$$

Обратно, если ядро непрерывного гомоморфизма f группы $C_0(R$ в G содержит $C_0^r(R)$, то f на R является инвариантной функцией.

Поэтому инвариантная функция динамической системы (R, W) над группой G может быть определена как непрерывный гомоморфизм свободной группы $C_0(R)$ в G, ядро которого содержит резидуальную подгруппу.

Фактор-группу $C_0(R)/\overline{C_0^r(R)}$ мы будем обозначать через H. Если A и B — топологические группы, то символом Hom (A, B) обозначим группу непрерывных гомоморфизмов A и B. Через ψ мы всюду будем обозначать естественное отображение $C_0(R)$ на H.

Теорема 2.1. *Группа инвариантных функций $C_l^0(R, G)$ алгебраически изоморфна группе* Hom (H, G), *причем соответствие устанавливается формулой*

$$f = \varphi \cdot \psi,$$

где $f \in C_l^0(R, G)$, $\varphi \in \mathrm{Hom}\ (H, G)$.

Доказательство. Если $\varphi \in \mathrm{Hom}\ (H, G)$, то функция $f = \varphi \cdot \psi$ будет, очевидно, непрерывным гомоморфизмом группы $C_0(R)$ в G. Причем $f(\overline{C_0^r(R)}) = 0$. Следовательно, f — инвариантная функция. Обратно, если f — инвариантная функция, то из $\psi(c_1) = \psi(c_2)$ следует, что $f(c_1) = f(c_2)$. Определим на H функцию φ следующим образом: $\varphi(\psi(c)) = f(c)$. Очевидно, что φ есть гомоморфизм H в G. Непрерывность φ следует из непрерывности f и открытости ψ. Нетрудно видеть, что установленное соответствие является изоморфизмом.

Следствие 1. *Естественное отображение ψ порождает разбиение пространства R, совпадающее с Σ_I^i.*

Доказательство. Пусть точки p и q пространства R неотделимы над группой I. Следовательно, они неотделимы и над группой H, как это показано в предыдущем параграфе. Но это означает, что $\psi(p) = \psi(q)$, ибо ψ можно рассматривать как инвариантную функцию над группой H. Обратно, если $\psi(p) = \psi(q)$, то p и q неотделимы над группой I, в силу теоремы 2.1.

Следствие 2. *Для того, чтобы динамическая система допускала только постоянные инвариантные функции, необходимо и достаточно, чтобы фактор-группа H была бесконечной циклической.*

Доказательство. Если система допускает лишь постоянные инвариантные функции, то отображение ψ переводит R в один элемент группы H.

Пусть $\psi(R) = h$. Если $c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$, где $p_i \in R$, а α_i — целочисленные коэффициенты, то $\psi(c) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(p_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \cdot h$. Значит, группа H алгебраически порождается элементом h. Обратно, если H — циклическая группа, то, в силу связности пространства R, его образ $\psi(R)$ также связен и поэтому совпадает с одним элементом группы H. Следовательно, все инвариантные функции динамической системы постоянны.

Обозначим через R^* образ пространства R при отображении ψ. Отображение R на R^* будем обозначать через ψ^*, оно, очевидно, будет непрерывно. В топологии, индуцируемой топологией H, R^* вполне регулярно. Если φ — произвольная действительная функция на R^*, то она определяет инвариантную функцию f^* на R:

$$f^*(p) = \varphi(\psi^*(p)).$$

Лемма 2.1. *Если* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i = 0$, *где все* h_i *попарно различные элементы из* R^*, *то* $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$ и $h_i = \psi(p_i)$. Рассмотрим элемент $c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$. Так как $\psi(c) = 0$, то $c \in \overline{C_0^r(R)}$. Определим теперь на R^* непрерывную действительную функцию φ такую, что $\varphi(h_1) = 1$, $\varphi(h_i) = 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. На R рассмотрим инвариантную функцию f^*:

$$f^*(p) = \varphi(\psi^*(p)),$$

которой соответствует непрерывный гомоморфизм f:

$$f\left(\sum \alpha_i p_i\right) = \sum \alpha_i f^*(p_i).$$

Мы получим

$$f(c) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\psi(p_i)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(h_i) = \alpha_1 \neq 0,$$

что противоречит условию

$$c \in \overline{C_0^r(R)}.$$

Теорема 2.2. *Фактор-группа H есть свободная абелева топологическая группа со свободным базисом R^*.*

Доказательство. Действительно, R^* есть подпространство H. R^* топологически порождает H, ибо, если бы R^* содержалось в подгруппе A группы H, то R топологически порождало бы собственную подгруппу $\psi^{-1}(A)$ группы $C_0(R)$. Пусть, наконец, φ^* есть непрерывное отображение пространства R^* в абелеву топологическую группу G. Заметим, что, в силу леммы 2.1, каждый элемент h группы H однозначно представим в виде линейной комбинации элементов из R^*. Если $h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$, где $h_i \in R^*$, то полагаем $\varphi(h) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi^*(h_i)$. Отображение φ будет однозначным. Нетрудно установить и его непрерывность.

Отсюда вытекает справедливость теоремы [2].

Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 2.2. *Пусть* $c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i(p_0)$. *Для того, чтобы элемент c был резидуальным, необходимо и достаточно, чтобы* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$.

Доказательство. Так как резидуальные элементы порождаются элементами вида $wc' - c'$, где $c' \in C_0(R)$, то сумма коэффициентов при элементах из R у всякого резидуального элемента равна, очевидно, нулю. Обратно, пусть $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$.

Отсюда $\alpha_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$,

$$c = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i w_i(p_0) + \alpha_n w_n(p_0) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i w_i(p_0) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i w_n(p_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i [w_i(p_0) - w_n(p_0)] \in C_0^r(R).$$

Пусть $c = c_1 + c_2 + \cdots + c_k$, где $c_j = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_i^j w_i^j(p_j)$, причем p_{j_1} и p_{j_2} принадлежат различным траекториям при $j_1 \neq j_2$. Подобное представление элемента c мы назовем разложением c по траекториям.

Лемма 2.3. ***Для того, чтобы элемент c был резидуальным, необходимо и достаточно, чтобы каждое слагаемое в разложении c по траекториям было резидуальным.***

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Докажем необходимость. Группа $C_0^r(R)$ порождается элементами вида $wc - c$. Если $c = \sum_{i=1}^{n} c_i$ — разложение c по траекториям, то

$$wc - c = \sum_{i=1}^{n} (wc_i - c_i)'$$

— разложение $wc - c$ по траекториям. Так что для элементов вида $wc - c$ лемма справедлива. А отсюда без труда вытекает ее справедливость для всех резидуальных элементов.

Теорема 2.3. ***Замкнутость резидуальной подгруппы $C_0^r(R)$ в группе $C_0(R)$ есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы каждые две точки из R, не лежащие на одной траектории, были отделимы над группой действительных чисел I.***

Доказательство. Пусть $c \in \overline{C_0^r(R)}$ и $c = c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ — разложение c по траекториям, где $c_j = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_i^j w_i^j(p_j)$ $(j = 1, \ldots, k)$. Если точки, не принадлежащие одной траектории, отделимы над группой I, то $\psi(p_{j_1}) \neq \psi(p_{j_2})$ при $j_1 \neq j_2$. Пусть $\psi(p_j) = h_j$. Так как элемент c не резидуален, то по крайней мере одно из слагаемых $c_j (j = 1, 2, \ldots, k)$ не резидуально, в силу леммы 2.3. Допустим, что не резидуально c_1. Заметим, что при этом, согласно лемме 2.2, $\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i^1 \neq 0$. Так как пространство фактор-группы $H = C_0(R) / \overline{C_0^r(R)}$ вполне регулярно, то на H существует непрерывная действительная функция φ такая, что $\varphi(h_1) = 1$, $\varphi(h_j) = 0$ $(j = 2, 3, \ldots, k)$.

Определим на R функцию f^*:

$$f^*(p) = \varphi(\psi(p)).$$

На $C_0(R)$ определим непрерывный гомоморфизм f:

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^*(p_i),$$

f^* — инвариантная функция. Действительно,

$$f^*(wp) = \varphi(\psi(wp)) = \varphi(\psi(p)) = f^*(p).$$

Следовательно, $f(\overline{C_0^r(R)}) = 0$,

$$f(c) = f\Big(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_i^j w_i^j(p_j)\Big) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_i^j f^*(p_j) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i^1 \neq 0.$$

Отсюда следует, что $c \bar{\in} \overline{C_0^r(R)}$. Итак, $\overline{C_0^r(R)} = C_0^r(R)$. Допустим теперь, что $C_0^r(R)$ замкнута. Если p и q принадлежат различным траекториям, то $p - q \bar{\in} C_0^r(R)$, в силу леммы 2.3. Поэтому $\psi(p) \neq \psi(q)$, что эквивалентно отделимости точек p и q над группой I. Теорема доказана.

§ 3. Пространство траекторий динамической системы

Так как значения инвариантной функции совпадают на всех точках данной траектории, то инвариантная функция есть функция, заданная на множестве траекторий динамической системы. Всюду в данном параграфе мы будем считать, что пространство R динамической системы (R, W) обладает счетным базисом. Множество траекторий динамической системы мы обозначим через Σ. Множество A траекторий из Σ будем считать открытым в Σ тогда и только тогда, когда A открыто в R. При этом Σ превращается в топологическое пространство. Обозначим через ξ отображение пространства R на Σ, ставящее в соответствие каждой точке p из R траекторию $I(p)$, содержащую эту точку. Отображение ξ будет, очевидно, непрерывным и открытым. При этом, так как R имеет счетный базис, пространство Σ также будет обладать счетным базисом.

Если φ — непрерывное отображение пространства Σ в группу G, то функция f, определяемая равенством $f=\varphi\cdot\xi$, будет инвариантной функцией динамической системы (R, W) над группой G. Обратно, если f — инвариантная функция над группой G, то существует такое непрерывное отображение φ пространства Σ в G, что $f=\varphi\cdot\xi$. Справедливость этого факта очевидна. Поэтому изучение инвариантных функций динамической системы может быть также сведено к изучению непрерывных отображений пространства Σ в заданную группу.

В общем случае точки пространства Σ не являются замкнутыми множествами и это связано с наличием незамкнутых траекторий в динамической системе. Действительно, если траектория $I(p)$, замкнута в Σ, то ее полный прообраз замкнут в R. Если все траектории динамической системы являются замкнутыми множествами то пространство Σ принадлежит к классу T_1. Пространство Σ принадлежит к классу T_2, то есть является хаусдорфовым, если для любых двух различных траекторий $I(p_1)$ и $I(p_2)$ существуют такие непересекающиеся окрестности V_1 и V_2 в Σ, что $I(p_1)\in V_1$, $I(p_2)\in V_2$.

Лемма 3.1. *Для того, чтобы пространство траекторий Σ было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух точек p_1 и p_2 из R, не принадлежащих одной траектории, существовали такие окрестности $U_1(p_1)$ и $U_2(p_2)$, что*

$$U_1(p_1)\cap w\,U_2(p_2)=0$$

для всех $w\in W$.

Доказательство. Если Σ хаусдорфово, то в Σ существуют непересекающиеся окрестности V_1 и V_2 траекторий $I(p_1)$ и $I(p_2)$. Пусть $U_1=\xi^{-1}(V_1)$, $U_2=\xi^{-1}(V_2)$. Очевидно, что U_1 и U_2 удовлетворяют условиям леммы. Обратно, пусть $I(p_1)$ и $I(p_2)$ — различные траектории, а $U_1(p_1)$ и $U_2(p_2)$ — такие окрестности точек p_1 и p_2 в R, что $U_1\cap wU_2=0$ для всех $w\in W$. Пусть $A_1=\bigcup\limits_{w\in W} wU_1$, $A_2=\bigcup\limits_{w\in W} wU_2$. Пересечение $U_1\cap A_2$ пусто. Но тогда, в силу инвариантности, A_2 будет пусто и пересечение $A_1\cap A_2$. A_1 и A_2 — открытые множества. $\xi(A_1)$ и $\xi(A_2)$ являются непересекающимися окрестностями траекторий $I(p_1)$ и $I(p_2)$ в Σ.

Существуют динамические системы, пространство траекторий которых принадлежит классу T_1, но не является хаусдорфовым. Примером может служить динамическая система, заданная уравнениями (см. [4], стр. 39—40):

$$\frac{dx}{dt}=\sin x;\quad \frac{dy}{dt}=\cos^2 y.$$

Траекториями системы являются кривые $x+c=\frac{1}{\cos y}$ и прямые

$$y=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\ \pm 1,\ldots).$$

Нетрудно видеть, что, например, траектории $y=\frac{\pi}{2}$ и $y=-\frac{\pi}{2}$ неотделимы в пространстве Σ непересекающимися окрестностями.

Заметим, что для отделимости двух точек p_1 и p_2 инвариантной функцией необходимо, чтобы траектории $I(p_1)$ и $I(p_2)$ были отделимы в Σ непересекающимися окрестностями. Это непосредственно следует из непрерывности отображения ξ. Значит, если Σ не является хаусдорфовым пространством, то динамическая система имеет траектории, не отделимые инвариантной функцией.

Теорема 3.1 . *Если пространство траекторий Σ хаусдорфово, то оно нормально.*

Доказательство. Достаточно показать, что Σ регулярно, так как регулярное пространство со счетным базисом нормально. Рассмотрим в Σ замкнутое подмножество A^* и не принадлежащую ему траекторию $I(p)$. Пусть $A=\xi^{-1}(A^*)$. В R существует окрестность U точки p с бикомпактным замыканием такая, что $A\cap\overline{U}=0$. Пусть $V_1=\Sigma\setminus\xi(\overline{U})$ и $V_2=\xi(U)$. В силу бикомпактности $\overline{U}$ и непрерывности отображения ξ, $\xi(\overline{U})$ — замкнутое множество, поэтому V_1 является открытым множеством и содержит A^*. Так как ξ — открытое отображение, то V_2 является открытым множеством и содержит $I(p)$, причем $V_1\cap V_2=0$. Отсюда следует, что Σ — регулярное пространство.

Теорема 3.2. *Для того, чтобы каждые две точки p_1 и p_2, не принадлежащие одной траектории динамической системы (R, W), были отделимы инвариантной функцией над группой действительных чисел, необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары таких точек существовали окрестности $U_1(p_1)$ и $U_2(p_2)$ такие, что*

$$U_1\cap wU_2=0$$

для всех $w\in W$.

Доказательство. Пусть каждые две точки из R, не лежащие на одной траектории, отделимы инвариантной функцией. Это означает, что для каждых двух точек пространства Σ существует действительная непрерывная функция, принимающая на них различные значения. Следовательно, пространство Σ будет хаусдорфовым и необходимость следует из леммы 3.1. Обратно, если условие теоремы выполняется, то Σ будет хаусдорфовым и, следовательно, нормальным пространством. Но для каждой пары точек нормального пространства существует непрерывная функция, принимающая в этих точках различные значения. Отсюда вытекает достаточность условия теоремы.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
29 III 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Барбашин. О гомоморфизмах динамических систем. I. Мат. сб., т. 27 (69): 3, стр. 455—470, 1950.

2. А. А. Марков. О свободных топологических группах. Изв. АН СССР, т. 9, № 1, стр. 3—64, 1945.

3. S. Eilenberg. Homology of spaces with operators I. Trans of the Americ. Math. soc., v. 63, № 3, p. 378, 1947.

4. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., 1949.

5. Е. А. Барбашин, В. А. Байдосов. К вопросу о топологическом определении интегральных инвариантов. Изв. вузов МВО, Мат-ка, № 3, стр. 8—12, 1958.